Astérisque

M. R. HERMAN

Sur les mesures invariantes

Astérisque, tome 40 (1976), p. 103-104

<http://www.numdam.org/item?id=AST_1976__40__103_0>

© Société mathématique de France, 1976, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la collection « Astérisque » (http://smf4.emath.fr/Publications/Asterisque/) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (http://www.numdam.org/conditions). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
http://www.numdam.org/

Société Mathématique de France
Astérisque 40 (1976) p.103-104

SUR LES MESURES INVARIANTES

M. R. Herman

Construction d'un homéomorphisme PL du cercle

On se donne $\lambda > 1$.

Soit f l'homéomorphisme PL de $[0,1]$ défini par

$$\begin{cases} \tilde{f}(x) = \lambda x & 0 \leq x \leq a \\ \tilde{f}(x) = \frac{1}{\lambda}(x-1) + 1 & a \leq x \leq 1 \end{cases}$$

avec $\lambda a = \frac{1}{\lambda}(a-1) + 1$.

On définit $\tilde{f}:\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ par

$$\tilde{f}(x+n) = \tilde{f}(x) + n \quad \text{si } n \in \mathbb{Z} \text{ et } x \in [0,1] .$$

Soit pour $b \in \mathbb{R}$ fixé, l'homéomorphisme PL

$$\tilde{f}_b(x) = \tilde{f}(x) + b \qquad x \in R .$$

Soit $T^1 = \mathbb{R}/\mathbb{Z}$. Par passage au quotient de $\tilde{f}_b$ on a l'homéomorphisme PL de T^1 f_b .

Remarquons que f_b et f_b^{-1} laissent invariant l'ensemble des ensembles de Haar nulle sur T^1 .

Nombre de rotation de f_b

On montre que $\lim_{n \to +\infty} \frac{\tilde{f}_b^{on}(0)}{n} = \rho(\tilde{f}_b)$ existe et dépend continuement de b , de plus on a $\rho(\tilde{f}_{b+1}) = \rho(\tilde{f}_b) + 1$.

On pose $\rho(f_b) = \rho(\tilde{f}_b) \mod(1)$.

Soit b tel que $\rho(f_b) = \alpha \in T^1 - Q/\mathbb{Z}$, alors on a le :

Théorème.

1) f_b *est topologiquement conjugué sur* T^1 *à la translation* $R_\alpha : x \to x+\alpha$.

2) f_b *n'a pas de mesure* σ *finie (non nulle) invariante et absolument continue par rapport à la mesure de Haar.*

On trouvera la démonstration dans M.R. Herman "Sur la conjugaison différentiable des difféomorphismes du cercle à des rotations". La partie 1) est le théorème de A. Denjoy.
Le premier exemple de 2) (non continue) à été donné par D. Ornstein, puis un exemple a été donné par A. Brunel.

Remarque:

Si μ est l'unique mesure de probabilité invariante par f_b alors μ est étrangère à la mesure de Haar; de plus, si on écrit $f_b = h^{-1} \circ R_\alpha \circ h$, on a $Dh \underset{p.p.}{=} Dh^{-1} \underset{p.p.}{=} 0$.

Problème:

Est-ce que f_b est ergodique par rapport à la mesure de Haar m au sens suivant : si A est m-mesurable et si $f_b(A)=A$ p.p., alors $m(A) = 0$ ou 1 ?

Centre de Mathématiques
de l'Ecole Polytechnique
Plateau de Palaiseau
91120 Palaiseau