HANS GRAUERT

Über die Deformation von Pseudogruppenstrukturen

Astérisque, tome 32-33 (1976), p. 141-150
<http://www.numdam.org/item?id=AST_1976__32-33__141_0>

Société Mathématique de France
Astérisque 32-33 (1976)

Über die Deformation von Pseudogruppenstrukturen

von

Hans Grauert

in Göttingen

1. Einleitung. Es seien Y,X,B komplexe Räume (eventuell mit nilpotenten Elementen), Y sei kompakt, $0 \in B$ ein fest vorgegebener Aufpunkt (base point). Ferner sei $\pi : X \to B$ eine platte eigentliche holomorphe Abbildung. Die Garbe der Keime holomorpher Funktionen auf B, die in einem festen Punkte $t \in B$ eine Nullstelle haben, sei mit $\underline{m}_t$ bezeichnet. Es sei $\underline{H}(X)$ die Strukturgarbe von X und $\hat{\underline{m}}_t \in \underline{H}(X)$ die kohärente Idealgarbe, die durch Liftung der Keime von $\underline{m}_t$ nach $\underline{H}(X)$ entsteht. Wir bezeichnen dann $\pi^{-1}(t)$ mit X_t und versehen X_t mit der Strukturgarbe $\underline{H}(X)/\hat{\underline{m}}_t|X_t$. Die analytische Menge X_t wird dadurch zu einem kompakten komplexen Raum. Er heißt die Faser von π über t. Ist nun noch $X_0 = Y$, so wird (X,π) eine holomorphe Deformation von Y genannt.

Wir betrachten einen weiteren komplexen Raum B', der mit einem Aufpunkt $0' \in B'$ versehen ist. Es sei $\phi : B' \to B$, $0' \to 0$ eine holomorphe Abbildung. Durch Bildung des Faserproduktes läßt sich dann die Familie $\pi : X \to B$ nach B' zu einer Familie $\pi' : X' \to B'$ liften. Die Abbildung π' ist wieder eigentlich, platt, holomorph. Man hat $\pi'^{-1}(0) = Y$, so daß (X',π') wieder eine holomorphe Deformation von Y ist.

Wir nennen (X,π) vollständig in O, wenn jede andere holomorphe Deformation von X_O in der Nähe des Aufpunktes durch Liften zu erhalten ist. Diese Eigenschaft definieren wir für jeden anderen Punkt $t \in B$ genauso. Ferner nennen wir (X,π) in $t \in B$ versell, wenn (X,π) in t vollständig ist und außerdem stets das totale Differential der Liftungsabbildung ϕ im Aufpunkt von B' eindeutig bestimmt ist.

Holomorphe Deformationen von Y, die in O vollständig sind, enthalten also jede andere holomorphe Deformation von Y (lokal gesehen). Man kann leicht zeigen, daß eine in O verselle Deformation von Y bis auf eine naheliegende Isomorphie in der Nähe von O eindeutig bestimmt ist.

Die Existenz von versellen Deformationen von Y wurde für den Sonderfall, daß Y eine kompakte komplexe Mannigfaltigkeit ist, zuerst von Kuranishi [6] gezeigt. In diesem Fall ist ebenfalls X_t eine kompakte komplexe Mannigfaltigkeit, wenn t aus einer Umgebung $U(O) \in B$ ist. Im allgemeinen Fall wurde der Existenzbeweis von Douady [2], Forster und Knorr [3], Palamadov [7] und Grauert [4] unabhängig voneinander durchgeführt.

2. Beweisidee. Im folgenden gebe ich in groben Zügen meine Beweisidee, da sie für die Definition der Pseudogruppenstrukturen wesentlich ist. Wir stellen von dem komplexen Raum Y zunächst eine Aufbereitung her: Wir zerschneiden ihn in kleine Teile und gewinnen

durch Verkleben der Teile Y zurück. Indem die Teile deformiert und wieder verklebt werden, erhalten wir sodann die Deformation von Y.

Eine Aufbereitung ist ein System $S = (U_\iota, \Phi_\iota, Q_\iota, \underline{\underline{f}}_\iota, \underline{\underline{G}}_\iota, T_{\iota_1\iota_2}, H_{\iota_1\iota_2})$, wobei die Indizes von $1,\ldots,\iota_*$ laufen. Dabei sind:

1) $\underline{\underline{U}} = \{U_\iota\}$ eine offene Überdeckung von Y;
2) $Q_\iota \subset \mathbb{C}^N$ offene Quader;
3) $\Phi_\iota : U_\iota \xrightarrow{\sim} Y_\iota \subset Q_\iota$ biholomorphe Abbildungen auf komplexe Unterräume Y_ι von Q_ι;
4) $\underline{\underline{f}}_\iota = \begin{pmatrix} f_1^{(\iota)} \\ \vdots \\ f_m^{(\iota)} \end{pmatrix}$ sind m-tupel von beschränkten holomorphen Funktionen in Q_ι. Die Komponenten $f_i^{(\iota)}$ erzeugen gerade die die Idealgarbe von Y_ι;
5) $\underline{\underline{G}}_\iota = \begin{pmatrix} \underline{\underline{g}}_1^{(\iota)} \\ \vdots \\ \underline{\underline{g}}_l^{(\iota)} \end{pmatrix}$ sind beschränkte holomorphe (l,m)-Matrizen über Q_ι. Die Zeilen $\underline{\underline{g}}_i^{(\iota)}$ erzeugen gerade die Relationengarbe von $\underline{\underline{f}}_\iota$;
6) Es sind $T_{\iota_1\iota_2} \subset Q_{\iota_1\iota_2}$ offene Teilbereiche mit $\Phi_{\iota_2}(U_{\iota_1\iota_2}) = Y_{\iota_2} \cap T_{\iota_1\iota_2}$;
7) $H_{\iota_1\iota_2} : T_{\iota_1\iota_2} \to T_{\iota_2\iota_1}$ sind biholomorphe Abbildungen mit $Y_{\iota_2} \cap T_{\iota_1\iota_2} \to Y_{\iota_1} \cap T_{\iota_2\iota_1}$ gleich $\Phi_{\iota_1} \circ \Phi_{\iota_2}^{-1}$, so daß durch die Verklebung von Q_{ι_2} mit Q_{ι_1} ein Hausdorffraum entsteht.

Eine "kleine" Deformation wird sodann durch ein Tripel $(\tilde{\underline{\underline{f}}}_\iota, \tilde{\underline{\underline{G}}}_\iota, \tilde{H}_{\iota_1\iota_2})$ gegeben, bei dem $\tilde{\underline{\underline{f}}}_\iota$ m-tupel holomorpher Funktionen in Q_ι in der Nähe von $\underline{\underline{f}}_\iota$, $\tilde{\underline{\underline{G}}}_\iota$ holomorphe (l,m)-Matrizen über Q_ι in der Nähe von $\underline{\underline{G}}_\iota$ mit $\tilde{\underline{\underline{G}}}_\iota \circ \tilde{\underline{\underline{f}}}_\iota = 0$ und $\tilde{H}_{\iota_1\iota_2} : T_{\iota_1\iota_2} \to \mathbb{C}^N$ holomorphe Abbildungen in der Nähe von $H_{\iota_1\iota_2}$ sind, die $T'_{\iota_1\iota_2} \to T_{\iota_2\iota_1}$ und $T'_{\iota_1\iota_2} \cap \tilde{Y}_{\iota_2}$ in $\tilde{Y}_{\iota_1}$ abbilden. Dabei ist $\tilde{Y}_\iota$ der von $\tilde{\underline{\underline{f}}}_\iota$ definierte komplexe Unterraum von Q_ι und $T'_{\iota_1\iota_2} \subset T_{\iota_1\iota_2}$ bezeichnet einen festen wenig von $T_{\iota_1\iota_2}$ verschiedenen Teilbereich.

Die Menge aller "kleinen" Deformationen bildet nun einen banach-analytischen Raum $\underline{\underline{B}}$. Durch Verkleben aller $\tilde{Y}_\iota$ mittels $\tilde{H}_{\iota_1\iota_2}$ (nach einer Verkleinerung von $\tilde{Y}_\iota$) erhält man sodann zu jedem Punkt von $\underline{\underline{B}}$ einen kompakten komplexen Raum und sogar eine Familie $\pi : \underline{\underline{X}} \to \underline{\underline{B}}$. Die $\underline{\underline{G}}_\iota$ sorgen dabei für die Plattheit. Die verselle Deformation ist dann eine endlich dimensionale Unterfamilie von $\underline{\underline{X}} \to \underline{\underline{B}}$, wobei die Aufbereitung allerdings geeignet zu wählen ist.

3. Pseudogruppenstrukturen. Im folgenden soll eine natürlich vorerst nur vorläufige Idee gegeben werden, wie Pseudogruppenstrukturen auf komplexen Räumen zu definieren sind, so daß eine Deformationstheorie möglich ist. Es sei eine Aufbereitung von Y vorgegeben.

1) $\underline{O}$ bezeichne die Strukturgarbe des $\mathbb{C}^N$ und $\underline{F}_\iota \subset m\,\underline{O} = \underline{O} \oplus \dots \oplus \underline{O}$ eine banach-analytische Untergarbe über Q_ι. Diese Garben brauchen nicht analytische Untergarben zu sein und sind durch folgende Eigenschaften charakterisiert: Ist $U \subset Q_\iota$ eine offene Teilmenge, so ist die Menge der beschränkten Schnitte

$\Gamma_b(U,\underline{F}_\iota) \subset \Gamma_b(U, m\,\underline{O}) \cap K(\underline{\underline{f}}_\iota|U)$ stets eine banach-analytische Untermenge. Dabei bezeichnet $K(\underline{\underline{f}}_\iota|U) \subset \Gamma_b(U,m\,\underline{O})$ eine offene Umgebung von $\underline{\underline{f}}_\iota|U$ und in der Norm von $\Gamma_b(U,m\,\underline{O})$ dürfen endlich viele Ableitungen eingehen.

Die Garben $\underline{F}_\iota$ müssen sodann noch folgende Eigenschaften haben:

a) $\underline{\underline{f}}_\iota \in \Gamma_b\,(Q_\iota, \underline{F}_\iota)$

b) Ist $U \subset Q_\iota$ offen, A eine holomorphe invertierbare (m,m)-Matrix über U, so ist $A \circ (\underline{F}_\iota|U) \subset \underline{F}_\iota|U$.

c) Es gibt eine banach-analytische Untergarbe $\hat{\underline{\underline{G}}}_\iota \subset \underline{F}_\iota \oplus \mathrm{lm}\,\underline{O}$ mit $(\underline{\underline{f}}_\iota, \breve{\underline{\underline{G}}}_\iota) \in \Gamma(Q_\iota, \hat{\underline{\underline{G}}}_\iota)$, so daß für jedes $\underline{\underline{f}} \in \Gamma(U,\underline{F}_\iota)$ die Garbe $\hat{\underline{\underline{G}}}_{\underline{\underline{f}}} = \{\sigma \in \mathrm{lm}\,\underline{O}_{\underline{\underline{z}}} : (\underline{\underline{f}},\sigma) \in \hat{\underline{\underline{G}}}_\iota \ , \ \underline{\underline{z}} \in U\}$ analytisch und kohärent ist und $\sigma \circ \underline{\underline{f}} = 0$ gilt für $\sigma \in \hat{\underline{\underline{G}}}_{\underline{\underline{f}}}$. (Untergarbe der Relationen).

2) Wir bezeichnen mit $\underline{P}$ über dem $\mathbb{C}^N$ die Garbe der Keime lokal-umkehrbarer lokaler holomorpher Abbildungen in den $\mathbb{C}^N$. Für jedes ι sei $\underline{J}_\iota \subset \underline{F}_\iota \oplus \underline{P}$ eine banach-analytische Untergarbe, so daß folgendes gilt:

a) Ist $\underline{\underline{f}} \in \Gamma(U,\underline{F}_\iota)$, $U \subset Q_\iota$ so liegt $(\underline{\underline{f}},\mathrm{id})$ in $\Gamma(U,\underline{J}_\iota)$.

b) In Garben $J_{\iota\underline{\underline{f}}} = \{\sigma \in P_{\underline{\underline{z}}} : (\underline{\underline{f}},\sigma) \in \underline{J}_\iota,\ \underline{\underline{z}} \in U\} \subset \underline{P}|U$ sind Untergarben von Pseudogruppen: sie können durch ein Garbendatum von Pseudogruppen definiert werden.

c) $\underline{J}_{\iota\underline{\underline{f}}}$ ändert sich nicht, wenn man $\underline{\underline{f}}$ mit einer invertierbaren holomorphen (m,m)-Matrix über U multipliziert.

d) Ist $F \in \Gamma(U,\underline{J}_{\iota\underline{\underline{f}}})$ injektiv, so folgt $\underline{\underline{f}} \circ F \in \Gamma(Q_\iota \cap F^{-1}(U),\underline{F}_\iota)$

e) es ist $\underline{J}_{\iota\underline{\underline{f}}\circ F^{-1}} = F \circ \underline{J}_{\iota\underline{\underline{f}}} \circ F^{-1}$ in der Nähe der Identität.

3) Es seien banach-analytische Untergarben $\underline{H}_{\iota_1\iota_2} \subset \underline{F}_{\iota_2} \oplus \underline{P}|T_{\iota_1\iota_2}$ mit folgenden Eigenschaften gegeben

a) $(\underline{\underline{f}}_{\iota_2}, H_{\iota_1\iota_2}) \in \Gamma(T_{\iota_1\iota_2}, \underline{\underline{H}}_{\iota_1\iota_2})$

b) Die Garben $\underline{H}_{\iota_1\iota_2\,\underline{\underline{f}}} = \{\sigma \in P_{\underline{\underline{z}}} : (\underline{\underline{f}},\sigma) \in \underline{H}_{\iota_1\iota_2}, \underline{\underline{z}} \in U\}$ für $U \subset T_{\iota_1\iota_2}$ enthalten Schnittflächen H über U und ändern sich nicht, wenn man $\underline{\underline{f}}$ mit einer invertierbaren holomorphen (m,m)-Matrix über U multipliziert. Strebt $\underline{\underline{f}}$ gegen $\underline{\underline{f}}_{\iota_2}|U$ so möge man ferner die Schnittflächen H so wählen können, daß sie gegen $H_{\iota_1\iota_2}$ streben.

c) Es sei $H \in \Gamma(U,\underline{H}_{\iota_1\iota_2\underline{\underline{f}}})$ injektiv und $V = H(U) \cap Q_{\iota_1}$. Dann ist $\underline{\underline{f}} \circ H^{-1} \in \Gamma(V,\underline{F}_{\iota_1})$ und $\underline{J}_{\iota_1\,\underline{\underline{f}} \circ H^{-1}} \circ H = \underline{H}_{\iota_1\iota_2\,\underline{\underline{f}}}$ in $H^{-1}(V)$ und $H \circ \underline{J}_{\iota_2\,\underline{\underline{f}}} = \underline{H}_{\iota_1\iota_2\,\underline{\underline{f}}}$ (in gleichzeitiger Nähe von id $\subset \underline{J}_{\iota_1}, \underline{J}_{\iota_2}$ und von H).

Das Tripel $(\underline{F}_\iota, \underline{J}_\iota, \underline{H}_{\iota_1\iota_2})$ heißt eine Pseudogruppenstruktur zu der Aufbereitung S. Durch Vorgabe von $\underline{F}_\iota$ wird die Menge der lokalen Deformationen $\tilde{Y}_\iota$ von Y_ι eingeschränkt. Die $\underline{J}_\iota$ bewirken, daß weniger oft lokale Deformationen $\tilde{Y}_\iota$ zueinander äquivalent sind, die $\underline{H}_{\iota_1\iota_2}$ beschränken schließlich die Verheftungsmöglichkeit. Die einzelnen Axiome bedeuten u. a. Verträglichkeiten zwischen den verschiedenen Strukturen.

Man kann zu unserer Pseudogruppenstruktur den Begriff der infinitesimalen Deformation wie in [4] definieren. Die infinitesimalen Deformationen bilden einen komplexen Vektorraum V. In ihm gibt es Klassen von äquivalenten Deformationen, die Vektoren eines Quotientenvektorraumes $\underline{V}$ von V sind. Damit eine endlich dimensionale verselle

Deformation existiert muß $\underline{V}$ sicher endlich dimensional sein. Doch dürfte diese Bedingung sicher noch nicht hinreichen, u. a. braucht man auch, daß $H^1(Q_\iota, \underline{J}_{\iota\underline{f}}) = 0$ ist, wenn $\underline{f} \in \Gamma_b(Q_\iota, \underline{F}_\iota)$. Vielleicht läßt sich das Problem mit Methoden lösen, die denen von [4] oder [2] ähnlich sind. Doch wird die Lösung sicher nicht in einer simplen Verallgemeinerung bestehen. Ich möchte das Problem hiermit stellen!

4. Klassische Spezialfälle. Wir wollen jetzt annehmen, daß Y eine kompakte komplexe Mannigfaltigkeit ist. Wir können dann $N = \dim Y$ setzen, $\Phi_\iota : U_\iota \to Q_\iota$ ist dann ein komplexes Koordinatensystem in U_ι. In diesem Falle ist $\underline{F}_\iota = 0$ und die $\underline{J}_{\iota 0} \subset P|Q_\iota$ setzen sich zusammen zu einer Garbe $\underline{J}$ von Keimen von lokalen biholomorphen Abbildungen von Y in Y. Natürlich ist $\underline{J}$ eine Garbe von Pseudogruppen. Die Deformation von Y wird jetzt so bewerkstelligt, daß man die identische Verheftung von U_{ι_1} und U_{ι_2} durch eine biholomorphe Transformation F ersetzt, die eine Schnittfläche in $\underline{J}$ ist.

Pseudogruppen wurden zum ersten Male 1909 von E. Cartan in einer Arbeit definiert, die in den Annales de École Normale Supérieure [1] erschien. Die Theorie der Deformation von kompakten komplexen Mannigfaltigkeiten mit Pseudogruppenstruktur wurde dann 1960 von K. Kodaira [5] entwickelt. Die Cartanschen Pseudogruppen sind "homogen": sie ändern ihre Struktur von Punkt zu Punkt nicht plötzlich, sie verhalten sich fast wie freie analytische Garben. Deshalb konnten Kodaira und später Spencer, Kuranishi u. a, die Theorie der elliptischen Differentialgleichungen für die Pseudogruppenstrukturen ausnutzen. Natürlich ist die Garbe $\underline{J}$ nicht analytisch, leider ist das auch im allgemeinen nicht für die Garbe der infinitesimalen Transformationen zu $\underline{J}$ der Fall.

Die Situation ändert sich, wenn wir eine kompakte komplexe Mannigfaltigkeit Y so deformieren wollen, daß ein komplexer Unterraum $Y_1 \subset Y$ festbleibt. In diesem Falle deformieren wir zwar wieder mittels einer Garbe $\underline{J}$ von Keimen von lokalen biholomorphen Abbildungen von Y in Y. Die lokalen biholomorphen Abbildungen sind jedoch jetzt diejenigen, die auf Y_1 beschränkt die Identität sind. Deshalb ist $\underline{J}$ nicht mehr homogen, $\underline{J}$ ändert seine Struktur auf Y_1 plötzlich. Die zugehörige Garbe der infinitesimalen Transformationen, besteht aus den Keimen von lokalen holomorphen Vektorfeldern, die auf Y_1 verschwinden. Sie ist eine kohärente analytische Garbe!

Kohärente analytische Garben wurden im wesentlichen von H. Cartan in die komplexe Analysis eingeführt. Man muß also seine Ideen verwenden, um die Theorie der Pseudogruppenstrukturen zu vollenden!

Natürlich kann man auch kompakte komplexe Räume Y mit festen Unterräumen Y_1 deformieren. Dieses zeigt, daß die Deformationstheorie für Vektorbündel V_0 über einem festen kompakten komplexen Raum Z in unserem Konzept enthalten ist. Es sei $Y_1 \subset V_0$ die Nullschnittfläche. Natürlich ist Y_1 zu Z kanonisch isomorph. Mit $\underline{H}$ bezeichnen wir dann die Strukturgarbe von V_0 und mit $\underline{m} \subset \underline{H}$ die Idealgarbe der Keime lokaler holomorpher Funktionen, die auf Y_1 verschwinden. Wir versehen den Träger $|Y_1|$ von Y_1 sodann mit der

Strukturgarbe $\underset{\sim}{H}/\underset{\sim}{m}^2 \,|\, |Y_1|$ und erhalten einen kompakten komplexen Raum Y. Unser Y_1 ist ein komplexer Unterraum von Y. Man weiß, daß die Deformationen von Y mit festgehaltenem Y_1 den Deformationen von V_0 bijektiv entsprechen. Die Deformationstheorie von V_0 ist also einfach die von Y mit festem Y_1!

Literatur

[1] Cartan, E.: Les groupes de transformations continus infinis simples. Ann. E. N. S. 26, 93 - 161 (1909).

[2] Douady, A.: Le problème des modules locaux pour les espaces $\mathbb{C}$-analytiques compacts. Ann. E. N. S. 7, 569 - 602.

[3] Forster, und Knorr: Deformation kompakter komplexer Räume. Manuskript 1975.

[4] Grauert, H.: Der Satz von Kuranishi für kompakte komplexe Räume. Invent. math. 25, 107 - 142 (1974).

[5] Kodaira, K.: On deformations of some pseudogroup structures. Ann. Mathem. 71, 224 - 302 (1960).

[6] Kuranishi: On locally complete Families of complex Analytic Structures. Ann. of Math. 75, 536 - 577 (1962)

[7] Palamodow: Deformatschi kompleksnich Prostranstw. Manuskript 1975.

Hans GRAUERT
Mathematics Institute University
3400-GÖTTINGEN, RFA
Bunsenstrasse 3-5