GEORGES MALTSINIOTIS

Astérisque, tome 17 (1974), p. 51-67
<http://www.numdam.org/item?id=AST_1974__17__51_0>

PRECISE VANISHING THEOREM

par Georges MALTSINIOTIS

§ 1. Connexions.

Dans ce paragraphe X désignera une variété analytique complexe de dimension complexe n , E un fibré vectoriel holomorphe de rang r ainsi que le faisceau de ses sections holomorphes, E_∞ le fibré vectoriel C^∞ sous-jacent à E ainsi que le faisceau de ses sections C^∞ , $\mathcal{O}$ le faisceau de fonctions holomorphes sur X , C^∞ le faisceau de fonctions C^∞ sur X à valeurs dans $\mathbb{C}$, $\Omega^{p,q}$ le faisceau de formes différentielles C^∞ à valeurs complexes de type p,q , $\Omega^p{}_{an}$ le faisceau de p-formes différentielles holomorphes.

DEFINITION 1.- On appelle connexion sur E_∞ un morphisme $\mathbb{C}$-linéaire

$$D : E_\infty \longrightarrow E_\infty \otimes_{C^\infty} (\Omega^{1,0} \oplus \Omega^{0,1})$$

tel que pour tout ouvert $\mathcal{U}$ de X et tout $f \in \Gamma(\mathcal{U},C^\infty)$, $\sigma \in \Gamma(\mathcal{U},E_\infty)$

$$D(f.\sigma) = \sigma \otimes df + fD(\sigma) \quad .$$

Soit $\Omega_E^{\bullet\bullet} = E_\infty \otimes_{C^\infty} \Omega^{\bullet\bullet}$ qui est un $(\Omega^{\bullet\bullet},\Omega^{\bullet\bullet})$-bimodule bigradué : pour tout ouvert $\mathcal{U}$ de X et tout $\sigma \in \Gamma(\mathcal{U},E_\infty)$, $\omega,\omega' \in \Gamma(\mathcal{U},\Omega^{\bullet\bullet})$, $\omega\Lambda(\sigma \otimes \omega') = \sigma \otimes(\omega\Lambda\omega')$ et $(\sigma\otimes\omega)\Lambda\omega' = \sigma\otimes(\omega\Lambda\omega')$.On remarquera que pour $f \in \Gamma(\mathcal{U},C^\infty)$, $\sigma \in \Gamma(\mathcal{U},E_\infty)$, $f \Lambda \sigma = f\sigma = \sigma \Lambda f$ et plus généralement pour $\omega \in \Gamma(\mathcal{U},\Omega^{\bullet\bullet})$, $\omega \Lambda \sigma = \sigma \otimes \omega = \sigma \Lambda \omega$ et que si $\alpha \in \Gamma(\mathcal{U},\Omega_E^p)$ et $\omega \in \Gamma(\mathcal{U},\Omega^q)$ $\omega \Lambda \alpha = (-1)^{pq}\alpha \Lambda \omega$.

Avec ces conventions, on peut dire qu'une connexion sur E_∞ est un morphisme C-linéaire $D : \Omega_E^0 \longrightarrow \Omega_E^1$ tel que $(d,D,D) : (\Omega^0,\Omega_E^0,\Omega_E^0) \longrightarrow (\Omega^1,\Omega_E^1,\Omega_E^1)$ soit une dérivation ou tel que $(D,d,D) : (\Omega_E^0,\Omega^0,\Omega_E^0) \longrightarrow (\Omega_E^1,\Omega^1,\Omega_E^1)$ soit une dérivation suivant qu'on considère la structure de module à gauche ou à droite de $\Omega_E^\bullet$ sur $\Omega^\bullet$.

PROPOSITION 1.- <u>Etant donnée une connexion</u> D^o <u>sur</u> E_∞ <u>il existe un morphisme unique</u> $\mathbb{C}$-<u>linéaire de degré</u> 1, $D : \Omega^\bullet_E \longrightarrow \Omega^\bullet_E$ <u>prolongeant</u> D^o <u>tel que</u> $(d,D,D) : (\Omega^\bullet,\Omega^\bullet_E,\Omega^\bullet_E) \longrightarrow (\Omega^\bullet,\Omega^\bullet_E,\Omega^\bullet_E)$ <u>soit une antidérivation pour la structure de</u> $\Omega^\bullet$-<u>module à gauche. Alors</u> $(D,d,D) : (\Omega^\bullet_E,\Omega^\bullet,\Omega^\bullet_E) \longrightarrow (\Omega^\bullet_E,\Omega^\bullet,\Omega^\bullet_E)$ <u>est une antidérivation pour la structure de</u> $\Omega^\bullet$-<u>module à droite.</u>

<u>Démonstration.</u>

<u>Unicité.</u>- Pour tout ouvert $\mathcal{U}$ de X et tout $\sigma \in \Gamma(\mathcal{U},E_\infty)$, $\omega \in \Gamma(\mathcal{U},\Omega^p)$ on doit avoir

$$D(\sigma\otimes\omega) = D(\omega\wedge\sigma) = d\omega\wedge\sigma + (-1)^p\,\omega\wedge D\sigma = \sigma\otimes d\omega + D^o\sigma\wedge\omega \ .$$

<u>Existence.</u>- On définit $\mathcal{D} : E_\infty\times\Omega^\bullet \longrightarrow \Omega^\bullet_E$ par $\mathcal{D}(\sigma,\omega) = D^o\sigma\wedge\omega + \sigma\otimes d\omega$ pour tout ouvert $\mathcal{U}$ de X et tout $\sigma\in\Gamma(\mathcal{U},E_\infty)$, $\omega\in\Gamma(\mathcal{U},\Omega^\bullet)$. Soit $f\in\Gamma(\mathcal{U},C^\infty)$.

$$\mathcal{D}(\sigma.f,\omega) = \mathcal{D}(f.\sigma,\omega) = D^o(f\sigma)\wedge\omega + f\sigma\otimes d\omega = \sigma\otimes df\wedge\omega + fD^o\sigma\wedge\omega + f\sigma\otimes d\omega$$

et

$$\mathcal{D}(\sigma,f\omega) = D^o(\sigma)\wedge f\omega + \sigma\otimes d(f\omega) = fD^o\sigma\wedge\omega + \sigma\otimes df\wedge\omega + \sigma\otimes f\wedge d\omega =$$
$$= fD^o\sigma\wedge\omega + \sigma\otimes df\wedge\omega + f\sigma\otimes d\omega \ .$$

Donc $\mathcal{D}(\sigma.f,\omega) = \mathcal{D}(\sigma,f\omega)$ et par suite on déduit un morphisme $\mathbb{C}$-linéaire $D : \Omega^\bullet_E \longrightarrow \Omega^\bullet_E$.

<u>Vérification des propriétés.</u>

Soient $\mathcal{U}$ un ouvert de X, $\omega\in\Gamma(\mathcal{U},\Omega^r)$, $\sigma\in\Gamma(\mathcal{U},E_\infty)$, $\omega'\in\Gamma(\mathcal{U},\Omega^\bullet)$ il s'agit de démontrer que

i) $D(\omega\wedge(\sigma\otimes\omega')) = d\omega\wedge(\sigma\otimes\omega') + (-1)^r\omega\wedge D(\sigma\otimes\omega')$.

En effet :

$$D(\omega\wedge(\sigma\otimes\omega')) = D(\sigma\otimes(\omega\wedge\omega')) = D^o\sigma\wedge\omega\wedge\omega' + \sigma\otimes d(\omega\wedge\omega') = D^o(\sigma)\wedge\omega\wedge\omega' + \sigma\otimes(d\omega\wedge\omega')$$
$$+ (-1)^r\sigma\otimes(\omega\wedge d\omega') = d\omega\wedge(\sigma\otimes\omega') + (-1)^r\,\omega\wedge(D^o\sigma\wedge\omega') + (-1)^r\omega\wedge(\sigma\otimes d\omega') =$$
$$= d\omega\wedge(\sigma\otimes\omega') + (-1)^r\,\omega\wedge D(\sigma\otimes\omega') \ .$$

ii) $D((\sigma\otimes\omega)\wedge\omega') = D(\sigma\otimes\omega)\wedge\omega' + (-1)^r(\sigma\otimes\omega)\wedge d\omega'$.

En effet

$D((\sigma \otimes \omega)\wedge\omega') = D(\sigma \otimes(\omega\wedge\omega')) = D^{o}\sigma\wedge\omega\wedge\omega' + \sigma \otimes d(\omega\wedge\omega') = D^{o}\sigma\wedge\omega\wedge\omega' + \sigma \otimes(d\omega\wedge\omega')$
$+ (-1)^{r} \sigma \otimes(\omega\wedge d\omega') = D(\sigma \otimes \omega)\wedge\omega' + (-1)^{r} (\sigma \otimes \omega)\wedge d\omega'$.

iii) $D(\sigma \otimes 1) = D^{o}\sigma$.

En effet

$$D(\sigma \otimes 1) = D^{o}(\sigma)\wedge 1 + \sigma \otimes d(1) = D^{o}\sigma \ .$$

COROLLAIRE 1.- $D^2 = D\circ D$ <u>est</u> $\Omega^{\bullet}$-<u>linéaire à gauche et à droite</u>.

<u>Démonstration</u>.

Soient $\mathcal{U}$ un ouvert de X , $\omega \in \Gamma(\mathcal{U},\Omega^{r})$, $\alpha \in \Gamma(\mathcal{U},\Omega^{\bullet}_{E})$
$D^2(\omega\wedge\alpha) = D(d\omega\wedge\alpha + (-1)^{r}\omega\wedge D(\alpha)) = dd\omega\wedge\alpha + (-1)^{r+1} d\omega\wedge D\alpha + (-1)^{r}d\omega\wedge D\alpha +$ -
$+ (-1)^{r}(-1)^{r}\omega\wedge DD(\alpha) = \omega\wedge D^2(\alpha)$.

La linéarité à droite se démontre de la même façon.

DEFINITION 2.- <u>L'opérateur</u> D^2 <u>est appelé courbure de la connexion</u> D^{o} .

<u>Remarque</u>.- On a $D(\Omega^{p,q}_{E}) \subset \Omega^{p+1,q}_{E} \oplus \Omega^{p,q+1}_{E}$. En effet soient $\mathcal{U}$ un ouvert de X , $\sigma \in \Gamma(\mathcal{U},E_{\infty})$, $\omega \in \Gamma(\mathcal{U},\Omega^{p,q})$. Alors $D(\sigma \otimes \omega) = D^{o}\sigma\wedge\omega + \sigma \otimes d\omega$ et $D^{o}\sigma \in \Omega^{1,o}_{E} \oplus \Omega^{o,1}_{E}$ donc $D^{o}\sigma\wedge\omega \in \Omega^{p+1,q}_{E} \oplus \Omega^{p,q+1}_{E}$ et $d\omega \in \Omega^{p+1,q} \oplus \Omega^{p,q+1}$ donc $\sigma \otimes d\omega \in \Omega^{p+1,q}_{E} \oplus \Omega^{p,q+1}_{E}$.

On pose $D = D' + D''$ avec $D' : \Omega^{p,q}_{E} \longrightarrow \Omega^{p+1,q}_{E}$ et $D'' : \Omega^{p,q}_{E} \longrightarrow \Omega^{p,q+1}_{E}$

DEFINITION 3.- <u>On dit que la connexion</u> D <u>est holomorphe si pour tout ouvert</u> $\mathcal{U}$ <u>de</u> X <u>et toute section holomorphe</u> σ <u>de</u> E <u>au-dessus de</u> $\mathcal{U}$, $D''(\sigma) = 0$.

Par définition $\Omega^{\bullet\bullet}_{E} = E_{\infty} \otimes_{C^{\infty}} \Omega^{\bullet\bullet} = E \otimes_{\mathcal{O}} C^{\infty} \otimes_{C^{\infty}} \Omega^{\bullet\bullet} = E \otimes_{\mathcal{O}} \Omega^{\bullet\bullet}$. Le morphisme d'' étant $\mathcal{O}$-linéaire, on peut considérer $1_{E} \otimes d''$. Si D est une connexion holomorphe $D'' = 1_{E} \otimes d''$. En effet soient $\mathcal{U}$ un ouvert de X , $\sigma \in \Gamma(\mathcal{U},E)$, $\omega \in \Gamma(\mathcal{U},\Omega^{\bullet\bullet})$ alors $D''(\sigma \otimes \omega) = D''(\sigma)\wedge\omega + \sigma \otimes d''\omega = \sigma \otimes d''\omega$.
En particulier $D''^2 = 0$.

THEOREME 1.- Si D est une connexion holomorphe sur E_∞ et si $\Gamma(X,\Omega^{p,\cdot})$ désigne le complexe :

$$\cdots \to 0 \longrightarrow 0 \longrightarrow \Gamma(X,\Omega_E^{p,o}) \xrightarrow{D''} \Gamma(X,\Omega_E^{p,1}) \xrightarrow{D''} \cdots \xrightarrow{D''} \Gamma(X,\Omega_E^{p,n}) \longrightarrow 0 \longrightarrow \cdots$$

alors $H^q(X,E\otimes_{\mathcal{O}}\Omega^p_{an}) = H^q(\Gamma(X,\Omega^{p,\cdot}))$.

Démonstration.

Suivant le théorème de Dolbeault, on a une suite exacte

$$0 \longrightarrow \Omega^p_{an} \longrightarrow \Omega^{p,o} \xrightarrow{d''} \Omega^{p,1} \xrightarrow{d''} \cdots \xrightarrow{d''} \Omega^{p,n} \longrightarrow 0$$

d'où E étant localement libre une suite exacte

$$0 \longrightarrow E\otimes_{\mathcal{O}}\Omega^p_{an} \longrightarrow E\otimes_{\mathcal{O}}\Omega^{p,o} \xrightarrow{1_E\otimes d''} E\otimes_{\mathcal{O}}\Omega^{p,1} \longrightarrow \cdots \xrightarrow{1_E\otimes d''} E\otimes_{\mathcal{O}}\Omega^{p,n} \longrightarrow 0$$

d'où suivant ce qui précède une suite exacte

$$0 \longrightarrow E\otimes_{\mathcal{O}}\Omega^p_{an} \longrightarrow \Omega_E^{p,o} \xrightarrow{D''} \Omega_E^{p,1} \xrightarrow{D''} \cdots \xrightarrow{D''} \Omega_E^{p,n} \longrightarrow 0 \quad .$$

Or les faisceaux $\Omega_E^{p,q}$ étant mous, on en conclut le théorème.

§ 2. Connexions hermitiennes.

Dans ce paragraphe, on garde les mêmes notations que dans le paragraphe précédent et on suppose que le fibré E est muni d'une structure hermitienne C^∞. Le produit hermitien en question sera noté $\{.,.\}$.

On définit un morphisme sesquilinéaire de $\Omega_E^{\cdot\cdot}\times\Omega_E^{\cdot\cdot} \longrightarrow \Omega^{\cdot\cdot}$ en posant pour tout ouvert $\mathcal{U}$ de X , $\sigma,\sigma' \in \Gamma(\mathcal{U},E_\infty)$, ω , $\omega' \in \Gamma(\mathcal{U},\Omega^{\cdot\cdot})$ $\{\sigma\otimes\omega,\sigma'\otimes\omega'\} = \{\sigma,\sigma'\}\omega\wedge\overline{\omega'}$. Si $\alpha \in \Gamma(\mathcal{U},\Omega_E^p)$, $\beta \in \Gamma(\mathcal{U},\Omega_E^q)$, $\{\beta,\alpha\} = (-1)^{pq}\,\overline{\{\alpha,\beta\}}$.

PROPOSITION 1.- Il existe une connexion holomorphe et une seule $D^o : E_\infty = \Omega_E^o \to \Omega_E^1$ telle que pour tout ouvert $\mathcal{U}$ de X et tout $\sigma,\sigma' \in \Gamma(\mathcal{U},E_\infty)$:

$$d\{\sigma,\sigma'\} = \{D^o\sigma,\sigma'\} + \{\sigma,D^o\sigma'\} \quad .$$

Démonstration.

La question étant locale, supposons le fibré holomorphe E trivial et soient $\sigma_1,\ldots,\sigma_r \in \Gamma(X,E)$ tels que pour tout $x \in X$ $\sigma_1(x),\ldots,\sigma_r(x)$ forment une base de la fibre du fibré E en x.

<u>Unicité</u>.- Soient $\mathcal{U}$ un ouvert de X et $\sigma \in \Gamma(\mathcal{U}, E_\infty)$. Alors $\sigma = \sum_{i=1}^{r} f_i \sigma_i$ avec $f_i \in \Gamma(\mathcal{U}, C^\infty)$ et on doit avoir

$$D^o \sigma = \sum_{i=1}^{r} \sigma_i \otimes df_i + \sum_{i=1}^{r} f_i D^o \sigma_i$$

et par suite il suffit de démontrer que les $D^o \sigma_i$ sont déterminés par les hypothèses.

Soit $D^o \sigma_i = \sum_{K=1}^{r} \sigma_K \otimes \omega_{Ki}$. Alors $\omega_{Ki} \in \Gamma(X, \Omega^{1,o})$ car D^o doit être une connexion holomorphe et les σ_i sont des sections holomorphes. D'autre part on doit avoir

$$\alpha\{\sigma_i, \sigma_j\} = \{D^o \sigma_i, \sigma_j\} + \overline{\{D^o \sigma_j, \sigma_i\}}$$

et $\quad \{D^o \sigma_i, \sigma_j\} \in \Gamma(X, \Omega^{1,o})$ et $\overline{\{D^o \sigma_j, \sigma_i\}} \in \Gamma(X, \Omega^{o,1})$

donc $\quad \{D^o \sigma_i, \sigma_j\} = d'\{\sigma_i, \sigma_j\}$

c'est-à-dire

$$\sum_{K=1}^{r} \{\sigma_K, \sigma_j\} \omega_{Ki} = d'\{\sigma_i, \sigma_j\} \quad \text{pour tout } i \text{ et } j .$$

En faisant varier j on obtient un système de r équations à r inconnues qui détermine les ω_{Ki} puisque pour tout $x \in X$, $\det\{\sigma_K(x), \sigma_j(x)\} \neq 0$ la forme hermitienne étant non dégénérée. On déduit les $D^o \sigma_i$.

<u>Existence</u>.- Soient $\omega_{Ki} \in \Omega^{1,o}$ définis par les systèmes d'équations

$$\sum_{K=1}^{r} \{\sigma_K, \sigma_j\} \omega_{Ki} = d'\{\sigma_i, \sigma_j\} \quad \text{et} \quad \alpha_i = \sum_{K=1}^{r} \sigma_K \otimes \omega_{Ki} .$$

Pour tout ouvert $\mathcal{U}$ de X et tout $\sigma = \sum_{i=1}^{r} f_i \sigma_i$ avec $\sigma \in \Gamma(\mathcal{U}, E_\infty)$ $f_i (\in \Gamma(\mathcal{U}, C^\infty)$ on pose

$$D^o \sigma = \sum_{i=1}^{r} \sigma_i \otimes df_i + \sum_{i=1}^{r} f_i \alpha_i .$$

<u>Vérification des propriétés</u>.

i) D^o est une connexion.

Soit $f \in \Gamma(\mathcal{U}, C^\infty)$; alors $f\sigma = \sum_{i=1}^{r} f f_i \sigma_i$ et

$$D^o(f\sigma) = \sum_{i=1}^r \sigma_i \otimes d(ff_i) + \sum_{i=1}^r ff_i\alpha_i = (\sum_{i=1}^r f_i\sigma_i) \otimes df + f\sum_{i=1}^r \sigma_i \otimes df_i + f\sum_{i=1}^r f_i\alpha_i =$$

$$= \sigma \otimes df + fD^o(\sigma) \ .$$

ii) D^o est une connexion holomorphe.

Si σ est une section holomorphe les f_i sont holomorphes donc

$$D^o\sigma = \sum_{i=1}^r \sigma_i \otimes d'f_i + \sum_{i=1}^r f_i\alpha_i$$

d'où

$$D^{o''}\sigma \in \Gamma(\mathcal{U},\Omega_E^{1,o}) \quad \text{et} \quad D^o\sigma = 0 \ .$$

iii) Soient $\sigma' = \sum_{i=1}^r f'_j\sigma_j$ avec $\sigma' \in \Gamma(\mathcal{U},E_\infty)$, $f'_j \in \Gamma(\mathcal{U},C^\infty)$.

Il s'agit de démontrer que $d\{\sigma,\sigma'\} = \{D^o\sigma,\sigma'\} + \{\sigma,D^o\sigma'\}$.

En effet

$$\{D\sigma,\sigma'\} = \sum_{i,j=1}^r \overline{f'_j}\{\sigma_i,\sigma_j\}\, df_i + \sum_{i,j=1}^r f_i\overline{f'_j}\{\alpha_i,\sigma_j\}$$

$$\{\sigma,D\sigma'\} = \sum_{i,j=1}^r f_i\{\sigma_i,\sigma_j\}\, d\overline{f'_j} + \sum_{i,j=1}^r f_i\overline{f'_j}\{\sigma_i,\alpha_j\}$$

$$d\{\sigma,\sigma'\} = d(\sum_{i,j=1}^r f_i\overline{f'_j}\{\sigma_i,\sigma_j\} = \sum_{i,j=1}^r \overline{f'_j}\{\sigma_i,\sigma_j\}\, df_i + \sum_{i,j=1}^r f_i\{\sigma_i,\sigma_j\}\, d\overline{f'_j} +$$

$$+ \sum_{i,j=1}^r f_i\overline{f'_j}d\{\sigma_i,\sigma_j\} \ .$$

Or par hypothèse $d'\{\sigma_i,\sigma_j\} = \{\alpha_i,\sigma_j\}$ et d'autre part

$d''\{\sigma_i,\sigma_j\} = \overline{d'\overline{\{\sigma_i,\sigma_j\}}} = \overline{d'\{\sigma_j,\sigma_i\}} = \overline{\{\alpha_j,\sigma_i\}} = \{\sigma_i,\alpha_j\}$ et par suite

$d\{\sigma_i,\sigma_j\} = \{\alpha_i,\sigma_j\} + \{\sigma_i,\alpha_j\}$ d'où le résultat.

DEFINITION 1.- La connexion, définie par la proposition précédente, est appelée connexion hermitienne associée à la structure hermitienne du fibré E .

Désormais D^o désignera la connexion ainsi définie et D le prolongement de D^o sur $\Omega_E^{\bullet\bullet}$ défini dans la proposition 1 du paragraphe 1.

PROPOSITION 2.- $(D,D,d) : (\Omega_E^\bullet,\Omega_E^\bullet,\Omega^\bullet) \longrightarrow (\Omega_E^\bullet,\Omega_E^\bullet,\Omega^\bullet)$ est une antidérivation de degré 1 pour le produit $\{\cdot,\cdot\}$.

Démonstration.

Soient $\mathcal{U}$ un ouvert de X , $\sigma,\sigma' \in \Gamma(\mathcal{U},E_\infty)$, $\omega \in \Gamma(\mathcal{U},\Omega^r)$, $\omega' \in \Gamma(\mathcal{U},\Omega^\bullet)$, il s'agit de démontrer que

$$d\{\sigma \otimes \omega,\sigma' \otimes \omega'\} = \{D(\sigma \otimes \omega) , \sigma' \otimes \omega'\} + (-1)^r\{\sigma \otimes \omega , D(\sigma' \otimes \omega')\} .$$

En effet

$$d\{\sigma \otimes \omega,\sigma'\otimes \omega'\} = d(\{\sigma,\sigma'\} \omega\wedge\overline{\omega}') = d\{\sigma,\sigma'\} \wedge\omega\wedge\overline{\omega} + \{\sigma,\sigma'\} d\omega\wedge\overline{\omega}' + (-1)^r\{\sigma,\sigma'\}\omega\wedge d\overline{\omega}' =$$
$$= \{D^o\sigma\wedge\omega,\sigma'\otimes \omega'\} + \{\sigma \otimes d\omega,\sigma'\otimes \omega'\} + (-1)^r\{\sigma \otimes \omega,D^o(\sigma')\wedge\omega'\} + (-1)^r\{\sigma\otimes \omega,\sigma'\otimes d\omega'\} =$$
$$= \{D(\sigma \otimes \omega),\sigma' \otimes \omega'\} + (-1)^r\{\sigma \otimes \omega,D(\sigma' \otimes \omega,D(\sigma' \otimes \omega')\} .$$

PROPOSITION 3.- Soient $\mathcal{U}$ un ouvert de X , $\alpha,\beta \in \Gamma(\mathcal{U},\Omega^\bullet_E)$. Alors $\{D^2\alpha,\beta\} + \{\alpha,D^2\beta\} = 0$.

Démonstration.

Supposons que $\alpha \in \Gamma(\mathcal{U},\Omega^r_E)$. Alors $d\{\alpha,\beta\} = \{D\alpha,\beta\} + (-1)^r\{\alpha,D\beta\}$

d'où

$$0 = dd\{\alpha,\beta\} = d\{D\alpha,\beta\} + (-1)^r d\{\alpha,D\beta\} = \{D^2\alpha,\beta\} + (-1)^{r+1}\{D\alpha,D\beta\} + (-1)^r\{D\alpha,D\beta\} +$$
$$+ (-1)^r(-1)^r\{\alpha,D^2\beta\} = \{D^2\alpha,\beta\} + \{\alpha,D^2\beta\}$$

d'où le résultat.

PROPOSITION 4.- La courbure D^2 est de bidegré $(1,1)$ autrement dit $D''^2 = D'^2 = 0$.

Démonstration.

La connexion D^o étant holomorphe, on sait déjà que $D''^2 = 0$. Soient $\mathcal{U}$ un ouvert de X , $\alpha \in \Gamma(\mathcal{U},\Omega^{p,q}_E)$, $\beta \in \Gamma(\mathcal{U}, \Omega^{r,s}_E)$. Suivant la proposition précédente $\{D^2\alpha,\beta\} + \{\alpha,D^2\beta\} = 0$ c'est-à-dire

$$0 = \{D'^2\alpha,\beta\} +\{(D'D'' + D''D')(\alpha),\beta\} + \{\alpha,D'^2\beta\} + \{\alpha,(D'D'' + D''D')(\beta)\} .$$

Or $\{D'^2\alpha,\beta\} \in \Gamma(\mathcal{U},\Omega^{p+2+s,q+r})$, $\{\alpha,D'^2\beta\} \in \Gamma(\mathcal{U},\Omega^{p+s,q+r+2})$

et $\{(D'D'' + D''D')(\alpha),\beta\} + \{\alpha,(D'D'' + D''D')(\beta)\} \in \Gamma(\mathcal{U},\Omega^{p+s+1,q+r+1})$

donc $\{D'^2\alpha,\beta\} = 0$ pour tout $\alpha,\beta \in \Gamma(\mathcal{U},\Omega_E^{\bullet\bullet})$ et par suite $D'^2\alpha = 0$ pour tout $\alpha \in \Gamma(\mathcal{U},\Omega_E^{\bullet\bullet})$ donc $D'^2 = 0$.

<u>Remarque</u>.- Suivant le corollaire 1 de la proposition 1 du paragraphe 1, $D^2 \in \mathrm{Hom}_{\Omega^\bullet}(\Omega_E^\bullet,\Omega_E^\bullet) = \mathrm{Hom}_{\Omega^\bullet}(E_\infty \otimes_{C^\infty} \Omega^\bullet, E_\infty \otimes_{C^\infty} \Omega^\bullet) = \mathrm{Hom}_{C^\infty}(E_\infty, E_\infty \otimes_{C^\infty} \Omega^\bullet)$ et suivant la proposition 4, $D^2 \in \mathrm{Hom}_{C^\infty}(E_\infty, E_\infty \otimes_{C^\infty} \Omega^{1,1})$. Or $\mathcal{H}om_{C^\infty}(E_\infty, E_\infty \otimes_{C^\infty} \Omega^{1,1})$ est canoniquement isomorphe à $\mathcal{E}nd_{C^\infty}(E_\infty) \otimes_{C^\infty} \Omega^{1,1}$ donc

$$\mathrm{Hom}_{C^\infty}(E_\infty, E_\infty \otimes_{C^\infty} \Omega^{1,1}) \simeq \Gamma(X, \mathcal{E}nd_{C^\infty}(E_\infty) \otimes_{C^\infty} \Omega^{1,1}) .$$

La courbure D^2 considérée comme élément de $\Gamma(X,\mathcal{E}nd_{C^\infty}(E_\infty) \otimes_{C^\infty} \Omega^{1,1})$ sera notée C_E. Si on note $C^\infty_{\mathbb{R}}$ le faisceau de fonctions C^∞ à valeurs réelles et $\Omega^{1,1}_{\mathbb{R}}$ les formes C^∞ de type $(1,1)$ réelles, alors $\mathcal{E}nd_{C^\infty}(E_\infty) \otimes_{C^\infty} \Omega^{1,1} = \mathcal{E}nd_{C^\infty}(E_\infty) \otimes_{C^\infty} C^\infty \otimes_{C^\infty_{\mathbb{R}}} \Omega^{1,1}_{\mathbb{R}} = \mathcal{E}nd_{C^\infty}(E_\infty) \otimes_{C^\infty_{\mathbb{R}}} \Omega^{1,1}_{\mathbb{R}}$ et on peut considérer le sous-$C^\infty_{\mathbb{R}}$-module $\mathcal{E}ndherm_{C^\infty}(E_\infty) \otimes_{C^\infty_{\mathbb{R}}} \Omega^{1,1}_{\mathbb{R}}$ où $\mathcal{E}ndherm_{C^\infty}(E_\infty)$ désigne le faisceau d'endomorphismes hermitiens de E_∞.

PROPOSITION 5.- $iC_E \in \Gamma(X, \mathcal{E}ndherm_{C^\infty}(E_\infty) \otimes_{C^\infty_{\mathbb{R}}} \Omega^{1,1}_{\mathbb{R}})$.

<u>Démonstration</u>.

L'assertion étant locale, on peut supposer $\Omega^{1,1}_{\mathbb{R}}$ libre et choisir une base $\omega_1,\dots,\omega_t \in \Gamma(X,\Omega^{1,1}_{\mathbb{R}})$. Alors soit $C_E = \sum_{i=1}^t \rho_i \otimes \omega_i$ avec $\rho_i \in \Gamma(X,\mathcal{E}nd_{C^\infty}(E_\infty))$. Or suivant la proposition 3, pour tout $\sigma,\sigma' \in \Gamma(X,E_\infty)$,

$$\{D^2\sigma,\sigma'\} + \{\sigma,D^2\sigma'\} = 0$$

c'est-à-dire

$$\{\sum_{i=1}^t \rho_i(\sigma) \otimes \omega_i,\sigma'\} + \{\sigma,\sum_{i=1}^t \rho_i(\sigma') \otimes \omega_i\} = 0$$

donc

$$\sum_{i=1}^t \{\rho_i(\sigma),\sigma'\}\omega_i + \sum_{i=1}^t \{\sigma,\rho_i(\sigma')\}\omega_i = 0$$

donc pour tout i

$$\{\rho_i(\sigma),\sigma'\} + \{\sigma,\rho_i(\sigma')\} = 0$$

d'où le résultat.

PROPOSITION 6.- Si le rang r du fibré E est égal à 1, $C_E \in \Gamma(X,\Omega^{1,1})$ est une forme fermée. Plus précisément, si $\mathcal{U}$ est un ouvert au-dessus duquel le fibré E est trivial et σ est une section holomorphe inversible de E au-dessus de $\mathcal{U}$ $C_E|\mathcal{U} = d''d'\mathrm{Log}\{\sigma,\sigma\}$.

Démonstration.

Il suffit de démontrer la seconde assertion puisque

$$d''d'\mathrm{Log}\{\sigma,\sigma\} = dd'\mathrm{Log}\{\sigma,\sigma\} \quad .$$

Alors par définition $D^2(\sigma) = \sigma \otimes C_E$ et suivant la démonstration de la proposition 1

$$D(\sigma) = \sigma \otimes \frac{d'\{\sigma,\sigma\}}{\{\sigma,\sigma\}} = \sigma \otimes d'\mathrm{Log}\{\sigma,\sigma\}$$

et par suite

$$D^2(\sigma) = D(\sigma) \wedge d'\mathrm{Log}\{\sigma,\sigma\} + \sigma \otimes dd'\mathrm{Log}\{\sigma,\sigma\} = \sigma \otimes d'\mathrm{Log}\{\sigma,\sigma\} \wedge d'\mathrm{Log}\{\sigma,\sigma\} +$$
$$+ \sigma \otimes d''d'\mathrm{Log}\{\sigma,\sigma\} = \sigma \otimes d''d'\mathrm{Log}\{\sigma,\sigma\}$$

d'où le résultat σ étant inversible.

Remarque.- Suivant la proposition 5, $iC_E \in \Gamma(X,\mathcal{E}ndherm_{C^\infty}(E_\infty) \otimes_{C^\infty_{\mathbb{R}}} \Omega^{1,1}_{\mathbb{R}})$. Or $\Omega^{1,1}_{\mathbb{R}}$ est un sous-C^∞-module de $\Lambda^2 T^* = (\Lambda^2 T)^*$, où T désigne le fibré tangent, donc iC_E définit une application bilinéaire alternée

$$\mathcal{A}_E : T^2 \longrightarrow \mathcal{E}ndherm_{C^\infty}(E_\infty)$$

d'où une application quadratique $\Phi_E : T \longrightarrow \mathcal{E}ndherm_{C^\infty}(E_\infty)$ définie par $\Phi_E(t) = \mathcal{A}_E(t,it)$.

DEFINITION 2.- On dit que le fibré E muni de sa structure hermitienne est positif, si pour tout $x \in X$ et $t \in T_x - \{0\}$, $\Phi_E(t)$ soit positif non dégénéré c'est-à-dire $\forall \eta \in E_x - \{0\}$, $\{\Phi_E(t)(\eta),\eta\} > 0$.

DEFINITION 3.- On dit qu'un fibré E holomorphe de rang r est positif s'il existe une structure hermitienne sur E pour laquelle il est positif.

§ β. Precise vanishing theorem.

Dans ce paragraphe on garde les mêmes notations que dans les paragraphes précédents et on suppose que X est une variété hermitienne de forme fondamentale $\omega \in \Gamma(X,\Omega^{1,1}_{\mathbb{R}})$ et que E_∞ est muni d'une structure hermitienne de connexion $D^o : E_\infty = \Omega^o_E \longrightarrow \Omega^1_E$ prolongée en $D : \Omega^\bullet_E \longrightarrow \Omega^\bullet_E$. On notera encore par $L, \Lambda, *, C$ les opérateurs $1_{E_\infty} \otimes L$, $1_{E_\infty} \otimes \Lambda$, $1_{E_\infty} \otimes *$, $1_{E_\infty} \otimes C$ de l'exposé 2. On définit un produit hermitien sur $\Omega^\bullet_E$ par

$$<\sigma \otimes \omega , \sigma' \otimes \omega'> = \{\sigma,\sigma'\} <\omega,\omega'>$$

pour tout ouvert $\mathcal{U}$ de X et $\sigma,\sigma' \in \Gamma(\mathcal{U},E_\infty)$, $\omega,\omega' \in \Gamma(\mathcal{U},\Omega^\bullet)$.

PROPOSITION 1.– <u>Soient $\mathcal{U}$ un ouvert de X , $\alpha,\beta \in \Gamma(\mathcal{U},\Omega^p_E)$. Alors $<\alpha,\beta>\tau = \{\alpha,*\beta\}$ où τ désigne l'élément de volume sur X .</u>

<u>Démonstration.</u>

Soient $\sigma,\sigma' \in \Gamma(\mathcal{U},E_\infty)$, $\omega,\omega' \in \Gamma(\mathcal{U},\Omega^p)$. Alors $<\sigma \otimes \omega , \sigma' \otimes \omega'>\tau = \{\sigma,\sigma'\} <\omega,\omega'>\tau = \{\sigma,\sigma'\}\ \omega\wedge *\overline{\omega'}$ (Exp. n°1, 1.3) et $\{\sigma,\sigma'\}\ \omega\wedge *\overline{\omega'} = \{\sigma,\sigma'\}\ \omega\wedge\overline{*\omega'}$ car $*$ est réel et finalement

$$<\sigma \otimes \omega , \sigma' \otimes \omega'>\tau = \{\sigma \otimes \omega , \sigma' \otimes *\omega'\} .$$

On suppose désormais que X est compacte. Alors on pose pour $\alpha,\beta \in \Gamma(X,\Omega^\bullet_E)$

$$(\alpha,\beta) = \int_X <\alpha,\beta>\tau .$$

PROPOSITION 2.– <u>L'opérateur $\delta = -*D*$ est adjoint de D pour $(\ .\ )$.</u>

<u>Démonstration.</u>

Soient $\alpha \in \Gamma(X,\Omega^p_E)$, $\beta \in \Gamma(X,\Omega^{p+1}_E)$ et démontrons que $(D\alpha,\beta) = (\alpha,\delta\beta)$. En effet $(D\alpha,\beta) = \int_X <D\alpha,\beta>\tau = \int_X \{D\alpha, *\beta\}$ suivant la proposition 1. Donc $(D\alpha,\beta) = (-1)^{p+1}\int_X \{\alpha,D*\beta\} + \int_X d\{\alpha,*\beta\}$ suivant la proposition 2 du paragraphe 2 et suivant le théorème de Stokes

$(D\alpha,\beta) = (-1)^{p+1}\int_X \{\alpha,D*\beta\} = (-1)^{p+1}(\alpha,(-1)^{(2n-p)p} *D*\beta)$ (où $2n$ est la dimension sur $\mathbb{R}$ de X) donc $(D\alpha,\beta) = (\alpha,\delta\beta)$.

On suppose désormais que X est une variété kählérienne compacte.

PROPOSITION 3.- On a les relations :

$$[L,D] = 0 \quad , \quad [\Lambda,\delta] = 0 \quad , \quad [L,\delta] = D^c \quad , \quad [\Lambda,D] = -\delta^c \ .$$

Démonstration.

La première est une conséquence immédiate de la relation $d\omega = 0$, la deuxième résulte de la première et la troisième de la dernière. La dernière résulte du lemme à la proposition 1 du paragraphe 2 de l'exposé 2, en remarquant que la décomposition en somme directe de $\Omega^\bullet$, obtenue par les formes différentielles primitives, définit une décomposition analogue de $\Omega_E^\bullet$ par tensorisation par E_∞ .

THEOREME 1.- On a les relations $\Delta = 2'\square - i[\Lambda,D^2] = 2''\square + i[\Lambda,D^2]$ en posant $\Delta = [D,\delta]$, $'\square = [D',\delta']$, $''\square = [D'',\delta'']$.

Démonstration.

C'est une conséquence immédiate de la proposition 3 et du lemme au théorème 1, paragraphe 3 de l'exposé 2.

COROLLAIRE 1.- Soit $\alpha \in \Gamma(X,\Omega_E^\bullet)$ tel que $''\square(\alpha) = 0$. Alors $([\Lambda,iD^2](\alpha),\alpha) \geq 0$.

Démonstration.- D'après le théorème 1, $\Delta\alpha = [\Lambda,iD^2](\alpha)$. Or

$(\Delta\alpha,\alpha) = ((D\delta + \delta D)(\alpha),\alpha) = (D\delta(\alpha),\alpha) + (\delta D(\alpha),\alpha) = (\delta\alpha,\delta\alpha) + (D\alpha,D\alpha) \geq 0$

d'où $([\Lambda,iD^2](\alpha),\alpha) \geq 0$.

COROLLAIRE 2.- Les opérateurs Δ, $'\square$, $''\square$ sont elliptiques.

Démonstration.- Les opérateurs Δ, $'\square$, $''\square$ sont des opérateurs d'ordre 2, l'opérateur $i[\Lambda,D^2]$ étant d'ordre 0 car C^∞-linéaire, il suffit de démontrer le résultat pour Δ .

Calculons le symbole σ_D de D . Soient $x \in X$, $z \in T_x^*(X) - \{0\}$, $\eta \in \Omega_{E,x}^p$, $f \in \Gamma(X,C^\infty)$ tel que $f(x) = 0$ et $df(x) = z$, $\alpha \in \Gamma(X,\Omega_E^p)$ tel que $\alpha(x) = \eta$. Alors :

$$\sigma_D(x,z)\eta = D(f\alpha)(x) = df(x) \wedge \alpha(x) + f(x)\, D(\alpha)x = z\wedge\eta \ .$$

Donc $\sigma_D(x,z) = e_z$ multiplication extérieure à gauche par z .

Donc $\sigma_\delta(x,z) = - *e_z* = - i_z$ (exp n°1, 2.7) multiplication intérieure à gauche par z et $\sigma_\Delta(x,z) = - e_z \circ i_z - i_z \circ e_z = -|z|^2 \,\mathrm{id}$ (exp n°1, 2.9) et par suite Δ est un opérateur elliptique.

PROPOSITION 4.- <u>Les opérateurs</u> Δ, $'\square$, $''\square$ <u>sont des opérateurs auto-adjoints par rapport à</u> $(\cdot,\cdot)$.

<u>Démonstration.</u>

Soient

$\alpha,\beta \in \Gamma(X,\Omega_E^\bullet)$ $(\Delta\alpha,\beta) = (D\delta\alpha,\beta) + (\delta D\alpha,\beta) = (\delta\alpha,\delta\beta) + (D\alpha,D\beta) = (\alpha,D\delta\beta) + (\alpha,\delta D\beta) = (\alpha,\Delta\beta)$

et de même pour $'\square$ et $''\square$.

DEFINITION 1.- <u>On pose</u>

$$H_E^{p,q} = \Gamma(X,\mathrm{Ker}\ \Delta) \cap \Gamma(X,\Omega_E^{p,q})$$

$$'H_E^{p,q} = \Gamma(X,\mathrm{Ker}\,'\square) \cap \Gamma(X,\Omega_E^{p,q})$$

$$''H_E^{p,q} = \Gamma(X,\mathrm{Ker}\,''\square) \cap \Gamma(X,\Omega_E^{p,q}) .$$

COROLLAIRE 1.- $\Gamma(X,\Omega_E^{p,q}) = H_E^{p,q} \oplus \Delta\,(\Gamma(X,\Omega_E^{p,q})) = {}'H_E^{p,q} \oplus {}'\square(\Gamma(X,\Omega_E^{p,q})) = {}''H_E^{p,q} \oplus {}''\square(\Gamma(X,\Omega_E^{p,q}))$.

<u>Démonstration.</u>

Cela résulte des propositions 3, 4 et de l'exposé n°1, 2.13.

PROPOSITION 5.- $\alpha \in H_E \Leftrightarrow D\alpha = \delta\alpha = 0$

$\alpha \in {}'H_E \Leftrightarrow D'\alpha = \delta'\alpha = 0$

$\alpha \in {}''H_E \Leftrightarrow D''\alpha = \delta''\alpha = 0$.

<u>Démonstration.</u>

En effet $\alpha \in H_E \Rightarrow \Delta\alpha = 0 \Rightarrow (\Delta\alpha,\alpha) = 0 \Rightarrow (D\delta\alpha,\alpha) + (\delta D\alpha,\alpha) = 0 \Rightarrow (\delta\alpha,\delta\alpha) + (D\alpha,D\alpha) = 0 \Rightarrow \delta\alpha = D\alpha = 0$ la réciproque étant évidente.

On démontre de la même façon les deux autres assertions.

PROPOSITION 6.- $''H_E^{p,q} \simeq H^q(X, E \otimes_{\mathcal{O}} \Omega^p_{an})$.

<u>Démonstration</u>.

D'après le théorème 1 du paragraphe 1, $H^q(X, E \otimes_{\mathcal{O}} \Omega^p_{an}) \simeq H^q(\Gamma(X, \Omega_E^{p,\bullet}))$ pour la différentielle D'' . Donc il suffit de démontrer que pour tout $\alpha \in \Gamma(X, \Omega_E^{p,q})$ tel que $D''\alpha = 0$, il existe un et un seul $\alpha' \in {}''H_E^{p,q}$ cohomologue à α .

D'après le corollaire 1, $\alpha = \alpha' + \alpha''$, avec $\alpha' \in {}''H_E^{p,q}$ et $\alpha'' = {}''\square\beta$ avec $\beta \in \Gamma(X, \Omega_E^{p,q})$. Alors $D''\alpha = 0$ entraîne $D''\alpha'' = 0$ donc $D''\delta''D''\beta = 0$ d'où $(D''\delta''D''\beta, D''\beta) = 0 \Rightarrow (\delta''D''\beta, \delta''D''\beta) = 0 \Rightarrow \delta''D''\beta = 0$ donc $\alpha = \alpha' + D''\delta''\beta$ et par suite α' est cohomologue à α .

Soit $\alpha \in {}''H_E^{p,q}$ avec $\alpha = D''\beta$, $\beta \in \Gamma(X, \Omega_E^{p,q})$ et démontrons que $\alpha = 0$. En effet $\delta''\alpha = 0$ donc $\delta''D''\beta = 0 \Rightarrow (\delta''D''\beta, \beta) = 0 \Rightarrow (D''\beta, D''\beta) = 0 \Rightarrow D''\beta = 0 \Rightarrow$ $\Rightarrow \alpha = 0$.

THEOREME 2.- <u>Si</u> E <u>est un fibré positif de rang</u> 1, $H^q(X, E \otimes_{\mathcal{O}} \Omega^p_{an}) = 0$ <u>pour</u> $p + q \geq n + 1$.

<u>Démonstration</u>.

Par hypothèse, on peut prendre comme structure kählérienne sur X celle définie par la forme iC_E . Alors $L = iD^2$ et d'après le corollaire 1 du théorème 1 pour tout $\alpha \in {}''H_E^{p,q}$ $([\Lambda, L](\alpha), \alpha) \geq 0 \Rightarrow (n-p-q)(\alpha, \alpha) \geq 0 \Rightarrow (\alpha, \alpha) = 0$ si $p+q \geq n+1$, donc $\alpha = 0$ dans les mêmes conditions. On en déduit que ${}''H_E^{p,q} = \{0\}$ si $p+q \geq n+1$, d'où le théorème d'après la proposition 6.

PROPOSITION 7.- L'opérateur $*$ est orthogonal pour $(\cdot,\cdot)$.

Démonstration. Soient $\alpha \in \Gamma(X,\Omega_E^p)$, $\beta \in \Gamma(X,\Omega_E^{2n-p})$ et démontrons que $(\alpha,*\beta) = (*^{-1}\alpha,\beta)$. En effet

$(\alpha,*\beta) = \int_X < \alpha,*\beta > \tau = \int_X \{\alpha,**\beta\} = (-1)^{2n-p} \int_X\{\alpha,\beta\} = (-1)^p(-1)^{p(2n-p)}\int_X\overline{\{\beta,\alpha\}} =$
$(-1)^p(-1)^{p^2} \int_X \overline{\{\beta,**^{-1}\alpha\}} = (-1)^{p(p+1)} \int_X \overline{<\beta,*^{-1}\alpha>}\tau =$
$\int_X < *^{-1}\alpha,\beta > \tau = (*^{-1}\alpha,\beta)$.

PROPOSITION 8.- Si $u \in \Gamma(X,\Omega_{\mathbb{R}}^{1,1})$ et L_u désigne la multiplication extérieure à gauche par u l'adjoint Λ_u pour $(\cdot,\cdot)$ est donné par la formule $\Lambda_u = *^{-1}L_u *$.

Démonstration. Soient $\alpha \in \Gamma(X,\Omega_E^p)$, $\beta \in \Gamma(X,\Omega_E^{p+2})$ et démontrons que $(u\wedge\alpha,\beta) = (\alpha, *^{-1}(u\wedge*\beta))$. En effet $(u\wedge\alpha,\beta) = \int_X < u\wedge\alpha,\beta > \tau = \int_X\{u\wedge\alpha,*\beta\} =$
$\int_X \{\alpha,u\wedge*\beta\} = \int_X \{\alpha, **^{-1}(u\wedge*\beta)\} = \int_X < \alpha,*^{-1}(u\wedge*\beta) > \tau = (\alpha, *^{-1}(u\wedge*\beta))$.

PROPOSITION 9.- Soit $u \in \Omega_{\mathbb{R}}^{1,1}$ tel que la forme hermitienne associée à u soit positive. Alors si $\alpha \in \Gamma(X,\Omega^{p,o})$ ou $\alpha \in \Gamma(X,\Omega^{o,p})$ $(\omega\wedge\alpha, u\wedge\alpha) \geq 0$.

Démonstration. Supposons, par exemple, que $\alpha \in \Gamma(X,\Omega^{p,o})$. Nous allons vérifier que pour tout $x \in X$, $< \omega\wedge\alpha, u\wedge\alpha >_x \geq 0$. Soit $dz_1,\dots,dz_n$ une base de $\Omega_x^{1,o}$ orthonormale en x pour la forme hermitienne déduite de ω et orthogonale en x pour la forme hermitienne déduite de u . Alors $\omega = \frac{i}{2}\sum_{i=1}^n dz_i\wedge d\bar z_i$ et $u = \frac{i}{2}\sum_{i=1}^n a_i dz_i\wedge d\bar z_i$ où $a_i \geq 0$. Soient $A \subset [1,n]$, card $A = p$, $dz_A = dz_{i_1}\wedge\dots\wedge dz_{i_p}$ où $A = \{i_1,\dots,i_p\}$ et $i_1 <\dots< i_p$.

Alors
$$\omega\wedge dz_A = \frac{i}{2}\sum_{i\notin A} dz_i\wedge d\bar z_i\wedge dz_A$$
et
$$u\wedge dz_{A'} = \frac{i}{2}\sum_{j\notin A'} a_j dz_j\wedge d\bar z_j\wedge dz_{A'}$$
où $A' \subset [1,n]$ et card $A' = p$.

Donc
$$< \omega\wedge dz_A , u\wedge dz_{A'} >_x =$$
$$\frac{1}{4}\sum_{i\notin A}\sum_{j\notin A'} a_j < dz_i\wedge dz_i\wedge dz_A , dz_j\wedge dz_j\wedge dz_{A'} > x =$$
$$\frac{1}{4}\sum_{i\notin A\cup A'} a_i < dz_i\wedge d\bar z_i\wedge dz_A , dz_i\wedge d\bar z_i\wedge dz_{A'} >_x$$

qui est nul sauf si $A = A'$, auquel cas il est égal à $\frac{1}{4} \sum_{i \notin A} a_i \geq 0$.
D'où la proposition.

THEOREME 3.- Si le fibré E est de rang 1, soient $\rho : X \to \mathbb{R}_+$ une fonction continue, Φ_E la forme quadratique associée à $ic_E \in \Omega^{1,1}_{\mathbb{R}}$, Φ_X la forme quadratique associée à ω . Alors

(i) Si $\frac{\Phi_E}{2} \geq \rho\Phi_X$ pour tout $\alpha \in \Gamma(X,\Omega^{n,q}_E)$ ou $\alpha \in \Gamma(X,\Omega^{q,n}_E)$, on a l'inégalité :

$$\int_X q\rho < \alpha,\alpha > \tau \leq \int_X < D''\alpha, D''\alpha > \tau + \int_X < \delta''\alpha, \delta''\alpha > \tau \quad .$$

(ii) Si $-\frac{\Phi_E}{2} \geq \rho\Phi_X$ pour tout $\alpha \in \Gamma(X,\Omega^{0,q}_E)$ ou $\alpha \in \Gamma(X,\Omega^{q,0}_E)$ on a l'inégalité

$$\int_X (n-q)\,\rho < \alpha,\alpha > \tau \leq \int_X < D''\alpha,D''\alpha > \tau + \int_X < \delta''\alpha,\delta''\alpha > \tau \quad .$$

(iii) Si $-\frac{\Phi_E}{2} \geq \rho\Phi_X$ pour tout $\alpha \in \Gamma(X,\Omega^{n,q}_E)$ ou $\alpha \in \Gamma(X,\Omega^{q,n}_E)$ on a l'inégalité

$$\int_X q\rho < \alpha,\alpha > \tau \leq \int_X < D'\alpha,D'\alpha > \tau + \int_X < \delta'\alpha,\delta'\alpha > \tau$$

(iv) Si $\frac{\Phi_E}{2} \geq \rho\Phi_X$ pour tout $\alpha \in \Gamma(X,\Omega^{0,q}_E)$ ou $\alpha \in \Gamma(X,\Omega^{q,0}_E)$ on a l'inégalité

$$\int_X (n-q)\,\rho < \alpha,\alpha > \tau \leq \int_X < D'\alpha,D'\alpha > \tau + \int_X < \delta'\alpha,\delta'\alpha > \tau \quad .$$

Démonstration. Remarquons

a) d'après le théorème 1

$\Delta = 2'\square - i[\Lambda,D^2] = 2''\square + i[\Lambda,D^2]$. Donc pour tout $\alpha \in \Gamma(X,\Omega^{\bullet}_E)$,

$$(\Delta\alpha,\alpha) = 2('\square\alpha,\alpha) - (i[\Lambda,D^2]\alpha,\alpha) = 2(''\square\alpha,\alpha) + (i[\Lambda,D^2]\alpha,\alpha)$$

c'est-à-dire

$$(D\alpha,D\alpha) + (\delta\alpha,\delta\alpha) = 2(D'\alpha,D'\alpha) + 2(\delta'\alpha,\delta'\alpha) - (i[\Lambda,D^2]\alpha,\alpha) =$$
$$= 2(D''\alpha,D''\alpha) + 2(\delta''\alpha,\delta''\alpha) + (i[\Lambda,D^2]\alpha,\alpha) \quad .$$

Or on a $(D\alpha,D\alpha) + (\delta\alpha,\delta\alpha) \geq 0$. Donc

$$\int_X < D''\alpha,D''\alpha > \tau + \int_X < \delta''\alpha,\delta''\alpha > \tau \geq -\left(\frac{i}{2}[\Lambda,D^2]\alpha,\alpha\right)$$

et

$$\int_X < D'\alpha,D'\alpha > \tau + \int_X < \delta'\alpha,\delta'\alpha > \tau \geq \left(\frac{i}{2}[\Lambda,D^2]\alpha,\alpha\right) \quad .$$

b) $\left(\frac{i}{2}[\Lambda,D^2]\alpha,\alpha\right) = \left(\frac{i}{2}(\Lambda D^2 - D^2\Lambda)\alpha,\alpha\right) = \left(\Lambda(\frac{i}{2}\, c_E \wedge \alpha),\alpha\right) - \left(\frac{i}{2} c_E \wedge *^{-1}(\omega\wedge\alpha),\alpha\right) =$

$= \left(\frac{i}{2}\, c_E \wedge\alpha ,\omega\wedge\alpha\right) - \left(*^{-1}(\omega\wedge *\alpha), *^{-1}(\frac{i}{2} c_E \wedge *\alpha)\right) = \left(\frac{i}{2} c_E \wedge\alpha,\omega\wedge\alpha\right) - \left(\omega\wedge *\alpha, \frac{i}{2} c_E \wedge *\alpha\right)$,

d'après les propositions 7 et 8.

c) Si $\alpha \in \Gamma(X,\Omega_E^{p,q})$, $(n-p-q)\alpha = [\Lambda,L]\alpha$ (exp. n°2, §1, prop. 6). Donc

$((n-p-q)\rho\alpha,\alpha) = (\rho\Lambda L\alpha,\alpha) - (\rho L\Lambda\alpha,\alpha) = (\Lambda(\rho\omega\wedge\alpha),\alpha) - (\rho\omega\wedge *^{-1}(\omega\wedge *\alpha),\alpha) =$

$= (\rho\omega\wedge\alpha,\omega\wedge\alpha) - (*^{-1}(\omega\wedge *\alpha), *^{-1}(\rho\omega\wedge *\alpha)) = (\rho\omega\wedge\alpha,\omega\wedge\alpha) - (\omega\wedge *\alpha,\rho\omega\wedge *\alpha)$

d'après les propositions 7 et 8.

<u>Démontrons</u> :

i) D'après (a), il suffit de démontrer que $-\left(\frac{i}{2}[\Lambda,D^2]\alpha,\alpha\right) - (q\rho\alpha,\alpha) \geq 0$ et pour cela d'après (b) et (c) et en tenant compte que $\alpha \in \Gamma(X,\Omega_E^{n,q})$ ou $\alpha \in \Gamma(X,\Omega^{q,n})$ il suffit de démontrer que

$$(\omega\wedge *\alpha, \frac{i}{2} c_E \wedge\alpha) - (\omega\wedge *\alpha ,\rho\omega\wedge *\alpha) = (\omega\wedge *\alpha, (\frac{i}{2} c_E - \rho\omega)\wedge *\alpha) \geq 0$$

ce qui est une conséquence de l'hypothèse $\frac{\Phi_E}{2} \geq \rho\Phi_X$ d'après la proposition 9, vu que $*\alpha \in \Gamma(X,\Omega^{n-q,o})$ ou $*\alpha \in \Gamma(X,\Omega^{o,n-q})$.

ii) D'après (a), il suffit de démontrer que $-\left(\frac{i}{2}[\Lambda,D^2]\alpha,\alpha\right) - ((n-q)\rho\alpha,\alpha) \geq 0$ et pour cela d'après (b) et (c), et en tenant compte que $\alpha \in \Gamma(X,\Omega_E^{o,q})$ ou $\alpha \in \Gamma(X,\Omega_E^{q,o})$ il suffit de démontrer que

$$-\left(\frac{i}{2} c_E \wedge\alpha ,\omega\wedge\alpha\right) - (\rho\omega\wedge\alpha , \omega\wedge\alpha) = ((-\frac{i}{2}\, c_E - \rho\omega)\wedge\alpha,\omega\wedge\alpha) \geq 0$$

ce qui est conséquence de l'hypothèse $-\frac{\Phi_E}{2} \geq \rho\Phi_X$ suivant la proposition 9, vu que $\alpha \in \Gamma(X,\Omega_E^{o,q})$ ou $\alpha \in \Gamma(X,\Omega_E^{q,o})$.

iii) D'après (a), il suffit de démontrer que $\left(\frac{i}{2}[\Lambda,D^2]\alpha,\alpha\right) - (q\rho\alpha,\alpha) \geq 0$ et pour cela d'après (b) et (c) et en tenant compte que $\alpha \in \Gamma(X,\Omega_E^{n,q})$ ou $\alpha \in \Gamma(X,\Omega_E^{q,n})$, il suffit de démontrer que

$$-\left(\omega\wedge *\alpha , \frac{i}{2}\, c_E \wedge *\alpha\right) - (\omega\wedge *\alpha,\rho\omega\wedge *\alpha) = (\omega\wedge *\alpha,(-\frac{i}{2} c_E - \rho\omega)\wedge *\alpha) \geq 0$$

ce qui est une conséquence de l'hypothèse $-\frac{\Phi_E}{2} \geq \rho\Phi_X$ d'après la proposition 9, vu que $*\alpha \in \Gamma(X,\Omega_E^{n-q,o})$ ou $*\alpha \in \Gamma(X,\Omega_E^{o,n-q})$.

iv) D'après (a), il suffit de démontrer que $\left(\frac{i}{2}[\Lambda,D^2]\alpha,\alpha\right) - ((n-q)\rho\alpha,\alpha) \geq 0$

et pour cela d'après (b) et (c) et en tenant compte que $\alpha \in \Gamma(X,\Omega^{q,q})$ ou $\alpha \in \Gamma(X,\Omega^{q,o})$ il suffit de démontrer que

$$\left(\frac{i}{2}c_E \wedge \alpha, \omega\wedge\alpha\right) - (\rho\omega\wedge\alpha, \omega\wedge\alpha) = \left(\left(\frac{i}{2}c_E - \rho\omega\right)\wedge\alpha, \omega\wedge\alpha\right) \geq 0$$

ce qui est une conséquence de l'hypothèse $\frac{\Phi_E}{2} \geq \rho\Phi_X$ d'après la proposition 9 vu que $\alpha \in \Gamma(X,\Omega_E^{o,q})$ ou $\alpha \in \Gamma(X,\Omega_E^{q,o})$.

THEOREME 4.- Sous les mêmes hypothèses que le théorème 3 si $|\Phi_E| \geq \rho\Phi_X$

i) pour tout $\alpha \in \Gamma(X,\Omega_E^{n,q})$ ou $\alpha \in \Gamma(X,\Omega_E^{q,n})$ on a l'inégalité

$$\int_X q\rho < \alpha,\alpha > \tau \leq \int_X < D\alpha, D\alpha > \tau + \int_X < \delta\alpha,\delta\alpha > \tau \quad .$$

ii) pour tout $\alpha \in \Gamma(X,\Omega_E^{o,q})$ ou $\alpha \in \Gamma(X,\Omega^{q,o})$ on a l'inégalité

$$\int_X (n-q)\ \rho < \alpha,\alpha > \tau \leq \int_X < D\alpha, D\alpha > \tau + \int_X < \delta\alpha,\delta\alpha > \tau \quad .$$

Démonstration.

La démonstration est analogue à celle du théorème 3, en remarquant que les formules $\Delta = 2\,'\Box - i[\Lambda,D^2] = 2\,''\Box + i[\Lambda,D^2]$ entrainent que

$$\int_X < D\alpha, D\alpha > \tau + \int_X < \delta\alpha,\delta\alpha > \tau \geq -(i[\Lambda,D^2]\alpha,\alpha)$$

et

$$\int_X < D\alpha, D\alpha > \tau + \int_X < \delta\alpha,\delta\alpha > \tau \geq (i[\Lambda,D^2]\alpha,\alpha)$$

car

$$('\Box\alpha,\alpha) = (D'\alpha,D'\alpha) + (\delta'\alpha,\delta'\alpha) \geq 0$$

et

$$(''\Box\alpha,\alpha) = (D''\alpha,D''\alpha) + (\delta''\alpha,\delta''\alpha) \geq 0 \quad .$$