

Astérisque

DANIEL ALIBERT

Théorie de Hodge classique

Astérisque, tome 17 (1974), p. 27-50

http://www.numdam.org/item?id=AST_1974__17__27_0

© Société mathématique de France, 1974, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la collection « Astérisque » (<http://smf4.emath.fr/Publications/Asterisque/>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

THEORIE DE HODGE CLASSIQUE

par Daniel ALIBERT

§ 1. Algèbre extérieure sur un espace hermitien.

1.1. Soient E un espace vectoriel sur \mathbb{C} de dimension n , \bar{E} l'espace anti-isomorphe à E .

Posons

$$E' = \text{Hom}_{\mathbb{C}}(E, \mathbb{C}) ,$$

$$E'' = \text{Hom}_{\mathbb{C}}(\bar{E}, \mathbb{C}) .$$

L'espace E' est le dual de E et l'espace E'' est l'antidual de E .

Posons

$$F_0 = \text{Hom}_{\mathbb{R}}(E, \mathbb{R}) ,$$

$$F = \text{Hom}_{\mathbb{R}}(E, \mathbb{C}) .$$

On a

$$(1) \quad F \simeq F_0 \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C} ,$$

$$(2) \quad F \simeq E' \oplus E'' .$$

L'espace F_0 est un espace vectoriel sur \mathbb{R} et l'espace F est un espace vectoriel sur \mathbb{C} . Pour tout espace vectoriel M sur un corps k , on note

$\Lambda_k M$ l'algèbre extérieure de M sur k .

Posons

$$\Lambda F = \Lambda F_{\mathbb{C}} ,$$

$$\Lambda F_0 = \Lambda F_0_{\mathbb{R}} .$$

L'isomorphisme (1) s'étend en un isomorphisme

$$\Lambda F \simeq \Lambda F_0 \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C} .$$

Les éléments de ΛF appartenant à l'image du morphisme canonique

$$\Lambda F_0 \longrightarrow \Lambda F_0 \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C}$$

seront dits réels.

On note $\Lambda^p F$ la composante de degré p de ΛF , et

$$(2) \text{bis } P_p : \Lambda F \longrightarrow \Lambda^p F$$

la projection canonique.

On note $\Lambda^{a,b}_F$ le sous-espace de ΛF engendré par $(\Lambda^a E') \wedge (\Lambda^b E'')$.
Les éléments de $\Lambda^{a,b}_F$ sont dits de bidegré (a,b) .

La décomposition (2) donne une décomposition

$$\Lambda^p F = \bigoplus_{a+b=p} \Lambda^{a,b}_F .$$

Soit C l'endomorphisme de F transposé de la multiplication par i dans E . On notera encore C l'endomorphisme de ΛF qu'il définit.

On a

$$(3) \quad C \Big|_{\Lambda^{a,b}_F} = i^{a-b} .$$

1.2. Soit H une forme sesquilinéaire à symétrie hermitienne sur E ,
linéaire en le premier argument, antilinéaire en le second argument.

Posons

$$H(t, t') = S(t, t') + iA(t, t') ,$$

où S et A sont réelles. Alors S est une forme \mathbb{R} -bilinéaire symétrique
et A une forme \mathbb{R} -bilinéaire alternée.

On a

$$(4) \quad S(t, t') = -A(t, it') .$$

La connaissance de H est donc équivalente à celle de A .

Soit ω l'élément de $\Lambda^2 F$ correspondant à A ; ω est réelle et de
plus

$$A(it, it') = A(t, t') ,$$

donc

$$(5) \quad C\omega = \omega .$$

Il en résulte que $\omega \in \Lambda^{1,1}_{F_0}$. Inversement soit $\omega \in \Lambda^{1,1}_{F_0}$ une forme
réelle, A la forme alternée correspondante, on vérifie aisément que la
forme

$$H(t, t') = -A(t, it') + iA(t, t')$$

est sesquilinéaire à symétrie hermitienne. On peut donc énoncer

PROPOSITION 1.- Il y a une correspondance biunivoque entre les formes ses-
quilineaires à symétrie hermitienne sur E et les éléments réels de $\Lambda^{1,1}_F$.

1.3. Supposons que E soit un espace hermitien. Soient H la forme hermitienne de structure et ω l'élément de $\Lambda^{1,1}_F$ qui lui correspond d'après la proposition 1. Avec les notations de 1.2, S définit sur l'espace vectoriel réel sous-jacent à E une structure euclidienne, donc une structure euclidienne sur F_0 . On notera \langle , \rangle le produit scalaire ainsi défini sur F_0 .

Prolongeons \langle , \rangle à F par \mathbb{C} -bilinearité et notons encore \langle , \rangle le produit obtenu.

PROPOSITION 2.- Le produit \langle , \rangle a les propriétés suivantes :

$$\text{pour tous } Z \in E', Z' \in E' \quad \langle Z, Z' \rangle = 0$$

$$\text{pour tous } Z \in E'', Z' \in E'' \quad \langle Z, Z' \rangle = 0 .$$

Si l'on note U_Z l'élément de E correspondant à $Z \in E'$ par l'isomorphisme canonique, et U'_Z l'élément de E correspondant à $Z \in E''$ par l'anti-isomorphisme canonique, on a

$$\text{pour tous } Z \in E', Z' \in E'' \quad \langle Z, Z' \rangle = 2H(\overline{U_Z}, U'_{Z'}) .$$

De plus, pour tous $Z \in F, Z' \in F \quad \langle Z, Z' \rangle = \langle Z', Z \rangle$.

Démonstration.

Soient $Z, Z' \in F$. On a

$$\begin{aligned} \langle Z, Z' \rangle &= \left\langle \frac{Z + \bar{Z}}{2}, \frac{Z' + \bar{Z}'}{2} \right\rangle - \left\langle \frac{Z - \bar{Z}}{2i}, \frac{Z' - \bar{Z}'}{2i} \right\rangle \\ &+ i \left\langle \frac{Z - \bar{Z}}{2i}, \frac{Z' + \bar{Z}'}{2} \right\rangle + i \left\langle \frac{Z + \bar{Z}}{2}, \frac{Z' - \bar{Z}'}{2i} \right\rangle . \end{aligned}$$

$$\text{Si } Z \in E', \quad \forall x \in E, \quad Z(x) = H(x, U_Z) .$$

$$\text{Si } Z \in E'', \quad \forall x \in E, \quad Z(x) = H(U'_Z, x) .$$

$$\begin{aligned} \text{donc si } z \in E' \quad , \quad & \frac{z + \bar{z}}{2}(x) = S(x, u_z) \\ & \frac{z - \bar{z}}{2}(x) = S(x, iu_z) \\ \text{si } z \in E'' \quad , \quad & \frac{z + \bar{z}}{2}(x) = S(x, u'_z) \\ & \frac{z - \bar{z}}{2}(x) = S(x, -iu'_z) \quad . \end{aligned}$$

La proposition en résulte ainsi que de la formule (4).

Le produit \langle , \rangle se prolonge alors $\mathbb{A}F$ de la manière suivante :

$$(6) \quad \begin{aligned} \langle t_1 \wedge \dots \wedge t_p \quad , \quad t'_1 \wedge \dots \wedge t'_q \rangle &= 0 \quad \text{si } p \neq q \quad , \\ \langle t_1 \wedge \dots \wedge t_p \quad , \quad t'_1 \wedge \dots \wedge t'_p \rangle &= \det(\langle t_i, t'_j \rangle) \quad . \end{aligned}$$

PROPOSITION 3.- Pour le produit scalaire \langle , \rangle on a une décomposition orthogonale

$$\mathbb{A}^p F = \bigoplus_{\substack{a,b \\ a+b=p \\ a \leq b}}^{a,b} V F \quad ,$$

où l'on a posé

$$\begin{aligned} V F &= \mathbb{A}^{a,b} F \oplus \mathbb{A}^{b,a} F \quad \text{si } a < b \quad , \\ V F &= \mathbb{A}^{a,a} F \quad . \end{aligned}$$

De plus on a les propriétés suivantes :

$$\begin{aligned} \alpha) \quad & \text{si } a \neq b \quad , \quad \mathbb{A}^{a,b} F \quad \text{est totalement isotrope ;} \\ \beta) \quad & \text{si } z_1, \dots, z_n \quad \text{est une base duale d'une base orthonormale de } E \quad \text{on a} \\ (7) \quad & \langle z_{i_1} \wedge \dots \wedge z_{i_a} \wedge \bar{z}_{j_1} \wedge \dots \wedge \bar{z}_{j_b} \quad , \quad z_{k_1} \wedge \dots \wedge z_{k_b} \wedge \bar{z}_{\rho_1} \wedge \dots \wedge \bar{z}_{\rho_a} \rangle \\ & = 0 \quad \text{si } \{i_1, \dots, i_a\} \neq \{\rho_1, \dots, \rho_a\} \quad \text{ou} \\ & \text{si } \{j_1, \dots, j_b\} \neq \{k_1, \dots, k_b\} \quad , \\ & = (-1)^{ab} 2^{a+b} \quad \text{si } \{i_1, \dots, i_a\} = \{\rho_1, \dots, \rho_a\} \\ & \quad \text{et si } \{j_1, \dots, j_b\} = \{k_1, \dots, k_b\} \\ \text{et si} \quad & i_1 < i_2 < \dots < i_a \quad , \quad j_1 < \dots < j_b \quad , \quad \rho_1 < \dots < \rho_a \quad , \quad k_1 < \dots < k_b \quad . \end{aligned}$$

Démonstration.

Elle est immédiate à partir de la proposition 2 et des formules (6).

Remarque.- 1) Dans l'exposé n°1, (1.1), on étend la structure euclidienne de F_0 à $\mathbb{A}F_0$. Si l'on prolonge le produit scalaire ainsi obtenu à $\mathbb{A}F$ par \mathbb{C} -linéarité, on retrouve le produit \langle , \rangle .

1.4. Soit z_1, \dots, z_n une base orthonormée de E' . Posons pour tout $1 \leq j \leq n$:

$$z_j = x_j + iy_j ,$$

où x_j et y_j sont des éléments de F_0 , (1). On a

$$\begin{aligned} \omega &= \frac{1}{2i} \sum_{j=1}^n z_j \wedge \bar{z}_j , \\ &= \sum_{j=1}^n y_j \wedge x_j . \end{aligned}$$

Donc

$$(7 \text{ bis}) \quad \omega^n = n! \prod_{j=1}^n y_j \wedge x_j .$$

Les éléments $y_1, x_1, \dots, y_n, x_n$ de F_0 forment une base orthonormée de F_0 pour la structure euclidienne définie par la forme bilinéaire $S = \text{Re}H$.

Choisissons sur F_0 l'orientation pour laquelle ω^n est positif.

La base $y_1, x_1, \dots, y_n, x_n$ est alors directe (7 bis) donc $\prod_{j=1}^n y_j \wedge x_j$ est l'élément de volume associé à la structure euclidienne et à l'orientation sur F_0 précisées ci-dessus (exp. 1, 1.1). Notons τ cet élément de volume.

On a

$$\omega^n = n! \tau .$$

Prolongeons par \mathbb{C} -linéarité l'isomorphisme

$$* : \mathbb{A}^p F_0 \longrightarrow \mathbb{A}^{2n-p} F_0 ,$$

associé à τ , (exp. n°1, 1.1), en un isomorphisme

$$* : \mathbb{A}^p F \longrightarrow \mathbb{A}^{2n-p} .$$

On a la relation

$$(8) \quad \alpha \wedge * \beta = \langle \alpha, \beta \rangle \tau , \text{ pour tout couple } \alpha, \beta \in \mathbb{A}^p F .$$

DEFINITION.- On note L l'endomorphisme de \mathbb{A}^p_F défini par

$$L\alpha = \alpha \wedge \omega = \omega \wedge \alpha \quad .$$

Si $\alpha \in \mathbb{A}^p_F$, $L\alpha \in \mathbb{A}^{p+2}_F$.

DEFINITION.- On note Λ l'endomorphisme de \mathbb{A}^p_F égal à $*^{-1}L*$.

Si $\alpha \in \mathbb{A}^p_F$, $\Lambda\alpha \in \mathbb{A}^{p-2}_F$.

PROPOSITION 5.- L'endomorphisme Λ est l'adjoint de L pour \langle , \rangle .

Démonstration.

Soient $\alpha \in \mathbb{A}^{p-2}_F$, $\beta \in \mathbb{A}^p_F$, d'après (8)

$$\langle L\alpha, \beta \rangle_\tau = \langle \alpha \wedge \omega, \beta \rangle_\tau \quad ,$$

donc

$$\begin{aligned} \langle L\alpha, \beta \rangle_\tau &= \langle \alpha \wedge \omega, \beta \rangle_\tau \\ &= \langle \alpha \wedge L\beta \rangle_\tau \\ &= \langle \alpha, \Lambda\beta \rangle_\tau \quad . \end{aligned}$$

DEFINITION.- On pose

$$(8 \text{ bis}) \quad T = \sum_{p=1}^{2\omega} (n - p) P_p \quad . \quad (\text{Voir (2) bis}) \quad .$$

PROPOSITION 6.- On a les relations

$$(9) \quad [\Lambda, L] = T \quad ,$$

$$(10) \quad [T, \Lambda] = 2\Lambda \quad ,$$

$$(11) \quad [T, L] = -2L \quad .$$

Démonstration.

(10) et (11) sont claires, il suffit de montrer (9).

Il faut introduire quelques notations : pour $M \subset [1, \dots, n]$, on pose

$$w_M = \prod_{\mu \in M} (z_\mu \wedge \bar{z}_\mu)$$

(z_1, \dots, z_n) étant une base de E' duale d'une base orthonormée de E .

ΛF a une base formée d'éléments

$$z_{i_1} \wedge \dots \wedge z_{i_a} \wedge \bar{z}_{j_1} \wedge \dots \wedge \bar{z}_{j_b} \quad .$$

Pour $A = [i_1, \dots, i_a] \subset [1, \dots, n]$ avec $i_1 < i_2 < \dots < i_a$, on pose

$$\bar{z}_A = \bar{z}_{i_1} \wedge \dots \wedge \bar{z}_{i_a}$$

$$z_A = z_{i_1} \wedge \dots \wedge z_{i_a} \quad .$$

Il en résulte que tout élément de la base de ΛF citée ci-dessus s'écrit :

$$z_A \wedge \bar{z}_B \wedge W_M \quad ,$$

A, B, M étant des parties deux à deux disjointes de $[1, \dots, n]$. Posons

$$M' = [1, \dots, n] - A - B - M \quad ;$$

$$a = \# A \quad + \quad \# M$$

$$b = \# B \quad + \quad \# M$$

$$p = a + b = \# A + \# B + 2 \# M \quad .$$

On vérifie alors à l'aide de (8) et (7) que :

$$(12) \quad *(z_A \wedge \bar{z}_B \wedge W_M) = (-1)^{\# M + \frac{p(p+1)}{2}} (-2i)^{p-n} i^{a-b} z_A \wedge \bar{z}_B \wedge W_{M'} \quad .$$

De même on a

$$(13) \quad L(z_A \wedge \bar{z}_B \wedge W_M) = \frac{i}{2} z_A \wedge \bar{z}_B \left(\sum_{\mu \in M'} W_M \cup \{\mu\} \right) \quad ,$$

cette expression étant nulle si $M' = \emptyset$.

$$(14) \quad \Lambda(z_A \wedge \bar{z}_B \wedge W_M) = \frac{2}{i} z_A \wedge \bar{z}_B \wedge \left(\sum_{\mu \in M} W_M - \{\mu\} \right) \quad ,$$

cette expression étant nulle pour $M = \emptyset$.

La relation (9) en résulte alors facilement.

Les relations (9), (10), (11) définissent une représentation de l'algèbre de Lie $sl_2(\mathbb{C})$ dans ΛF .

1.5. Rappels sur les représentations d'algèbre de Lie semi-simples complexes

(voir [2]). Soient \mathfrak{g} une algèbre de Lie semi-simple complexe, \mathfrak{h} une sous-

algèbre de Cartan de \mathfrak{g} , R le système de racines correspondant, $S = \{\alpha_1, \dots, \alpha_n\}$

II-08

une base de R . Soit R^+ l'ensemble des racines positives relativement à S .

Soit E un g -module de dimension finie. Pour toute forme linéaire χ sur \mathfrak{h} on pose :

$$E_\chi = \{x \in E \mid \forall H \in \mathfrak{h}, H(x) = \chi(H)x\} .$$

Un élément de E_χ est dit de poids χ . Si $E_\chi \neq 0$, χ est un poids de E .

DEFINITION.— Soit χ un poids de E . On dit que χ est un plus haut poids de E si $E_{\chi + \alpha} = 0$, $\forall \alpha \in R^+$.

On a les propriétés suivantes :

- 1) Tout g -module simple de dimension finie admet un plus haut poids unique.
- 2) Deux g -modules simples de dimensions finies sont isomorphes si et seulement s'ils ont le même plus haut poids.
- 3) Un g -module engendré par un élément de plus haut poids est simple.
- 4) Si χ est un plus haut poids de E , E contient un sous-module simple de plus haut poids χ .

De plus, dans le cas de $Sl_2(\mathbb{C})$ on a des résultats plus précis : $Sl_2(\mathbb{C})$ est l'algèbre des matrices 2×2 de trace nulle. Elle admet pour base

$$T = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} .$$

$$\Lambda = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} ,$$

$$L = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} .$$

T, Λ, L satisfont aux relations (9), (10), (11). $\mathfrak{h} = \mathbb{C}T$, et les caractères sont définis par leur valeur en T . Les racines sont $+2$ et -2 , $+2$ est la racine positive.

Par dérivation, on obtient une représentation de $Sl_2(\mathbb{C})$ notée U_m dans $S^m(\mathbb{C}^2)$ qui a les propriétés suivantes :

PROPOSITION 7.- U_m est simple, de plus haut poids m .

Les poids sont $-m$, $-m+2, \dots, m-2$, m . Les sous-espaces propres correspondant sont de dimension 1. Pour un élément $v \neq 0$ de poids $m-2a$, $0 \leq a \leq m$, on a

$$\begin{aligned} \Lambda^s L^s v &= (a+1)(a+2) \dots (a+s)(m-a-s+1) \dots (m-a) v , \\ L v &= 0 \quad \text{si } a = m , \\ (15) \quad L v &\neq 0 \quad \text{si } a \neq m , \\ \Lambda v &= 0 \quad \text{si } a = 0 , \\ \Lambda v &\neq 0 \quad \text{si } a \neq 0 . \end{aligned}$$

De plus, pour tout élément v de poids $m-2a$, il existe un élément w de poids m tel que

$$v = L^a w .$$

DEFINITION.- Soit E une représentation de $Sl_2(\mathbb{C})$. On dit que $v \in E$ est primitif si $\Lambda v = 0$.

Il résulte de (15) que les éléments primitifs de U_m sont ceux de poids m , c'est-à-dire de plus haut poids. En particulier, d'après la proposition 7, tout élément de U_m , vecteur propre de T , est l'image par une puissance de L d'un élément primitif.

Ces résultats s'appliquent immédiatement à une représentation isotypique de $Sl_2(\mathbb{C})$.

1.6. La représentation $Sl_2(\mathbb{C}) \rightarrow \text{End} \Lambda F$ définie dans 1.4 se décompose en composantes isotypiques :

$$\Lambda F = \bigoplus_{\alpha} \pi_{\alpha} .$$

D'après (8 bis) le poids correspondant à $\Lambda^p F$ est $n-p$. La racine positive étant $+2$, n et $n-1$ sont les plus hauts poids. D'après (1.5

propriété 4), il leur correspond des composantes isotypiques qu'on notera respectivement π_0 et π_1 .

On a
$$\Lambda F = \pi_0 \oplus \pi_1 \oplus \pi$$

et les plus hauts poids du module π sont $n-2$, $n-3$.

Il en résulte une décomposition

$$\Lambda F = \pi_0 \oplus \dots \oplus \pi_{n-1} \oplus \pi_n,$$

où π_i , $i < n$ a pour plus haut poids $n-i$, et où π_n correspond à la représentation triviale. Il est clair d'après la proposition 7 que

$$(16) \quad \pi_i \cap \Lambda^q F \neq \{0\}$$

si et seulement si $q-i$ est pair et $q-i \geq 0$, $2n-q-i \geq 0$.

PROPOSITION 8.- Pour $p < n$, $L^{n-p} : \Lambda^p F \longrightarrow \Lambda^{2n-p} F$ est un isomorphisme.

Démonstration.

Cela résulte immédiatement des relations (15).

DEFINITION.- On notera Prim_p l'ensemble des éléments primitifs de π_p . C'est aussi l'ensemble des éléments primitifs de $\Lambda^p F$ d'après 1.5 et (16).

THEOREME 1.- 1°) Tout élément $v \in \Lambda^p F$ s'écrit d'une manière unique

$$(17) \quad v = \sum_{r \geq (p-n)^+} L^r v_r, \quad \text{où } v_r \in \text{Prim}_{p-2r}.$$

2°) Il existe des éléments de l'algèbre libre associative à deux indéterminées sur Φ , $\Phi_{p,r}$ tels que $\forall v \in \Lambda^p F$

$$(18) \quad v_r = \Phi_{p,r}(L, \Lambda) v.$$

Démonstration.

1°) Il résulte de 1.6 et de la décomposition de ΛF .

2°) Traitons le cas où p est pair

$$v = v_0 + Lv_1 + \dots + L^{p/2} v_{p/2}$$

$$\begin{aligned} \Lambda^{p/2}_V &= \Lambda^{p/2} L^{p/2} v_{p/2} \\ &= cv_{p/2} \text{ , d'après (15) .} \end{aligned}$$

C ∈ ℤ d'où le résultat par récurrence.

1.7. Λ est bihomogène, donc on a une décomposition

$$\text{Prim}_p = \bigoplus_{a+b=p} \text{Prim}_{a,b} \text{ .}$$

Su(E') opère sur E' , et également sur E'' par la représentation contragrédiente. Donc Su(E') opère sur F , et ΛF par dérivation.

Soit z₁, ..., z_n une base de E' , duale d'une base orthonormale de E . Dans su(E') soit ℔ la sous-algèbre des matrices diagonales pour cette base.

Soient χ₁...χ_n les caractères associés. On a

$$(19) \quad \sum_{i=1}^n \chi_i = 0 \text{ .}$$

Les racines sont les χ_i - χ_j , i ≠ j . On convient que les positives sont celles où i < j .

Prim_{a,b} étant construit uniquement à partir de la structure hermitienne de E , c'est un Su(E')-module.

THEOREME 2.- Prim_{a,b} est un Su(E')-module simple.

Démonstration.

Il faut d'abord montrer le lemme.

LEMME.- Tout poids de la représentation de Su(E') dans Λ^{a,b}F s'écrit de manière unique

$$\chi = \sum_{i=1}^n n_i \chi_i \text{ avec } n_i \geq 0 \text{ , } \exists i_\chi \text{ tel que } n_{i_\chi} = 0 \text{ .}$$

De plus, n_i ≤ 2 , V_i et # {i | n_i = 2} ≤ a .

Démonstration.

La première assertion résulte de (19). Démontrons la seconde. Soient

$$\begin{aligned} \chi(H_{i,j}) &= 2 \quad \text{si } (i,j) \in A \times B \\ &= 1 \quad \text{si } (i,j) \in A \times C \cup C \times B \\ &= 0 \quad \text{sinon} \end{aligned}$$

d'où

$$d = \pi_{A \times C} \frac{1+j-i}{j-i} \pi_{C \times B} \frac{1+j-i}{j-i} \pi_{A \times B} \frac{2+j-i}{j-i} .$$

Soit

$$d = \binom{n}{a} \binom{n}{b} - \binom{n}{a-1} \binom{n}{b-1} .$$

Donc $d = \dim \text{Prim}_{a,b}$; en effet $\text{Prim}_{a,b} = \text{Ker}(\Lambda : \mathbb{A}^{a,b} \mathbb{F} \longrightarrow \mathbb{A}^{a-1,b-1} \mathbb{F}) .$

COROLLAIRE. - Pour tout $w \in \text{Prim}_p$ on a

$$\begin{aligned} 1^\circ) \text{ si } r \leq n-p, \quad & p \frac{p+1}{2} \frac{r!}{(n-p-r)!} L^{n-p-r} Cw . \\ (20) \quad *L^r w &= (-1) \end{aligned}$$

2°) si $r > n-p$

$$(20') \quad L^r w = 0 .$$

Démonstration.

Le 2 est clair d'après (15) et (16). Démontrons 1°). Les endomorphismes

* et L^{n-p} sont deux SuE' -isomorphismes :

$$\text{Prim}_{a,b} \longrightarrow (\text{Ker } L)_{n-b,n-a} \quad (a+b=p) .$$

Donc il existe $\gamma_{a,b} \in \mathbb{C}$ tel que

$$*w = \gamma_{a,b} L^{n-p} w .$$

Calculons $\gamma_{a,b}$ en substituant dans cette formule

$$\begin{aligned} w &= z_1 \wedge \dots \wedge z_a \wedge \bar{z}_n \wedge \dots \wedge \bar{z}_{n-b+1} \\ *w &= (-1)^{\frac{p(p+1)}{2}} (-2i)^{p-n} w \wedge \left(\prod_{j=a+1}^{n-b} z_j \wedge \bar{z}_j \right) \end{aligned}$$

d'après (12).

$$L^{n-p} w = \left(\frac{i}{2}\right)^{n-p} (n-p)! w \wedge \prod_{j=a+1}^{n-b} (z_j \wedge \bar{z}_j) .$$

Il en résulte que $\gamma_{a,b}$ vaut

$$\gamma_{a,b} = (-1)^{\frac{p(p+1)}{2}} \frac{i^{a-b}}{(n-p)!} .$$

Or suivant (3), $C \mid \Delta^{a,b}_F = i^{a-b}$ donc pour tout $w \in \text{Prim}_p$ on a

$$*w = (-1)^{\frac{p(p+1)}{2}} \frac{1}{(n-p)!} L^{n-p} Cw .$$

Pour obtenir le corollaire, il faut maintenant démontrer le

LEMME.- Soit $w \in \text{Prim}_p$. Pour tout $s \leq r$ on a

$$(21) \quad \Lambda^s L^r w = r(r-1)\dots(r-s+1)(n-p-r+1)\dots(n-p-r+s) L^{r-s} w .$$

Démonstration.

Cela résulte en effet de la première des relations (15) avec

$$m = n - p , \quad a = r - s , \quad v = L^{r-s} w .$$

Démonstration du corollaire.

On a

$$\begin{aligned} *L^r w &= (*L^{r-1}) *w \\ &= \Lambda^r *w \\ &= (-1)^{\frac{p(p+1)}{2}} \frac{1}{(n-p)!} \Lambda^r L^{n-p} Cw \end{aligned}$$

d'où le résultat d'après (21).

PROPOSITION 9.- Dans la décomposition (17), si $L^q v = 0$, alors $v_r = 0$ pour tout $r \geq (p+q-n)^+$.

Démonstration.

On a

$$L^q v = \sum L^{q+r} v_r = 0 , \quad v_r \in \text{Prim}_{p-2r} .$$

Or suivant le corollaire du théorème 2, 2°, on a (20'),

$$L^{q+r} v_r = 0$$

si $q+r > n-p+2r$

soit $r < p+q-n$.

Donc

$$0 = \sum_{r \geq (p+q-n)^+} L^{q+r} v_r = \sum_{q+r \geq (p+2q-n)^+} L^{q+r} v_r ,$$

donc $v_r = 0$ pour ces valeurs de r .

§ 2. Géométrie kählérienne locale.

2.1. Soit X une variété \mathbb{C} -analytique de dimension n . Notons Ω_X le faisceau des formes différentielles C^∞ complexes de X , et $\Omega_X^{a,b}$ le sous-faisceau des formes de bidegré (a,b) .

Dans un système de coordonnées locales z_1, \dots, z_n , une forme α de bidegré (a,b) s'écrit

$$\alpha = \sum f_I dz_{i_1} \wedge \dots \wedge dz_{i_a} \wedge d\bar{z}_{j_1} \wedge \dots \wedge d\bar{z}_{j_b}$$

où les f_I , pour $I = [i_1, \dots, i_a, j_1, \dots, j_b]$, sont les fonctions C^∞ .

Il en résulte que $d\alpha$ est somme d'une forme de bidegré $(a+1,b)$ notée $d'\alpha$ et d'une forme de bidegré $(a,b+1)$ notée $d''\alpha$. On a

$$(1) \quad \begin{aligned} d' : \Omega_X^{a,b} &\longrightarrow \Omega_X^{a+1,b} , \\ d'' : \Omega_X^{a,b} &\longrightarrow \Omega_X^{a,b+1} , \\ d &= d' + d'' , \end{aligned}$$

et $d^2 = d''^2 = d'd'' + d''d' = 0$.

Soit ω une forme différentielle réelle de bidegré $(1,1)$. En tout point x de X , ω définit une forme sesquilinéaire à symétrie hermitienne H_x sur $T_{X,x}$ (§1.1, prop. 1).

DEFINITION.- Une variété \mathbb{C} -analytique X munie d'une forme ω réelle de bidegré $(1,1)$ sera dite hermitienne si H_x est positive non dégénérée en tout point $x \in X$.

La forme ω s'appelle la forme fondamentale de la variété hermitienne (X,ω) .

Une variété hermitienne (X, ω) a de manière naturelle une structure riemannienne, ce qui permet de définir des endomorphismes $*$, Δ , δ (cf. exposé n°1).

On définira également les endomorphismes L et Λ par les formules

$$\begin{aligned} L\alpha &= \alpha \wedge \omega \quad , \\ \Lambda\alpha &= *^{-1} L * \alpha \quad . \end{aligned}$$

DEFINITION.— Une variété hermitienne (X, ω) est dite kählérienne si ω est fermée.

PROPOSITION 1.— Soit (X, ω) une variété kählérienne. On a les relations

$$\begin{aligned} (2) \quad Ld &= dL \quad , \\ (3) \quad \Lambda C^{-1} dC - C^{-1} dC\Lambda &= \delta \quad , \\ (4) \quad L\delta - \delta L &= C^{-1} dC \quad . \end{aligned}$$

Démonstration.

(2) est immédiate sachant que $d\omega = 0$. (3) et (4) sont équivalentes par adjonction. Pour démontrer (3), démontrons le

LEMME.— Soit $M = \bigoplus_{0 \leq p \leq 2n} M_p$ un module gradué. Soient L, d, Λ, C des endomorphismes de M de degrés respectifs $2, 1, -2, 0$. Soit $*$ un automorphisme de M tel que

$$* : M_p \longrightarrow M_{2n-p}$$

soit un isomorphisme.

On pose $\text{Prim}_p = \text{Ker}(\Lambda|_{M_p})$ et $\delta = -*d*$. On suppose vérifiées les relations

$$\begin{aligned} Ld &= dL \quad , \\ C\Lambda &= \Lambda C \quad , \\ CL &= LC \quad , \end{aligned}$$

et les relations (17), (20), (20') et (21) du paragraphe 1. On suppose de plus

$C^2|_{M_p} = (-1)^P$. Alors on a la relation (3) ci-dessus.

Démonstration.

D'après (17), il suffit de démontrer l'égalité

$$(31) \quad \Lambda C^{-1} dC L^r \alpha - C^{-1} dC \Lambda L^r \alpha = \delta L^r \alpha ,$$

pour tout $\alpha \in \text{Prim}_p$ et tout r .

1) Calculons le premier membre de (31). On a d'après (21)

$$\Lambda L^r \alpha = r(n - p - r + 1) L^{r-1} \alpha .$$

On a également

$$C^{-1} dC \alpha = \sum_{i \geq (p+1-n)^+} L^i \alpha , \quad \alpha_i \in \text{Prim}_i ,$$

suisvant (17).

De plus $\alpha \in \text{Prim}_p$ donc

$$L^{n-p+1} \alpha = 0 \quad (\text{d'après (20')}).$$

Il en résulte

$$\alpha_i = 0 , \quad \forall i \geq 2 ,$$

car la proposition 9 du paragraphe 1 est une conséquence formelle de (17) et (20').

Donc

$$C^{-1} dC \alpha = \alpha_0 + L \alpha_1 .$$

Le premier membre de (31) s'écrit donc

$$\Lambda L^r \alpha_0 + \Lambda L^{r+1} \alpha_1 - r(n - p - r + 1)(L^{r-1} \alpha_0 + L^r \alpha_1) ,$$

soit sachant que $\alpha_0 \in \text{Prim}_{p+1}$ et $\alpha_1 \in \text{Prim}_{p-1}$,

$$- r L^{r-1} \alpha_0 + (n - p - r + 1) L^r \alpha_1 .$$

2) Calculons le second membre de (31). On a d'après (20)

$$*L^r \alpha = (-1)^{\frac{p(p+1)}{2}} \frac{r!}{(n-p-r)!} L^{n-p-r} C \alpha .$$

Donc

$$d L^r \alpha = (-1)^{\frac{p(p+1)}{2}} \frac{r!}{(n-p-r)!} L^{n-p-r} dC \alpha ,$$

$$\begin{aligned}
 *d*L^r\alpha &= (-1)^{\frac{p(p+1)}{2}} \frac{r!}{(n-p-r)!} *L^{n-p-r} C C^{-1} dC\alpha \quad , \\
 &= (-1)^{\frac{p(p+1)}{2}} \frac{r!}{(n-p-r)!} [*L^{n-p-r} C\alpha_0 + *L^{r-p-r+1} C\alpha_1] \quad , \\
 &= (-1)^{\frac{p(p+1)}{2}} \frac{r!}{(n-p-r)!} \left[(-1)^{\frac{(p+1)(p+2)}{2}} \frac{(n-p-r)!}{(r-1)!} L^{r-1} C^2 \alpha_0 + (-1)^{\frac{(p-1)p}{2}} \right. \\
 &\qquad \qquad \qquad \left. \frac{(n-p-r+1)!}{r!} L^r C^2 \alpha_1 \right] \\
 *d*L^r\alpha &= rL^{r-1}\alpha_0 - (n-p-r+1)L^r\alpha_1 \quad .
 \end{aligned}$$

D'où (3').

2.3. Soit (X, ω) une variété hermitienne. On notera δ' et δ'' les deux composantes de l'adjoint δ de d :

$$\begin{aligned}
 (5) \quad \delta' &= - *d''* : \Omega_X^{a,b} \longrightarrow \Omega_X^{a-1,b} \quad . \\
 \delta'' &= - *d'* : \Omega_X^{a,b} \longrightarrow \Omega_X^{a,b-1} \quad .
 \end{aligned}$$

Ils satisfont aux relations

$$(6) \quad \delta'^2 = \delta''^2 = \delta'\delta'' + \delta''\delta' = 0 \quad .$$

THEOREME 1.- Soit (X, ω) une variété kählérienne. Si l'on pose $\Delta = d\delta + \delta d$,

on a

$$(7) \quad 1^\circ \quad \Delta L = L\Delta \quad .$$

$$(8) \quad 2^\circ \quad \Delta = 2(d'\delta' + \delta'd') = 2(d''\delta'' + \delta''d'') \quad .$$

$$3^\circ \quad \Delta \text{ est bihomogène de bidegré } (0,0) \quad .$$

$$4^\circ \quad L^{n-p} : \Omega^p \longrightarrow \Omega^{2n-p} \text{ est un isomorphisme pour tout } p < n \quad .$$

Démonstration.

4° a déjà été vu et n'est mis que pour mémoire (§1, prop. 8). De plus, il est clair que 2° entraîne 3° d'après la relation (1) du paragraphe 2. Il suffit

de montrer 1° et 2°. Rappelons que dans l'algèbre de Lie graduée* d'un module gradué on a pour tous endomorphismes X, Y, Z de degrés respectifs p, q, r :

$$[X, Y] = XY - (-1)^{pq} YX \quad ,$$

$$(9) \quad (-1)^{pr} [X, [Y, Z]] + (-1)^{pq} [Y, [Z, X]] + (-1)^{qr} [Z, [X, Y]] = 0 \quad .$$

Démontrons le lemme

LEMME.- Soit $M = \bigoplus_{0 \leq p \leq 2n} M_p$ un module gradué. Soient L, d, Λ, C, δ des endomorphismes de M de degrés respectifs $2, 1, -2, 0, -1$. On suppose vérifiées les relations

$$C\Lambda = \Lambda C \quad ,$$

$$CL = LC \quad ,$$

$$[L, d] = 0 \quad ,$$

$$[L, \delta] = C^{-1} dC \quad ,$$

$$[d, C^{-1} dC] = 0 \quad ,$$

$$[\Lambda, C^{-1} dC] = \delta \quad .$$

Si on pose

$$\Delta = [d, \delta] \quad ,$$

$$d' = \frac{1}{2} (d + iC^{-1} dC) \quad ,$$

$$d'' = \frac{1}{2} (d - iC^{-1} dC) \quad ,$$

$$\delta' = \frac{1}{2} (\delta - iC^{-1} \delta C) \quad ,$$

$$\delta'' = \frac{1}{2} (\delta + iC^{-1} \delta C) \quad ,$$

on a les relations

$$[L, \Delta] = 0 \quad ,$$

$$\Delta = 2[d', \delta'] - i[\Lambda, d'^2] \quad ,$$

$$\Delta = 2[d'', \delta''] + i[\Lambda, d''^2] \quad .$$

Démonstration.

$$\text{On a } [L, \Delta] = [L, [d, \delta]] \quad .$$

Or d'après (9) § 2, on a

*.... graduée des endomorphismes

$$[L, [d, \delta]] + [d, [\delta, L]] - [\delta; [L, d]] = 0 ,$$

soit

$$[L, \Delta] = [d, C^{-1}dC] = 0 ,$$

d'où (7) paragraphe 2.

De même on a

$$\Delta = [d, \delta] = [d, [A, C^{-1}dC]] .$$

Or d'après (9) paragraphe 2 on a

$$- [d, [A, C^{-1}dC]] + [A, [C^{-1}dC, d]] + [C^{-1}dC, [d, A]] = 0 .$$

Il en résulte

$$\Delta C = C \Delta .$$

De plus, d'après (9) paragraphe 2 on a

$$[d, C^{-1}\delta C] = -[A, d^2] .$$

$$[C^{-1}dC, \delta] = [A, d^2] .$$

On a donc

$$\begin{aligned} 4[d', \delta'] &= [d + iC^{-1}dC, \delta - iC^{-1}\delta C] \\ &= 2\Delta + i[A, d^2] + i[A, d^2] , \end{aligned}$$

d'où le lemme.

On en déduit (8) paragraphe 2, car $d^2 = 0$.

COROLLAIRE.— Soit (X, ω) une variété kählérienne. Soit Harm_p le sous-espace de Ω^p formé des formes harmoniques (cf. exposé n°1). On a pour tout $p < n$ un isomorphisme

$$(10) \quad L^{n-p} : \text{Harm}_p \longrightarrow \text{Harm}_{2n-p} .$$

Démonstration.

Voir paragraphe 2, théorème 1, 1° et 4° .

§ 3. Théorie de Hodge.

3.1. DEFINITION.- Soit $r \in \mathbb{Z}$. On appelle structure de Hodge pure de poids r la donnée :

- d'un \mathbb{Z} -module de type fini $H_{\mathbb{Z}}$;
- d'une filtration finie décroissante F^p sur $H_{\mathbb{C}} = H_{\mathbb{Z}} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{C}$, satisfaisant

à la relation :

$$(1) \quad F^{p+1}(H_{\mathbb{C}}) \oplus \overline{F^{r-p}}(H_{\mathbb{C}}) = H_{\mathbb{C}}, \quad \forall p.$$

On voit facilement [5], qu'il revient au même de se donner

- un \mathbb{Z} -module de type fini $H_{\mathbb{Z}}$;
- une graduation finie $H_{\mathbb{C}} = \bigoplus_p H_p$, satisfaisant à

$$(2) \quad \overline{H}_p = H_{r-p}, \quad \forall p.$$

Il suffit en effet de poser d'une part

$$F^p(H_{\mathbb{C}}) = \bigoplus_{p' \geq p} H_{p'},$$

et d'autre part

$$H_p = F^p(H_{\mathbb{C}}) \cap \overline{F^{r-p}}(H_{\mathbb{C}}).$$

Soit $\Omega_X^{\bullet, \bullet}$ le bicomplexe des faisceaux de formes différentielles \mathbb{C}^{∞} complexes. Les $\Omega_X^{a, b}$ sont mous et ce bicomplexe est acyclique.

Soit Ω_{an}^{\bullet} le complexe des faisceaux de formes différentielles holomorphes. Nous allons dans la suite étudier l'hypercohomologie de Ω_{an}^{\bullet} : la seconde suite spectrale dégénère car Ω_{an}^{\bullet} est acyclique. Il en résulte

$$H^m(X, \mathbb{C}) = \underline{H}^m(X, \Omega_{an}^{\bullet}).$$

La première suite spectrale s'écrit donc

$$(3) \quad E_1^{p, q} = H^q(X, \Omega_{an}^p) \Rightarrow H^m(X, \mathbb{C}).$$

Notons $\Omega_{[p]}^{\bullet}$ le complexe suivant

$$\Omega_{[p]}^q = \Omega_{an}^{p+q}.$$

On a un **morphisme** évident de complexe

$$\Omega_{[p]}^{\bullet} \longrightarrow \Omega_{an}^{\bullet}.$$

Posons

$$(4) \quad F^p(H^m(X, \mathbb{C})) = \text{Im}(H^{m-p}(X, \Omega_{[p]}^{\bullet}) \longrightarrow H^m(X, \Omega_{\text{an}}^{\bullet})) .$$

THEOREME.- Soit (X, ω) une variété kählérienne compacte de dimension n .

Soit $u \in H^2(X, \mathbb{R})$ la classe de cohomologie de ω . Alors

1°) $\forall r$, $H^r(X, \mathbb{Z})$ muni de la filtration (4) est une structure de Hodge pure de poids r .

2°) La suite spectrale (3) dégénère au niveau 1 . ($d_1 = 0$) .

3°) Le ω_p -produit

$$(\cup u)^{n-p} : H^p(X, \mathbb{R}) \longrightarrow H^{2n-p}(X, \mathbb{R}) ,$$

est un isomorphisme $\forall p < n$.

Démonstration.

Notons $\Omega^{a,b}$ le module des sections globales de $\Omega_X^{a,b}$. La suite spectrale (3) est la première suite spectrale du bicomplexe $(\Omega^{a,b})$. Or $(\text{Harm}^{a,b})$ est un sous-bicomplexe de $(\Omega^{a,b})$ et on sait (exposé n°1), qu'il existe une rétraction

$$H : \Omega^{a,b} \longrightarrow \text{Harm}^{a,b} .$$

Cette rétraction satisfait à (exposé n°1) :

$$\begin{aligned} 1_{\Omega^n} - H &= \Delta G = G \Delta \\ &= d''(2\delta''G) + (2\delta''G)d'' , \end{aligned}$$

d'après le paragraphe 2, (3).

Il en résulte un isomorphisme de suites spectrales

$$E_r^{p,q}(\Omega^{\bullet,\bullet}) \longrightarrow E_r^{p,q}(\text{Harm}^{\bullet,\bullet}) .$$

Or les différentielles de $\text{Harm}^{\bullet,\bullet}$ sont nulles, d'où 2° .

De plus

$$H^r(X, \mathbb{C}) \simeq \text{Harm}^r = \bigoplus_{p+q=r} \text{Harm}^{p,q} ,$$

et

$$F^p(H^r(X, \mathbb{C})) = \bigoplus_{p' \geq p} \text{Harm}^{p', r-p'} .$$

Enfin la conjugaison $\underline{\mathbb{C}} \rightarrow \underline{\mathbb{C}}$ induit par l'isomorphisme

$$H^r(X, \underline{\mathbb{C}}) \simeq H_{DR}^r(X) = \text{Harm}^r$$

la conjugaison de Harm^r .

Donc la relation

$$\overline{\text{Harm}_{P,Q}^r} = \text{Harm}_{Q,P}^r ,$$

entraîne 1° .

Le 3° est clair à partir du paragraphe 2, théorème 1, 4°, d'après [4] .

Addenda (II.19).-- Dans le lemme du théorème 1 du paragraphe 2, ajouter après

"Soit $M = \bigoplus_{0 \leq p \leq 2n} M_p$ un module gradué", "sur un anneau A . Soit $i \in A$
tel que $i^2 = -1$ ".

BIBLIOGRAPHIE

- [1] A. WEIL - Variétés kählériennes, Paris, Hermann, 1958.
- [2] J.-P. SERRE - Algèbres de Lie semi-simples complexes, Benjamin, 1966.
- [3] H. WEYL - The classical groups, Princeton Mathematical Series n°1, Princeton University Press, 1946.
- [4] R. GODEMENT - Topologie algébrique et théorie des faisceaux, Paris, Hermann, 1958.
- [5] P. DELIGNE - Théorie de Hodge, II, I.H.E.S., Public. Math., 40 (1971).