

Astérisque

ARNAUD BEAUVILLE

**Foncteurs sur les anneaux artiniens application
aux déformations verselles**

Astérisque, tome 16 (1974), p. 82-104

<http://www.numdam.org/item?id=AST_1974__16__82_0>

© Société mathématique de France, 1974, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la collection « Astérisque » (<http://smf4.emath.fr/Publications/Asterisque/>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

FONCTEURS SUR LES ANNEAUX ARTINIENS
APPLICATION AUX DEFORMATIONS VERSELLES

par Arnaud BEAUVILLE

§ 1. Foncteurs sur les anneaux artiniens.

On a étudié dans l'exposé précédent le foncteur $R \rightsquigarrow \text{Def}(X/\underline{\mathbb{C}}, R)$, défini sur la catégorie des $\underline{\mathbb{C}}$ -algèbres locales artiniennes. On va établir ici des critères généraux sous lesquels un tel foncteur est représentable.

1.1. Notations.

$\mathcal{C}$ = catégorie des $\underline{\mathbb{C}}$ -algèbres locales artiniennes, de corps résiduel $\underline{\mathbb{C}}$.

$\hat{\mathcal{C}}$ = catégorie des $\underline{\mathbb{C}}$ -algèbres locales complètes noethériennes, de corps résiduel $\underline{\mathbb{C}}$.

$\text{Fonct}(\mathcal{C}, \underline{\text{Ens}})$ = catégorie des foncteurs (covariants) de $\mathcal{C}$ dans la catégorie des ensembles, tels que $F(\underline{\mathbb{C}})$ ait un seul élément.

(Noter que tout foncteur de $\mathcal{C}$ dans $\underline{\text{Ens}}$ est somme disjointe de foncteurs du type précédent).

On convient de noter l'idéal maximal d'une algèbre $(R, S, T \dots)$ par la petite lettre correspondante $(r, s, t \dots)$.

1.2. Remarque.— Tout foncteur $F \in \text{Fonct}(\mathcal{C}, \underline{\text{Ens}})$ se prolonge naturellement à $\hat{\mathcal{C}}$ en posant $\hat{F}(R) = \varprojlim F(R/r^n)$.

1.3. Exemple.

Pour toute $R \in \text{Ob } \hat{\mathcal{C}}$ on définit $h_R(A) = \text{Hom}_{\underline{\mathbb{C}}}(R, A)$. Rappelons qu'il

existe un isomorphisme canonique ("lemme de Yoneda") : $\hat{F}(R) \xrightarrow{\sim} \text{Hom}(h_R, F)$.

1.4. DEFINITION.- On dit que le couple (R, ξ) ($R \in \text{Ob } \hat{C}$, $\xi \in \hat{F}(R)$) pro-représente F si ξ définit (via l'isomorphisme précédent) un isomorphisme de h_R sur $\hat{F}$; autrement dit, si pour tout élément η de $F(A)$ ($A \in \text{Ob } C$) il existe un et un seul morphisme $u : R \longrightarrow A$ tel que $\hat{F}(u)(\xi) = \eta$.

1.5.- Malheureusement le foncteur, qui nous intéresse, n'est pas en général pro-représentable. On va donc mettre une évidence une propriété plus faible. Nous aurons besoin de développer quelques sorites.

1.6. DEFINITION.- On dit qu'un morphisme $u : F \longrightarrow G$ de $\text{Fonct}(C, \text{Ens})$ est lisse, si pour toute surjection $A \longrightarrow A/I$ de C , la flèche :

$$F(A) \longrightarrow G(A) \times_{G(A/I)} F(A/I)$$

est surjective.

La proposition suivante éclaire quelque peu cette définition.

1.7. PROPOSITION.- (i) Soient $u : F \longrightarrow G$, $v : G \longrightarrow H$ deux morphismes de $\text{Fonct}(C, \text{Ens})$, avec u lisse. Alors v lisse équivaut à vu lisse.

(ii) Soit $R \longrightarrow S$ une flèche de $\hat{C}$; le morphisme $h_S \longrightarrow h_R$ correspondant est lisse si et seulement si S est R-isomorphe à une R-algèbre de séries formelles.

(iii) Si $u : F \longrightarrow G$ est lisse, la flèche $\hat{F}(R) \longrightarrow \hat{G}(R)$ est surjective pour toute $R \in \text{Ob } \hat{C}$.

Démonstration.-

(i) se vérifie formellement à partir de la définition. Pour vérifier (iii),

on se donne une suite $(x_n) \in \varprojlim G(R/r^n)$; grâce à la surjectivité de $F(R/r^{n+1}) \rightarrow F(R/r^n) \times_{G(R/r^n)} G(R/r^{n+1})$, on construit par récurrence une suite $(y_n) \in \varprojlim F(R/r^n)$ dont l'image est (x_n) .

Pour démontrer (ii), on utilise le :

1.8. LEMME.- Soient $R, S, T \in \text{Ob } \hat{C}$, $u : S \rightarrow T$ un R -morphisme de R -algèbres. u induit une application linéaire $\bar{u} : s/s^2 + rS \rightarrow t/t^2 + rT$; u est surjectif si et seulement si $\bar{u}$ est surjectif.

La surjectivité de u entraîne clairement celle de $\bar{u}$; il faut démontrer l'implication contraire. Le cas particulier $R = \mathbb{C}$, $r = 0$ est bien connu : l'hypothèse entraîne que la flèche $\text{gr}(u)$ induite sur les gradués est surjective et on conclut par (Bourbaki, Alg. comm. III, § 2 , n° 8 , th. 1). Le cas général s'en déduit grâce au diagramme :

$$\begin{array}{ccccccc} r/r^2 & \longrightarrow & s/s^2 & \longrightarrow & s/s^2 + rS & \longrightarrow & 0 \\ \downarrow r & & \downarrow a & & \downarrow b & & \\ r/r^2 & \longrightarrow & t/t^2 & \longrightarrow & t/t^2 + rT & \longrightarrow & 0 \end{array}$$

qui montre que si b est surjectif, a est surjectif.

1.9. Démonstration de 1.7. (ii) .

La définition 1.6 pour la flèche $h_S \rightarrow h_R$ signifie que pour toute R -algèbre $A \in \text{Ob } C$ et tout idéal I de A , tout R -morphisme $S \rightarrow A/I$ se relève en un R -morphisme $S \rightarrow A$. Ce sera clairement le cas si $S = R[[X_1 \dots X_n]]$; inversement, supposons que S possède cette propriété. Soient $x_1 \dots x_n$ une base de l'espace vectoriel $s/s^2 + rS$, $T = R[[X_1 \dots X_n]]$.

Le R -morphisme $T \longrightarrow S$ qui envoie X_i sur x_i induit un isomorphisme $v : T/t^2 + rT \xrightarrow{\sim} S/s^2 + rS$; soit $u_1 : S \longrightarrow S/s^2 + rS \xrightarrow{v^{-1}} T/t^2 + rT$. D'après l'hypothèse, u_1 se relève en $u_2 : S \longrightarrow T/t^2$, qui se relève en $u_3 : S \longrightarrow T/t^3$, ... de sorte qu'on obtient finalement un R -morphisme $u : S \longrightarrow T$ induisant un isomorphisme $\bar{u} : S/s^2 + rS \longrightarrow T/t^2 + rT$. Par le lemme 1.8, u est surjectif, donc il existe des éléments (y_i) de S tels que $u(y_i) = X_i$. Soit $w : T \longrightarrow S$ le R -morphisme qui envoie X_i sur y_i . Alors $uw = 1_T$, donc w est injectif ; et $\bar{w} : T/t^2 + rT \longrightarrow S/s^2 + rS$ est un isomorphisme (égal à $(u)^{-1}$) , donc w est surjectif par 1.8 ce qui achève la démonstration.

1.10. DEFINITION.— Soit $F \in \text{Fonct}(C, \text{Ens})$. L'ensemble $F(\underline{C}[\underline{\epsilon}])$ (où $\epsilon^2 = 0$) est appelé "espace tangent à F " et noté t_F .

Cette définition est justifiée par les isomorphismes classiques :

$$t_{h_R} = \text{Hom}(R, \underline{C}[\underline{\epsilon}]) \xrightarrow{\sim} \text{Der}_{\underline{C}}(R, \underline{C}) \xrightarrow{\sim} \text{Hom}_{\underline{C}}(r/r^2, \underline{C}) .$$

On notera que, malgré son nom, l'espace tangent à F n'a pas en général une structure naturelle d'espace vectoriel ; c'est toutefois le cas si F est "assez bon", à savoir :

1.11. LEMME.— Si les applications :

$$F(\underline{C}[\underline{\epsilon}] \times_{\underline{C}} \underline{C}[\underline{\epsilon}]) \longrightarrow F(\underline{C}[\underline{\epsilon}]) \times F(\underline{C}[\underline{\epsilon}])$$

$$F(\underline{C}[\underline{\epsilon}] \times_{\underline{C}} \underline{C}[\underline{\epsilon}] \times_{\underline{C}} \underline{C}[\underline{\epsilon}]) \longrightarrow F(\underline{C}[\underline{\epsilon}]) \times F(\underline{C}[\underline{\epsilon}]) \times F(\underline{C}[\underline{\epsilon}])$$

sont des isomorphismes, t_F est muni d'une structure naturelle d'espace vectoriel.

Il suffit de remarquer que $\underline{C}[\underline{e}]$ est un "objet en espaces vectoriels" dans $\underline{C}$ grâce à l'isomorphisme :

$$\text{Hom}_{\underline{C}}(A, \underline{C}[\underline{e}]) \xrightarrow{\sim} \text{Der}_{\underline{C}}(A, \underline{C}) .$$

Autrement dit, il existe des flèches :

$$\text{add} : \underline{C}[\underline{e}] \times_{\underline{C}} \underline{C}[\underline{e}] \longrightarrow \underline{C}[\underline{e}]$$

$$\text{mult} : \underline{C} \longrightarrow \text{End}_{\underline{C}}(\underline{C}[\underline{e}])$$

vérifiant les propriétés habituelles (elles sont d'ailleurs faciles à expliciter : on a $\text{add}(a + b\underline{e}, a + c\underline{e}) = a + (b + c)\underline{e}$ et $\text{mult}(\lambda)(a + b\underline{e}) = a + \lambda b\underline{e}$). La condition sur F exprime précisément que F transforme ces flèches et les propriétés qu'elles vérifient en une addition et une multiplication scalaire sur t_F vérifiant les axiomes d'espace vectoriel sur $\underline{C}$.

On peut maintenant donner la :

1.12. DEFINITION.— Le couple (R, ξ) ($R \in \text{Ob } \hat{C}$, $\xi \in \hat{F}(R)$) est une enveloppe de F si le morphisme $h_R \rightarrow F$ défini par ξ est lisse et induit un isomorphisme sur les espaces tangents.

1.13. PROPOSITION.— Soient (R, ξ) , (R', ξ') deux enveloppes de F . Il existe un isomorphisme $u : R \rightarrow R'$ (non unique en général) tel que $\hat{F}(u)(\xi) = \xi'$.

Par 1.7 (iii) il existe des morphismes $u : R \rightarrow R'$ et $u' : R' \rightarrow R$, tels que $\hat{F}(u)(\xi) = \xi'$, $\hat{F}(u')(\xi') = \xi$, induisant tous les deux un isomorphisme sur les espaces tangents. Alors $u'u$ est un endomorphisme de l'anneau noethérien, surjectif par 1.8, donc bijectif par le lemme 1.14 ci-après ; de même pour uu' . Donc u est un isomorphisme.

1.14. LEMME.- Un endomorphisme surjectif v d'un anneau noethérien est bijectif.

Raisonnement classique : la suite des idéaux $\text{Ker } v^n$ est croissante, donc stationnaire à partir d'un certain rang N . v^N est encore surjectif, donc tout élément x de $\text{Ker}(v^N)$ est de la forme $v^N(y)$, avec $y \in \text{Ker } v^{2N}$. Comme $\text{Ker}(v^{2N}) = \text{Ker}(v^N)$, on trouve $x = 0$, donc v^N est bijectif, et par suite v est bijectif.

1.15. Remarques.

1) Il est clair que si F est pro-représentable par un couple (R, ξ) , celui-ci est une enveloppe de F . La notion d'enveloppe fournit donc une approximation de la pro-représentabilité.

2) Soit (R, ξ) une enveloppe de F ; compte tenu de 1.7(i) et (ii), on voit que R est une algèbre de séries formelles (sur $\underline{\mathbb{C}}$) si et seulement si F transforme surjections en surjections. Cette situation est particulièrement favorable, puisqu'alors la "base" R de l'enveloppe est déterminée par la seule dimension de t_F .

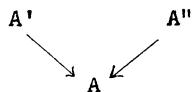
Une dernière définition avant le théorème principal :

1.16. DEFINITION.- Une surjection $p : A \longrightarrow A/I$ est simple si l'idéal I est un A -module simple (c'est-à-dire A -isomorphe à $\underline{\mathbb{C}}$, ou encore principal et annulé par l'idéal maximal).

Noter que toute surjection est composée d'un nombre fini de surjections simples.

1.17. THEOREME (Critère de Schlessinger).- Soit $F \in \text{Fonct}(\mathbb{C}, \text{Ens})$. Pour tout

IV-07

diagrammedans C , on a une application naturelle :

$$(*) \quad F(A' \times_A A'') \longrightarrow F(A') \times_{F(A)} F(A'') .$$

1) F a une enveloppe si et seulement s'il vérifie les conditions suivantes :

H 1. $(*)$ est surjective pour $A'' \longrightarrow A$ surjection simple.

H 2. $(*)$ est bijective pour $A = \underline{\underline{C}}$, $A'' = \underline{\underline{C}}[\epsilon]$.

H 3. $\dim_{\underline{\underline{C}}} (t_F) < \infty$.

2) F est pro-représentable si et seulement s'il vérifie H1 à H3 et en outre la condition :

H 4. $(*)$ est bijective pour $A'' = A'$ et $A' \longrightarrow A$ surjection simple.

1.18. Remarques.

1) H 3 a un sens grâce à H 2 et au lemme 1.11.

2) Pour une surjection $p : A \longrightarrow A/I$ simple, on a un isomorphisme :

$$\left\{ \begin{array}{l} A \times_{A/I} A \xrightarrow{\sim} A \times_{\underline{\underline{C}}} (\underline{\underline{C}} \oplus I) \\ (x, y) \longmapsto (x, \bar{x} \oplus (y - x)) \end{array} \right.$$

(où $\underline{\underline{C}} \oplus I$ désigne l'extension triviale de $\underline{\underline{C}}$ par I , isomorphe à $\underline{\underline{C}}[\epsilon]$, et $\bar{x}$ la classe résiduelle de x) .

L'application $(*)$ s'écrit :

$$\left\{ \begin{array}{l} F(A) \times_{t_F} \longrightarrow F(A) \times_{F(A/I)} F(A) \\ (\xi, t) \longmapsto (\xi, t \cdot \xi) \text{ avec } F(p)(t \cdot \xi) = F(p)(\xi) \end{array} \right.$$

la donnée d'une telle application équivaut à la donnée, pour tout $\eta \in F(A/I)$, d'une action de t_F sur la fibre $F(p)^{-1}(\eta)$. On vérifie aisément que cette action est une action de groupe ; la condition H1 entraîne qu'elle est transitive. Dans ce cas, H4 signifie exactement que la fibre $F(p)^{-1}(\eta)$ est un espace principal homogène sous t_F .

1.19. Démonstration du théorème.

Supposons d'abord que F possède une enveloppe (R, ξ) ; alors H3 est trivial. Pour démontrer H1, on considère le diagramme :

$$\begin{array}{ccc} h_R(A' \times_A A'') & \xrightarrow{\sim} & h_R(A') \times_{h_R(A)} h_R(A'') \\ \downarrow & & \downarrow \\ F(A' \times_A A'') & \longrightarrow & F(A') \times_{F(A)} F(A'') \end{array}$$

La flèche verticale de droite est surjective comme composé des deux flèches

$$h_R(A') \times_{h_R(A)} h_R(A'') \longrightarrow h_R(A') \times_{h_R(A)} h_R(A) \times_{F(A)} F(A'') \longrightarrow F(A') \times_{F(A)} F(A'')$$

qui sont surjectives par lixivité ; H1 en résulte.

Pour H2, on considère le diagramme :

$$\begin{array}{ccc} h_R(A \times_{\underline{C}[\epsilon]} \underline{C}[\epsilon]) & \xrightarrow{\sim} & h_R(A) \times t_F \\ \downarrow & & \downarrow \\ F(A \times_{\underline{C}[\epsilon]} \underline{C}[\epsilon]) & \longrightarrow & F(A) \times t_F \end{array}$$

Soient ξ_1, ξ_2 deux éléments de $F(A \times_{\underline{C}[\epsilon]} \underline{C}[\epsilon])$ qui ont la même image (η, t) dans $F(A) \times t_F$. Choisissons un élément v de $h_R(A)$ d'image η

dans $F(A)$; la flèche $h_R(A \times_{\underline{C}} \underline{C}[\epsilon]) \longrightarrow F(A \times_{\underline{C}} \underline{C}[\epsilon]) \times_{F(A)} h_R(A)$ étant surjective par lissité, il existe un élément u_1 (resp. u_2) dans $h_R(A \times_{\underline{C}} \underline{C}[\epsilon])$, d'image v dans $h_R(A)$ et ξ_1 (resp. ξ_2) dans $F(A \times_{\underline{C}} \underline{C}[\epsilon])$. Mais alors u_1 et u_2 ont même image (v, t) dans $h_R(A) \times t_F$, donc sont égaux : par suite $\xi_1 = \xi_2$. Enfin si F est pro-représentable, il est clair que (*) est un isomorphisme dans tous les cas.

Supposons maintenant que F vérifie H1 à H3. Soient $\theta_1 \dots \theta_r$ une base de t_F , $S = \underline{C}[[T_1 \dots T_r]]$. On va construire R comme limite projective de certains quotients de S . Soit $R_2 = S/\mathfrak{s}^2 \xrightarrow{\sim} \underline{C}[\epsilon] \times_{\underline{C}} \dots \times_{\underline{C}} \underline{C}[\epsilon]$ (r fois). Par H2, on a un isomorphisme $F(R_2) \xrightarrow{\sim} F(\underline{C}[\epsilon]) \times \dots \times F(\underline{C}[\epsilon])$ (r fois) ; l'élément ξ_2 de $F(R_2)$ qui correspond à $\theta_1 \times \dots \times \theta_r$ par cet isomorphisme définit par construction un isomorphisme de $t_{h_{R_2}} = \text{Hom}(R_2, \underline{C}[\epsilon])$ sur t_F . Supposons construit un couple (R_q, ξ_q) avec $R_q = S/J_q$, $\xi_q \in F(R_q)$. Soit E l'ensemble des idéaux J de S vérifiant :

$$\begin{aligned} s \cdot J_q &\subset J \subset J_q \\ \xi_q &\text{ se relève à } S/J \end{aligned}$$

(la seconde condition signifie qu'il existe un élément de $F(S/J)$ d'image ξ_q dans $F(S/J_q)$).

On va montrer que E possède un plus petit élément. Comme E est en correspondance bijective, respectant l'ordre, avec un ensemble de sous-espaces vectoriels de $J_q/s \cdot J_q$, il suffit de montrer qu'il est stable par intersection finie. Soient donc J et K deux idéaux de E . Quitte à élargir J , on peut supposer que $J + K = J_q$. On a alors un isomorphisme canonique :

$$S/J \times_{S/J_q} S/K \xrightarrow{\sim} S/J \cap K \quad ,$$

donc par H1 $J \cap K$ est dans E . Il existe donc un idéal minimum dans E : on le désigne par J_{q+1} , on pose $R_{q+1} = S/J_{q+1}$ et on choisit pour ξ_{q+1} un élément arbitraire de $F(R_{q+1})$ relevant ξ_q .

Posons $J = \bigcap_q J_q$, $R = S/J$; comme $s^q \subset J_q$, les idéaux J_q/J définissent sur R une topologie linéaire séparée, moins fine que la topologie s -adique, donc identique à celle-ci par compacité linéaire (Bourbaki, Alg. comm., ch. III, § 2, n° 7). Par suite $\hat{F}(R) \xrightarrow{\sim} \varprojlim F(S/J_q)$ et on peut poser $\xi = \varprojlim \xi_q \in \hat{F}(R)$.

Il est clair que ξ induit un isomorphisme sur les espaces tangents ; il reste à montrer que $h_R \rightarrow F$ est lisse. Pour cela on doit se donner une surjection $p : A \rightarrow A/I$ (qu'on peut supposer simple) et montrer la surjectivité de :

$$h_R(A) \rightarrow F(A) \times_{F(A/I)} h_R(A/I).$$

Soient donc $\eta \in F(A/I)$, $\eta' \in F(A)$ tels que $F(p)(\eta') = \eta$ et $u : R \rightarrow A/I$ tel que $\hat{F}(u)(\xi) = \eta$. Il faut trouver $u' : R \rightarrow A$ tel que $pu' = u$ et $F(u')(\xi) = \eta'$.

Notons d'abord qu'il suffit de réaliser la condition $pu' = u$. En effet, on a vu (1.18) que t_F opère transitivement sur les fibres $h_R(p)^{-1}(u)$ et $F(p)^{-1}(\eta)$,

$$\begin{array}{ccc} h_R(p)^{-1}(u) & \longrightarrow & F(p)^{-1}(\eta) \\ \downarrow & & \downarrow \\ h_R(A) & \longrightarrow & F(A) \\ \downarrow & & \downarrow \\ h_R(A/I) & \longrightarrow & F(A/I) \end{array}$$

la flèche $h_R \rightarrow F$ étant évidemment compatible aux actions de t_F ; étant

donné u' tel que $pu' = u$, il existe donc $\sigma \in t_F$ tel que $[F(u')(\xi)]^\sigma = \eta'$; alors la flèche $u'' = (u')^\sigma$ vérifie $pu'' = u$ et $F(u'')(\xi) = \eta'$.

Il suffit donc de trouver $u' : R \longrightarrow A$ tel que $pu' = u$. Remarquer que F n'intervient plus que par la condition que $\eta = F(u)(\xi)$ se relève à $F(A)$.

u se factorise par un R_q et il suffit de compléter le diagramme ;

$$\begin{array}{ccc} R_{q+1} & \dashrightarrow & A \\ \downarrow & & \downarrow \\ R_q & \longrightarrow & A/I \end{array}$$

ou encore celui-ci :

$$\begin{array}{ccc} S & \xrightarrow{w} & R_q \times_{A/I} A \\ \downarrow & \nearrow & \downarrow \text{pr}_1 \\ R_{q+1} & \longrightarrow & R_q \end{array}$$

où w a été choisi de façon à rendre le carré commutatif.

Supposons w surjectif : alors par H1, ξ_q se relève à $R_q \times_{A/I} A$, donc $\text{Ker}(w) \supset J_{q+1}$, et w se factorise par R_{q+1} . Mais si w n'est pas surjectif, la restriction de pr_1 à $w(S)$, qui est dans tous les cas surjective, est bijective pour des raisons de dimension ; l'isomorphisme inverse, composé avec $R_{q+1} \longrightarrow R_q$, complète le diagramme et la démonstration de 1.17 1).

Démontrons enfin que si F vérifie H1 à H4, il est pro-représentable.

On sait déjà qu'il admet une enveloppe (R, ξ) ; on va montrer que

$h_R(A) \xrightarrow{\sim} F(A)$ par induction sur $\dim_{\underline{C}} A$. On considère le diagramme :

$$\begin{array}{ccc} h_R(A) & \xrightarrow{a} & F(A) \\ \downarrow & & \downarrow \\ h_R(A/I) & \xrightarrow[b]{\sim} & F(A/I) \end{array}$$

la flèche b est bijective par induction, tandis que a induit des isomorphismes sur les fibres par H4 ; il en résulte facilement que a est bijective.

1.20. Remarque.— La construction de l'enveloppe donnée dans cette démonstration est explicite et souvent utile dans les applications. Plaçons-nous en particulier dans le "cas favorable" 1.15 2) où il n'y a pas d'obstructions aux relèvements. La démonstration 1.19 montre qu'alors $J_q = s^q$, $R = S$; de plus, il suffit pour déterminer $\mathfrak{E}$ de trouver un $\mathfrak{E}_2$ comme dans 1.19 (i.e. "universel ou premier ordre") et de le relever arbitrairement sur les quotients successifs S/s_q .

Ceci justifie, par exemple, la construction de la déformation verselle d'une courbe plane donnée dans l'exposé III.

§ 2. Applications.

Le critère de Schlessinger s'applique à tous les foncteurs de la géométrie analytique : foncteur de Picard, de Hilbert... Du point de vue des déformations, on a le :

2.1. THEOREME.— Soit $\mathcal{O}$ une $\mathbb{C}$ -algèbre analytique à singularité isolée. Le foncteur $\text{Def}(\mathcal{O}(\mathbb{C}, \cdot))$ admet une enveloppe $(R, \bar{\mathcal{O}})$, appelée déformation verselle formelle de $\mathcal{O}$; ce qui signifie :

1) R est une algèbre locale complète noethérienne, $\bar{\mathcal{O}}$ est une R -algèbre locale, complète pour la topologie r -adique et telle que les quotients $\bar{\mathcal{O}}/r^n \cdot \bar{\mathcal{O}}$ soient des $\mathbb{C}$ -algèbres analytiques.

2) Pour toute déformation $\mathcal{O}'$ de $\mathcal{O}$ sur A , il existe au moins un morphisme $u : R \rightarrow A$ tel que $\mathcal{O}' \xrightarrow{\sim} \bar{\mathcal{O}} \otimes_R A$; si $A = \mathbb{C}[\varepsilon]$, u est unique; de plus, pour toute surjection $p : A'' \rightarrow A$ dans $\mathbb{C}$ et toute déformation $\mathcal{O}''$ de $\mathcal{O}$ sur A'' telle que $\mathcal{O}'' \otimes_{A''} A \xrightarrow{\sim} \mathcal{O}'$, il existe un morphisme $u' : R \rightarrow A''$ tel que $pu' = u$ et $\bar{\mathcal{O}} \otimes_R A'' = \mathcal{O}''$.

On a en effet démontré dans l'exposé III que le foncteur $\text{Def}(\mathcal{O}/\mathbb{C}, \cdot)$ vérifiait les conditions H1 à H3.

2.2. PROPOSITION. — La base R de la déformation verselle est une $\mathbb{C}$ -algèbre de séries formelles si et seulement si toute déformation de $\mathcal{O}$ sur A/I se relève à A ; c'est le cas en particulier si $T^2(\mathcal{O}/\mathbb{C}, \mathcal{O}) = 0$, plus particulièrement si $\mathcal{O}$ est intersection complète.

Cela résulte de 1.15 et de l'exposé III.

2.3. — Si $\mathcal{O} = \mathbb{C}\{X_1 \dots X_n\} / (f_1 \dots f_r)$ est intersection complète, il est facile d'expliciter la déformation verselle de $\mathcal{O}$ sur le modèle des courbes planes traité dans l'exposé III (cf. 1.20). La recette est la suivante : posons $I = (f_1 \dots f_r)$. On peut supposer que les f_i forment une base de I/I^2 ; soit $(e_1 \dots e_r)$ la base duale. D'après l'exposé III, T^1 s'identifie via la base (e_i) à $\mathcal{O}^r / (\partial f)$, (∂f) désignant le sous-module engendré par les $\sum_i \frac{\partial f_i}{\partial X_k} e_i$ ($k = 1, \dots, n$). On choisit des éléments P_{ij} de $\mathcal{O}$ tels que les classes des $\sum_i P_{ij} e_i$ ($j = 1, \dots, q$)

dans $\mathcal{O}^F / (\partial f)$ forment une base de ce $\mathbb{C}$ -espace vectoriel ; la déformation verselle formelle de $\mathcal{O}$ est alors l'algèbre

$$\mathbb{C} \{X_1 \dots X_n\} [[t_1 \dots t_q]] / (\dots, f_i - t_1 P_{i1} \dots - t_q P_{iq}, \dots)$$

au-dessus de $\mathbb{C}[[t_1 \dots t_q]]$.

2.4.- Le problème local -celui qui nous intéressait essentiellement- est donc entièrement traité. Dans le reste de cet exposé, on va montrer que le critère de Schlessinger permet également de traiter le problème des déformations globales d'un espace analytique X .

Pour $A \in \text{Ob } \mathcal{C}$, on désignera par $\text{Spec } A$ l'espace analytique réduit à un point, de faisceau structural A . L'espace analytique $X \times_{\text{Spec } A} \text{Spec } A'$ sera noté $X \otimes_A A'$.

2.5. DEFINITIONS 1) Une déformation de X à A est un espace analytique Y au-dessus de $\text{Spec } A$, plat sur $\text{Spec } A$, muni d'un isomorphisme $Y \otimes_A \mathbb{C} \xrightarrow{\sim} X$.

Un isomorphisme de déformations est un isomorphisme d'espaces analytiques sur $\text{Spec } A$ qui induit l'identité sur X .

2) On note $\text{Def}(X, A)$ l'ensemble des déformations de X à A à isomorphisme près. Pour tout ouvert U de X , on définit ainsi $\text{Def}(U, A)$; on désigne par $\underline{\text{Def}}(X, A)$ le faisceau associé au préfaisceau $U \rightsquigarrow \text{Def}(U, A)$.

3) On définit deux foncteurs $G, L \in \text{Fonct}(\mathcal{C}, \underline{\text{Ens}})$ par :

$$G(A) = \text{Def}(X, A), \quad L(A) = H^0(X, \underline{\text{Def}}(X, A)).$$

On a une flèche naturelle $\varphi : G \longrightarrow L$. G (resp. L) est le foncteur des déformations globales (resp. locales) de X . Intuitivement, le comportement de G , L et φ exprime la variation des singularités de X à

l'intérieur de X ". Ainsi, dire que φ est surjectif équivaut à dire que toute déformation des singularités de X est induite par une déformation globale de X (ce sera le cas pour les courbes).

Noter que, d'après l'exposé III, L est "nul" (i.e. $L(A)$ est réduit à la déformation triviale) si X est lisse ; en général le faisceau L est concentré sur le sous-espace singulier de X . En particulier :

2.6. PROPOSITION.- Si X n'a que des points singuliers isolés (P_i) :

$$L \xrightarrow{\sim} \pi L_{P_i} \quad \text{avec} \quad L_{P_i} \xrightarrow{\sim} \text{Def}(\mathcal{O}_{P_i}, \cdot) .$$

En effet le faisceau $\text{Def}(X, A)$ est alors concentré aux points P_i , donc $H^0(X, \text{Def}(X, A)) \xrightarrow{\sim} \pi \text{Def}(X, A)_{P_i}$.

2.7.- On va étudier les espaces tangents à G et L . Nous aurons besoin d'une légère extension des résultats de l'exposé III. Dans cet exposé, les modules T^1 et T^2 ont été définis en termes d'algèbre locale ; toutefois, il est immédiat de vérifier que les constructions utilisées (plongement dans un lisse, choix de générateurs...) se transposent telles quelles au cas des faisceaux analytiques, pourvu qu'on raisonne localement, c'est-à-dire qu'on définisse les T^1 et T^2 comme des faisceaux analytiques sur X . Enonçons donc :

2.8. "Rappel".

Pour tout morphisme $X \longrightarrow S$ d'espaces analytiques et tout faisceau cohérent F sur X , il existe des faisceaux $T^1(X/S, F)$ et $T^2(X/S, F)$ cohérents, tels que :

1) Pour tout diagramme $X \longrightarrow Y \longrightarrow S$, on a une suite exacte à neuf termes :

$$0 \longrightarrow \underline{\text{Hom}}_{\mathcal{O}_X}(\Omega_{X/Y}^1, F) \longrightarrow \underline{\text{Hom}}_{\mathcal{O}_X}(\Omega_{X/S}^1, F) \longrightarrow \underline{\text{Hom}}_{\mathcal{O}_Y}(\Omega_{Y/S}^1, F) \longrightarrow T^1(X/Y, F) \longrightarrow \\ \longrightarrow T^1(X/S, F) \longrightarrow T^1(Y/S, F) \longrightarrow T^2(X/Y, F) \longrightarrow T^2(X/S, F) \longrightarrow T^2(Y/S, F) .$$

2) $T^1(X/S, F)$ est canoniquement isomorphe au faisceau des classes de $\mathcal{O}_S$ -extensions de $\mathcal{O}_X$ par F (associé au préfaisceau $U \rightsquigarrow \text{Ex}_{\mathcal{O}_S}(\mathcal{O}_U^{\mathcal{O}}, F/U)$.

3) $\underline{\text{Def}}(X, \underline{\mathcal{C}}[\epsilon])$ est canoniquement isomorphe à $T^1(X/\underline{\mathcal{C}}, \mathcal{O}_X)$.

2.9. PROPOSITION.- Il existe une suite exacte :

$$0 \longrightarrow H^1(X, T_X) \xrightarrow{\pi} t_G \longrightarrow t_L \xrightarrow{f} H^2(X, T_X) \\ \parallel \qquad \qquad \parallel \\ \underline{\text{Def}}(X, \underline{\mathcal{C}}[\epsilon]) \quad H^0(X, T_X^1)$$

(où T_X est le fibré tangent à X , et $T_X^1 = T^1(X/\underline{\mathcal{C}}, \mathcal{O}_X)$)..

2.10. Remarque.- Il est tentant de supposer qu'on a là la suite exacte des termes de bas degré d'une suite spectrale. C'est vrai, mais il faut pour le montrer disposer du complexe cotangent relatif d'illusions dans le cas analytique. Comme cette théorie est difficile et d'ailleurs pas encore écrite, on se contentera ici d'un calcul de cocycles "à la main".

2.11. LEMME.

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & F & \begin{array}{c} \nearrow \\ \searrow \end{array} & \begin{array}{c} E \\ \vdots \\ E' \end{array} & \begin{array}{c} \nearrow \\ \searrow \end{array} & \mathcal{O}_X \longrightarrow 0 \end{array}$$

Soient F un $\mathcal{O}_X$ -module cohérent, E, E' deux extensions de $\mathcal{O}_X$ par F .

Le faisceau des isomorphismes d'extensions de E sur E' est principal homogène sous le faisceau des dérivations de $\mathcal{O}_X$ dans F .

En effet la différence de deux isomorphismes annule F , donc se factorise par $\mathcal{O}_X$ et prend ses valeurs dans F ; il est aisé de voir que c'est une dérivation et qu'inversement toute dérivation ajoutée à un isomorphisme donne encore un isomorphisme.

2.12. Démonstration de la proposition 2.9.

La donnée d'un élément x de t_L revient à la donnée d'un recouvrement ouvert de Stein (U_i) de X et d'extensions

$$0 \longrightarrow \mathcal{O}_{U_i} \longrightarrow \mathcal{E}_i \longrightarrow \mathcal{O}_{U_i} \longrightarrow 0$$

telles qu'il existe des isomorphismes d'extensions $\sigma_{ij} : \mathcal{E}_j / U_i \cap U_j \xrightarrow{\sim} \mathcal{E}_i / U_i \cap U_j$. Compte tenu de 2.11, l'élément $\sigma_{ij} \sigma_{jk} \sigma_{ik}^{-1}$ définit un 2-cocycle du recouvrement (U_i) à valeurs dans T_X . Si l'on choisit d'autres isomorphismes σ'_{ij} , on a $\sigma'_{ij} = \sigma_{ij} + D_{ij}$ par 2.11, avec $D_{ij} \in H^0(U_i \cap U_j, T_X)$; le nouveau cocycle $(\sigma'_{ij} \sigma'_{jk} \sigma_{ik}^{-1})$ diffère de l'ancien par le 2-cobord $(D_{ij} + D_{jk} - D_{ik})$. La classe dans $H^2(X, T_X)$ du cocycle $(\sigma_{ij} \sigma_{jk} \sigma_{ik}^{-1})$ ne dépend donc pas du choix des σ_{ij} ; on la note $\rho(x)$. On laisse au lecteur le soin de vérifier la linéarité de ρ .

Dire que x provient d'une extension globale signifie que, pour un certain choix des σ_{ij} , ceux-ci vérifient la condition de cocycles, donc $\rho(x)$ est nul; inversement si $\rho(x) = 0$, on trouve

$$\sigma_{ij} \sigma_{jk} \sigma_{ik}^{-1} = D_{ij} + D_{jk} - D_{ik}$$

pour une 1-cochaîne (D_{ij}) , et les isomorphismes $\sigma'_{ij} = \sigma_{ij} - D_{ij}$ vérifient la condition de cocycles. Ceci prouve l'exactitude de la suite 2.9 en t_L .

Enfin, soit (σ_{ij}) un 1-cocycle du recouvrement (U_i) à valeurs dans T_X ; grâce à 2.11, on utilise les (σ_{ij}) pour recoller les extensions triviales

sur chaque U_i . L'extension obtenue sera triviale si et seulement si le cocycle (σ_{ij}) est un cobord, d'où la définition de π et son injectivité ; les extensions qu'on obtient ainsi sont exactement celles qui sont triviales sur chaque ouvert (U_i) , d'où l'exactitude en t_G .

2.13. THEOREME.- Supposons que $H^0(X, T_X^1)$ et $H^1(X, T_X)$ (resp. $H^0(X, T_X^1)$) soient de dimension finie. Alors G (resp. L) admet une enveloppe, appelée déformation verselle globale (resp. locale) de X . C'est le cas par exemple si X est compact ou un espace de Stein à singularités isolées (dans le cas respé, si le sous-espace singulier de X est compact).

On laisse le lecteur expliciter, comme en 2.1, les propriétés de la déformation verselle.

On ne donne la démonstration que pour G , la démonstration pour L étant en tous points analogue. Il faut vérifier les conditions $H1$ et $H2$ de 1.17, $H3$ résultant de 2.9. Soient donc

$$\begin{array}{ccc} A' & & A'' \\ & \searrow & \swarrow \\ & A & \end{array}$$

un diagramme dans C , avec $A'' \rightarrow A$ surjection simple, Y' (resp. Y'') une déformation de X sur A' (resp. A'') induisant une déformation Y de X sur A . On forme l'espace annelé "somme amalgamée" $Y' \amalg_Y Y''$:

l'espace topologique sous-jacent est X muni du faisceau d'anneaux

$\mathcal{O}_{Y'} \times_{\mathcal{O}_Y} \mathcal{O}_{Y''}$. C'est un espace annelé au-dessus de $B = A' \times_A A''$, plat sur B grâce à l'exposé III (I, §3, 1°), qui induit Y' (resp. Y'')

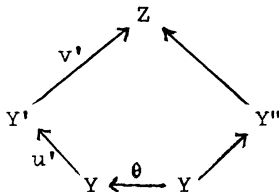
sur A' (resp. A'') ; pour vérifier $H1$, il suffit de démontrer que c'est un espace analytique. Pour cela, on choisit localement un plongement j de Y'

dans un ouvert V de $\mathbb{C}^n$, d'où un plongement de $Y' \amalg_Y Y''$ dans $V \amalg_Y Y''$ (qui, par définition, est l'espace V muni du faisceau d'anneaux $\mathcal{O}_V \times_{j_* \mathcal{O}_Y} j_* \mathcal{O}_{Y''}$) ; or ce dernier espace est analytique puisque le faisceau $\mathcal{O}_V \times_{j_* \mathcal{O}_Y} j_* \mathcal{O}_{Y''}$ est localement isomorphe à l'extension triviale de $\mathcal{O}_V$ par $j_* J$ (J étant l'idéal de Y dans Y''). Ceci démontre H1.

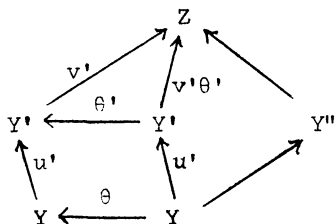
Etudions maintenant l'injectivité de l'application (*). Supposons donnée une seconde déformation Z de X à B , induisant Y' sur A' et Y'' sur A'' . On en déduit un automorphisme θ de la déformation Y , défini par :

$$\theta : Y \xrightarrow{\sim} Y'' \otimes_{A''} A \xrightarrow{\sim} Z \otimes_B A \xrightarrow{\sim} Y' \otimes_{A'} A \xrightarrow{\sim} Y$$

de sorte qu'on a un diagramme commutatif de déformations :



Supposons que θ se relève en un automorphisme θ' de Y' ; on a un nouveau diagramme :



Le losange de droite fournit alors un B -morphisme $Y' \amalg_Y Y'' \rightarrow Z$ qui induit

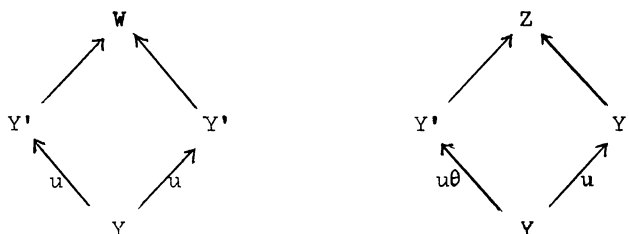
un isomorphisme sur A ; c'est donc un isomorphisme par platitude (cf. exposé III, I, § 3, lemme 3). Ainsi, si tout automorphisme de la déformation Y se relève en un automorphisme de Y' , l'application $(*)$ est bijective. C'est en particulier le cas si $A = \underline{\mathbb{C}}$, d'où $Y = X$ et $\theta = \text{id}$: ce qui démontre H 2 et le théorème.

2.14. PROPOSITION.— Dans la situation précédente, les conditions suivantes sont équivalentes :

(i) Le foncteur G (resp. L , resp. $\text{Def}(\mathcal{O}, \cdot)$) est pro-représentable, autrement dit la déformation verselle est universelle.

(ii) Pour toute surjection simple $A' \rightarrow A$ et toute déformation Y' sur A' , tout automorphisme de $Y' \otimes_{A'} A$ se relève en un automorphisme de Y' .

Remarquons que, sous les conditions de 2.13, (i) équivaut à H 4 ; l'implication (ii) $\Rightarrow$ (i) a donc été démontrée plus haut. Réciproquement, supposons H 4 vérifié. Soit θ un automorphisme de Y . Considérons les deux diagrammes :



où W et Z sont les sommes amalgamées via les flèches indiquées. Par H 4, il existe un automorphisme de déformations $\rho : W \xrightarrow{\sim} Z$, qui induit sur les deux projections deux automorphismes θ_1 et θ_2 de Y' , lesquels induisent le même automorphisme φ de Y . On a donc :

$$\theta_1 u = u \theta \varphi, \quad \theta_2 u = u \varphi.$$

Alors $\theta_1 \theta_2^{-1} u = u \theta$, ce qui montre que l'automorphisme $\theta_1 \theta_2^{-1}$ de Y' induit θ sur Y .

2.15. Remarques.

1) On peut formaliser "l'obstruction à l'universalité" de la façon suivante : soit $\mathcal{X}$ la déformation verselle formelle ; on introduit le foncteur $A \rightsquigarrow \text{Aut}(\mathcal{X} \otimes_R A)$ (il s'agit des automorphismes de déformations), défini sur la catégorie des R -algèbres locales artiniennes de corps résiduel $\underline{\mathbb{C}}$; utilisant les techniques de cet exposé, on voit facilement qu'il est pro-représentable par un groupe formel sur R ; la condition (ii) équivaut à la lissité de ce groupe formel. On voit facilement que l'espace tangent à ce groupe à l'origine est $H^0(X, T_X)$. En particulier, si $H^0(X, T_X) = (0)$, il existe une déformation formelle universelle, puisque le groupe formel est alors nul ; mais la condition (ii) est nettement moins restrictive.

2) Plaçons-nous dans la situation 2.13 : le foncteur G admet une enveloppe $(R_g, \mathcal{X}_g)$, le foncteur L une enveloppe $(R_1, \mathcal{X}_1)$. D'après 1.7 (iii), il existe au moins une flèche $R_1 \rightarrow R_g$ telle que $\mathcal{X}_1 \otimes_{R_1} = \varphi(\mathcal{X}_g)$ dans $L(R_g)$; mais cette flèche n'est pas canonique.

3) Le fait que la déformation verselle ne soit pas universelle n'a rien de pathologique. Prenons la singularité peut-être la plus simple : $\mathcal{O} = \underline{\mathbb{C}}\{X, Y\}/XY$. La déformation verselle est $\underline{\mathbb{C}}\{X, Y\}[[T]] / (XY - T)$ au-dessus de $\underline{\mathbb{C}}[[T]]$; il est facile de voir que l'automorphisme :

$$\begin{cases} X \mapsto X + TX \\ Y \mapsto Y \end{cases} \quad \text{au-dessus de } \underline{\mathbb{C}}[[T]]/T^2 \text{ ne se}$$

relève pas à $\underline{\mathbb{C}}[[T]]/T^3$.

2.16. Liabilité de G .

Le problème est le suivant : on se donne une surjection simple $A \twoheadrightarrow A/I$, une déformation Y de X sur A/I , qu'on cherche à prolonger au-dessus de A . Posons $S = \text{Spec } A/I$, $T = \text{Spec } A$.

a) Cherchons d'abord des relèvements locaux. Considérons la suite exacte :

$$\begin{array}{ccccccc} Y & & \dots & \longrightarrow & T^1(Y/T, J) & \xrightarrow{\varphi} & T^1(S/T, J) \longrightarrow T^2(Y/S, J) \longrightarrow \dots \\ \downarrow & & & & & & \downarrow \wr \\ S \hookrightarrow T & & & & & & \text{Hom}_{\mathcal{O}_Y}(J, J) \end{array}$$

avec $J = I \otimes_{\mathcal{O}_S} \mathcal{O}_Y \xrightarrow{\sim} \mathcal{O}_X$.

Soit $C^{0,2}$ l'image dans $T^2(Y/S, J)$ de l'élément $1 \in T^1(S/T, J)$; d'après l'exposé III (I, § 2, lemme 1), le sous-ensemble de $T^1(Y/T, J)_X$ correspondant aux germes de déformations de Y sur T en x est exactement $\varphi_X^{-1}(1_X)$; pour qu'il soit non vide, il faut et il suffit que $C_X^{0,2} = 0$. Comme $T^2(Y/S, J) = T_X^2$ (exposé III, II § 2, prop. 4), on trouve une première obstruction $C^{0,2}$ dans $H^0(X, T_X^2)$.

b) Supposons $C^{0,2} = 0$. Alors $\text{Def}(Y/S, T)$ est un faisceau principal homogène sous $T^1(Y/S, J) = T_X^1$; un tel faisceau admet une section globale si et seulement si une certaine obstruction $C^{1,1} \in H^1(X, T_X^1)$ est nulle (à savoir la classe du 1-cocycle $(S_i - S_j)$ pour un quelconque choix de sections $S_i \in H^0(U_i, \text{Def}(Y/S, T))$) .

c) Supposons $C^{1,1} = 0$ (et $C^{0,2} = 0$) . On sait alors qu'il existe des éléments $\eta \in H^0(X, \text{Def}(Y/S, T))$. Or on a une suite exacte comme en 2.9 :

$$\text{Def}(Y/S, T) \longrightarrow H^0(X, \text{Def}(Y/S, T)) \xrightarrow{C^{2,0}} H^2(X, T_X) .$$

Pour que η provienne d'une déformation globale, il faut et il suffit que $c^{2,0}(\eta) = 0$. En résumé :

2.17. PROPOSITION.- La base de la déformation verselle formelle globale de X est une algèbre de séries formelles sur $\underline{\mathbb{C}}$ si et seulement si $c^{0,2} = c^{1,1} = 0$ et $c^{2,0}(\eta) = 0$ pour un η . Ce sera le cas en particulier si $H^0(X, T_X^2) = H^1(X, T_X^1) = H^2(X, T_X) = (0)$.

2.18. Remarque.- Bien entendu, on a ici grimpé pas à pas les étages de la suite spectrale évoquée en 2.10. Il existe en fait une obstruction unique à la lissité, qui habite dans $\text{Ext}_{O_X}^2(L_{X/\underline{\mathbb{C}}}, O_X)$.

2.19. Exemple.

Soit X une courbe compacte, réduite, localement intersection complète ; alors la déformation verselle formelle de X admet comme base $\underline{\mathbb{C}}[[T_1 \dots T_r]]$, avec $r = 3g - 3 + \dim H^0(X, T_X)$.

En effet la lissité résulte de 2.17, et le calcul de dimension du théorème de Riemann-Roch.