Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa Cl. Sci. (5)
Vol. IX (2010), 189-227

Fonctions L p-adiques et irrationalité

PIERRE BEL

Abstract. We give a minoration of the dimension of the vector space spanned on a cyclotomic field by the values of p-adic Hurwitz zeta function. As a corollary, we obtain the existence of irrationality values of p-adic L functions. The proof uses hypergeometric series and a criterion of linear independence.

Mathematics Subject Classification (2000): 11J72 (primary); 11J61 (secondary).

1. Introduction

Le but de ce travail était d'étendre à des valeurs de fonctions zêta p-adiques les résultats d'irrationalité ou d'indépendance linéaire sur le corps des rationnels obtenus par Ball et Rivoal ([1, 8]) pour des valeurs de la fonction zêta de Riemann. Un premier obstacle était le critère d'indépendance linéaire de Nesterenko, souvent utilisé pour ce genre de problèmes en association avec la méthode du col, dont on ne connaît pas d'équivalent p-adique. Le critère de Nesterenko (*cf.* [7]) est remplacé par un critère qui s'applique à des formes linéaires linéairement indépendantes, comme le critère utilisé par Siegel dans le cas archimédien, et que nous étendons au cas p-adique. Ce critère, qui a l'avantage de ne pas nécessiter de minoration – point délicat dans le cas p-adique à cause de l'absence de la méthode du col – oblige par contre à utiliser des formes linéaires linéairement indépendantes. Cela se trouve de façon naturelle avec des approximants de Padé pour les logarithmes ou les polylogarihmes, mais se révèle plus délicat pour les fonctions zêta. C'est pourquoi nous ne pouvons atteindre que des valeurs des fonctions L p-adiques, choisies précisément pour rendre possible un calcul de déterminant. On pourra se référer aux articles de Calegari et Beukers pour les résultats, les plus récents, sur l'irrationalité des valeurs des fonctions L p-adiques (*cf.* [2, 3]).

Received May 30, 2008; accepted in revised form April 2, 2009.

2. Notations et conventions

Corps de nombres, corps p-adiques et formule du produit

Si β est un nombre algébrique sur $\mathbb{Q}$, on note $d(\beta)$ le dénominateur de β, c'est-à-dire le plus petit entier strictement positif l tel que $l\beta$ soit un entier algébrique. On notera $\mathbb{K}$ et $\mathcal{O}(\mathbb{K})$ un corps de nombres et son anneau d'entiers. On pose $d_n = \operatorname{ppcm}(1, \cdots, n)$. On sait par le théorème des nombres premiers que $d_n = e^{n+o(n)}$.

Soit p un nombre premier. On note v_p la valuation p- adique sur $\mathbb{Q}$ et $|.|_p = p^{-v_p}$ la valeur absolue p-adique.

On pose $q_p = p$ si $p \neq 2$ et $q_2 = 4$. Pour $x \in \mathbb{Z}_p^*(= \mathbb{Z}_p \setminus p\mathbb{Z}_p)$, on désigne par $\omega(x)$ l'unique racine de l'unité (ω est appelée caractère de Teichmüller), d'ordre $p-1$ si $p \neq 2$, et d'ordre 2 si $p = 2$, telle que $|x - \omega(x)|_p \leq q_p^{-1}$. On étend la définition de ω à $\mathbb{Q}_p^*$ en posant $\omega(x) = p^{v_p(x)}\omega(p^{-v_p(x)}x)$ et on pose $< x >= \frac{x}{\omega(x)}$ (donc $< px >=< x >$ pour tout $x \in \mathbb{Q}_p^*$).

Pour v une place d'un corps de nombres $\mathbb{K}$, on note $\mathbb{K}_v$ et $\mathbb{Q}_v$ les complétés de $\mathbb{K}$ et $\mathbb{Q}$ pour cette place et $\eta_v = [\mathbb{K}_v : \mathbb{Q}_v]$.

Si $\alpha \in \mathbb{K}^*$, alors on a

$$0 = \sum_{v \text{ place de } \mathbb{K}} \eta_v \log |\alpha|_v .$$

De plus

$$\sum_{v \text{ place de } \mathbb{K} \text{ infinie}} \eta_v = [\mathbb{K} : \mathbb{Q}].$$

Si α est un élément non nul de $\mathcal{O}(\mathbb{K})$, comme $|\alpha|_v \leq 1$ pour toute place finie v de $\mathbb{K}$, si $\mathfrak{p}$ est une place finie, on a :

$$\eta_{\mathfrak{p}} \log |\alpha|_{\mathfrak{p}} + \sum_{v \text{ infinie}} \eta_v \log |\alpha|_v \geq 0.$$

Caractère de Dirichlet

Pour un entier $d > 1$, on note $\Psi(d)$ l'ensemble des caractères de Dirichlet de conducteur d.

Polynômes et nombres de Bernoulli

Les polynômes de Bernoulli $B_k(x)$ sont donnés par la série génératrice :

$$\frac{te^{tx}}{e^t - 1} = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{B_k(x)}{k!} t^k.$$

Les nombres de Bernoulli sont définis par $B_n = B_n(0)$. Ils vérifient l'équation $\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} B_k\, x^{n-k} = B_n(x)$. Le théorème de Clausen-von Staudt (*cf.* [4]) donne, pour tout nombre premier p et pour tout entier positif n, $v_p(B_n) \geq -1$.

Fonction Zêta de Hurwitz complexe et p-adique

On note $\zeta(s,x)$ la fonction zêta de Hurwitz définie par

$$\zeta(s,x)=\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{1}{(k+x)^s}$$

pour $(s,x)\in\mathbb{C}\times\mathbb{R}$, avec $\Re(s)>1$ et $x>0$. Pour x fixé, cette fonction admet un prolongement en une fonction holomorphe sur $\mathbb{C}\backslash\{1\}$, dont 1 est un pôle d'ordre 1 et de résidu 1 et pour tout entier n positif $\zeta(-n,x)=-\frac{B_{n+1}(x)}{n+1}$.

La formule d'Euler-MacLaurin conduit aisément au développement asymptotique suivant, pour $x\to+\infty$:

$$\zeta(s,x)=\frac{x^{1-s}}{s-1}-\sum_{j=1}^{k}\binom{-s}{j-1}\frac{B_j}{j}x^{1-s-j}+O(x^{-s-k}),\tag{2.1}$$

où les B_j sont les nombres de Bernoulli, et pour tout $k\geq 1$, le symbole O est uniforme en s pour s borné. Par passage à la limite sur s, on en déduit que la valeur en 1 de la fonction holomorphe $s\longmapsto\zeta(s,x)-\frac{1}{s-1}$ vérifie :

$$\left(\zeta(s,x)-\frac{1}{s-1}\right)_{s=1}=-\log x+\sum_{j=1}^{k}(-1)^j\frac{B_j}{j}x^{-j}+O(x^{-k-1}).\tag{2.2}$$

Pour la fonction zêta de Hurwitz p-adique, nous adoptons la définition de ([4]) : pour $s\in\mathbb{C}_p\backslash\{1\}$ tel que $|s|_p<q_p p^{-\frac{1}{p-1}}$ et $x\in\mathbb{Q}_p$ avec $|x|_p\geq q_p$, on a

$$\zeta_p(s,x)=\frac{1}{s-1}\lim_{r\to+\infty}p^{-r}\sum_{0\leq m<p^r}<x+m>^{1-s}.$$

La limite existe bien (intégrale de Volkenborn) car la fonction

$$<x+t>^{1-s}=\exp_p\left((1-s)\log_p\frac{x+t}{\omega(x)}\right)$$

est fortement continûment différentiable en t sur $\mathbb{Z}_p$. Pour m entier positif, on vérifie que

$$\zeta_p(1-m,x)=-\omega(x)^{-m}\frac{B_m(x)}{m}.$$

Cette définition conduit aisément aux développements en séries de Laurent classiques :

Lemme 2.1. *Pour $s\in\mathbb{Z}_p\backslash\{1\}$ et $x\in\mathbb{Q}_p$ avec $|x|_p\geq q_p$, on a :*

$$\zeta_p(s,x)=\frac{<x>^{1-s}}{s-1}-<x>^{1-s}\sum_{j=1}^{+\infty}\binom{-s}{j-1}\frac{B_j}{j}x^{-j}.\tag{2.3}$$

Pour s tendant vers 1 *dans* $\mathbb{Z}_p$:

$$\lim_{s\to 1}\left(\zeta_p(s,x)-\frac{1}{s-1}\right)=-\log_p <x> +\sum_{j=1}^{+\infty}(-1)^j\frac{B_j}{j}x^{-j}. \tag{2.4}$$

Fonction L de Dirichlet complexe et p-adique

Soit ψ un caractère de Dirichlet de conducteur m et $\ell = \mathrm{ppcm}(m, q_p)$. On peut définir les fonctions L de Dirichlet pour un entier $s \geq 2$ par

$$\text{Dans le cas complexe } L(s,\psi)=m^{-s}\sum_{k=1}^{m}\psi(k)\,\zeta\left(s,\frac{k}{m}\right)$$
$$\text{Dans le cas } p\text{-adique } L_p(s,\psi)=\frac{\langle\ell\rangle^{1-s}}{\ell}\sum_{\substack{1\leq k\leq \ell\\ \mathrm{pgcd}(k,p)=1}}\psi(k)\,\zeta_p\left(s,\frac{k}{\ell}\right).$$

3. Résultats

Soient un entier $h \geq 1$, $v = \mathrm{ppcm}(h, p-1)$, κ une racine primitive $p-1$-ème de l'unité, ξ une racine primitive h-ème de l'unité et χ une racine primitive v-ème de l'unité. On considère $\mathbb{K} = \mathbb{Q}(\chi)$ comme plongé dans $\mathbb{C}_p$. On note $\mathbb{K}_p$ le complété de ce plongement. On remarque que $\mathbb{Q}_p = \mathbb{Q}_p(\kappa)$ et $\mathbb{K}_p = \mathbb{Q}_p(\chi) = \mathbb{Q}_p(\xi)$ ($\mathbb{Q}_p$ contient les racines $(p-1)$-ème de l'unité). On peut donc considérer $\mathbb{Q}_p$, comme un $\mathbb{Q}(\kappa)$-espace vectoriel.

Pour un nombre p-adique x, tel que $|x|_p \geq q_p$ et s un entier strictement positif, on pose

$$\tilde{T}_p(s,x)=\sum_{j=0}^{h-1}\xi^{-j}\zeta_p\left(s,\frac{x+j}{h}\right)\quad \text{si}\quad s>1 \tag{3.1}$$

pour $h \geq 1$. Si $h > 1$:

$$\begin{aligned}\tilde{T}_p(1,x)&=\lim_{s\to 1}\tilde{T}_p(s,x)=\lim_{s\to 1}\sum_{j=0}^{h-1}\xi^{-j}\zeta_p\left(s,\frac{x+j}{h}\right)\\ &=-\frac{1}{h}\sum_{l=1}^{h-1}\xi^{-l}\log_p\left(1+\frac{l}{x}\right)+\sum_{j=1}^{+\infty}h^{j-1}\frac{(-1)^jB_j}{j}\sum_{l=0}^{h-1}\xi^{-l}(x+l)^{-j}.\end{aligned} \tag{3.2}$$

Enfin, si $h = 1$, on pose :

$$\tilde{T}_p(1,x)=0.$$

Pour $h > 1$, l'existence des expressions définissant $\tilde{T}_p(1,x)$ et leurs égalités sont une conséquence des équations (2.3) et (2.4).

Théorème 3.1. *Soit $x = \frac{a}{b}$ un rationnel, tel que $|x|_p \geq q_p$, et soit A un entier supérieur ou égal à 2. Alors la dimension τ du sous espace vectoriel de $\mathbb{Q}_p$ engendré sur $\mathbb{Q}(\kappa)$ par la famille $\left\{1, \left(\zeta_p(s,x)\right)_{s\in[2,A]}\right\}$ vérifie*

$$\tau \geq \frac{1}{\varphi(p-1)} \frac{A \log |x|_p}{\log b + \sum_{q|b} \frac{\log q}{q-1} + A + (A-1)\log 2}.$$

Théorème 3.2. *Pour tout entier A supérieur ou égal à 2, si le nombre premier p vérifie*

$$p \geq e^{(1+\log 2)A^2}$$

alors tous les nombres $\left\{\zeta_p\left(s, \frac{1}{p}\right)\right\}_{s\in[2,A]}$ sont irrationnels.

Corollaire 3.3. *Pour tout entier $s \geq 2$, si p vérifie*

$$p \geq e^{(1+\log 2)s^2}$$

alors il existe au moins un caractère de Dirichlet ψ de conducteur p, tel que

$L_p(s,\psi)$ soit un nombre irrationnel.

Démonstration. Supposons que pour tous les caractères de Dirichlet ψ de conducteur p, $L_p(s,\psi)$ soit un nombre rationnel. On a donc

$$\sum_{\psi\in\Psi(p)} L_p(s,\psi) \text{ est un nombre rationnel.}$$

Or par sommation sur les caractères, on a

$$\sum_{\psi\in\Psi(p)} L_p(s,\psi) = \frac{p-1}{p}\zeta_p\left(s, \frac{1}{p}\right).$$

Ce qui est contradictoire avec le Théorème 3.2.

Théorème 3.4. *Soit $x = \frac{a}{b}$ un rationnel, tel que $|x|_p \geq q_p$, et soit A un entier supérieur ou égal à 2. Alors la dimension τ du sous-espace vectoriel de $\mathbb{K}_p$ engendré sur $\mathbb{Q}(\chi)$ par la famille $\left\{1, \left(\tilde{T}_p(s,x)\right)_{s\in[1,A]}\right\}$ vérifie*

$$\tau \geq \frac{[\mathbb{K}_p : \mathbb{Q}_p]}{\varphi(v)} \frac{A \log |x|_p}{\log b + \sum_{q|b} \frac{\log q}{q-1} + A + (A-1)\log 2}.$$

Théorème 3.5. *Pour tout entier A supérieur ou égal à 2, si le nombre premier p vérifie*

$$p \geq e^{(1+\log 2)A^2}$$

alors l'ensemble $\left\{\zeta_p\left(s, \frac{1}{p}\right) - \zeta_p\left(s, \frac{p+2}{2p}\right)\right\}_{s\in[1,A]}$ *contient au plus un nombre rationnel.* [1]

4. Critère d'indépendance linéaire

Ce critère est une adaptation au cas p-adique du critère utilisé dans le cas complexe par Siegel (*cf.* [5] pages 81-82 et pages 215-216).

Soit m un nombre entier positif. Pour $L = (\ell_1, \ldots \ell_m) \in \mathbb{K}^m$, et $\theta = (\theta_1, \ldots, \theta_m) \in \mathbb{C}_p^m$, on note $(L, \theta) = \ell_1\theta_1 + \ldots + \ell_m\theta_m$. Si v est une place de $\mathbb{K}$, on note $\|L\|_v = \max_{1\leq j\leq m} |\ell_j|_v$.

Lemme 4.1. *Soit p un nombre premier. Soit $\mathbb{K}$ un corps de nombres, on considère $\mathbb{K}$ comme plongé dans $\mathbb{C}_p$, dans lequel on note $\mathbb{K}_p = \mathbb{Q}_p(\mathbb{K})$ son adhérence. Soit $\theta = (\theta_1, \cdots, \theta_m)$ un élément non nul de $\mathbb{K}_p^m$. On suppose qu'il existe m suites $(L_n^{(i)}) = \left(\left(\ell_{n,j}^{(i)}\right)_{j\in[1,m]}\right)$, où $n \in \mathbb{N}$ et $1 \leq i \leq m$, d'éléments de $(\mathcal{O}(\mathbb{K}))^m$ telles que pour chaque n les $L_n^{(i)}$, pour $1 \leq i \leq m$, soient linéairement indépendants sur $\mathbb{K}$, et des nombres réels strictement positifs c et ρ satisfaisant pour chaque i les conditions :*

$$\limsup_n \frac{1}{n} \log \|L_n^{(i)}\|_v \leq c$$

pour les places infinies v, et

$$\limsup_n \frac{1}{n} \log \left|(L_n^{(i)}, \theta)\right|_p \leq -\rho.$$

Alors la dimension τ du $\mathbb{K}$-sous-espace vectoriel de $\mathbb{K}_p$ engendré par les θ_j pour $1 \leq j \leq m$ vérifie

$$\tau \geq \frac{\rho\,[\mathbb{K}_p : \mathbb{Q}_p]}{c[\mathbb{K} : \mathbb{Q}]}.$$

Démonstration. Effectuons tout d'abord quelques réductions. En renumérotant les variables $(\theta_i)_{i\in[1,m]}$, on peut supposer $\theta_1 \neq 0$. De plus, en remplaçant les variables $(\theta_j)_{j\in[1,m]}$, par $\left(\frac{\theta_j}{\theta_1}\right)_{j\in[1,m]}$, les hypothèses étant encore vérifiées, on peut supposer $\theta_1 = 1$.

[1] On note $\zeta_p\left(1, \frac{1}{p}\right) - \zeta_p\left(1, \frac{p+2}{2p}\right)$ pour $\lim_{s\to 1} \zeta_p\left(s, \frac{1}{p}\right) - \zeta_p\left(s, \frac{p+2}{2p}\right)$

Si τ est la dimension du $\mathbb{K}$-espace vectoriel engendré par les θ_j, alors il existe $m-\tau$ éléments $(A^{(i)})_{i\in[\tau+1,m]}$ de $(\mathcal{O}(\mathbb{K}))^m$, linéairement indépendants sur $\mathbb{K}$, tels que $(A^{(i)},\theta)=0$ pour tout $i\in[\tau+1,m]$.

On peut en faisant des permutations entre les $L_n^{(i)}$ à chaque rang n se ramener au cas, où pour tout $n\in\mathbb{N}$, la famille $(L_n^{(1)},\cdots,L_n^{(\tau)},A^{(\tau+1)},\cdots,A^{(m)})$ est libre.

Soit M_n la matrice dont les lignes sont formées des vecteurs $(L_n^{(1)},\cdots,L_n^{(\tau)},$ $A^{(\tau+1)},\cdots,A^{(m)})$, *i.e.*, comme $L_n^{(i)}=(\ell_{n,1}^{(i)},\ldots\ell_{n,m}^{(i)})$ et $A^{(i)}=(a_1^{(i)},\cdots,a_m^{(i)})$,

$$M_n=\begin{pmatrix} \ell_{n,1}^{(1)} & \ell_{n,2}^{(1)} & \cdots & \ell_{n,m}^{(1)}\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ \ell_{n,1}^{(\tau)} & \ell_{n,2}^{(\tau)} & \cdots & \ell_{n,m}^{(\tau)}\\ a_1^{(\tau+1)} & a_2^{(\tau+1)} & \cdots & a_m^{(\tau+1)}\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ a_1^{(m)} & a_2^{(m)} & \cdots & a_m^{(m)}\end{pmatrix}.$$

Comme la matrice est non singulière, on a

$$\Lambda_n=\det(M_n)\neq 0.$$

Comme Λ_n appartient à $\mathcal{O}(\mathbb{K})$, on en déduit que

$$0\leq \eta_p\log|\Lambda_n|_p+\sum_{v\text{ infinie}}\eta_v\log|\Lambda_n|_v. \tag{4.1}$$

Le développement du déterminant nous permet d'obtenir pour les places infinies :

$$\limsup_n\frac{\log|\Lambda_n|_v}{n}\leq\tau\,c. \tag{4.2}$$

Pour le calcul du déterminant, on peut aussi ajouter à une colonne, une combinaison linéaire des autres colonnes. En ajoutant à la première, les colonnes suivantes respectivement multipliées par θ_j, on obtient :

$$\Lambda_n=\begin{vmatrix} (L_n^{(1)},\theta) & \ell_{n,2}^{(1)} & \cdots & \ell_{n,m}^{(1)}\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ (L_n^{(\tau)},\theta) & \ell_{n,2}^{(\tau)} & \cdots & \ell_{n,m}^{(\tau)}\\ 0 & a_2^{(\tau+1)} & \cdots & a_m^{(\tau+1)}\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ 0 & a_2^{(m)} & \cdots & a_m^{(m)}\end{vmatrix}.$$

Le développement du déterminant sous cette forme nous permet d'obtenir :

$$\limsup_n\frac{\log|\Lambda_n|_p}{n}\leq-\rho. \tag{4.3}$$

En divisant l'inéquation (4.1) par n et utilisant (4.2) et (4.3), on en déduit :

$$0 \leq -\rho\,\eta_p + \tau \sum_{v \text{ infinie}} \eta_v c,$$

soit

$$0 \leq -\rho\,\eta_p + \tau[\mathbb{K} : \mathbb{Q}]c\,.$$

Le résultat est donc démontré.

5. Preuves des résultats

5.1. Approximants de Padé simultanés de fonctions Zêta de Hurwitz

Les approximants de Padé utilisés sont adaptés de l'article de Rivoal (*cf.* [8]). Dans cette partie, comme dans la suite, ξ est une racine primitive h-ème de l'unité avec h entier, $h \geq 1$. Pour un nombre complexe $a \notin]-\infty, 0]$ et pour $s \in \mathbb{C}$, on note $a^s = e^{s \log a}$, avec $-\pi < \mathrm{Im}(\log a) < \pi$. On considère pour x un nombre complexe non réel négatif, s et z des nombres complexes, la série :

$$\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{z^k}{(k+x)^s}\,.$$

Cette série est convergente pour tout nombre complexe z tel que $|z| < 1$ et tout s. Si $|z| = 1$ et $z \neq 1$, la série $\displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{z^k}{(k+x)^s}$ est convergente pour tout nombre complexe s tel $\Re(s) > 0$. En effet, les sommes partielles sont bornées :

$$\left|\sum_{k=0}^{K} z^k\right| \leq \frac{2}{|z-1|}\,,$$

la série

$$\sum_{k=0}^{+\infty} \left|\frac{1}{(k+x)^s} - \frac{1}{(k+x+1)^s}\right|$$

est convergente car $\frac{1}{(k+x)^s} - \frac{1}{(k+x+1)^s} = O(k^{-(s+1)})$, et

$$\lim_{k \to +\infty} \frac{1}{(k+x)^s} = 0.$$

Enfin, pour $z = 1$, la série est convergente pour $\Re(s) > 1$.

La fonction de Lerch est définie par

$$\phi_s(x, z) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{z^k}{(k+x)^s}$$

lorsque cette série est convergente.

Pour z et x fixés, avec $|z| \leq 1$ et $z \neq 1$, la convergence est uniforme pour $\Re(s) > \epsilon$ pour tout $\epsilon > 0$, et $\phi_s(x, z)$ est donc une fonction holomorphe en s pour $\Re(s) > 0$. On a de plus $\phi_s(x, 1)$ est une fonction holomorphe en s pour $\Re(s) > 1$ et, dans ce cas, on a $\phi_s(x, 1) = \zeta(s, x)$

On suppose que A est un entier supérieur ou égal à 2, considéré comme fixé. Le nombre n est un entier positif vérifiant $A\,n \geq n + 3$.

Posons pour $q \in [0, A]$ et un nombre x tel que $x \notin \mathbb{Z}^-$

$$R_n^{(q)}(k) = n!^{A-1} \frac{(k)_{n+1}}{(k+x)_n^A (x+k+n)^q}$$

et

$$S_n^{(q)}(x, z) = \sum_{k=0}^{\infty} R_n^{(q)}(k)\, z^{-k}.$$

La fraction rationnelle $R_n^{(q)}(k)$ est de degré $n + 1 - A\,n - q$ par rapport à k donc de degré inférieur ou égal à -2, vu les hypothèses. La fonction $S_n^{(q)}(x, z)$ est donc définie pour tout complexe z de module supérieur ou égal à 1. La série $S_n^{(q)}(x, z)$ converge normalement sur l'ensemble des couples (x, z) où x est un nombre complexe de partie réelle plus grande que 1 et z un nombre complexe de module plus grand que 1.

Proposition 5.1. *Il existe $A + 1$ polynômes $(P_s^{(q)}(x, z))_{s\in[0,A]}$ à coefficients rationnels de degré en x au plus $n + 1$, de degré en z au plus n, et le degré en z de $P_s^{(q)}(x, z)$ est même au plus $n - 1$ si $s > q$, tels que pour tout nombre complexe z avec $|z| \geq 1$ et $z \neq 1$ et tout $x \in \mathbb{C}\setminus]-\infty, 0]$, on ait :*

$$S_n^{(q)}(x, z) = P_0^{(q)}(x, z) + \sum_{s=1}^{A} P_s^{(q)}(x, z)\phi_s\left(x, \frac{1}{z}\right). \tag{5.1}$$

si $z = 1$, on a alors

$$S_n^{(q)}(x, 1) = P_0^{(q)}(x, 1) + \sum_{s=2}^{A} P_s^{(q)}(x, 1)\phi_s\,(x, 1)\,. \tag{5.2}$$

De plus, pour z fixé, on a, quand $\Re(x) \to +\infty$

$$S_n^{(q)}(x, z) = o(x^{-A\,n+n+3-q}).$$

Démonstration. La décomposition en éléments simples de $R_n^{(q)}(k)$ nous donne

$$R_n^{(q)}(k) = \sum_{s=1}^{A} \sum_{j=0}^{n} \frac{r_{j,s}^{(q)}(x)}{(k+x+j)^s},$$

où

$$r_{j,s}^{(q)}(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{(A-s)!} \left(\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}k}\right)^{A-s} \left[R_n^{(q)}(k)(x+k+j)^A\right]_{|k=-j-x} \\ \qquad\qquad \text{si } j \in [0, n-1] \text{ et } s \in [1, A], \\ \dfrac{1}{(q-s)!} \left(\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}k}\right)^{q-s} \left[R_n^{(q)}(k)(x+k+n)^q\right]_{|k=-n-x} \\ \qquad\qquad \text{si } j = n \text{ et } s \in [1, q], \\ 0 \qquad\qquad \text{si } j = n \text{ et } s \in [q+1, A]. \end{cases}$$

Remarquons tout de suite que, pour $q > 0$, on a

$$\begin{aligned} r_{n,q}^{(q)}(x) &= \left[R_n^{(q)}(k)(x+k+n)^q\right]_{k=-n-x} \\ &= n!^{A-1} \frac{(-n-x)_{n+1}}{(-n)_n^A} \neq 0. \end{aligned} \tag{5.3}$$

Par le changement de variable $l = -k-x$, on obtient

$$r_{j,s}^{(q)}(x) = \begin{cases} \dfrac{(-1)^{A-s}}{(A-s)!} \left(\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}l}\right)^{A-s} \left[R_n^{(q)}(-l-x)(j-l)^A\right]_{|l=j} \\ \qquad\qquad \text{si } j \in [0, n-1] \text{ et } s \in [1, A], \\ \dfrac{(-1)^{q-s}}{(q-s)!} \left(\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}l}\right)^{q-s} \left[R_n^{(q)}(-l-x)(j-l)^q\right]_{|l=n} \\ \qquad\qquad \text{si } j = n \text{ et } s \in [1, q], \\ 0 \qquad\qquad \text{si } j = n \text{ et } s \in [q+1, A]. \end{cases}$$

On en déduit

$$r_{j,s}^{(q)}(x) = \begin{cases} \dfrac{(-1)^{A-s}}{(A-s)!}\left(\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}l}\right)^{A-s}\left[n!^{A-1}\dfrac{(-l-x)_{n+1}}{(-l)_n^A(n-l)^q}(j-l)^A\right]_{|l=j} \\ \qquad\qquad \text{si } j \in [0, n-1] \text{ et } s \in [1, A], \\ \\ \dfrac{(-1)^{q-s}}{(q-s)!}\left(\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}l}\right)^{q-s}\left[n!^{A-1}\dfrac{(-l-x)_{n+1}}{(-l)_n^A}\right]_{|l=n} \\ \qquad\qquad \text{si } j = n \text{ et } s \in [1, q], \\ \\ 0 \qquad\qquad \text{si } j = n \text{ et } s \in [q+1, A]. \end{cases} \tag{5.4}$$

Les fonctions $r_{j,s}^{(q)}(x)$ sont donc des polynômes en x de degré au plus $n+1$.

$$S_n^{(q)}(x, z) = \sum_{k=0}^{\infty}\sum_{s=1}^{A}\sum_{j=0}^{n}\frac{r_{j,s}^{(q)}(x)}{(k+x+j)^s}z^{-k}.$$

Il en résulte que

$$\begin{aligned} S_n^{(q)}(x, z) &= \sum_{s=1}^{A}\sum_{j=0}^{n}\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{r_{j,s}^{(q)}(x)}{(k+x+j)^s}z^{-k} \\ &= \sum_{s=1}^{A}\sum_{j=0}^{n} r_{j,s}^{(q)}(x)z^j\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{z^{-k-j}}{(k+x+j)^s} \\ &= \sum_{s=1}^{A}\sum_{j=0}^{n} r_{j,s}^{(q)}(x)z^j\left[\phi_s\left(x, \frac{1}{z}\right) - \sum_{k=0}^{j-1}\frac{z^{-k}}{(k+x)^s}\right] \\ &= \sum_{s=1}^{A}\phi_s\left(x, \frac{1}{z}\right)\sum_{j=0}^{n} r_{j,s}^{(q)}(x)z^j - \sum_{s=1}^{A}\sum_{j=0}^{n} r_{j,s}^{(q)}(x)z^j\sum_{k=0}^{j-1}\frac{z^{-k}}{(k+x)^s}. \end{aligned}$$

On a donc

$$S_n^{(q)}(x, z) = P_0^{(q)}(x, z) + \sum_{s=1}^{A} P_s^{(q)}(x, z)\phi_s\left(x, \frac{1}{z}\right),$$

où l'on a posé

$$P_0^{(q)}(x, z) = -\sum_{s=1}^{A}\sum_{j=0}^{n} r_{j,s}^{(q)}(x)z^j\sum_{k=0}^{j-1}\frac{z^{-k}}{(k+x)^s}$$

et, pour tout $s \in [1, A]$

$$P_s^{(q)}(x, z) = \sum_{j=0}^{n} r_{j,s}^{(q)}(x) z^j. \tag{5.5}$$

Les égalités (5.4) et (5.5) montrent immédiatement que pour $s \geq 1$, $P_s^{(q)}(x, z)$ est un polynôme à coefficients rationnels de degré en x au plus $n + 1$ et de degré en z au plus n. On voit aussitôt que le degré en z de $P_s^{(q)}(x, z)$ est au plus $n - 1$, si $s > q$.

Pour $P_0^{(q)}(x, z)$, on voit directement que c'est un polynôme en z de degré au plus n. De plus, on remarque que

$$\sum_{k=0}^{j-1} \frac{z^{j-k}}{(k+x)^s} = \frac{(-1)^{s-1}}{(s-1)!} \left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}l}\right)^{s-1} \left[\sum_{k=1}^{j} \frac{z^k}{(l-k+x)}\right]_{|l=j}.$$

Il en résulte que, pour $j \in [1, n-1]$, on a

$$\begin{aligned}
\sum_{s=1}^{A} r_{j,s}^{(q)}(x) \sum_{k=0}^{j-1} \frac{z^{j-k}}{(k+x)^s} &= \sum_{s=1}^{A} \frac{(-1)^{s-1}}{(s-1)!} \left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}l}\right)^{s-1} \left[\sum_{k=1}^{j} \frac{z^k}{l-k+x}\right]_{|l=j} \frac{(-1)^{A-s}}{(A-s)!} \\
&\quad \times \left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}l}\right)^{A-s} \left[R_n^{(q)}(-l-x)(j-l)^A\right]_{|l=j} \\
&= \frac{(-1)^{A-1}}{(A-1)!} \sum_{s=1}^{A} \binom{A-1}{s-1} \left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}l}\right)^{s-1} \left[\sum_{k=1}^{j} \frac{z^k}{l-k+x}\right]_{|l=j} \\
&\quad \times \left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}l}\right)^{A-s} \left[R_n^{(q)}(-l-x)(j-l)^A\right]_{|l=j} \\
&= \frac{(-1)^{A-1}}{(A-1)!} \left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}l}\right)^{A-1} \left[R_n^{(q)}(-l-x)(j-l)^A \sum_{k=1}^{j} \frac{z^k}{l-k+x}\right]_{|l=j}.
\end{aligned}$$

On a

$$\begin{aligned}
&R_n^{(q)}(-l-x)(j-l)^A \sum_{k=1}^{j} \frac{z^k}{l-k+x} \\
&= n!^{A-1} \frac{(-l-x)_{n+1}}{(-l)_n^A (-l+n)^q} (j-l)^A \sum_{k=1}^{j} \frac{z^k}{l-k+x}.
\end{aligned} \tag{5.6}$$

Comme $\sum_{k=1}^{j} \frac{z^k}{l-k+x}$ n'a que des pôles simples en x, qui sont des zéros de $(-l-x)_{n+1}$,

$$R_n^{(q)}(-l-x)(j-l)^A \sum_{k=1}^{j} \frac{z^k}{l-k+x}$$

est un polynôme en x de degré au plus n. On justifie de manière similaire le cas $j = n$ et il en résulte que $P_0^{(q)}(x, z)$ est un polynôme de degré au plus n par rapport à x. La première partie de la proposition est donc démontrée.

Pour $z = 1$, la série $S_n^{(q)}(x, 1)$ converge et les séries définissant les fonctions de Lerch convergent pour $s \geq 2$. Pour $s = 1$, on a

$$\phi_1(x, z) \sim_{z \to 1} -\log(1 - z).$$

Comme la limite $S_n^{(q)}(x, z)$ doit être finie en $z = 1$, on en déduit donc que $P_1^{(q)}(1) = 0$ et par continuité $P_1^{(q)}(x, 1)\phi_1(x, 1) = 0$. On a donc démontré le cas $z = 1$.

Pour le dernier point, on a la majoration pour $\Re(x) > 0$:

$$\begin{aligned}\left|x^{An-n-3+q} S_n^{(q)}(x, z)\right| &\leq n!^{A-1} \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(k)_{n+1} |x|^{An-n-3+q}}{|k + x|^{An+q}} \\ &\leq n!^{A-1} \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(k)_{n+1} |x|^{An-n-3+q}}{|x + k|^{An-n-3+q} |k + x|^{n+3}} \\ &\leq n!^{A-1} \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(k)_{n+1}}{|k + x|^{n+3}}.\end{aligned}$$

La convergence normale de la dernière série sur l'ensemble des complexes x tels que $\Re(x) > 1$ permet de passer à la limite sous le signe somme et on conclut que

$$\lim_{\Re(x) \to +\infty} \left|x^{An-n-3+q} S_n^{(q)}(x, z)\right| = 0.$$

La proposition est donc démontrée.

Corollaire 5.2. *On a, pour $h > 1$,*

$$S_n^{(q)}(x, \xi) = P_0^{(q)}(x, \xi) + \sum_{s=1}^{A} P_s^{(q)}(x, \xi)\phi_s(x, \xi^{-1})$$

et

$$S_n^{(q)}(x, 1) = P_0^{(q)}(x, 1) + \sum_{s=2}^{A} P_s^{(q)}(x, 1)\phi_s(x, 1)$$

et pour $h \geq 1$, lorsque $\Re(x) \to +\infty$,

$$S_n^{(q)}(x, \xi) = o(x^{-An+n+3}).$$

Lemme 5.3. *On a*

– *Pour $\Re(s) > 1$ et pour $x \in \mathbb{C} \backslash]-\infty, 0]$, $\phi_s(x, 1) = \zeta(s, x)$.*

– *Si $h>1$, pour $\Re(s)>0$ et pour $x\in\mathbb{C}\setminus]-\infty,0]$,* $\phi_s(x,\xi^{-1})=\frac{1}{h^s}\sum_{j=0}^{h-1}\xi^{-j}\zeta\left(s,\frac{x+j}{h}\right)$.

Démonstration. Pour $h>1$, remarquons que la somme

$$\sum_{j=0}^{h-1}\xi^{-j}\zeta\left(s,\frac{x+j}{h}\right)=\sum_{j=0}^{h-1}\xi^{-j}\left(\zeta\left(s,\frac{x+j}{h}\right)-\frac{1}{s-1}\right)$$

est une fonction entière en s, puisque les fonctions $\zeta\left(s,\frac{x+j}{h}\right)$ sont méromorphes sur $\mathbb{C}$ avec seul pôle 1 de résidu 1.

La preuve de la première égalité est une application immédiate des définitions. Pour la seconde égalité, supposons d'abord $\Re(s)>1$. Alors

$$\begin{aligned}\phi_s(x,\xi^{-1}) &= \sum_{k=0}^{+\infty}\frac{\xi^{-k}}{(k+x)^s}\\ &= \sum_{j=0}^{h-1}\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{\xi^{-kh-j}}{(kh+j+x)^s}\\ &= \frac{1}{h^s}\sum_{j=0}^{h-1}\xi^{-j}\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{1}{\left(k+\frac{j+x}{h}\right)^s}\\ \phi_s(x,\xi^{-1}) &= \frac{1}{h^s}\sum_{j=0}^{h-1}\xi^{-j}\zeta\left(s,\frac{x+j}{h}\right).\end{aligned}$$

Pour z et x fixés, avec $|z|\leq 1$, $z\neq 1$ et $x\notin]-\infty,0]$, les deux membres de la dernière égalité sont holomorphes pour $\Re(s)>0$. On peut donc étendre l'égalité à $\Re(s)>0$.

5.2. Propriétés arithmétiques des polynômes $P_s^{(q)}(x,z)$

On pose pour tout entier b non nul et pour tout entier positif n

$$\mu_n(b)=b^n\prod_{q|b}q^{\left\lfloor\frac{n}{q-1}\right\rfloor},$$

(où q désigne un nombre premier).

Lemme 5.4. *Si x est un nombre rationnel $\frac{a}{b}$ ($b>0$) et k un entier appartenant à l'intervalle $[0,n]$, alors les nombres $\frac{(x)_n}{n!}\mu_n(b)$ et $\frac{(x)_{n+1}}{n!(x+k)}\mu_n(b)d_n$ sont des entiers et on a*

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{n}\log(\mu_n(b))=\log b+\sum_{q|b}\frac{\log q}{q-1}\cdot \tag{5.7}$$

Démonstration. On a

$$\frac{(x)_n}{n!}\mu_n(b) = \frac{\prod_{i=0}^{n-1}(bi+a)}{n!}\prod_{q|b} q^{\left\lfloor \frac{n}{q-1}\right\rfloor}.$$

Montrons que la valuation q-adique de ce nombre rationnel est positive ou nulle pour tout nombre premier q.

- Si q divise b, alors la valuation q-adique de $n!$ étant au plus $\left\lfloor \frac{n}{q-1}\right\rfloor$, on en déduit que la valuation q-adique est positive ou nulle.
- Si q ne divise pas b, alors la valuation q-adique de $\prod_{i=0}^{n-1}(bi+a)$ est égale à celle de $\prod_{i=0}^{n-1}(i+\frac{a}{b})$. Dans l'intervalle $[0, n-1]$, pour un entier positif j, il y a au moins $\left\lfloor \frac{n}{q^j}\right\rfloor$ entiers congrus à $-\frac{a}{b}$ modulo $q^j\mathbb{Z}_q$. La valuation q-adique de $\prod_{i=0}^{n-1}(i+\frac{a}{b})$ est donc au moins $\sum_{j=1}^{\infty}\left\lfloor \frac{n}{q^j}\right\rfloor$ qui est exactement la valuation q-adique de $n!$. La valuation q-adique est donc positive ou nulle.

Le nombre $\frac{(x)_n}{n!}\mu_n(b)$ est donc bien un entier.

On a

$$\frac{(x)_{n+1}}{n!(x+k)}\mu_n(b)d_n = \frac{\prod_{0\le i\le n, i\ne k}(bi+a)}{n!}\left(\prod_{q|b} q^{\left\lfloor \frac{n}{q-1}\right\rfloor}\right)d_n.$$

Pour cela, montrons que pour tout nombre premier q, la valuation q-adique de ce nombre rationnel est positive ou nulle.

Si q divise b, ceci est évident puisque $v_q(n!) < \frac{n}{q-1}$.

On suppose donc que q ne divise pas b. Pour tout entier j compris entre 1 et $J = \left\lfloor \frac{\log n}{\log q}\right\rfloor$, on désigne par ν_j le nombre d'entiers i vérifiant $0 \le i \le n$, $i \ne k$ et $i \equiv -\frac{a}{b} \bmod q^j$. Le nombre

$$Y = \prod_{0\le i\le n, i\ne k}^{n}(bi+a)$$

est de valuation q-adique

$$v_q(Y) \ge \sum_{j=1}^{J-1} j(\nu_j - \nu_{j+1}) + J\nu_J = \sum_{j=1}^{J}\nu_j.$$

Pour chaque j compris entre 1 et J, et pour chaque entier tel que $0 \le K \le \frac{n}{q^j} - 1$, il y a un entier i appartenant à l'intervalle $[Kq^j, (K+1)q^j[$ tel que $i \equiv -\frac{a}{b} \bmod q^j$. Le nombre de ces intervalles disjoints est $\left\lfloor \frac{n}{q^j} \right\rfloor$, par suite $\nu_j \ge \left\lfloor \frac{n}{q^j} \right\rfloor - 1$. On a donc

$$v_q(Y) \ge \sum_{j=1}^{J} \left\lfloor \frac{n}{q^j} \right\rfloor - J.$$

Or $v_q(n!) = \sum_{j=1}^{J} \left\lfloor \frac{n}{q^j} \right\rfloor$ et $v_q(d_n) = J$, on en déduit

$$v_q(Y) - v_q(n!) + v_q(d_n) \ge 0.$$

On conclut que le nombre $\frac{(x)_{n+1}}{n!(x+k)}\mu_n(b)d_n$ est de valuation q-adique positive ou nulle. Le nombre $\frac{(x)_{n+1}}{n!(x+k)}\mu_n(b)d_n$ est donc bien un entier.

Pour la limite (5.7), le calcul est immédiat.

Proposition 5.5. *Pour tout nombre premier p, et tout $s \in [1, A]$, on a*

$$p^{\left\lfloor \frac{n}{p-1} \right\rfloor} d_n^{A-s}\, P_s^{(q)}(x, \xi) \in \mathbb{Z}_p[\xi][x]$$

et

$$p^{\left\lfloor \frac{n}{p-1} \right\rfloor} d_n^{A-1}\, P_0^{(q)}(x, \xi) \in \mathbb{Z}_p[\xi][x].$$

De plus, pour un nombre rationnel $\frac{a}{b}$, avec $(a, b) = 1$, pour tout $s \in [1, A]$, on a

$$b\, d_n^{A-s} \mu_n(b)\, P_s^{(q)}\left(\frac{a}{b}, \xi\right) \in \mathbb{Z}[\xi]$$

et

$$d_n^{A} \mu_n(b)\, P_0^{(q)}\left(\frac{a}{b}, \xi\right) \in \mathbb{Z}[\xi].$$

Démonstration. Démontrons d'abord le premier et le troisième point. Supposons $j \in [0, n-1]$ (le cas $j = n$ se traite de manière similaire, en se limitant à $s \le q$).

D'après (5.4)

$$r_{j,s}^{(q)}(x) = \frac{(-1)^{A-s}}{(A-s)!} \left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}l}\right)^{A-s} \left[n!^{A-1} \frac{(-l-x)_{n+1}}{(-l)_n^A (n-l)^q} (j-l)^A \right]_{|l=j}.$$

Écrivons

$$n!^{A-1} \frac{(-l-x)_{n+1}}{(-l)_n^A (n-l)^q} (j-l)^A = F(l)\, G(l)^{A-1}\, H(l),$$

où

$$F(l) = \frac{(-l-x)_n}{(-l)_{n+1}}(j-l), \quad G(l) = \frac{n!}{(-l)_{n+1}}(j-l)$$

et

$$H(l) = (-l+n)^{A-q}(n-l-x).$$

Décomposons maintenant $F(l)$ et $G(l)$ en éléments simples

$$F(l) = 1 + \sum_{\substack{m \neq j \\ 0 \leq m \leq n}} \frac{(j-m)f_m}{m-l}, \quad G(l) = \sum_{\substack{m \neq j \\ 0 \leq m \leq n}} \frac{(j-m)g_m}{m-l},$$

où

$$f_m = \frac{(-m-x)_n}{\prod\limits_{\substack{h \neq m \\ 0 \leq h \leq n}} (h-m)} = (-1)^m \frac{(-m-x)_n}{n!} \binom{n}{m}$$

et

$$g_m = \frac{n!}{\prod\limits_{\substack{h \neq m \\ 0 \leq h \leq n}} (h-m)} = (-1)^m \binom{n}{m}.$$

Il est immédiat que g_m est un entier. D'autre part $n!\, f_m \in \mathbb{Z}[x]$, donc $p^{\left\lfloor \frac{n}{p-1} \right\rfloor} f_m \in \mathbb{Z}_p[x]$. De plus le Lemme 5.4 implique que pour $x = \frac{a}{b}$, $\mu_n(b) f_m$ est un entier. On note $D_\lambda = \frac{1}{\lambda!}\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}l}\right)^\lambda$, on a alors pour tout entier $\lambda \geq 0$:

$$(D_\lambda F(l))_{|l=j} = \delta_{0,\lambda} - \sum_{m \neq j \quad 0 \leq m \leq n} \frac{f_m}{(m-j)^\lambda}$$

et

$$(D_\lambda G(l))_{|l=j} = -\sum_{m \neq j \quad 0 \leq m \leq n} \frac{g_m}{(m-j)^\lambda}.$$

On a donc montré que, pour tout λ entier positif,

$$d_n^\lambda \, (D_\lambda G(l))_{|l=j} \in \mathbb{Z} \quad \text{et} \quad p^{\left\lfloor \frac{n}{p-1} \right\rfloor} d_n^\lambda \, (D_\lambda F(l))_{|l=j} \in \mathbb{Z}_p[x]. \tag{5.8}$$

De plus, pour $x = \frac{a}{b}$, $d_n^\lambda \mu_n(b) \, (D_\lambda F(l))_{|l=j}$ est entier. Enfin les dérivées $D_\lambda(H(l))_{|l=j}$ sont des polynômes de $\mathbb{Z}[x]$ de degré au plus 1, et pour $x = \frac{a}{b}$, $b \, D_\lambda(H(l))_{|l=j}$ est entier.

Grâce à la formule de Leibniz, on a

$$\begin{aligned} &D_{A-s}\left[n!^{A-1} \frac{(-l-x)_{n+1}}{(-l)_n^A (n-l)^q} (j-l)^A \right]_{|l=j} \\ &= \sum_{\nu} \left(D_{\nu_0}(F)\right)_{|l=j} \left(D_{\nu_1}(G)\right)_{|l=j} \cdots \left(D_{\nu_{A-1}}(G)\right)_{|l=j} \left(D_{\nu_A}(H)\right)_{|l=j} \end{aligned}$$

(où la somme est sur les multi-indices $\nu \in \mathbb{N}^{A+1}$ tels que $\nu_0 + \cdots + \nu_A = A - s$), on déduit alors que $p^{\lfloor \frac{n}{p-1} \rfloor} d_n^{A-s}\, r_{j,s}^{(q)}(x)$ appartient à $\mathbb{Z}_p[x]$ et que $b\, d_n^{A-s} \mu_n(b)\, r_{j,s}^{(q)}(x)$ est un élément de $\mathbb{Z}$. Le premier et le troisième point sont alors démontrés.

Pour le deuxième et le quatrième point, en utilisant les équations (5.1) et (5.6), il suffit de montrer que

$$\frac{p^{\lfloor \frac{n}{p-1} \rfloor} d_n^{A-1}}{(A-1)!} \left(\frac{d}{\mathrm{d}l}\right)^{A-1} \left[n!^{A-1} \frac{(-l-x)_{n+1}}{(-l)_n^A (-l+n)^q} (j-l)^A \frac{1}{l-k+x} \right]_{|l=j} \in \mathbb{Z}_p[x]$$

et, pour $x = \frac{a}{b}$,

$$\frac{d_n^A \mu_n(b)}{(A-1)!} \left(\frac{d}{\mathrm{d}l}\right)^{A-1} \left[n!^{A-1} \frac{(-l-x)_{n+1}}{(-l)_n^A (-l+n)^q} (j-l)^A \frac{1}{l-k+x} \right]_{|l=j} \in \mathbb{Z}.$$

Écrivons

$$n!^{A-1} \frac{(-l-x)_{n+1}}{(-l)_n^A (n-l)^q} (j-l)^A \frac{1}{l-k+x} = \tilde{F}(l)\, G(l)^{A-1}\, \tilde{H}(l) \tag{5.9}$$

avec

$$\tilde{F}(l) = \frac{(-l-x)_{n+1}}{(-l)_{n+1}} (j-l) \frac{1}{l-k+x},$$
$$G(l) = \frac{n!}{(-l)_{n+1}} (j-l),$$

et

$$\tilde{H}(l) = (-l+n)^{A-q}.$$

Grâce au résultat (5.8) sur G et comme $D_\lambda(\tilde{H}(l))_{|l=j}$ est un entier, il suffit de montrer que $p^{\lfloor \frac{n}{p-1} \rfloor} d_n^{\lambda} D_\lambda(\tilde{F}(l))_{|l=j}$ appartient à $\mathbb{Z}_p[x]$ et que pour $x = \frac{a}{b}$, $d_n^{\lambda+1} \mu_n(b)$ $D_\lambda(\tilde{F}(l))_{|l=j}$ est entier. Or

$$\tilde{F}(l) = -1 + \sum_{\substack{m \neq j \\ 0 \leq m \leq n}} \frac{(j-m)\tilde{f}_m}{m-l}$$

avec

$$\tilde{f}_m = \frac{(-m-x)_{n+1}}{(m-k+x) \displaystyle\prod_{\substack{h \neq m \\ 0 \leq h \leq n}} (h-m)} = (-1)^m \frac{(-m-x)_{n+1}}{n!(m-k+x)} \binom{n}{m}.$$

On voit donc que $p^{\left\lfloor \frac{n}{p-1} \right\rfloor} \tilde{f}_m$ est dans $\mathbb{Z}_p[x]$, et que, d'après le Lemme 5.4, pour $x = \frac{a}{b}$, $d_n \mu_n(b) \tilde{f}_m$ est entier. La formule

$$(D_\lambda \tilde{F}(l))_{|l=j} = -\delta_{0,\lambda} - \sum_{m \neq j \quad 0 \leq m \leq n} \frac{\tilde{f}_m}{(m-j)^\lambda}$$

permet alors de conclure comme ci-dessus et les deuxième et quatrième points sont établis.

Corollaire 5.6. *Si x est un nombre rationnel $\frac{a}{b}$, alors $b\, d_n^A \mu_n(b)\, S_n^{(q)}(x, \xi)$ est une combinaison linéaire à coefficients dans $\mathbb{Z}[\xi]$ de $\left(\phi_s(x, \xi^{-1})\right)_{s \in [1,A]}$* et de 1.

Démonstration. On utilise le Corollaire 5.2 et la Proposition 5.5.

5.3. Propriétés asymptotiques des polynômes $P_s^{(q)}(x, z)$

Proposition 5.7. *Si x est un nombre complexe fixé, alors*

$$\limsup_{n \to +\infty} |P_s^{(q)}(x, \xi)|^{\frac{1}{n}} \leq 2^{A-1}.$$

Démonstration. Puisque

$$|P_s^{(q)}(x, \xi)| \leq \sum_{j=0}^{n} \left| r_{j,s}^{(q)}(x) \right|,$$

il nous suffit de majorer $r_{j,s}^{(q)}(x)$. Or on a

$$r_{j,s}^{(q)}(x) = \frac{1}{2\pi i} \int_{|z+j+x|=\frac{1}{2}} R_n^{(q)}(z)(z+j+x)^{s-1} \mathrm{d}z \tag{5.10}$$

$$= \frac{1}{2\pi i} \int_{|z+j+x|=\frac{1}{2}} n!^{A-1} \frac{(z)_{n+1}}{(z+x)_n^A (x+z+n)^q} (z+j+x)^{s-1} \mathrm{d}z. \tag{5.11}$$

On en déduit que

$$|r_{j,s}^{(q)}(x)| \leq 2^{-s} \sup_{|z+j+x|=\frac{1}{2}} \left(n!^{A-1} \frac{|(z)_{n+1}|}{|(z+x)_n^A (x+z+n)^q|} \right). \tag{5.12}$$

Soit m un entier positif tel que $|x| + \frac{1}{2} \leq m$, on a, pour z tel que $|z + j + x| = \frac{1}{2}$,

$$
\begin{aligned}
|(z)_{n+1}| &= \prod_{k=0}^{n} |z+k| \\
&= \prod_{k=0}^{n} |z+j+x-j-x+k| \qquad (5.13) \\
&\leq \prod_{k=0}^{n} \left(\frac{1}{2} + |x| + |k-j|\right) \\
&\leq \prod_{k=0}^{n} (m + |k-j|) \\
|(z)_{n+1}| &\leq m(m+1)...(m+j)(m+1)...(m+n-j) \leq (m+j)!(m+n-j)!.
\end{aligned}
$$

Maintenant minorons

$$
\begin{aligned}
|(z+x)_n| &= \prod_{k=0}^{n-1} |z+k+x| \\
&= \prod_{k=0}^{n-1} |z+j+x-j+k| \\
&\geq \prod_{k=0}^{n-1} \left|-\frac{1}{2} + |k-j|\right|.
\end{aligned}
$$

En minorant par $\left||k-j| - \frac{1}{2}\right| \geq |k-j| - 1$ si $|k-j| > 1$, et par $\left||k-j| - \frac{1}{2}\right| \geq \frac{1}{2}$ sinon, on obtient, dans tous les cas

$$
|(z+x)_n| \geq \frac{1}{8n^3} j!(n-j)!. \qquad (5.14)
$$

En utilisant (5.13) et (5.14), on en déduit que

$$
\frac{|(z)_{n+1}|}{|(z+x)_n|} \leq 8n^3 \prod_{k=1}^{m} (j+k)(n-j+k) \leq 8n^3 (n+m)^{2m}.
$$

Enfin

$$
|(z+n+x)^q| = |(z+x+j-j+n)|^q \geq \frac{1}{2^q}. \qquad (5.15)
$$

On déduit en utilisant (5.13, 5.14) et (5.15) dans (5.12) que

$$
\left|r_{j,s}^{(q)}(x)\right| \leq 2^{-s+q+3A} (n+m)^{2m} n^{3A} \binom{n}{j}^{A-1}.
$$

Comme $\binom{n}{j} \leq 2^n$, il en résulte que

$$|P_s^{(q)}(x, \xi)| \leq 2^{-s+q+3A}(n+m)^{2m+3A+1}2^{n(A-1)}.$$

On conclut donc

$$\limsup_{n\to+\infty} \left| P_s^{(q)}(x, \xi) \right|^{\frac{1}{n}} \leq 2^{A-1}.$$

Corollaire 5.8. *Pour tout $s \in [0, A]$, on a*

$$\begin{aligned} &\limsup_n \frac{1}{n} \log \left| b\mu_n(b) d_n^A P_s^{(q)}(x, \xi) \right| \\ &\leq \log b + \sum_{q|b} \frac{\log q}{q-1} + A + (A-1)\log 2. \end{aligned} \tag{5.16}$$

5.4. Indépendance de formes linéaires

On considère les matrices

$$M_n(x, z) = \left(P_s^{(q)}(x, z) \right)_{(q,s)\in[0,A]^2} \tag{5.17}$$

$$\tilde{M}_n(x, z) = \left(P_s^{(q)}(x, z) \right)_{q\in[1,A], 0\leq s\leq A, s\neq 1} \tag{5.18}$$

et on note

$$\Omega_n(x, z) = \det M_n$$

$$\tilde{\Omega}_n(x, z) = \det \tilde{M}_n.$$

Proposition 5.9. *On a*

$$\Omega_n(x, z) = \gamma z^{n+1}(z-1)^{(A-1)n-2} x^A, \tag{5.19}$$

où γ est un nombre rationnel non nul.

Proposition 5.10. *On a, pour $x \neq 0$,*

$$\tilde{\Omega}_n(x, 1) \neq 0. \tag{5.20}$$

La preuve de ces deux propositions résultera des lemmes suivants.

Lemme 5.11. *Le polynôme $\Omega_n(x, z)$ est divisible par x^A.*

Démonstration. En dérivant (5.4), on a

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} r_{j,1}^{(q)}(x) = \begin{cases} \dfrac{(-1)^{A-1}}{(A-1)!}\left(\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}l}\right)^{A-1}\left[n!^{A-1}\dfrac{(-l-x)_{n+1}}{(-l)_n^A(n-l)^q}(j-l)^A\displaystyle\sum_{k=0}^{n}\dfrac{-1}{k-l-x}\right]_{|l=j} & \\ \qquad\qquad \text{si } j \in [0, n-1], & \\ \dfrac{(-1)^{q-1}}{(q-1)!}\left(\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}l}\right)^{q-1}\left[n!^{A-1}\dfrac{(-l-x)_{n+1}}{(-l)_n^A}\displaystyle\sum_{k=0}^{n}\dfrac{-1}{k-l-x}\right]_{|l=n} & \\ \qquad\qquad \text{si } j = n \text{ et } q > 0, & \\ 0 \qquad\qquad \text{si } j = n \text{ et } q = 0. & \end{cases}$$

En utilisant la formule de Leibniz, on obtient, pour $j \in [0, n-1]$,

$$\begin{aligned} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} r_{j,1}^{(q)}(x) &= \frac{(-1)^A}{(A-1)!}\sum_{u=0}^{A-1}\binom{A-1}{u}\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}l}\right)^{A-1-u} \\ &\quad \times \left[n!^{A-1}\frac{(-l-x)_{n+1}}{(-l)_n^A(n-l)^q}(j-l)^A\right]_{|l=j}\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}l}\right)^{u}\left[\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k-l-x}\right]_{|l=j} \\ &= \sum_{u=0}^{A-1}(-1)^{u+1} r_{j,u+1}^{(q)}(x)\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{(k-j-x)^{u+1}}. \end{aligned}$$

De même, pour $j = n$, on a

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} r_{n,1}^{(q)}(x) = \begin{cases} \displaystyle\sum_{u=0}^{A-1}(-1)^{u+1} r_{n,u+1}^{(q)}(x)\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{(k-n-x)^{u+1}} & \text{si } q > 0, \\ 0 & \text{si } q = 0. \end{cases}$$

On en déduit que

$$\begin{aligned} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} r_{j,1}^{(q)}(x) &= \sum_{k=0}^{n}\frac{1}{(k-j-x)^A}\sum_{u=0}^{A-1}(-1)^{u+1} r_{j,u+1}^{(q)}(x)(k-j-x)^{A-u-1} \\ &= \sum_{k=0}^{n}\frac{1}{(k-j-x)^A}\sum_{u=0}^{A-1}(-1)^{A-u} r_{j,A-u}^{(q)}(x)(k-j-x)^{u}. \end{aligned}$$

Les quantités que l'on dérive étant des polynômes, les dérivées sont aussi des polynômes. On en déduit que, pour tout $j \in [0, n]$, pour tout $k \in [0, n]$, le polynôme $\sum_{u=0}^{A-1}(-1)^{A-u}r_{j,A-u}^{(q)}(x)(k-j-x)^u$ est divisible par $(k-j-x)^A$. Cela implique que pour tout $v \in [0, A-1]$, $\sum_{u=0}^{v}(-1)^{A-u}r_{j,A-u}^{(q)}(x)(k-j-x)^u$ est divisible par $(k-j-x)^{v+1}$ et donc que

$$\frac{1}{(k-j-x)^v}\sum_{u=0}^{v}(-1)^{A-u}r_{j,A-u}^{(q)}(x)(k-j-x)^u$$

est un polynôme qui s'annule en $x = k-j$.

Il en résulte en prenant $k = j$ que pour tout $j \in [0, n]$ et $v \in [0, A-1]$

$$\sum_{u=0}^{v}\frac{1}{x^{v-u}}r_{j,A-u}^{(q)}(x)$$

est un polynôme qui s'annule en $x = 0$.

Par linéarité, on obtient que, pour tout $v \in [0, A-1]$

$$\sum_{u=0}^{v}\frac{1}{x^{v-u}}P_{A-u}^{(q)}(x,z) = \sum_{u=0}^{v}\frac{1}{x^{u}}P_{A-v+u}^{(q)}(x,z)$$

est un polynôme en x s'annulant en $x = 0$.

Or, par multilinéarité sur les colonnes du déterminant (5.17), on obtient :

$$\Omega_n(x,z) = \begin{vmatrix} P_0^{(0)}(x,z) & \sum_{u=0}^{A-1}\frac{1}{x^u}P_{u+1}^{(0)}(x,z) & \sum_{u=0}^{A-2}\frac{1}{x^u}P_{u+2}^{(0)}(x,z) & \cdots & P_A^{(0)}(x,z) \\ \vdots & & & & \vdots \\ P_0^{(A)}(x,z) & \sum_{u=0}^{A-1}\frac{1}{x^u}P_{u+1}^{(A)}(x,z) & \sum_{u=0}^{A-2}\frac{1}{x^u}P_{u+2}^{(A)}(x,z) & \cdots & P_A^{(A)}(x,z) \end{vmatrix}. \quad (5.21)$$

Chaque colonne (exceptée la première) est un polynôme en x admettant $x = 0$ comme zéro, on obtient donc que $x = 0$ est zéro d'ordre au moins A de $\Omega_n(x,z)$. On conclut que x^A divise $\Omega_n(x,z)$.

Lemme 5.12. *Le polynôme $\Omega_n(x,z)$ est de degré $An-1$ en z.*

Démonstration. En ajoutant à la première colonne du déterminant (5.17) les colonnes suivantes multipliées par $\phi_s\left(x, \frac{1}{z}\right)$, on obtient :

$$\Omega_n(x,z) = \begin{vmatrix} S_n^{(0)}(x,z) & P_1^{(0)}(x,z) & \cdots & P_A^{(0)}(x,z) \\ \vdots & & & \vdots \\ S_n^{(A)}(x,z) & P_1^{(A)}(x,z) & \cdots & P_A^{(A)}(x,z) \end{vmatrix}. \quad (5.22)$$

Les éléments de la première colonne sont exactement de degré -1 en z, car le premier terme de la série $S_n^{(q)}(x,z)$ étant nul, on peut faire la somme à partir de $k = 1$, et on obtient ainsi une série formelle en $\frac{1}{z}$, de degré -1. Les autres colonnes sont de degré au plus n en z grâce à la Proposition 5.1. On en déduit que le déterminant est de degré au plus $An - 1$ en z. La Proposition 5.1 nous montre que les éléments surdiagonaux sont de degré inférieur ou égal à $n-1$ en z. On en déduit que dans le développement du déterminant, tous les termes, autres que le produit des éléments diagonaux, sont de degré en z strictement inférieur à $An - 1$. Mais les équations (5.3) et (5.5) impliquent que $P_q^{(q)}(x,z)$ est exactement de degré n en z. Le produit des éléments diagonaux donne donc un élément de degré exactement $An - 1$. Le degré en z de $\Omega_n(x,z)$ est donc exactement $An - 1$.

Lemme 5.13. *Le polynôme $\Omega_n(x,z)$ est de degré au plus A en x.*

Démonstration. Développons l'expression (5.22) du déterminant $\Omega_n(x,z)$ par rapport à la première colonne, on obtient

$$\Omega_n(x,z) = \sum_{q=0}^{A} (-1)^q S_n^{(q)}(x,z)\Delta_{q,0}(x,z),$$

où les $\Delta_{q,0}(x,z)$ sont les déterminants extraits.

On a

$$x^{-A}\, S_n^{(q)}(x,z)\Delta_{q,0}(x,z) = \sum_{k=0}^{+\infty} x^{-A}\Delta_{q,0}(x,z) R_n^{(q)}(k) z^{-k}. \tag{5.23}$$

Cela implique, pour $\Re(x) > 0$

$$\begin{aligned} \left| x^{-A}\Delta_{q,0}(x,z) R_n^{(q)}(k) \right| &= \left| x^{-A}\Delta_{q,0}(x,z)\, n!^{A-1} \frac{(k)_{n+1}}{(x+k)_n^A (x+k+n)^q} \right| \\ &\le n!^{A-1} \left| \frac{(k)_{n+1}}{(x+n)^q} \frac{\Delta_{q,0}(x,z)}{x^{A(n+1)}} \right|. \end{aligned} \tag{5.24}$$

La Proposition 5.1 permet de majorer le degré en x de $\Delta_{q,0}(x,z)$ par $A(n+1)$. Cela implique que pour z fixé quelconque, avec $|z| > 1$, $\frac{\Delta_{q,0}(x,z)}{x^{A(n+1)}}$ est bornée pour $\Re(x) > 1$. On a donc pour $\Re(x) > 1$

$$\left| x^{-A}\Delta_{q,0}(x,z) R_n^{(q)}(k) z^{-k} \right| \le \frac{K}{|x|^q} (k)_{n+1} \left| z^{-k} \right|, \tag{5.25}$$

où $K = K(z)$ est une constante indépendante x.

Le terme de droite de l'inégalité précédente étant le terme général d'une série convergente pour $|z| > 1$, on en déduit que les termes de l'équation (5.23) tendent vers 0 quand $\Re(x)$ tend vers $+\infty$ si $q > 0$ et restent bornés pour $q = 0$. On en conclut que le degré en x de $\Omega_n(x,z)$ est au plus A.

Corollaire 5.14. *Le polynôme $\Omega_n(x,z)$ est de la forme*

$$x^A Q(z),$$

où $Q(z)$ un polynôme de degré $An-1$.

Démonstration. Cela résulte des Lemmes 5.11, 5.12 et 5.13.

Lemme 5.15. *Le polynôme $\Omega_n(x,z)$ est divisible par z^{n+1}.*

Démonstration. Du Corollaire 5.14, on déduit

$$Q(z) = x^{-A}\Omega_n(x,z) = \lim_{\Re(x)\to+\infty} x^{-A}\Omega_n(x,z),$$

d'où

$$Q(z) = \sum_{q=0}^{A}(-1)^q \lim_{\Re(x)\to+\infty} x^{-A} S_n^{(q)}(x,z)\Delta_{q,0}(x,z).$$

Le résultat (5.25) nous permet de conclure que pour $|z|>1$, on a

$$Q(z) = \lim_{\Re(x)\to+\infty} x^{-A} S_n^{(0)}(x,z)\Delta_{0,0}(x,z).$$

On a de plus

$$\begin{aligned}\lim_{\Re(x)\to+\infty} x^{An} S_n^{(0)}(x,z) &= \lim_{\Re(x)\to+\infty} n!^{A-1}\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{(k)_{n+1}x^{An}}{(k+x)_n^A}z^{-k}\\ &= n!^{A-1}\sum_{k=0}^{+\infty}(k)_{n+1}z^{-k}.\end{aligned}\tag{5.26}$$

Or pour $|Z|<1$, on a

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{+\infty}(k)_{n+1}Z^k &= Z\frac{\mathrm{d}^{n+1}}{\mathrm{d}Z^{n+1}}\sum_{k=0}^{+\infty}Z^{k+n} = Z\frac{\mathrm{d}^{n+1}}{\mathrm{d}Z^{n+1}}\frac{Z^n}{1-Z}\\ &= Z\frac{\mathrm{d}^{n+1}}{\mathrm{d}Z^{n+1}}\frac{1}{1-Z} = (n+1)!\frac{Z}{(1-Z)^{n+2}}.\end{aligned}$$

Donc pour $|z|>1$,

$$\lim_{\Re(x)\to+\infty} x^{An} S_n^{(0)}(x,z) = \frac{n!^A\,(n+1)\,z^{n+1}}{(z-1)^{n+2}}.$$

Le fait que $\Delta_{0,0}$ soit un polynôme en x et z de degré au plus $A(n+1)$ en x permet d'obtenir que

$$\lim_{\Re(x)\to+\infty} x^{-A(n+1)}\Delta_{0,0}(x,z) \tag{5.27}$$

est un polynôme $M(z)$.

On a donc $Q(z) = M(z)\frac{n!^A\,(n+1)\,z^{n+1}}{(z-1)^{n+2}}$ et il en résulte que z^{n+1} divise $Q(z)$.

Lemme 5.16. *Le polynôme $\Omega_n(x,z)$ est divisible par $(z-1)^{(A-1)n-2}$.*

Démonstration. Pour $z \in \mathbb{C}\backslash]-\infty,0]$, on pose $z^{-t} = e^{-t\log z}$ où $\log z$ est la détermination du logarithme de z de partie imaginaire comprise entre $-\pi$ et π. Considérons l'intégrale

$$J_n^{(q)}(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_{|t+x|=n+1} R_n^{(q)}(t)\,z^{-t}\mathrm{d}t,$$

qui définit une fonction holomorphe pour $z \in \mathbb{C}\backslash]-\infty,0]$.

La ordre du zéro en 1 de $J_n^{(q)}(z)$

Par dérivation sous le signe somme, on obtient

$$\frac{\mathrm{d}^k J_n^{(q)}}{\mathrm{d}z^k}(z) = \frac{(-1)^k}{2\pi i}\int_{|t+x|=n+1} R_n^{(q)}(t)\,(t)_k\,z^{-t-k}\mathrm{d}t.$$

On remarque que

$$\deg_t R_n^{(q)}(t)\,(t)_k = n+1+k-An-q.$$

Or l'intégrale d'une fonction rationnelle de degré inférieur ou égal à -2 est nulle sur un lacet d'indice 1 par rapport à chacun de ses pôles. Cela implique que, si

$$k \leq (A-1)n+q-3,$$

on a

$$\frac{\mathrm{d}^k J_n^{(q)}}{\mathrm{d}z^k}(1) = 0. \tag{5.28}$$

On déduit de (5.28) que

$$J_n^{(q)} z^{-(A-1)n-q+2} \text{ est une fonction holomorphe sur } \mathbb{C}\backslash]-\infty,0]. \tag{5.29}$$

Lien avec $\Omega_n(x, z)$

La formule des résidus nous donne

$$J_n^{(q)}(z) = \sum_{j=0}^{n} \mathrm{R}es_{[t=-j-x]} \left(R_n^{(q)}(t)\, z^{-t} \right).$$

On a

$$e^{-t\,\log z} = e^{(x+j)\,\log z} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k\,(t+x+j)^k (\log z)^k}{k!}.$$

En utilisant les mêmes notations que pour la Proposition 5.1, on obtient

$$\mathrm{R}es_{[t=-j-x]} \left(R_n^{(q)}(t)\, z^{-t} \right) = \sum_{s=1}^{A} r_{j,s}^{(q)}(x) \frac{(-1)^{s-1}\, e^{(x+j)\log z} (\log z)^{s-1}}{(s-1)!}.$$

On en déduit

$$J_n^{(q)}(z) = \sum_{j=0}^{n} \sum_{s=1}^{A} r_{j,s}^{(q)}(x) \frac{(-1)^{s-1}\, e^{(x+j)\log z}\, (\log z)^{s-1}}{(s-1)!}, \tag{5.30}$$

$$J_n^{(q)}(z) = e^{x\log z} \sum_{s=1}^{A} P_s^{(q)}(x, z) \frac{(-1)^{s-1} (\log z)^{s-1}}{(s-1)!}. \tag{5.31}$$

Dans (5.17), en ajoutant à la deuxième colonne les suivantes multipliées respectivement par $\frac{(-1)^{s-1}(\log z)^{s-1}}{(s-1)!}$, on obtient

$$\Omega_n(x, z) = \begin{vmatrix} P_0^{(0)}(x, z) & e^{-x\log z} J_n^{(0)}(z) & P_2^{(0)}(x, z) & \cdots & P_A^{(0)}(x, z) \\ \vdots & & & & \vdots \\ P_0^{(A)}(x, z) & e^{-x\log z} J_n^{(A)}(z) & P_2^{(A)}(x, z) & \cdots & P_A^{(A)}(x, z) \end{vmatrix}. \tag{5.32}$$

En vertu de (5.28), les fonctions $J_n^{(q)}(z)$ ont un zéro en $z = 1$ d'ordre au moins $(A-1)n-2$, cela nous permet de conclure que $(z-1)^{(A-1)n-2}$ divise $\Omega_n(x, z)$.

Démonstration de la Proposition 5.9. Les Lemmes 5.15 et 5.16 et le Corollaire 5.14 permettent de conclure.

Démonstration de la Proposition 5.10. En utilisant la Proposition 5.9, on a

$$\lim_{z \to 1} \frac{\Omega_n(x, z)}{(z-1)^{(A-1)n-2}} = \gamma\, x^A .$$

De plus grâce à (5.28), on a, pour $q \geq 1$,

$$\lim_{z \to 1} \frac{J_n^{(q)}(z)}{(z-1)^{(A-1)n-2}} = 0.$$

Par ailleurs, (5.32) donne

$$\frac{\Omega_n(x,z)}{(z-1)^{(A-1)n-2}} = \begin{vmatrix} P_0^{(0)}(x,z) & e^{-x\log z}\dfrac{J_n^{(0)}(z}{(z-1)^{(A-1)n-2}} & P_2^{(0)}(x,z) & \cdots P_A^{(0)}(x,z) \\ \vdots & & & \vdots \\ P_0^{(A)}(x,z) & e^{-x\log z}\dfrac{J_n^{(A)}(z)}{(z-1)^{(A-1)n-2}} & P_2^{(A)}(x,z) & \cdots P_A^{(A)}(x,z) \end{vmatrix}.$$

On en déduit en développant par rapport à la deuxième colonne et par passage à la limite en $z = 1$

$$\gamma\, x^A = -\tilde{\Omega}(x,1) \lim_{z\to 1} \frac{e^{-x\log z} J_n^{(0)}(x,z)}{(z-1)^{(A-1)n-2}}.$$

On peut alors conclure en utilisant (5.29).

5.5. Passage du cas complexe au cas p-adique et démonstration des Théorèmes 3.4 et 3.5

Pour s complexe tel que $\Re(s) > 1$, et x réel positif, on pose

$$T(s,x) = \frac{1}{h^s} \sum_{l=0}^{h-1} \xi^{-l} \zeta\left(s, \frac{x+l}{h}\right).$$

Pour $h > 1$, comme la fonction $s \longmapsto \zeta(s, \frac{x+l}{h})$ peut être prolongée en une fonction holomorphe sur $\mathbb{C} \setminus \{1\}$ admettant le point 1 pôle simple d'ordre 1 et de résidu 1, si $h > 1$, la fonction $s \longmapsto T(s,x)$ peut donc être prolongée en une fonction holomorphe sur $\mathbb{C}$. Pour $h = 1$, on fixe $T(1,x) = 0$.

Pour un nombre p-adique x, tel que $|x|_p \geq q_p$ et s un entier strictement positif, on pose

$$T_p(s,x) = \sum_{j=0}^{h-1} \frac{\left(\dfrac{x+j}{h}\right)^{1-s}}{h^s \left\langle \dfrac{x+j}{h} \right\rangle^{1-s}} \xi^{-j} \zeta_p\left(s, \frac{x+j}{h}\right) \quad \text{si} \quad s > 1 \qquad (5.33)$$

et

$$T_p(1,x) = \frac{1}{h} \lim_{s\to 1} \sum_{j=0}^{h-1} \xi^{-j} \zeta_p\left(s, \frac{x+j}{h}\right) \text{si } h > 1 = 0 \quad \text{si} \quad h = 1. \qquad (5.34)$$

Comme $|x|_p \geq q_p$, on a $\omega((x+j)/h) = \omega(x/h)$, et par suite :

$$T_p(s,x) = \frac{1}{h^s} \omega\left(\frac{x}{h}\right)^{1-s} \tilde{T}_p(s,x). \qquad (5.35)$$

Proposition 5.17. *Soit $x = \frac{a}{b}$ un rationnel, tel que $|x|_p \geq q_p$, et soit A un entier supérieur ou égal à 2.*

Alors la dimension τ de l'espace vectoriel engendré sur $\mathbb{Q}(\xi)$ par la famille $\left\{1, \left(T_p(s,x)\right)_{s\in[1,A]}\right\}$ vérifie

$$\tau \geq \frac{[\mathbb{K}_p : \mathbb{Q}_p]}{\varphi(h)} \frac{A \log |x|_p}{\log b + \sum_{q|b} \frac{\log q}{q-1} + A + (A-1)\log 2}.$$

Dans la suite, on ne précisera pas de manière systématique si on traite $h = 1$ ou $h > 1$. Dans le cas $h = 1$, la Proposition 5.1 permet d'omettre $s = 1$ pour $z = 1$. Les lemmes suivants sont donc indépendants du cas traité, si cela n'est pas indiqué.

Lemme 5.18. *Soient s réel, $s > 1$, et x réel, $x > 0$. On a pour tout entier $k > 0$*

$$\begin{aligned} T(s,x) = {} & \frac{1}{h(s-1)} \sum_{l=0}^{h-1} \xi^{-l}(x+l)^{1-s} \sum_{j=1}^{k-1} \binom{-s}{j-1} h^{j-1} \frac{B_j}{j} \sum_{l=0}^{h-1} \xi^{-l}(x+l)^{1-s-j} \\ & + O_{x\to+\infty}(x^{-s-k+1}) \end{aligned}$$

et pour $h > 1$

$$\begin{aligned} T(1,x) = {} & -\frac{1}{h} \sum_{l=0}^{h-1} \xi^{-l} \log\left(1 + \frac{l}{x}\right) \\ & + \sum_{j=1}^{k-1} h^{j-1} \frac{(-1)^j B_j}{j} \sum_{l=0}^{h-1} \xi^{-l}(x+l)^{-j} + O_{x\to+\infty}(x^{-k}). \end{aligned}$$

Démonstration. Le cas $s > 1$ est une application immédiate de l'équation (2.1). Le cas $s = 1$ résulte de l'équation (2.2), car on peut écrire, pour $h > 1$,

$$T(s,x) = \frac{1}{h^s} \sum_{l=0}^{h-1} \xi^{-l} \left(\zeta\left(s, \frac{x+l}{h}\right) - \frac{1}{s-1}\right).$$

Lemme 5.19. *Soient p un nombre premier, s un entier plus grand que 1 et x un élément de $\mathbb{Q}_p$ tel que $|x|_p \geq q_p$. On a*

$$\begin{aligned} T_p(s,x) = {} & \frac{1}{h(s-1)} \sum_{l=0}^{h-1} \xi^{-l}(x+l)^{1-s} \\ & - \sum_{j=1}^{\infty} \binom{-s}{j-1} h^{j-1} \frac{B_j}{j} \sum_{l=0}^{h-1} \xi^{-l}(x+l)^{1-s-j} \end{aligned} \tag{5.36}$$

et pour $h > 1$

$$\begin{aligned} T_p(1,x) = &-\frac{1}{h}\sum_{l=1}^{h-1}\xi^{-l}\log_p\left(1+\frac{l}{x}\right) \\ &+\sum_{j=1}^{+\infty}h^{j-1}\frac{(-1)^jB_j}{j}\sum_{l=0}^{h-1}\xi^{-l}(x+l)^{-j}. \end{aligned} \tag{5.37}$$

Démonstration. Le cas $s > 1$ est une conséquence directe de l'équation (2.3). Pour le cas $s = 1$ et $h > 1$, en utilisant l'équation (2.4), on obtient :

$$\begin{aligned} &\lim_{s\to 1}\sum_{l=0}^{h-1}\xi^{-l}\zeta_p\left(s,\frac{x+l}{h}\right) \\ &= \sum_{l=0}^{h-1}\xi^{-l}\left(-\log\left\langle\frac{x+l}{h}\right\rangle+\sum_{j=1}^{+\infty}(-1)^j\frac{B_j}{j}\left(\frac{x+l}{h}\right)^{-j}\right). \end{aligned} \tag{5.38}$$

Comme $|x|_p \geq q_p$, alors pour $1 \leq l \leq h-1$, on a

$$\omega\left(\frac{x}{h}\right) = \omega\left(\frac{x+l}{h}\right).$$

On conclut que

$$\begin{aligned} \sum_{l=0}^{h-1}\xi^{-l}\log_p\left\langle\frac{x+l}{h}\right\rangle &= \sum_{l=0}^{h-1}\xi^{-l}\log_p\left(\frac{\frac{x+l}{h}}{\omega\left(\frac{x}{h}\right)}\right) \\ &= \sum_{l=0}^{h-1}\xi^{-l}\log_p\left(1+\frac{l}{x}\right)+\sum_{l=0}^{h-1}\xi^{-l}\log_p\left(\frac{x}{h\,\omega\left(\frac{x}{h}\right)}\right) \\ &= \sum_{l=1}^{h-1}\xi^{-l}\log_p\left(1+\frac{l}{x}\right). \end{aligned}$$

Proposition 5.20. *Soit* $x = \frac{a}{b}$ *(*a *et* b *premiers entre eux) un nombre rationnel, tel que* $|x|_p \geq p$*, si on note*

$$U_n^{(q)}(x) = b\mu_n(b)\,d_n^A\left(P_0^{(q)}(x,\xi)+\sum_{s=1}^{A}P_s^{(q)}(x,\xi)\,T_p(s,x)\right),$$

on a

$$\limsup_n \frac{1}{n} \log |U_n^{(q)}(x)|_p \leq -A \log |x|_p.$$

On va démontrer la Proposition 5.20 en plusieurs étapes.

On pose

$$\tilde{U}_n^{(q)}(x) = d_n^A \left(P_0^{(q)}(x,\xi) + \sum_{s=1}^{A} P_s^{(q)}(x,\xi)\, T_p(s,x) \right).$$

On considére de plus les séries formelles de Laurent dans $\mathbb{K}((1/X))$ (où $\mathbb{K} = \mathbb{Q}(\xi)$)

$$\Theta(s,X) = \frac{1}{h(s-1)} \sum_{l=0}^{h-1} \xi^{-l}(X+l)^{1-s} - \sum_{j=1}^{\infty} \binom{-s}{j-1} h^{j-1} \frac{B_j}{j} \sum_{l=0}^{h-1} \xi^{-l}(X+l)^{1-s-j}$$

pour s entier, $s > 1$, et si

$$\begin{aligned} \Theta(1,X) &= -\frac{1}{h} \sum_{l=1}^{h-1} \xi^{-l} \log\left(1 + \frac{l}{X}\right) \\ &\quad + \sum_{j=1}^{+\infty} h^{j-1} \frac{(-1)^j B_j}{j} \sum_{l=0}^{h-1} \xi^{-l}(X+l)^{-j} \qquad \text{pour} \quad h > 1 \\ &= 0 \qquad \text{pour} \quad h = 1. \end{aligned}$$

On voit que $\Theta(s,X)$ est de degré au plus $-s$. On note $a_{k,s}$ les coefficients de $\Theta(s,X)$:

$$\Theta(s,X) = \sum_{k=0}^{+\infty} a_{k,s} X^{-k}$$

(donc $a_{k,s} = 0$ pour $k < s$), et les sommes partielles :

$$\Theta_K(s,X) = \sum_{k=0}^{K} a_{k,s} X^{-k}.$$

Lemme 5.21. *Pour x réel tendant vers $+\infty$, on a*

$$T(s,x) = \Theta_{K-1}(s,x) + O(x^{-K})$$

pour tout entier positif K, alors que pour $x \in \mathbb{Q}_p$ avec $|x| \geq q_p$, la série $\Theta(s,x)$ est convergente dans $\mathbb{K}_p$ et

$$\Theta(s,x) = T_p(s,x).$$

Démonstration. Dans le cas complexe, cela résulte immédiatement du Lemme 5.18. Pour le cas p-adique, au vu du Lemme 5.19, il suffit de montrer qu'il est légitime de spécialiser. Le développement par la formule du binôme de

$$(x+l)^{1-s-j} = x^{1-s-j} \sum_{m=0}^{+\infty} \binom{1-s-j}{m} l^m x^{-m}$$

est convergent puisque $|x|_p \geq q_p$, et pour s entier différent de 1, on doit montrer que

$$\sum_{j=1}^{\infty} \binom{-s}{j-1} h^{j-1} \frac{B_j}{j} (x+l)^{1-s-j} = x^{-s} \sum_{r=0}^{+\infty} c_r x^{-r}$$

avec

$$c_r = \sum_{m\geq 0,\, j\geq 1, m+j-1=r} \binom{-s}{j-1} \binom{1-s-j}{m} h^{j-1} l^m \frac{B_j}{j}.$$

Or cela découle aussitôt du fait que la série double

$$\sum_{j\geq 1\,, m\geq 0} \binom{-s}{j-1} \binom{1-s-j}{m} h^{j-1} l^m \frac{B_j}{j} x^{1-s-j-m}$$

est convergente, puisque, d'après Clausen-von Staudt :

$$\left| \binom{-s}{j-1} \binom{1-s-j}{m} h^{j-1} l^m \frac{B_j}{j} x^{1-s-j-m} \right|_p \leq j p^{2-s-j-m}$$

qui tend vers 0 pour j ou m tendant vers $+\infty$. Pour $s = 1$, la démonstration est analogue.

Lemme 5.22. *Soit x un nombre p-adique, tel que $|x|_p \geq q_p$, on a*

$$\tilde{U}_n^{(q)}(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} u_k^n x^{-k}$$

où (u_k^n) est une suite d'éléments de $\mathbb{K}$ indépendants de x, vérifiant

$$u_k^n = 0$$

pour tout $k < A(n-1) - 3$.

Démonstration. On utilise le Lemme 5.21. Comme les polynômes $P_s(x, z)$ sont de degré au plus $n+1$ en x, cela implique que la série formelle dans $\mathbb{K}((1/X))$

$$V_n^{(q)}(X) = d_n^A (P_0^{(q)}(X, \xi) + \sum_{s=1}^{A} P_s^{(q)}(X, \xi)\Theta(s, X)) = \sum_{k=-n}^{+\infty} u_k^n X^{-k}$$

nous fournit pour x réel positif le développement asymptotique

$$d_n^A S_n^{(q)}(x,\xi) = \sum_{k=-n}^{K-1} u_k^n x^{-k} + O(x^{-K}),$$

alors qu'au sens p-adique, pour $x \in \mathbb{Q}_p$ tel que $|x| \geq q_p$, on a

$$\tilde{U}_n^{(q)}(x) = \sum_{k=-n}^{+\infty} u_k^n x^{-k}.$$

Le Corollaire 5.2 assure que

$$\tilde{U}_n^{(q)}(x) = o_{x\to+\infty}(x^{-An+n+3-q}). \tag{5.39}$$

L'unicité du développement limité montre donc que $u_k^n = 0$ si $k < A(n-1) - 3$.

Lemme 5.23. *Les termes u_k^n vérifient*

$$\left|u_k^n\right|_p \leq \frac{k+n+1}{|h|_p} p^{\frac{n}{p-1}+1}.$$

Démonstration. On a dans le corps des séries de Laurent $\mathbb{Q}((1/X))$

$$(X+1)^{-j} = X^{-j} \sum_{m=0}^{+\infty} \binom{-j}{m} X^{-m} = \sum_{m=0}^{+\infty} \binom{-j}{m} X^{-m-j}$$

et

$$\log\left(1+\frac{1}{X}\right) = \sum_{m=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{m+1}}{m} X^{-m}.$$

On peut expliciter le terme général de $\Theta(s, X)$ en écrivant, pour $s > 1$,

$$\begin{aligned}\Theta(s,X) = {} & \frac{1}{h}\sum_{m=1}^{+\infty}\frac{1}{m}\binom{-s}{m-1}\sum_{l=0}^{h-1}\xi^{-l} l^m X^{1-s-m} \\ & - \sum_{j=1}^{\infty}\binom{-s}{j-1} h^{j-1}\frac{B_j}{j}\sum_{l=0}^{h-1}\xi^{-l}\sum_{m=0}^{+\infty}\binom{1-s-j}{m} l^m X^{1-s-j-m}\end{aligned} \tag{5.40}$$

donc

$$\Theta(s,X) = \sum_{k=s}^{+\infty} a_{k,s} X^{-k},$$

avec, pour $k \geq s$:

$$a_{k,s} = \frac{1}{h(k-s+1)}\binom{-s}{k-s}\sum_{l=0}^{h-1}\xi^{-l}l^{k-s+1} - \sum_{j=1}^{k-s+1} h^{j-1}\frac{B_j}{j}\binom{-s}{j-1}\binom{1-s-j}{k-j-s+1}\sum_{l=0}^{h-1}\xi^{-l}l^{k-j-s+1}. \tag{5.41}$$

De même, si $h > 1$. (Le cas $s = 1$ et $h = 1$ est direct.)

$$\Theta(1, X) = \sum_{k=1}^{+\infty} a_{k,1}X^{-k},$$

avec

$$a_{k,1} = \frac{(-1)^{k-1}}{hk}\sum_{l=1}^{h-1}\xi^{-l}l^k + \sum_{j=1}^{k}(-1)^j h^{j-1}\frac{B_j}{j}\binom{-j}{k-j}\sum_{l=0}^{h-1}\xi^{-l}l^{k-j}. \tag{5.42}$$

On rappelle que la valuation p-adique d'un nombre de Bernoulli est supérieure ou égale à -1, par le Théorème de Clausen-von Staudt (*cf.* [4] pour une démonstration) et que pour tout entier n strictement positif et tout entier positif i, $\binom{-n}{i} = (-1)^i \binom{n+i-1}{i}$ est un entier. Les expressions (5.41) et (5.42) nous donnent donc immédiatement, pour s entier, $s \geq 1$,

$$\left|a_{k,s}\right|_p \leq \frac{k}{|h|_p}p.$$

La Proposition 5.1 et la Proposition 5.5 assurent que les polynômes $d_n^A P_s^{(q)}(X, z)$ sont de degré en X au plus $n + 1$ et ont des coefficients majorés par $p^{\frac{n}{p-1}}$ en valeur absolue p-adique.

On en déduit, en considérant la série formelle

$$V_n^{(q)}(X) = d_n^A(P_0^{(q)}(X, \xi) + \sum_{s=1}^{A} P_s^{(q)}(X, \xi)\Theta(s, X)) = \sum_{k=-n}^{+\infty} u_k^n X^{-k},$$

que

$$\left|u_k^n\right|_p \leq \frac{k+n+1}{|h|_p}p^{\frac{n}{p-1}+1}.$$

Lemme 5.24. *On a*

$$\limsup_{n\to+\infty}\frac{1}{n}\log\left|\tilde{U}_n^{(q)}(x)\right|_p \leq \frac{\log p}{p-1} - (A-1)\log|x|_p .$$

Démonstration. En utilisant le Lemme 5.22, on a

$$\left|\tilde{U}_n^{(q)}(x)\right|_p \leq \sup_{k\geq (A-1)n-3} \left|u_k^n\right|_p |x|_p^{-k}.$$

En utilisant le Lemme 5.23, on en déduit que

$$\begin{aligned}\left|\tilde{U}_n^{(q)}(x)\right|_p &\leq \sup_{k\geq (A-1)n-3} \frac{k+n+1}{|h|_p} p^{\frac{n}{p-1}+1} |x|_p^{-k}\\ \left|\tilde{U}_n^{(q)}(x)\right|_p &\leq M \sup_{k\geq (A-1)n-3} (k+n+1)\, p^{\frac{n}{p-1}+1} |x|_p^{-k}\end{aligned}$$

avec M une constante indépendante de n. La décroissance du terme de droite nous permet alors de conclure que, pour n suffisamment grand, on a

$$\left|\tilde{U}_n^{(q)}(x)\right|_p \leq M\,(An-2)\, p^{\frac{n}{p-1}+1} |x|_p^{-((A-1)n-3)}.$$

On peut donc conclure.
Démonstration de la Proposition 5.20. Comme $x = \frac{a}{b}$ et $|x|_p \geq q_p$, on a $|b|_p = |x|_p^{-1}$. Il en résulte que

$$|\mu_n(b)|_p = |x|_p^{-n}\, p^{-\left[\frac{n}{p-1}\right]}.$$

On en déduit

$$\lim_n \frac{1}{n} \log|\mu_n(b)|_p = -\log|x|_p - \frac{\log p}{p-1}. \tag{5.43}$$

En utilisant le Lemme 5.24 et l'égalité (5.43), on conclut

$$\begin{aligned}\limsup_n \frac{1}{n}\log\left|U_n^{(q)}(x)\right|_p \leq &\left(\frac{\log p}{p-1} - (A-1)\log|x|_p\right)\\ &+\left(-\log|x|_p - \frac{\log p}{p-1}\right) = -A\log|x|_p.\end{aligned}$$

Démonstration de la Proposition 5.17. La Proposition 5.5 prouve que les coefficients des combinaisons linéaires $U_n^{(q)}(x)$ en 1, ..., $T_p(s,x)$, sont des éléments de $\mathcal{O}(\mathbb{K})$. Pour $h > 1$, la Proposition 5.9 donne l'indépendance des formes linéaires $\left(U_n^{(q)}(x)\right)_{s\in[0,A]}$ en $(1, (T_p(s,x))_{s\in[1,A]})$. Pour $h = 1$, la Proposition 5.10 donne l'indépendance des formes linéaires $\left(U_n^{(q)}(x)\right)_{s\in[1,A]}$ en $(1, (T_p(s,x))_{s\in[2,A]})$. Le Corollaire 5.8 donne une majoration de la valeur absolue aux places infinies des coefficients, ce qui permet de prendre

$$c = \log b + \sum_{q|b} \frac{\log q}{q-1} + A + (A-1)\log 2.$$

La Proposition 5.20 nous donne une majoration de la valeur absolue p-adique des formes linéaires. On prend

$$\rho = A \log |x|_p.$$

On peut donc appliquer le critère d'indépendance linéaire du Lemme 4.1 et comme $[\mathbb{Q}(\xi) : \mathbb{Q}] = \varphi(h)$, la Proposition est démontrée.

Démonstration du Théorème 3.4. Le Théorème 3.4 repose sur la Proposition 5.17 et le fait que $[\mathbb{Q}(\chi) : \mathbb{Q}(\xi)] = \frac{\varphi(v)}{\varphi(h)}$.

Démonstration du Théorème 3.1. C'est le cas $h = 1$ du Théorème 3.4.

Démonstration du Théorème 3.5. Appliquons la Proposition 5.17 à $x = \frac{2}{p}$ et $h = 2$. On remarque alors que pour $p > 2$, on a

$$\frac{\left(\dfrac{\frac{2}{p} + j}{2}\right)^{1-s}}{2^s \left\langle \dfrac{\frac{2}{p} + j}{2} \right\rangle^{1-s}} = \frac{1}{2^s}.$$

Cela implique

$$T_p\left(s, \frac{2}{p}\right) = \frac{1}{2^s}\left(\zeta_p\left(s, \frac{1}{p}\right) - \zeta_p\left(s, \frac{p+2}{2p}\right)\right).$$

On a de plus, pour $p > 2$,

$$\begin{aligned} &\lim_{p\to+\infty} \frac{A \log \left|\dfrac{2}{p}\right|_p}{\log p + \dfrac{\log p}{p-1} + A + (A-1)\log 2} \\ &= \lim_{p\to+\infty} \frac{A \log p}{\log p + \dfrac{\log p}{p-1} + A + (A-1)\log 2} = A. \end{aligned} \tag{5.44}$$

Pour p suffisament grand, on a donc

$$\frac{A \log \left|\dfrac{2}{p}\right|_p}{\log p + \dfrac{\log p}{p-1} + A + (A-1)\log 2} > A - 1. \tag{5.45}$$

On en déduit que pour p suffisamment grand, l'espace vectoriel engendré par

$$\left(1, \left(T_p\left(s, \frac{2}{p}\right)\right)_{s\in[1,A]}\right)$$

est de dimension au moins A.

Calculons une borne explicite, l'inéquation par rapport à A

$$\frac{A\log p}{\log p + \dfrac{\log p}{p-1} + A + (A-1)\log 2} > A - 1. \tag{5.46}$$

admet $[0, X[$ comme ensemble de solutions positives, avec X solution positive de

$$(1+\log 2)x^2 + \left(\frac{\log p}{p-1} - 2\log(2) - 1\right)x - \left(\frac{p}{p-1}\log p - \log 2\right) = 0.$$

On remarque que

$$\begin{aligned}
(1+\log 2)&\left(\sqrt{\frac{\log p}{1+\log 2}}\right)^2 + \left(\frac{\log p}{p-1} - 2\log(2) - 1\right)\sqrt{\frac{\log p}{1+\log 2}}\\
&\qquad - \left(\frac{p}{p-1}\log p - \log 2\right)\\
&= \left(\frac{\log p}{p-1} - 2\log(2) - 1\right)\sqrt{\frac{\log p}{1+\log 2}}\\
&\qquad - \left(\frac{1}{p-1}\log p - \log 2\right)\\
&= \left(\frac{\log p}{p-1} - 2\log(2) - 1\right)\left(\sqrt{\frac{\log p}{1+\log 2}} - 1\right)\\
&\qquad - \log 2 - 1.
\end{aligned} \tag{5.47}$$

Pour $p \geq 5$, $\left(\frac{\log p}{p-1} - 2\log(2) - 1\right)\left(\sqrt{\frac{\log p}{1+\log 2}} - 1\right)$ a une valeur négative. On en déduit que, pour tout nombre premier, (5.47) est négative et donc que si $A \leq \sqrt{\frac{\log p}{1+\log 2}}$, alors l'inéquation (5.46) est vérifiée.

Le Théorème 3.5 est donc démontré.

Démonstration du Théorème 3.2. Appliquons la Proposition 5.17 à $x = \frac{1}{p}$ et $h = 1$. On remarque alors que pour $p > 2$, on a

$$\frac{\left(\dfrac{1}{p}\right)^{1-s}}{\left\langle\dfrac{1}{p}\right\rangle^{1-s}} = 1.$$

Cela implique, pour $s > 1$

$$T_p\left(s, \frac{1}{p}\right) = \zeta_p\left(s, \frac{1}{p}\right)$$

De plus, on a

$$\begin{aligned} &\lim_{p\to+\infty} \frac{A \log\left|\dfrac{1}{p}\right|_p}{\log p + \dfrac{\log p}{p-1} + A + (A-1)\log 2} \\ &= \lim_{p\to+\infty} \frac{A \log p}{\log p + \dfrac{\log p}{p-1} + A + (A-1)\log 2} = A. \end{aligned} \tag{5.48}$$

Pour p suffisament grand, on a donc

$$\frac{A \log\left|\dfrac{2}{p}\right|_p}{\log p + \dfrac{\log p}{p-1} + A + (A-1)\log 2} > A - 1. \tag{5.49}$$

On en déduit que pour p suffisamment grand, l'espace vectoriel engendré par

$$\left(1, \left(T_p\left(s, \frac{1}{p}\right)\right)_{s\in[1,A]}\right)$$

est de dimension au moins A.

Comme $T_p\left(1, \frac{1}{p}\right) = 0$, on peut conclure et le calcul de la borne est exactement le même que pour le Théorème 3.5.

References

[1] K. BALL and T. RIVOAL, *Irrationalité d'une infinité de valeurs de la fonction zêta aux entiers impairs*, Invent. Math. **146** (2001), 193–207.

[2] F. BEUKERS, *Irrationality of some p-adic L-values*, Acta Math. Sin. (Engl. Ser.) **24** (2009), 663–686.

[3] F. CALEGARI, *Irrationality of certain p-adic periods for small p*, Int. Math. Res. Not. **20** (2005), 1235–1249.

[4] H. COHEN, "Number Theory", Vol. II, Analytic and Modern Tools, Graduate Texts in Mathematics, 240, Springer, New-York, 2007.

[5] N. I. FELDMAN and YU. V. NESTERENKO, "Transcendental Numbers", In: Encyclopaedia of Mathematical Sciences, Vol. 44, Springer, New-York, 1998.

[6] R. MARCOVECCHIO, *Linear independence of forms in polylogarithms*, Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa Cl. Sci. (5) **5** (2006), 1–11.

[7] Y. V. NESTERENKO, *Linear independence of numbers*, Mosc. Univ. Math. Bull. **40** (1985), 69–74; traduction Vestnik Moskov. Univ. Ser. I Mat. Mekh. **1** (1985), 46–54.

[8] T. RIVOAL, *Simultaneous polynomial approximations of the Lerch function*, Canadian J. Math. **61** (2009), 1341–1356.

Institut de Mathématiques de Bordeaux
UMR 5251
Université Bordeaux 1
351, cours de la Libération
33405 Talence cedex, France
Pierre.Bel@math.u-bordeaux1.fr