ANNALI DELLA
SCUOLA NORMALE SUPERIORE DI PISA
Classe di Scienze

HISAO FUJITA-YASHIMA

Problème de la surface libre de l'équation de Navier-Stokes - Cas stationnaire et cas périodique

Annali della Scuola Normale Superiore di Pisa, Classe di Scienze 4^e série, tome 12, n^o 4 (1985), p. 531-587

<http://www.numdam.org/item?id=ASNSP_1985_4_12_4_531_0>

© Scuola Normale Superiore, Pisa, 1985, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Annali della Scuola Normale Superiore di Pisa, Classe di Scienze » (http://www.sns.it/it/edizioni/riviste/annaliscienze/) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (http://www.numdam.org/conditions). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM
Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
http://www.numdam.org/

Problème de la surface libre de l'équation de Navier-Stokes — Cas stationnaire et cas périodique —.

HISAO FUJITA-YASHIMA

I. – Introduction et résultat.

On s'occupera, dans ce travail, du mouvement d'un fluide visqueux incompressible dans un domaine tridimentionnel horizontalement infini et borné par la surface libre en haut et par le fond fixe en bas. On suppose que le mouvement du fluide, sur lequel la force extérieure, y compris la gravité, s'exerce, est gouverné par l'équation de Navier-Stokes avec la condition d'adhérence sur la frontière inférieure, tandis que sur la frontière supérieure on exige la continuité de la tension et on tient compte aussi de la tension superficielle.

Le développement de la théorie mathématique du problème de la surface libre de l'équation de Navier-Stokes ne date que de ces dernières années. Parmi les mathématiciens qui y ont contribué, on doit signaler Solonnikov, qui, après beaucoup de travaux préparatoires très utiles encore aujourd'hui, a réussi à prouver la solubilité du problème pour le cas du domaine compact [8], [9], [10]. D'autre part, Beale a fait d'excellentes études [2], [3] sur le problème de Cauchy de l'équation de Navier-Stokes dans un domaine semi-infini borné par la surface libre inconnue, domaine du même genre que celui dont on s'occupera dans cet article. Dans [3], il a montré la solution globale (dans le temps) mais on ne sait pas la convergence de la surface libre dans l'espace L_2 pour $t \to \infty$. Je veux ajouter que des travaux de Bemelmans, récemment communiqués par des rapports de séminaire, sont dignes d'attention; la surface libre stationnaire d'une goutte y est atteinte par l'approximation successive.

Dans ce présent article on montrera l'existence d'une solution stationnaire et d'une solution périodique de l'équation de Navier-Stokes aux conditions esquissées ci-dessus. Je dois beaucoup aux idées suggérées par les

Pervenuto alla Redazione il 19 Novembre 1984.

travaux de Beale ainsi que par ceux de Solonnikov. Je veux exprimer ma gratitude à Prof. G. Prodi de l'Université de Pise et Prof. A. Valli de l'Université de Trente, qui avec des discussions très fructueuses m'ont constamment encouragé à achever ce travail.

Sur la condition du problème qu'on étudiera dans ce qui suit, on admet quelques hypothèses: on suppose que le fond du domaine, qu'on désigne par $S_b = \{x_3 = b(x_1, x_2)\}$, est assez régulière, plus précisément que b appartient à $C^\infty(R^2)$ et tend vers une constante $b(\infty)$ pour $|(x_1, x_2)| \to \infty$ et que toutes les dérivées $D^\alpha b$ $(|\alpha| \geqslant 1)$ tendent vers 0 pour $|(x_1, x_2)| \to \infty$. En ce qui concerne la force extérieure, on admet qu'elle soit donnée dans $R^3_{(x)} \times R_{(t)}$; néanmoins seule sa restriction au voisinage des domaines possibles occupés par le fluide nous intéresse. On considère la force extérieure comme la somme de deux champs vectoriels: l'un est celui de gravité supposé constant $(0, 0, -g)$, l'autre, désigné par f, est petit dans le sens qu'on précisera dans les théorèmes et la démonstration. En désignant la hauteur de la surface libre, qui est inconnue, par $h = h(x_1, x_2)$, on cherche h qui tende vers une constante $h(\infty)$ pour $|(x_1, x_2)| \to \infty$; pour la convenance, on prend la coordonnée x_3 de sorte que $h(\infty) = 0$. On suppose en outre que la pression atmosphérique $p^{(\mathrm{at})}$ s'exerçant sur la surface supérieure du fluide est constante; il convient de considérer, au lieu de la pression réelle $p^{(\mathrm{ré})}$, la pression relative

$$p = p^{(\mathrm{ré})} - g(-x_3) - p^{(\mathrm{at})}.$$

On désigne le vecteur vitesse du fluide par u, le coefficient de viscosité par ν et le coefficient de tension superficielle par γ; on suppose que ν et γ sont constants.

Pour simplifier le symbolisme, on adoptera la convention d'Einstein et on notera ∂_i au lieu de $\partial/\partial x_i$; les fonctions vectorielles et celles scalaires se distingueront par le contexte.

Pour le cas stationnaire, le problème consiste à trouver (u, p, h) qui satisfasse aux

$$\Omega = \{x \in R^3;\ b(x_1, x_2) < x_3 < h(x_1, x_2)\} \tag{1.1}$$

$$-\nu \Delta u + (u \cdot \nabla) u + \nabla p = f \quad \text{dans } \Omega \tag{1.2}$$

$$\nabla \cdot u = 0 \quad \text{dans } \Omega \tag{1.3}$$

$$u = 0 \quad \text{sur } S_b \tag{1.4}$$

$$u \cdot n = 0 \quad \text{sur } S_h = \{x_3 = h(x_1, x_2)\} \tag{1.5}$$

$$(1.6)\qquad pn_i - \nu(\partial_i u_j + \partial_j u_i)n_j = \left\{ gh - \gamma\nabla\cdot\frac{\nabla h}{(1+|\nabla h|^2)^{1/2}}\right\}n_i\,,$$

$$i = 1, 2, 3, \quad \text{sur } S_h$$

où n est la normale extérieure à S_h.

Pour le cas périodique (de période T), le problème consiste à trouver (u, p, h) qui satisfasse aux

$$(1.7)\qquad \Omega_t = \{x \in R^3;\ b(x_1, x_2) < x_3 < h(x_1, x_2, t)\}$$

$$(1.8)\qquad \partial_t u - \nu\,\Delta u + (u\cdot\nabla)u + \nabla p = f \qquad \text{dans } Q$$

$$(1.9)\qquad \nabla\cdot u = 0 \qquad \text{dans } Q$$

$$(1.10)\qquad u = 0 \qquad \text{sur } S_b\times R$$

$$(1.11)\qquad \partial_t h = u_3 - (\partial_1 h)u_1 - (\partial_2 h)u_2 \qquad \text{sur } \Sigma_h$$

$$(1.12)\qquad pn_i - \nu(\partial_i u_j + \partial_j u_i)n_j = \left\{ gh - \gamma\nabla\cdot\frac{\nabla h}{(1+|\nabla h|^2)^{1/2}}\right\}n_i\,,$$

$$i = 1, 2, 3\,, \quad \text{sur } h$$

$$(1.13)\qquad u(x, t+T) = u(x, t) \qquad \text{dans } Q$$

$$p(x, t+T) = p(x, t) \qquad \text{dans } Q$$

$$h(x_1, x_2, t+T) = h(x_1, x_2, t) \qquad \text{sur } R^2\times R$$

où

$$Q = \{(x, t) \in R^3\times R;\ x \in \Omega_t\}$$

$$\Sigma_h = \{(x, t) \in R^3\times R;\ x_3 = h(x_1, x_2, t)\}\,.$$

Avant d'énoncer les théorèmes, définissons des espaces fonctionnels. Soit $D \subset R^n$, $n = 2, 3$. Pour s entier $\geqslant 0$ et $q \geqslant 1$, on définit

$$W_q^s(D) = \left\{\varphi;\ \sum_{|\alpha|\leqslant s} \|D^\alpha\varphi\|_{L_q(D)} < \infty\right\}$$

avec

$$D^\alpha = \partial_1^{\alpha_1}\ldots\partial_n^{\alpha_n}\,, \qquad |\alpha| = \alpha_1 + \ldots + \alpha_n\,.$$

Pour s réel $\geqslant 0$, $H^s(D)$ désignera l'espace de Sobolev et on définit pour $s \geqslant 1$

$$\tilde{H}^s_{(q)}(D) = \left\{\varphi;\ \sum_{i=1}^n \|\partial_i\varphi\|_{H^{s-1}(D)} + \|\varphi\|_{L_q(D)} < \infty\right\}.$$

Pour les fonctions périodiques $\varphi(x, t)$ de période T, on définit

$$\tilde{\varphi}^{(k)}(x) = \frac{1}{T}\int_0^T \varphi(x, t) \exp\left(-i\frac{2\pi kt}{T}\right) dt \quad \text{pour } k \in Z$$

$$K^s(D)_T = \left\{\varphi; \left\{\sum_{k\in Z} \left(\|\tilde{\varphi}^{(k)}\|^2_{H^s(D)} + |k|^s\|\tilde{\varphi}^{(k)}\|^2_{H^0(D)}\right)\right\}^{1/2} < \infty\right\}$$

$$\tilde{K}^s_{(q)}(D)_T = \left\{\varphi; \left\{\sum_{k\in E\setminus\{0\}} \left(\|\tilde{\varphi}^{(k)}\|^2_{H^s(D)} + |k|^s\|\tilde{\varphi}^{(k)}\|^2_{H^0(D)}\right)\right\}^{1/2} + \|\tilde{\varphi}^{(0)}\|_{\tilde{H}^s_{(q)}(D)} < \infty\right\}.$$

Parce qu'il ne s'agira, dans ce qui suit, que de fonctions de période T, on écrira simplement $K^s(D)$ (resp. $\tilde{K}^s_{(q)}(D)$) au lieu de $K^s(D)_T$ (resp. $\tilde{K}^s_{(q)}(D)_T$).

Pour préciser l'hypothèse sur la donnée f, on aura besoin de l'aide des changements de variables ϑ, $\tilde{\vartheta}$ qu'on introduira au § II; maintenant on se contente de remarquer que ϑ, $\tilde{\vartheta}$ seront définis par h et qu'on aura, pour le cas stationnaire (resp. cas périodique),

$$\vartheta\left(\tilde{\vartheta}(\Omega^{(0)})\right) = \Omega \text{ (resp. } = \Omega_t)$$

où

$$\Omega^{(0)} = \{x \in R^3;\ b(x_1, x_2) < x_3 < 0\};$$

si on en a besoin, on précise leur dépendance de h par la notation $\vartheta^{(h)}$, $\tilde{\vartheta}^{(h)}$.

Le résultat principal de ce travail consiste dans les deux théorèmes suivants:

THÉORÈME 1 (cas stationnaire). *Supposons que f satisfait aux conditions suivantes*:

i) *pour tout* $h \in \tilde{H}^{r+1/2}_{(q^*)}(R^2)$, *on a*

$$f|_{\Omega^{(h)}} \in H^{r-2}(\Omega^{(h)})$$

avec

$$\Omega^{(h)} = \{x \in R^3;\ b < x_3 < h\}$$

ii) *il existe une constante* c_0 *telle que*

$$\|f\circ\vartheta^{(h)}\circ\tilde{\vartheta}^{(h)} - f\circ\vartheta^{(h')}\circ\tilde{\vartheta}^{(h')}\|_{H^{r-2}(\Omega^{(0)})\cap W^1_q(\Omega^{(0)})} \leqslant c_0\|h - h'\|_{\tilde{H}^{r+1/2}_{(q^*)}(R^2)}$$

pour toute $h, h' \in \tilde{H}^{r+1/2}_{(q^*)}(R^2)$

où $r \geqslant 3$, $1 < q < 2$, $q^* = 2q/(2-q)$. *Si* $b(x_1, x_2)$ *est assez régulière et si* $\|f\|_{H^{r-2}(\Omega^{(0)}) \cap W^1_q(\Omega^{(0)})}$ *et* c_0 *sont assez petits, alors il existe une solution* (u, p, h) *du problème* (1.1)-(1.6) *dans* $u \in H^r(\Omega)$, $\nabla p \in H^{r-2}(\Omega)$, $p \to 0$ *pour* $|(x_1, x_2)| \to \infty$, $h \in \tilde{H}^{r+1/2}_{(q^*)}(R^2)$.

THÉORÈME 2 (cas périodique). *Supposons que* f *satisfait aux conditions suivantes*:

i) *pour tout* $h \in \tilde{K}^{r+1/2}_{(q^*)}(R^2)$, *on a*

$$f|_{\cup \Omega_t^{(h)}} \in K^{r-2}\Big(\bigcup_t \Omega_t^{(h)}\Big)$$

avec

$$\Omega_t^{(h)} = \{x \in R^3;\ b(x_1, x_2) < x_3 < h(x_1, x_2, t)\}\ ;$$

ii) *il existe une constante* c_0 *telle que*

$$\|f \circ \vartheta^{(h)} \circ \tilde{\vartheta}^{(h)} - f \circ \vartheta^{(h')} \circ \tilde{\vartheta}^{(h')}\|_{K^{r-2}(\Omega^{(h)})} \leqslant c_0 \|h - h'\|_{\tilde{K}^{r+1/2}_{(q^*)}(R^2)}$$

et

$$\|\overline{f \circ \vartheta^{(h)} \circ \tilde{\vartheta}^{(h)}}^{(0)} - \overline{f \circ \vartheta^{(h')} \circ \tilde{\vartheta}^{(h')}}^{(0)}\|_{W^1_q(\Omega^{(0)})} \leqslant c_0 \|h - h'\|_{\tilde{K}^{r+1/2}_{(q^*)}(R^2)}$$

pour tout $h, h' \in \tilde{K}^{r+1/2}_{(q^*)}(R^2)$,

où $r \geqslant 3$, $1 < q < 2$, $q^* = 2q/(2-q)$. *Si* $b(x_1, x_2)$ *est assez régulière et si* $\|f\|_{K^{r-2}(\Omega^{(0)})}$, $\|f^{(0)}\|_{W^1_q(\Omega^{(0)})}$ *et* c_0 *sont assez petits, alors il existe une solution* (u, p, h) *du problème* (1.7)-(1.13) *telle que, si on prolonge* u *et* p *convenablement dans* $\bigcup_t \Omega_t$, *on ait*

$$u \in K^r\Big(\bigcup_t \Omega_t\Big)$$

$$\nabla p \in K^{r-2}\Big(\bigcup_t \Omega_t\Big)\ , \qquad p \to 0 \text{ pour } |(x_1, x_2)| \to \infty$$

$$h \in \tilde{K}^{r+1/2}_{(q^*)}(R^2)\ .$$

REMARQUE 1. Dans les conditions i), ii), on peut dire « pour tout h tel que $\|h\|_{\tilde{H}^{r+1/2}_{(q^*)}(R^2)} \leqslant c^1$ (resp. $\|h\|_{\tilde{K}^{r+1/2}_{(q^*)}(R^2)} \leqslant c^1$) » au lieu de « pour tout $h \in \tilde{H}^{r+1/2}_{(q^*)}(R^2)$ (resp. $\tilde{K}^{r+1/2}_{(q^*)}(R^2)$) », si on choisit convenablement $c^1 > 0$.

REMARQUE 2. La petitesse de c_0 veut dire, en gros, que $\partial_3 f$ est petite; en effet, si $\partial_3 f = 0$ identiquement, alors $c_0 = 0$.

II. – Changement de variables.

Les théorèmes 1 et 2 seront prouvés aux § V et § VII respectivement: les études des équations linéarisées (§§ III et VI) et du « domaine approprié » (§ IV) nous fourniront une application d'un espace de Banach dans lui-même et par le principe des contractions on arrivera à une solution dans cet espace de Banach. Ce n'est cependant pas pour le problème (1.1)-(1.6) (resp. (1.7)-(1.13)) mais pour le problème convenablement transformé, que l'on considérera un espace de Banach où la contraction sera réalisée. Dans ce paragraphe, on va transformer le problème à l'aide d'un changement de variables. On va en préciser les raisonnements seulement pour le cas périodique; on obtiendra, en effet, le changement de variables et le problème transformé du cas stationnaire, si on néglige la dépendance du temps dans ceux du cas périodique.

On va d'abord définir un changement de variables ϑ de sorte que $\vartheta^{-1}(\Omega_t)$ (cf. (1.7)) ne changera plus dans le temps et qu'il sera borné par une surface régulière. Soit ϱ un opérateur régularisant choisi convenablement à l'étude ultérieure; posons

$$\bar{h}(x_1, x_2) = \frac{1}{T}\int_0^T h(x_1, x_2, t)\, dt$$

$$\bar{\bar{h}}(x_1, x_2) = \bar{h} * \varrho$$

$$\eta(x_1, x_2, t) = h(x_1, x_2, t) - \bar{\bar{h}}(x_1, x_2)\,,$$

la convolution $*$ s'effectuant dans R^2. η jouit de la propriété suivante:

LEMME 2.1. *Si* $\bar{h} \in \tilde{H}^s_{(a^*)}(R^2)$, *alors*

$$\bar{\eta} = \frac{1}{T}\int_0^T \eta(x_1, x_2, t)\, \mathrm{d}t \in H^s(R^2)$$

et on a

$$\|\bar{\eta}\|_{L_2(R^2)} + \|\nabla\bar{\eta}\|_{H^{s-1}(R^2)} \leqslant c\|\nabla\bar{h}\|_{H^{s-1}(R^2)} \leqslant c\|\bar{h}\|_{\tilde{H}^s_{(a^*)}(R^2)}\,.$$

COROLLAIRE. *Si* $h \in \tilde{K}^s_{(a^*)}(R^2)$, *alors* $\eta \in K^s(R^2)$ *et on a*

$$\|\eta\|_{K^s(R^2)} \leqslant c\|h\|_{\tilde{K}^s_{(a^*)}(R^2)}\,.$$

En effet, on a en vertu de l'inégalité de Hölder

$$|\bar{h} * \varrho - \bar{h}|^2 = \Big| \int_{\operatorname{supp}\varrho} \varrho(y)(\bar{h}(x-y) - \bar{h}(x))\, dy \Big|^2$$

$$\leqslant \int_{\operatorname{supp}\varrho} \varrho(y)|\bar{h}(x-y) - \bar{h}(x)|^2\, dy = \int_{\operatorname{supp}\varrho} \varrho(y) \Big| \int_0^{-y} \partial\bar{h}(x+z)\, dz \Big|^2 dy\,,$$

d'où

$$\int_{R^2} |\bar{h} * \varrho - \bar{h}|^2\, dx \leqslant \int_{R^2} dx \int_{\operatorname{supp}\varrho} \varrho(y)|y|\, dy \int_0^{-y} |\nabla\bar{h}(x+z)|^2\, dz$$

$$\leqslant \int_{\operatorname{supp}\varrho} \varrho(y)|y|\, dy \int_0^{-y} dz \int_{R^2} |\nabla\bar{h}(x+z)|^2\, dx = c\|\nabla\bar{h}\|^2_{L_2(R^2)};$$

l'inégalité

$$\|\nabla\tilde{\eta}\|_{H^{s-1}(R^2)} \leqslant c\|\nabla\bar{h}\|_{H^{s-1}(R^2)}$$

résulte de l'inégalité évidente

$$\|\varphi - \varphi * \varrho\|_{H^{s-1}(R^2)} \leqslant c\|\varphi\|_{H^{s-1}(R^2)}$$

et de la relation

$$\nabla\tilde{\eta} = \nabla\Big(\int \varrho(y)(\bar{h}(x) - \bar{h}(x-y))\, dy\Big) = \nabla\bar{h} - \nabla\bar{h} * \varrho\,,$$

ce qui prouve le lemme 1; le corollaire est immédiat.

Maintenant on définit $\tilde{\eta}$ par la relation

$$(\tilde{\eta})\,\hat{}\,(\xi_1, \xi_2, x_3, t) = \hat{\eta}(\xi_1, \xi_2, t) \exp\,(-|\xi|(-x_3))$$

où le symbole $\hat{}$ désigne la transformée de Fourier en deux premières variables. On définit en outre la transformation $\tilde{\vartheta}$ des variables spatiales:

$$\tilde{\vartheta}_1(x) = x_1\,, \qquad \tilde{\vartheta}_2(x) = x_2\,,$$

$$\tilde{\vartheta}_3(x) = x_3 + \bar{\bar{h}}(x_1, x_2)\,\frac{x_3 - b(x_1, x_2)}{-b(x_1, x_2)}$$

et on pose

$$\eta^*(x, t) = \tilde{\eta}(\tilde{\vartheta}^{-1}(x), t);$$

on voit aisément que

$$\eta^*(x_1, x_2, \bar{\bar{h}}(x_1, x_2), t) = \eta(x_1, x_2, t) \qquad \text{pour tout } (x_1, x_2) \in R^2\,.$$

Maintenant, a l'aide de la fonction η^*, on définit une transformation ϑ des variables qui dépend du temps et qui transforme le domaine stable

$$\Omega = \{x \in R^3;\ b(x_1, x_2) < x_3 < \bar{\bar{h}}(x_1, x_2)\}$$

en Ω_t, plus précisément

$$\text{(2.1)} \qquad \begin{cases} \vartheta_1(x, t) = x_1\,, \quad \vartheta_2(x, t) = x_2\,, \\ \vartheta_3(x, t) = x_3 + \eta^*(x, t)\dfrac{x_3 - b}{\bar{\bar{h}} - b}\,. \end{cases}$$

Il n'est pas difficile de voir que ϑ est inversible lorsque $\|h\|_{\tilde{H}^1_{(a^*)}(R^2)}$ (et donc $\|\eta\|_{H^1(R^2)}$ aussi en vertu du lemme 2.1) est assez petit. Faisons attention d'autre part à ce que, bien que $\vartheta^{-1}(\Omega_t) = \Omega$ ne dépende pas du temps, il reste inconnu.

On se propose maintenant de transformer les équations (1.7)-(1.13) en forme convenable. Posons d'abord

$$\text{(2.2)} \qquad A = (a_{ij}) = (\partial_j \vartheta_i) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ \partial_1\vartheta_3 & \partial_2\vartheta_3 & \partial_3\vartheta_3 \end{pmatrix};$$

on a donc, pour φ définie dans Ω_t,

$$\text{(2.3)} \qquad \begin{cases} \nabla(\varphi \circ \vartheta) = {}^tA(\nabla\varphi)\circ\vartheta \\ \partial_t(\varphi\circ\vartheta) = (\partial_t\varphi)\circ\vartheta + (\partial_t\vartheta_3)(\partial_3\varphi)\circ\vartheta \end{cases}$$

ou, pour ψ définie dans Ω,

$$\text{(2.3 bis)} \qquad \begin{cases} \nabla(\psi\circ\vartheta^{-1}) = ({}^tA^{-1}\nabla\psi)\circ\vartheta^{-1} \\ \big(\partial_t(\psi\circ\vartheta^{-1})\big)\circ\vartheta = \partial_t\psi - \dfrac{\partial_t\vartheta_3}{\partial_3\vartheta_3}\partial_3\psi\ ; \end{cases}$$

on pose maintenant

$$\text{(2.4)} \qquad \begin{cases} v = |A|A^{-1}u\circ\vartheta \equiv |A|a^{-1}_{ij}u_j\circ\vartheta \\ \pi = p\circ\vartheta\,, \quad |A| = \det A\,. \end{cases}$$

Les relations (2.3)-(2.3 bis) impliquent alors

$$(\partial_t u)\circ\vartheta = \frac{A}{|A|}\,\partial_t v + \left(\partial_t \frac{A}{|A|}\right) v - \frac{\partial_t \vartheta_3}{\partial_3 \vartheta_3}\,\partial_3\left(\frac{A}{|A|}\,v\right)$$

$$\big((u\cdot\nabla)u\big)\circ\vartheta = \frac{1}{|A|}\,(v\cdot\nabla)\left(\frac{A}{|A|}\,v\right)$$

$$\begin{aligned}(\Delta u)\circ\vartheta &= \left(\partial_j\partial_j\left(\left(\frac{A}{|A|}\,v\right)\circ\vartheta^{-1}\right)\right)\circ\vartheta \\ &= \frac{A}{|A|}\,\Delta v + 2\left(\partial_j \frac{A}{|A|}\right)(\partial_j v) + \left(\Delta \frac{A}{|A|}\right) v \\ &\quad + \Big(\big((A^{-1}\,{}^tA^{-1} - I)\nabla\big)\cdot\nabla\Big)\frac{A}{|A|}\,v + a^{-1}_{lj}(\partial_l a^{-1}_{kj})\,\partial_k \frac{A}{|A|}\,v\end{aligned}$$

$$(\nabla p)\circ\vartheta = {}^tA^{-1}\,\nabla\pi\,;$$

en substituant ces expressions dans (1.8) et en le multipliant par $|A|A^{-1}$, on a

$$\begin{aligned}(2.5)\qquad \partial_t v - \nu\,\Delta v + \nabla\pi &= |A|A^{-1} f\circ\vartheta - A^{-1}(v\cdot\nabla)\left(\frac{A}{|A|}\,v\right) \\ &\quad + |A|A^{-1}\left(\frac{\partial_t\vartheta_3}{\partial_3\vartheta_3}\,\partial_3\left(\frac{A}{|A|}\,v\right) - \left(\partial_t \frac{A}{|A|}\right)v\right) + S(A, v, \nabla\pi) \\ &\equiv |A|A^{-1} f\circ\vartheta + F^*(v, \eta, \nabla\pi) \qquad \text{dans } \Omega\end{aligned}$$

où

$$\begin{aligned}S(A, v, \nabla\pi) = \nu|A|A^{-1}\Big\{&2\partial_j\left(\partial_j \frac{A}{|A|}\right)v - \left(\Delta \frac{A}{|A|}\right)v \\ &+ a^{-1}_{lj}\left(\partial_k\left((\partial_l a^{-1}_{kj})\,\frac{A}{|A|}\,v\right) - (\partial_l\partial_k a^{-1}_{kj})\,\frac{A}{|A|}\,v\right) \\ &+ \Big(\big((A^{-1}\,{}^tA^{-1} - I)\nabla\big)\cdot\nabla\Big)\left(\frac{A}{|A|}\,v\right)\Big\} + (I - |A|A^{-1}\,{}^tA^{-1})\,\nabla\pi\,.\end{aligned}$$

On a

$$(\nabla\cdot u)\circ\vartheta = a^{-1}_{li}\,\partial_l\left(\frac{a_{jk}}{|A|}\,v_k\right) = \left(a^{-1}_{li}\left(\partial_l \frac{1}{|A|}\right)a_{jk} + a^{-1}_{lj}\,\frac{\partial_l a_{jk}}{|A|}\right)v_k + \frac{1}{|A|}\,\nabla\cdot v\,;$$

or, en réduisant a_{jk}, a^{-1}_{lj}, $|A|$ en expressions explicites, on voit que

$$a^{-1}_{lj}\left(\partial_l \frac{1}{|A|}\right)a_{jk} + a^{-1}_{lj}\,\frac{\partial_l a_{jk}}{|A|} = 0 \qquad \text{pour } k = 1, 2, 3\,;$$

on peut donc remplacer (1.9) par

$$\nabla \cdot v = 0 \quad \text{dans } \Omega . \tag{2.6}$$

Quant aux conditions à la frontière, il est évident que (1.10) équivaut à

$$v = 0 \quad \text{sur } S_b . \tag{2.7}$$

D'autre part le deuxième membre de (1.11) est égal à

$$\begin{aligned} &(-\partial_1\eta - \partial_1\bar{\bar{h}}, -\partial_2\eta - \partial_2\bar{\bar{h}}, 1)\frac{A}{|A|}v \\ &\quad = \left(\frac{\partial_1\vartheta_3 - \partial_1\eta - \partial_1\bar{\bar{h}}}{\partial_3\vartheta_3}, \frac{\partial_2\vartheta_3 - \partial_2\eta - \partial_2\bar{\bar{h}}}{\partial_3\vartheta_3}, 1\right)v \quad \text{sur } S_{\bar{\bar{h}}} = \{x_3 = \bar{\bar{h}}\} . \end{aligned}$$

Or, pour $x_3 = h$, on a

$$\begin{aligned} \partial_i\vartheta_3 &= \partial_i\eta^* - \eta^*\frac{\partial_i\bar{\bar{h}}}{\bar{\bar{h}} - b} \\ \partial_3\vartheta_3 &= 1 + \partial_3\eta^* + \frac{\eta^*}{\bar{\bar{h}} - b} \end{aligned} \qquad (i = 1, 2)$$

d'où, compte tenu de la relation

$$\partial_i\eta = \partial_i\eta^* + (\partial_3\eta^*)\,\partial_i\bar{\bar{h}} \quad (i = 1, 2) ,$$

résulte la relation

$$\partial_i\vartheta_3 = \partial_i\eta + \partial_i\bar{\bar{h}} - (\partial_3\vartheta_3)\,\partial_i\bar{\bar{h}} \quad (i = 1, 2) .$$

En substituant cette expression de $\partial_i\vartheta_3$ dans l'expression notée ci-dessus, on obtient

$$\begin{aligned} \partial_t h = \partial_t\eta &= -(\partial_1\bar{\bar{h}})v_1 - (\partial_2\bar{\bar{h}})v_2 + v_3 \\ &= (1 + |\nabla h|^2)^{1/2} n \cdot v \quad \text{sur } S_{\bar{\bar{h}}} \end{aligned} \tag{2.8}$$

où $\bar{\bar{n}}$ désigne la normale extérieure sur $S_{\bar{\bar{h}}}$. Pour transformer (1.12), on le miltiple par la matrice $B = (b_{ij}) = B^{(n,\bar{\bar{n}})}$ qui représente la rotation autour de la droite

$$\{x;\, n \perp x\} \cap \{x;\, \bar{\bar{n}} \perp x\}$$

et telle que

$$Rn = \bar{\bar{n}} ;$$

on a alors

$$\begin{aligned}(2.9)\qquad & \pi\bar{\bar{n}}_i - \nu(\partial_i v_j + \partial_j v_i)\,\bar{\bar{n}}_j - \{(g - \gamma\Delta)(\eta + \bar{\bar{h}})\}\,\bar{\bar{n}}_i \\ & = \nu T_i(n, \bar{\bar{n}}, A, v) + \gamma\left(1 - (1 + |\nabla h|^2)^{-1/2}\right)(\Delta(\eta + \bar{\bar{h}}))\,\bar{\bar{n}}_i \\ & - \gamma\bar{\bar{n}}_i\left(\nabla(1 + |\nabla h|^2)^{-1/2}\right)\cdot\nabla(\eta + \bar{\bar{h}}) \equiv G(v, \eta, \nabla\bar{\bar{h}}) \qquad \text{sur } S_{\bar{\bar{h}}}\end{aligned}$$

où

$$\begin{aligned}T_i(n, \bar{\bar{n}}, A, v) &= T_i(B^{(n,\bar{\bar{n}})}, A, v) \\ &= (b_{ik} - \delta_{ik})a^{-1}_{lk}\left(\partial_l\left(\frac{A}{|A|}v\right)_m\right)b^{-1}_{mj}\bar{\bar{n}}_j + (a^{-1}_{ki} - \delta_{ki})\left(\partial_k\left(\frac{A}{|A|}v\right)_l\right)b^{-1}_{lj}\bar{\bar{n}}_j \\ &+ \left(\partial_i\left(\frac{A}{|A|}v\right)_l\right)(b^{-1}_{lj} - \delta_{lj})\,\bar{\bar{n}}_j + \left(\partial_i\frac{a_{jk}}{|A|}\right)v_k\,\bar{\bar{n}}_j \\ &+ \left(\frac{a_{jk}}{|A|} - \delta_{jk}\right)(\partial_i v_k)\,\bar{\bar{n}}_j + (b_{ik} - \delta_{ik})a^{-1}_{ml}\left(\partial_m\left(\frac{A}{|A|}v\right)_k\right)b^{-1}_{lj}\bar{\bar{n}}_j \\ &+ (a^{-1}_{kl} - \delta_{kl})\left(\partial_k\left(\frac{A}{|A|}v\right)_i\right)b^{-1}_{lj}\bar{\bar{n}}_j + \left(\partial_k\left(\frac{A}{|A|}v\right)_i\right)(b^{-1}_{ki} - \delta_{ki})\,\bar{\bar{n}}_j \\ &+ \left(\partial_j\frac{a_{ik}}{|A|}\right)v_k\,\bar{\bar{n}}_j + \left(\frac{a_{ik}}{|A|} - \delta_{ik}\right)(\partial_j v_k)\,\bar{\bar{n}}_j\end{aligned}$$

b^{-1}_{ij} étant les éléments de B^{-1}. Il est évident que (1.13) se transforme en

$$(2.10)\qquad \begin{cases} v(x, t + T) = v(x, t) & \text{dans } \Omega\times R \\ \pi(x, t + T) = \pi(x, t) & \text{dans } \Omega\times R \\ \eta(x_1, x_2, t + T) = \eta(x_1, x_2, t) & \text{sur } R^2\times R\,. \end{cases}$$

Ces transformations nous permettent de chercher un domaine $\Omega = \{b < x_3 < \bar{\bar{h}}\}$ en même temps que (v, π, η) tels que (v, π, η) satisfasse aux (2.5)-(2.10) dans Ω et que

$$\bar{\bar{h}} = \varrho * (\bar{\bar{h}} + \bar{\eta}^{(0)})$$

et de construire (u, p, h) satisfaisant aux (1.7)-(1.13) à partir de $(v, \pi, h = \bar{\bar{h}} + \eta)$ si un tel (v, π, h) existe. On retournera à ce problème au § VII (et au § V pour le cas stationnaire).

III. – Equation stationnaire linéarisée dans un domaine donné.

Dans ce paragraphe, on va s'occuper de l'équation linéarisée pour le cas stationnaire dans un domaine donné

$$\Omega = \{x \in R^3;\ b(x_1, x_2) < x_3 < h(x_1, x_2)\}\ ,$$

c'est-à-dire qu'on fixe a priori la fonction $h(x_1, x_2)$; pour ce qui concerne $h(x_1, x_2)$ on suppose ici

$$h \in C^\infty(R^2)$$

$$\partial^\alpha h \to 0 \quad \text{pour} \quad |(x_1, x_2)| \to \infty\ , \quad \text{pour tout} \quad \alpha,\ |\alpha| \geqslant 0\ .$$

Considérons le système d'équations

$$-\nu\, \Delta u + \nabla p = f \qquad \text{dans } \Omega \tag{3.1}$$

$$\nabla \cdot u = 0 \qquad \text{dans } \Omega \tag{3.2}$$

$$u = 0 \qquad \text{sur } S_b \tag{3.3}$$

$$u \cdot n = 0 \qquad \text{sur } S_h \tag{3.4}$$

$$\{(\partial_i u_j + \partial_j u_i) n_j\}_{\tan} = f^* \qquad \text{sur } S_h \tag{3.5}$$

où $\{\ \}_{\tan}$ veut dire la partie tangentielle et n est la normale extérieure sur S_h. On a alors le théorème 3, qu'on emploiera aux §§ IV et VI et le théorème 4, qui est un corollaire de la théorie de Solonnikov [7] (voir aussi [4] et Ch. 3 de [5]) et qu'on emploiera au § IV. Notons par ailleurs que, si on pose, outre (3.1)-(3.5), une condition linéarisée correspondant à la partie normale de (2.9), le problème n'aura en général pas de solution (u, p) à cause de l'excès de conditions; on cherchera au § IV un domaine particulier tel que le problème comprenant la partie normale linéarisée de (2.9) ait la solution.

THÉORÈME 3. *Si*

$$f \in H^{r-2}(\Omega)\ , \qquad f^* \in H^{r-3/2}(S_h)\ ,$$

alors il existe une solution (u, p) *et une seule du problème* (3.1)-(3.5) *dans*

$u \in H^r(\Omega)$, $\nabla p \in H^{r-2}(\Omega)$, $p \to 0$ *pour* $|(x_1, x_2)| \to \infty$ *et on a*

$$\|u\|_{H^r(\Omega)} + \|\nabla p\|_{H^{r-2}(\Omega)} \leqslant c\{\|f\|_{H^{r-2}(\Omega)} + \|f^*\|_{H^{r-3/2}(S_h)}\} . \tag{3.6}$$

THÉORÈME 4. *Si*

$$f \in W_q^1(\Omega) , \quad f^* \in W_q^{2-1/q}(S_h) , \quad 1 < q < 2 ,$$

alors il existe une solution (u, p) *et une seule du problème* (3.1)-(3.5) *dans* $u \in W_q^3(\Omega)$, $\nabla p \in W_q^1(\Omega)$, $p \to 0$ *pour* $|(x_1, x_2)| \to \infty$ *et on a*

$$\|u\|_{W_q^3(\Omega)} + \|\nabla p\|_{W_q^1(\Omega)} \leqslant c\{\|f\|_{W_q^1(\Omega)} + \|f^*\|_{W_q^{3-1/q}(S_h)}\} , \tag{3.7}$$

où $W_q^{m-1/q}(S_h)$ (m: *entier*) *désigne l'espace des fonctions* φ *telles que*

$$\|\varphi\|_{W_q^{m-1}(S_h)} < \infty$$

et que

$$\sum_{|\alpha|=m-1} \Big\{ \Big(\int_0^1 \int_{S_h} r^{-q} |D^\alpha \varphi(x_1 + r, x_2) - D^\alpha \varphi(x_1, x_2)|^q \, dS_h \, dr \Big)^{1/q}$$

$$+ \Big(\int_0^1 \int_{S_h} r^{-q} |D^\alpha \varphi(x_1, x_2 + r) - D^\alpha \varphi(x_1, x_2)|^q \, dS_h \, dr \Big)^{1/q} \Big\} < \infty .$$

DÉMONSTRATION DU THÉORÈME 3. Démontrons-le d'abord pour le cas où $f^* = 0$ analoguement à la démonstration du lemme 3.3 (i) de [3]. Soit P la projection de $L_2(\Omega)$ orthogonale à

$$\{u \in L_2(\Omega);\ \text{il existe } \varphi \text{ telle que } u = \nabla\varphi\} ;$$

P est un opérateur borné sur $H^s(\Omega)$ (voir le lemme 3.1 de [3]). Si on l'applique à (3.1), on a

$$-\nu P \, \Delta u = Pf . \tag{3.8}$$

On pose

$$\langle u, v \rangle_\Omega = \int_\Omega (\partial_i u_j + \partial_j u_i)(\partial_i v_j + \partial_j v_i) \, dx$$

(s'il s'agit de fonctions à valeurs complexes, on met en conjuguée complexe le deuxième facteur sous l'intégration). Si u satisfait aux (3.2)-(3.5) avec

$f^* = 0$, on a

$$(P\,\Delta u, v)_\Omega = -\tfrac{1}{2}\langle u, v\rangle_\Omega$$

pour tout v satisfaisant aux conditions

$$v = 0 \quad \text{sur } S_b\,, \qquad n\cdot v = 0 \quad \text{sur } S_h$$
$$\nabla\cdot v = 0 \quad \text{dans } \Omega\,.$$

Or, d'après le lemme 2.7 de [2], l'inégalité de Korn

$$\|u\|^2_{H^1(\Omega)} \leqslant c\langle u, u\rangle_\Omega \tag{3.9}$$

est vraie pour notre domaine Ω, ce qui implique que la forme $\langle\cdot,\cdot\rangle_\Omega$ est équivalente au produit scalaire de $H^1(\Omega)$; il en résulte que l'équation

$$\frac{\nu}{2}\langle u, \cdot\rangle_\Omega = (Pf, \cdot)_\Omega$$

nous fournit la solution faible u, si on considère le second membre comme une fonctionnelle linéaire dans l'espace hilbertien

$$\left\{v \in H^1(\Omega);\quad \begin{array}{ll} \nabla\cdot v = 0 & \text{dans } \Omega\,, \quad v = 0 \quad \text{sur } S_b\,, \\ n\cdot v = 0 & \text{sur } S_h \end{array}\right\}.$$

L'estimation de u dans $H^r(\Omega)$ et celle de ∇p dans $H^{r-2}(\Omega)$ s'obtiendront tout pareillement à la démonstration du lemme 3.3 (i) de [3] (voir aussi le théorème 2 de [11] et le lemme 2.8 de [2]), c'est-à-dire que le problème (3.1)-(3.5) avec $f^* = 0$ admet une solution (u, p) et une seule et on a

$$\|u\|_{H^r(\Omega)} + \|\nabla p\|_{H^{r-2}(\Omega)} \leqslant c\|f\|_{H^{r-2}(\Omega)}\,. \tag{3.10}$$

Il reste maintenant à réduire le cas général au cas où $f^* = 0$. Pour cela on construit w satisfaisant à

$$w = 0\,, \quad \partial_n w = 0 \qquad \text{sur } S_b$$
$$w = 0\,, \quad \partial_n w = 0\,, \quad \partial w_n^2 = -n\times f^* \qquad \text{sur } S_h$$
$$\|w\|_{H^{r+1}(\Omega)} \leqslant c\|f^*\|_{H^{r-3/2}(S_h)}$$

et on pose

$$u^{(1)} = \nabla \times w ;$$

alors $u^{(1)}$ satisfait à

$$\begin{aligned} & u^{(1)} = 0 && \text{sur } S_b \\ & u^{(1)} \cdot n = 0 && \text{sur } S_h \\ & \{(\partial_i u_j^{(1)} + \partial_j u_i^{(1)}) n_j\}_{\tan} = f^* && \text{sur } S_h . \end{aligned}$$

(Pour la possibilité de construire une telle w et la vérification de propriétés de $u^{(1)}$, voir le lemme 4.2 de [2].) Comme $\nabla \cdot u^{(1)} = 0$, le problème est réduit à trouver $u^{(0)}$ satisfaisant à

$$\begin{aligned} & -\nu \Delta u^{(0)} + \nabla p = f + \nu \Delta u^{(1)} && \text{dans } \Omega \\ & \nabla \cdot u^{(0)} = 0 && \text{dans } \Omega \\ & u^{(0)} = 0 && \text{sur } S_b \\ & u^{(0)} \cdot n = 0 && \text{sur } S_h \\ & \{(\partial_i u_j^{(0)} + \partial_j u_i^{(0)}) n_j\}_{\tan} = 0 && \text{sur } S_h , \quad \text{c.q.f.d.} \end{aligned}$$

REMARQUE. On peut étendre le théorème 3 au cas où le deuxième membre des (3.2), (3.4) n'est pas nul:

(3.2 bis) $\quad \nabla \cdot u = \psi \quad$ dans Ω, $\quad \psi \in H^{r-1}(\Omega)$

(3.4 bis) $\quad u \cdot n = \psi^* \quad$ sur S_h, $\quad \psi^* \in H^{r-1/2}(S_h)$

à condition que

$$\int_b^h \psi \, dx_3 + (1 + |\nabla h|^2)^{1/2} \psi^*$$

s'écrive en forme

$$= \partial_1 \Psi_1 + \partial_2 \Psi_2$$

avec

$$\Psi_1, \ \Psi_2 \in L_2(R^2) .$$

Cette extension du théorème sera vérifié à l'aide du lemme 2.8 de [2] et des lemmes suivants:

LEMME 3.1. *Pour $u \in H^1(\Omega)$ avec $u \cdot n = 0$ sur S_b, on a*

$$(1 + |\nabla h|^2)^{1/2} n \cdot u|_{S_h} = \int_b^h \nabla \cdot u \, dx_3 - \partial_1 \int_b^h u_1 \, dx_3 - \partial_2 \int_b^h u_2 \, dx_3 .$$

LEMME 3.2. *Si $\psi^{**} \in H'^{-1/2}(S_h)$ et si $(1 + |\nabla h|^2)^{1/2} \psi^{**}$ s'écrit en forme $\partial_1 \Psi_1^* + \partial_2 \Psi_2^*$ avec $\Psi_1^*, \Psi_2^* \in L_2(R^2)$, alors le problème*

$$\begin{cases} \partial_n \pi = \psi^{**} & \text{sur} \quad S_h \\ \Delta \pi = 0 & \text{dans} \quad \Omega \\ \partial_n \pi = 0 & \text{sur} \quad S_b \end{cases}$$

admet la solution unique dans $\nabla \pi \in H^r(\Omega)$ et on a

$$\|\nabla \pi\|_{H^r(\Omega)} \leqslant c \{ \|\psi^{**}\|_{H^{r-1/2}(S_h)} + \sum_{i=1}^{2} \|\Psi_i^*\|_{L_2(R^2)} \} .$$

Bien que, dans ce qui suit, on n'emploie pas l'extension du théorème 3, les lemmes 3.1, 3.2 seront utiles ultérieurement.

DÉMONSTRATION DU LEMME 3.1. Prenons $\varphi \in H^1(R^2)$ quelconque et prolongeons-la dans Ω de sorte que φ ne dépende pas de x_3; on a alors

$$\begin{aligned} \left((1 + |\nabla h|^2)^{1/2} n \cdot u|_{S_h}, \varphi \right)_{R^2} &= (u \cdot n, \varphi)_{S_h} = (\nabla \cdot u, \varphi)_\Omega + (u, \nabla \varphi)_\Omega \\ &= (\overline{\nabla \cdot u}, \varphi)_{R^2} - (\partial_1 \overline{u_1} + \partial_2 \overline{u_2}, \varphi)_{R^2} \end{aligned}$$

avec

$$\overline{\nabla \cdot u} = \int_{b(x_1, x_2)}^{h(x_1, x_2)} \nabla \cdot u \, dx_3 , \qquad \overline{u_i} = \int_{b(x_1, x_2)}^{h(x_1, x_2)} u_i \, dx_3 , \qquad i = 1, 2 ,$$

ce qui, en vertu de l'arbitrarité de φ, implique le lemme.

DÉMONSTRATION DU LEMME 3.2. Cherchons d'abord π dans $\nabla \pi \in L_2(\Omega)$. En effet, s'il existe un tel π, on a

$$(\nabla \pi, \nabla \varphi)_\Omega = (\partial_n \pi, \overset{*}{\varphi})_{S_h}$$

pour tout $\nabla \varphi \in L_2(\Omega)$. On considère la déformation de Ω en $\bar{\Omega} = \{b(\infty)$

$< x_3 < 0\}$ par $\bar{\vartheta}$:

$$\bar{\vartheta}_1 = x_1\,, \quad \bar{\vartheta}_2 = x_2\,, \quad \bar{\vartheta}_3 = x_3 + h\frac{x_3 - b(\infty)}{-b(\infty)} + \big(b - b(\infty)\big)\frac{-x_3}{-b(\infty)}\,,$$

et on décompose $\varphi\circ\bar{\vartheta}$ en

$$\varphi\circ\bar{\vartheta} = (\varphi\circ\bar{\vartheta}) * \varrho + \big(\varphi\circ\bar{\vartheta} - (\varphi\circ\vartheta) * \varrho\big) \equiv \bar{\varphi}_1 + \bar{\varphi}_2$$

où ϱ un opérateur régularisant comme au § II; on a alors

$$\begin{aligned}(\partial_n \pi, \varphi)_{S_h} &= (\partial_1 \Psi_1^* + \partial_2 \Psi_2^*, \bar{\varphi}_1)_{R^2} + \Big((1 + |\nabla h|^2)^{1/2}\psi^{**}, \bar{\varphi}_2\Big)_{R^2} \\ &= \Big((1 + |\nabla h|^2)^{1/2}\psi^{**}, \bar{\varphi}_2\Big)_{R^2} - (\Psi_1^*, \partial_1\bar{\varphi}_1)_{R^2} - (\Psi_2^*, \partial_2\bar{\varphi}_1)_{R^2}\end{aligned}$$

où $\bar{\varphi}_1$ et $\bar{\varphi}_2$ sont prises à la surface supérieure de $\bar{\Omega}$. Or, comme on a

$$\partial_i\bar{\varphi}_1 = \partial_i(\varphi\circ\bar{\vartheta}) * \varrho \quad \text{dans } \bar{\Omega} \ (i = 1, 2)\,,$$

on a

$$\|\partial_i\bar{\varphi}_1\|_{H^1(\bar{\Omega})} \leqslant c\|\partial_i(\varphi\circ\bar{\vartheta})\|_{L_2(\bar{\Omega})} \leqslant c'\|\nabla\varphi\|_{L_2(\Omega)}\,.$$

D'autre part, on a, analoguement à la démonstration du lemme 2.1,

$$\|\bar{\varphi}_2\|_{L_2(\bar{\Omega})} \leqslant c\|\nabla\bar{\varphi}\|_{L_2(\bar{\Omega})} \leqslant c'\|\nabla\varphi\|_{L_2(\Omega)}$$

et il est évident que

$$\|\nabla\bar{\varphi}_2\|_{L_2(\bar{\Omega})} \leqslant c\|\nabla\bar{\varphi}\|_{L_2(\bar{\Omega})} \leqslant c'\|\nabla\varphi\|_{L_2(\Omega)}\,,$$

en d'autres termes

$$\|\bar{\varphi}_2\|_{H^1(\bar{\Omega})} \leqslant c\|\nabla\varphi\|_{L_2(\Omega)}\,.$$

Donc, d'après le théorème de trace, on a

$$\sum_{i=1}^{2}\|\partial_i\bar{\varphi}_1\|_{L_2(R^2)} + \|\bar{\varphi}_2\|_{L_2(R^2)} \leqslant c\|\nabla\varphi\|_{L_2(\Omega)}$$

et donc

$$\begin{aligned}|(\nabla\pi, \nabla\varphi)_\Omega| &\leqslant \sum_{i=1}^{2}|(\Psi_i^*, \partial_i\bar{\varphi}_1)_{R^2}| + \Big|\Big((1 + |\nabla h|^2)^{1/2}\psi^{**}, \bar{\varphi}_2\Big)_{R^2}\Big| \\ &\leqslant c\|\nabla\varphi\|_{L_2(\Omega)}\Big(\sum_{i=1}^{2}\|\Psi_i^*\|_{L_2(R^2)} + \|\psi^{**}\|_{L_2(S_h)}\Big)\,,\end{aligned}$$

ce qui, d'après la théorie des espaces hilbertiens, implique l'existence de $\nabla\pi \in L_2(\Omega)$ et on a

$$\|\nabla\pi\|_{L_2(\Omega)} \leqslant c\Big(\|\psi^{**}\|_{L_2(S_h)} + \sum_{i=1}^{2} \|\Psi_i^*\|_{L_2(R^2)}\Big) .$$

L'estimation de $\nabla\pi$ pour la régularité plus élevée est obtenue pareillement à la démonstration du lemme 3.2 (ii) de [3].

DÉMONSTRATION DU THÉORÈME 4. Le système d'équations (3.1)-(3.2) est elliptique au sens de Douglis-Nirenberg (voir [1], [7]) et la condition (3.3) sur S_b remplit, avec (3.1)-(3.2), la condition complémentaire au sens de Douglis-Nirenberg (voir [7]). D'autre part, si l'on écrit la condition (3.4) dans la forme

$$(\partial_i u_j + \partial_j u_i) n_j \zeta_i^{(k)} = f^* \cdot \zeta^{(k)} , \qquad k = 1, 2$$

où $\zeta^{(1)}$, $\zeta^{(2)}$ sont deux vecteurs tangents à S_h au point $x \in S_h$ et tels que

$$\zeta^{(1)} \cdot \zeta^{(2)} = 0 , \qquad |\zeta^{(1)}| = |\zeta^{(2)}| = 1 ,$$

alors on est mené à constater que la condition complémentaire est remplie à chaque point $x \in S_h$ (et uniformément sur S_h), bien que le calcul soit assez long. Donc le théorème 4 résulte de [7]. (Voir aussi [4], où un tel résultat dans un domaine compact avec la condition d'adhérence à la frontière est établi.)

IV. – Existence d'un domaine approprié au problème stationnaire linéarisé.

Supposons que (f, f^*, ψ) est donné, où f est définie dans

$$\Omega^{(0)} = \{x \in R^3;\ b(x_1, x_2) < x_3 < 0\}$$

à valeurs vectorielles tandis que f^* et ψ sont définies sur R^2 à valeurs dans R^2 et dans R respectivement. On va, dans ce paragraphe, montrer l'existence d'un domaine

$$\Omega = \{x \in R^3;\ b(x_1, x_2) < x_3 < \overline{\overline{h}}(x_1, x_2)\}$$

tel qu'il existe (u, p, h) satisfaisant aux

$$-\nu \Delta u + \nabla p = f^{(\bar{\bar{h}})} \qquad \text{dans } \Omega \tag{4.1}$$

$$\nabla \cdot u = 0 \qquad \text{dans } \Omega \tag{4.2}$$

$$u = 0 \qquad \text{sur } S_b \tag{4.3}$$

$$u \cdot n = 0 \qquad \text{sur } S_h \tag{4.4}$$

$$\{(\partial_i u_j + \partial_j u_i) n_j\}_{\tan} = f^{*(n)} \qquad \text{sur } S_{\bar{\bar{h}}} \tag{4.5}$$

$$p - 2\nu(\partial_i u_j) n_i n_j - (g - \gamma \Delta) h = \psi \qquad \text{sur } S_{\bar{\bar{h}}} \tag{4.6}$$

$$h * \varrho = \bar{\bar{h}} \tag{4.7}$$

où

$$f^{(\bar{\bar{h}})} = f \circ \tilde{\vartheta}^{-1}$$

$$f^{*(n)} = B^{(n, e_3)^{-1}} f^*$$

n: normale extérieure sur $S_{\bar{\bar{h}}}$

$$e_3 = (0, 0, 1)\,;$$

ϱ, $\tilde{\vartheta}$, $B^{(\cdot,\cdot)}$ sont les mêmes que ceux définis au § II. Plus précisément, on a le

THÉORÈME 5. *Supposons que*

$$f \in H^{r-2}(\Omega^{(0)}) \cap W_q^1(\Omega^{(0)}), \qquad f^* \in H^{r-3/2}(R^2) \cap W_q^{2-1/q}(R^2)$$

$$\psi \in H^{r-3/2}(R^2), \qquad 1 < q < 2\,.$$

Si f, f^*, ψ sont assez petites dans la norme des espaces auxquels elles appartiennent, il existe une fonction $\bar{\bar{h}}(x_1, x_2) \in \tilde{H}^s_{(q^*)}(R^2)$ $(q^* = 2q/(2-q)$, s: convenablement grand) telle que, si le problème (4.1)-(4.7) est considéré dans le domaine $\Omega = \{b < x_3 < \bar{\bar{h}}\}$, il admette la solution (u, p, h) unique dans $u \in H^r(\Omega) \cap W_q^3(\Omega)$, $\nabla p \in H^{r-2}(\Omega) \cap W_q^1(\Omega)$, $h \in \tilde{H}^{r+1/2}_{(q^*)}(R^2)$. En outre, pour un nombre donné $\delta > 0$, il existe $\delta' > 0$ tel que, si $\|(f, f^*, \psi)\| \leqslant \delta'$, on ait

$$\|\bar{\bar{h}}\|_{\tilde{H}^s_{(q^*)}(R^2)} \leqslant \delta\,.$$

DÉMONSTRATION. Pour la simplicité de notation, on écrit $\tilde{H}^s$ au lieu de $\tilde{H}^s_{(q^*)}(R^2)$ dans la démonstration.

On va montrer l'existence de $\bar{\bar{h}}$ par approximation successive. Considérons le problème

$$
(4.8)\qquad \begin{cases} -\nu\,\Delta u^{(k)} + \nabla p^{(k)} = f^{(\bar{\bar{h}}^{(k)})} & \text{dans } \Omega^{(k)} \\ \nabla\cdot u^{(k)} = 0 & \text{dans } \Omega^{(k)} \\ u^{(k)} = 0 & \text{sur } S_b \\ u^{(k)}\cdot n^{(k)} = 0 & \text{sur } S_{\bar{\bar{h}}^{(k)}} = \{x_3 = \bar{\bar{h}}^{(k)}\} \\ \{(\partial_i u_j^{(k)} + \partial_j u_i^{(k)}) n_j^{(k)}\}_{\tan} = f^{*(n^{(k)})} & \text{sur } S_{\bar{\bar{h}}^{(k)}} \end{cases}
$$

où

$$
\Omega^{(k)} = \{x \in R^3;\ b(x_1, x_2) < x_3 < \bar{\bar{h}}^{(k)}(x_1, x_2)\}
$$

et $\bar{\bar{h}}^{(k)}$ est donnée; $n^{(k)}$ est la normale sur $S_{\bar{\bar{h}}^{(k)}}$. On part du problème (4.8) pour $k = 0$, en posant $\bar{\bar{h}}^{(0)}(x_1, x_2) = 0$, et on procède successivement sur k en définissant le domaine $\Omega^{(k+1)}$ au moyen de la solution $(u^{(k)}, p^{(k)})$.

En effet, le problème (4.8) avec $\bar{\bar{h}}^{(k)}$ assez régulière admet, d'après les théorèmes 3 et 4, une solution $(u^{(k)}, p^{(k)})$ et une seule satisfaisant aux inégalités

$$
\|u^{(k)}\|_{H^r(\Omega^{(k)})} + \|\nabla p^{(k)}\|_{H^{r-2}(\Omega^{(k)})} \leqslant c(\|f\|^{(\bar{\bar{h}}^{(k)})} + \|f^*\|_{H^{r-3/2}(R^2)})
$$

$$
\|u^{(k)}\|_{W^2_q(\Omega^{(k)})} + \|\nabla p^{(k)}\|_{W^1_q(\Omega^{(k)})} \leqslant c(\|f^{(\bar{\bar{h}}^{(k)})}\|_{W^1_q(\Omega^{(k)})} + \|f^*\|_{W^{2-1/q}_q(R^2)}).
$$

Or, en vertu de la propriété d'immersion du type Sobolev, on a

$$
\|p^{(k)}|_{S_{\bar{\bar{h}}^{(k)}}}\|_{L_{q^*}(R^2)} \leqslant c \sum_{i=1}^{2} \|\partial\,(p^{(k)}|_{S_{\bar{\bar{h}}^{(k)}}})\|_{L_q(R^2)} \leqslant c'\|\nabla p^{(k)}\|_{W^1_q(\Omega^{(k)})}.
$$

Comme, pour $\varphi \in H^1(R^2)$, on a

$$
\|\varphi\|_{L_{q^*}(R^2)} \leqslant c\|\varphi\|_{H^1(R^2)},
$$

l'équation elliptique

$$
p^{(k)} - 2\nu(\partial_i u_j^{(k)}) n_i^{(k)} n_j^{(k)} - (g - \gamma\Delta) h^{(k+1)} = \psi
$$

($p^{(k)}$, $\partial_i u_j^{(k)}$ étant prises sur $S_{\bar{\bar{h}}^{(k)}}$) nous donne la solution $h^{(k+1)} \in \tilde{H}^{r+1/2}_{(q^*)}(R^2)$.

On définit maintenant

$$\bar{\bar{h}}^{(k+1)} = h^{(k+1)} * \varrho$$

et on reprend le $(k+1)$-ième problème dans le domaine

$$\Omega^{(k+1)} = \{b < x_3 < \bar{\bar{h}}^{(k+1)}\} .$$

On va montrer la convergence de $h^{(k)}$ dans $\tilde{H}^{r+1/2}_{(a^*)}(R^2)$. Pour cela, on définit $\tilde{\vartheta}^{(k)}$:

$$\tilde{\vartheta}^{(k)}_1(x) = x_1 , \quad \tilde{\vartheta}^{(k)}_2(x) = x_2 , \quad \tilde{\vartheta}^{(k)}_3(x) = x_3 + \bar{\bar{h}}^{(k)} \frac{x_3 - b}{-b}$$

de sorte que

$$\Omega^{(k)} = \tilde{\vartheta}^{(k)}(\Omega^{(0)})$$

et on pose

$$\tilde{v}^{(k)} = |\tilde{A}^{(k)}| \tilde{A}^{(k)^{-1}} u^{(k)} \circ \tilde{\vartheta}^{(k)}$$

$$\tilde{p}^{(k)} = p^{(k)} \circ \tilde{\vartheta}^{(k)}$$

où

$$\tilde{A}^{(k)} = (\tilde{a}^{(k)}_{ij}) = (\partial_j \tilde{\vartheta}^{(k)}_i) .$$

Jouissant de propriétés analogues à celles de v, π définies par (2.4) qui satisfont aux (2.5)-(2.9), $\tilde{v}^{(k)}$ et $\tilde{p}^{(k)}$ définies ici satisfont aux

$$(4.9) \quad \begin{cases} -\nu \Delta \tilde{v}^{(k)} + \nabla \tilde{p}^{(k)} = |\tilde{A}^{(k)}| \tilde{A}^{(k)^{-1}} f + S(\tilde{A}^{(k)}, \tilde{v}^{(k)}, \nabla \tilde{p}^{(k)}) & \text{dans } \Omega^{(0)} \\ \nabla \cdot \tilde{v}^{(k)} = 0 & \text{dans } \Omega^{(0)} \\ \tilde{v}^{(k)} = 0 & \text{sur } S_b \\ \tilde{v}^{(k)}_3 = 0 & \text{sur } \{x_3 = 0\} \\ \partial_i \tilde{v}^{(k)}_3 + \partial_3 \tilde{v}^{(k)}_i = f^*_i + T_i(n^{(k)}, e_3, \tilde{A}^{(k)}, \tilde{v}^{(k)}) & \text{sur } \{x_3 = 0\};\ i = 1, 2 \end{cases}$$

où $S(\cdot,\cdot,\cdot)$ et $T_i(\cdot,\cdot,\cdot,\cdot)$ sont les mêmes que ceux définis dans (2.5) et (2.9) respectivement. Si on pose

$$U^{(k)} = \tilde{v}^{(k)} - \tilde{v}^{(k-1)}$$

$$P^{(k)} = \tilde{p}^{(k)} - \tilde{p}^{(k-1)} ,$$

$U^{(k)}$ et $P^{(k)}$ satisfont aux

$$
(4.10)\quad \begin{cases} -\nu\,\Delta U^{(k)} + \nabla P^{(k)} = (|\tilde{A}^{(k)}|\tilde{A}^{(k)^{-1}} - |\tilde{A}^{(k-1)}|\tilde{A}^{(k-1)^{-1}})f \\ \qquad\qquad + S(\tilde{A}^{(k)}, \tilde{v}^{(k)}, \nabla\tilde{p}^{(k)}) - S(\tilde{A}^{(k-1)}, \tilde{v}^{(k-1)}, \nabla\tilde{p}^{(k-1)}) \quad \text{dans } \Omega^{(0)} \\ \nabla\cdot U^{(k)} = 0 \quad \text{dans } \Omega^{(0)} \\ U^{(k)} = 0 \quad \text{sur } S_b \\ U_3^{(k)} = 0 \quad \text{sur } \{x^3 = 0\} \\ \partial_i U_3^{(k)} + \partial_3 U_i^{(k)} = T_i(n^{(k)}, e_3, \tilde{A}^{(k)}, \tilde{v}^{(k)}) - T_i(n^{(k-1)}, e_3, \tilde{A}^{(k-1)}, \tilde{v}^{(k-1)}) \\ \qquad\qquad \text{sur } \{x_3 = 0\};\ i = 1, 2\,. \end{cases}
$$

Posons en outre $\bar{\bar{H}}^{(k)} = \bar{\bar{h}}^{(k)} - \bar{\bar{h}}^{(k-1)}$. Il n'est pas difficile d'établir, sous l'hypothèse que les $\bar{\bar{h}}^{(k)}$ se trouvent dans un ensemble borné de $\tilde{H}^s_{(p^*)}(R^2)$, les inégalités

$$
\|(|\tilde{A}^{(k)}|\tilde{A}^{(k)^{-1}} - |\tilde{A}^{(k-1)}|\tilde{A}^{(k-1)^{-1}})f\|_{H^{r-2}(\Omega^{(0)})} \leqslant c\|\bar{\bar{H}}^{(k)}\|_{\tilde{H}^s}\|f\|_{H^{r-2}(\Omega^{(0)})}
$$

$$
\begin{aligned}
\|S(\tilde{A}^{(k)}, \tilde{v}^{(k)}, \nabla\tilde{p}^{(k)}) - S(\tilde{A}^{(k-1)}, \tilde{v}^{(k-1)}, \nabla\tilde{p}^{(k-1)})\|_{H^{r-2}(\Omega^{(0)})} &\leqslant c\{\|\bar{\bar{h}}^{(k)}\|_{\tilde{H}^s}(\|U^{(k)}\|_{H^r(\Omega^{(0)})} \\
&+ \|\nabla P^{(k)}\|_{H^{r-2}(\Omega^{(0)})}) + \|\bar{\bar{H}}^{(k)}\|_{\tilde{H}^s}(\|\tilde{v}^{(k-1)}\|_{H^r(\Omega^{(0)})} + \|\nabla\tilde{p}^{(k-1)}\|_{H^{r-2}(\Omega^{(0)})})\}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\|T_i(n^{(k)}, e_3, \tilde{A}^{(k)}, \tilde{v}^{(k)}) - T_i(n^{(k-1)}, e_3, \tilde{A}^{(k-1)}, \tilde{v}^{(k-1)})\|_{H^{r-3/2}(R^2)} \\
\leqslant c\{\|\bar{\bar{h}}^{(k)}\|_{\tilde{H}^s}\|U^{(k)}\|_{H^r(\Omega^{(0)})} + \|\bar{\bar{H}}^{(k)}\|_{\tilde{H}^s}\|v^{(k-1)}\|_{H^r(\Omega^{(0)})}\}\,.
\end{aligned}
$$

Le théorème 3 appliqué à (4.10) nous fournit donc de l'inégalité

$$
\begin{aligned}
\|U^{(k)}\|_{H^r(\Omega^{(0)})} + \|\nabla P^{(k)}\|_{H^{r-2}(\Omega^{(0)})} &\leqslant c_1\{\|\bar{\bar{h}}^{(k)}\|_{\tilde{H}^s}(\|U^{(k)}\|_{H^r(\Omega^{(0)})} + \|\nabla P^{(k)}\|_{H^{r-2}(\Omega^{(0)})}) \\
&+ \|\bar{\bar{H}}^{(k)}\|_{\tilde{H}^s}(\|\tilde{v}^{(k-1)}\|_{H^r(\Omega^{(0)})} + \|\nabla\tilde{p}^{(k-1)}\|_{H^{r-2}(\Omega^{(0)})} + \|f\|_{H^{r-2}(\Omega^{(0)})})\}
\end{aligned}
$$

et si $\|h^{(k)}\|_{\tilde{H}^s}$ est assez petit de sorte que

$$
c_1\|h^{(k)}\|_{\tilde{H}^s} \leqslant \tfrac{1}{2}\,,
$$

on a

$$
\begin{aligned}
\|U^{(k)}\|_{H^r(\Omega^{(0)})} + \|\nabla P^{(k)}\|_{H^{r-2}(\Omega^{(0)})} &\leqslant 2c_1\|\bar{\bar{H}}^{(k)}\|_{\tilde{H}^s}(\|\tilde{v}^{(k-1)}\|_{H^r(\Omega^{(0)})} \\
&+ \|\nabla\tilde{p}^{(k-1)}\|_{H^{r-2}(\Omega^{(0)})} + \|f\|_{H^{r-2}(\Omega^{(0)})})\,.
\end{aligned}
$$

Or, $\tilde{v}^{(k-1)}$ et $\tilde{p}^{(k-1)}$ satisfont à (4.9) (où on remplace k par $k-1$); donc le

théorème 3 nous donne

$$\|\tilde{v}^{(k-1)}\|_{H^r(\Omega^{(0)})} + \|\nabla\tilde{p}^{(k-1)}\|_{H^{r-2}(\Omega^{(0)})} \leqslant c_1'\|\bar{\bar{h}}^{(k-1)}\|_{\tilde{H}^s}\big(\|\tilde{v}^{(k-1)}\|_{H^r(\Omega^{(0)})} + \|\nabla\tilde{p}^{(k-1)}\|_{H^{r-2}(\Omega^{(0)})}\big) + c_2\big(\|f\|_{H^{r-2}(\Omega^{(0)})} + \|f^*\|_{H^{r-3/2}(R^2)}\big)$$

ou, si

$$c_1'\|\bar{\bar{h}}^{(k-1)}\|_{\tilde{H}^s} \leqslant \tfrac{1}{2}\,,$$

$$\|\tilde{v}^{(k-1)}\|_{H^r(\Omega^{(0)})} + \|\nabla\tilde{p}^{(k-1)}\|_{H^{r-2}(\Omega^{(0)})} \leqslant 2c_2\big(\|f\|_{H^{r-2}(\Omega^{(0)})} + \|f^*\|_{H^{r-3/2}(R^2)}\big)\,; \tag{4.11}$$

on a donc

$$\|U^{(k)}\|_{H^r(\Omega^{(0)})} + \|\nabla P^{(k)}\|_{H^{r-2}(\Omega^{(0)})} \leqslant 2c_1(1+2c_2)\|\bar{\bar{H}}^{(k)}\|_{\tilde{H}^s}\big(\|f\|_{H^{r-2}(\Omega^{(0)})} + \|f^*\|_{H^{r-3/2}(R^2)}\big)\,. \tag{4.12}$$

D'autre part, grâce à la régularité de $\bar{\bar{h}}^{(k)}$, on peut établir les éstimations du type analogue aux précédentes, estimations des deuxièmes membres de (4.10) et de (4.9) dans les normes $\|\cdot\|_{W_q^1(\Omega^{(0)})}$ et $\|\cdot\|_{W_q^{2-1/q}(R^2)}$; donc, en appliquant le théorème 4, on obtient, sous l'hypothèse de la petitesse de $\|\bar{\bar{h}}^{(k)}\|_{\tilde{H}^s}$, l'inégalité

$$\|U^{(k)}\|_{W_q^2(\Omega^{(0)})} + \|\nabla P^{(k)}\|_{W_q^1(\Omega^{(0)})} \leqslant c\|\bar{\bar{H}}^{(k)}\|_{\tilde{H}^s}\big(\|f\|_{W_q^1(\Omega^{(0)})} + \|f^*\|_{W_q^{2-1/q}(R^2)}\big). \tag{4.13}$$

Considérons maintenant $H^{(k+1)} = h^{(k+1)} - h^{(k)}$; en prenant la différence entre les deux équations qui ont défini $h^{(k+1)}$ et $h^{(k)}$, on a

$$\begin{aligned}(g-\gamma\Delta)H^{(k+1)} = {} & P^{(k)} - 2\nu n_i^{(k)} n_j^{(k)} \tilde{a}_{li}^{(k)^{-1}} \left(\partial_l \frac{\tilde{a}_{jm}^{(k)}}{|\tilde{A}^{(k)}|}\right) U_m^{(k)} \\ & - 2\nu\left\{n_i^{(k)} n_j^{(k)} \tilde{a}_{li}^{(k)^{-1}} \left(\partial_l \frac{\tilde{a}_{jm}^{(k)}}{|\tilde{A}^{(k)}|}\right) - n_i^{(k-1)} n_j^{(k-1)} \tilde{a}_{li}^{(k-1)^{-1}} \left(\partial_l \frac{\tilde{a}_{jm}^{(k-1)}}{|\tilde{A}^{(k-1)}|}\right)\right\} \tilde{v}_m^{(k-1)} \\ & - 2\nu n_i^{(k)} n_j^{(k)} \tilde{a}_{li}^{(k)^{-1}} \frac{\tilde{a}_{jm}^{(k)}}{|\tilde{A}^{(k)}|}\, \partial_l U_m^{(k)} - 2\nu\left\{n_i^{(k)} n_j^{(k)} \tilde{a}_{li}^{(k)^{-1}} \frac{\tilde{a}_{jm}^{(k)}}{|\tilde{A}^{(k)}|}\right. \\ & \left. - n_i^{(k-1)} n_j^{(k-1)} \tilde{a}_{lj}^{(k-1)^{-1}} \frac{\tilde{a}_{jm}^{(k-1)}}{|\tilde{A}^{(k-1)}|}\right\} \partial_l \tilde{v}^{(k-1)}\end{aligned} \tag{4.14}$$

(le deuxième membre étant pris sur $\{x_3 = 0\}$), ce qui nous donne, sous l'hypothèse de la petitesse de $\|\bar{\bar{h}}^{(k)}\|_{\tilde{H}^s}$,

$$\|H^{(k+1)}\|_{\tilde{H}^{r+1/2}} \leqslant c\big\{\|P^{(k)}|_{x_3=0}\|_{\tilde{H}^{r-3/2}} + \|U^{(k)}\|_{H^r(\Omega^{(0)})} + \|\bar{\bar{H}}^{(k)}\|_{\tilde{H}^s}\|\tilde{v}^{(k-1)}\|_{H^r(\Omega^{(0)})}\big\}\,.$$

On estime $\|P^{(k)}|_{x_3=0}\|_{\tilde{H}^{r-2/3}}$ par $\|\nabla P^{(k)}\|_{H^{r-2}(\Omega^{(0)})\cap W^1_q(\Omega^{(0)})}$, puis, en substituant (4.11), (4.12), (4.13) dans le deuxième membre de l'inégalité, on obtient

$$\|H^{(k+1)}\|_{\tilde{H}^{r+1/2}} \leqslant c\|\bar{\bar{H}}^{(k)}\|_{\tilde{H}^s}\{\|f\|_{H^{r-2}(\Omega^{(0)})} + \|f\|_{W^1_q(\Omega^{(0)})} + \|f^*\|_{H^{r-3/2}(R^2)} + \|f^*\|_{W^{2-1/q}_q(R^2)}\}. \tag{4.15}$$

Or, comme on a

$$\bar{\bar{H}}^{(k)} = H^{(k)} * \varrho,$$

on a

$$\|\bar{\bar{H}}^{(k)}\|_{\tilde{H}^s} \leqslant c\|H^{(k)}\|_{\tilde{H}^{r+1/2}}$$

et donc

$$\|H^{(k+1)}\|_{\tilde{H}^{r+1/2}} \leqslant c_3\|H^{(k)}\|_{\tilde{H}^{r+1/2}}\|(f, f^*)\| \tag{4.16}$$

avec

$$\|(f, f^*)\| = \|f\|_{H^{r-2}(\Omega^{(0)})\cap W^1_q(\Omega^{(0)})} + \|f^*\|_{H^{r-3/2}(R^2)\cap W^{2-1/q}_q(R^2)}.$$

Avant de conclure la discussion sur la convergence de $h^{(k)}$, rappelons que nous avons supposé la petitesse de $\|\bar{\bar{h}}^{(k)}\|_{\tilde{H}^s}$ dans le raisonnement qui nous conduisait à (4.16). Or, comme

$$\bar{\bar{h}}^{(k)} = \Big(\sum_{m=1}^{k} H^{(m)}\Big) * \varrho,$$

on a, en vertu de (4.16),

$$\|\bar{\bar{h}}^{(k)}\|_{\tilde{H}^s} \leqslant c_4\|h^{(1)}\|_{\tilde{H}^{r+1/2}} \sum_{m=0}^{k-1} \big(c_3\|(f, f^*)\|\big)^m$$

et l'équation qui définit $h^{(1)}$ nous donne

$$\|h^{(1)}\|_{\tilde{H}^{r+1/2}} \leqslant c_5\|(f, f^*, \psi)\|$$

avec

$$\|(f, f^*, \psi)\| = \|(f, f^*)\| + \|\psi\|_{H^{r-3/2}(R^2)}.$$

Donc, si $c_3\|(f, f^*)\| < 1$ et si $c_4c_5\|(f, f^*, \psi)\|\,(1 - c_3\|(f, f^*)\|)^{-1}$ est assez petit, alors la petitesse de $\|\bar{\bar{h}}^{(k)}\|_{\tilde{H}^s}$ supposée dans le raisonnement pour (4.16) est garantie. On conclut donc que, si $\|(f, f^*, \psi)\|$ est assez petite, alors $h^{(k)}$

converge dans l'espace $\tilde{H}^{r+1/2} = \tilde{H}^{r+1/2}_{(q^*)}(R^2)$. On voit aisément que la fonction

$$\bar{\bar{h}} = \left(\sum_{k=1}^{\infty} H^{(k)}\right) * \varrho$$

satisfait aux exigences pour $\bar{\bar{h}}$ dans l'énoncé du théorème 5.

V. – Démonstration du théorème 1.

Posons

$$Y = \left\{ \begin{array}{l} w = (\tilde{F}, \tilde{G});\ \tilde{F} = (\tilde{F}_1, \tilde{F}_2, \tilde{F}_3),\ \tilde{G} = (\tilde{G}_1, \tilde{G}_2, \tilde{G}_3) \\ \qquad \tilde{F} \in H^{r-2}(\Omega^{(0)}) \cap W^1_q(\Omega^{(0)}) \\ \qquad \tilde{G}_1, \tilde{G}_2 \in H^{r-3/2}(R^2) \cap W^{2-1/q}_q(R^2) \\ \qquad \tilde{G}_3 \in H^{r-3/2}(R^2) \end{array} \right\}.$$

D'après le théorème 5, pour chaque $w \in Y$ tel que $\|w\|_Y \leqslant \delta'$, il existe un domaine

$$\Omega = \{x \in R^3;\ b < x_3 < \bar{\bar{h}}\}$$

tel qu'il existe (v, π, h) qui satisfasse aux (4.1)-(4.7) dans Ω avec les seconds membres $F = \tilde{F} \circ \tilde{\vartheta}^{-1}$ à (4.1), $B^{(\bar{\bar{n}}, e_3)^{-1}}(\tilde{G}_1, \tilde{G}_2, 0)$ à (4.5), $\tilde{G}_3$ à (4.6) et tel que

$$\|\bar{\bar{h}}\|_{\tilde{H}^s_{(q^*)}(R^2)} \leqslant \delta$$

où $\tilde{\vartheta}$ et $B^{(\cdot,\cdot)}$ sont les mêmes que ceux définis au § II, $\bar{\bar{n}}$ la normale sur $S_{\bar{\bar{h}}}$. Si on pose

$$\tilde{A} = (\tilde{a}_{ij}) = (\partial_j \tilde{\vartheta}_i)$$

et si on définit

$$\tilde{v} = |\tilde{A}|\tilde{A}^{-1} v \circ \tilde{\vartheta}\,, \qquad \tilde{\pi} = \pi \circ \tilde{\vartheta}\,,$$

alors $\tilde{v}$ et $\tilde{\pi}$ satisfont au système d'égalités obtenu de (4.9) en remplaçant $\tilde{}^{(k)}$ par $\tilde{}$, f par $\tilde{F}$ et f_i^* par $\tilde{G}_i$ $(i = 1, 2)$. D'autre part, h satisfait à

$$(g - \gamma \Delta) h = \tilde{G}_3 - \tilde{\pi} + 2\nu \tilde{a}^{-1}_{ki} \left(\partial_k \left(\frac{\tilde{A}}{|\tilde{A}|} \tilde{v}\right)_j\right) \bar{\bar{n}}_i \bar{\bar{n}}_j$$

$\left(\tilde{\pi},\ \partial_k\left((\tilde{A}/|\tilde{A}|)\tilde{v}\right)_j\right.$ étant prises sur $\left.\{x_3 = 0\}\right)$. Donc, pareillement au paragraphe précédent, les théorèmes 3 et 4 et la méthode connue pour les équa-

tions elliptiques, compte tenu de la petitesse supposée de δ, nous donnent

$$\|z\|_X \leqslant c_6 \|w\|_Y \tag{5.1}$$

où

$$z = (\tilde{v}, \tilde{\pi}, h)$$

$$\|z\|_X = \|\tilde{v}\|_{H^r(\Omega^{(0)})} + \|\nabla\tilde{\pi}\|_{H^{r-2}(\Omega^{(0)})} + \|h\|_{\tilde{H}^{r+1/2}_{(\mathcal{G}^*)}(R^2)}.$$

A chaque $w \in Y_{\delta'} = \{w \in Y;\ \|w\|_Y \leqslant \delta'\}$ étant assigné l'unique $z \in X$ autant qu'on y parvient par l'approximation successive de la démonstration du théorème 5, cette application de $Y_{\delta'}$ dans X sera désignée par Φ: $\Phi(w) = z$.

Définissons d'un autre côté $w = (\tilde{F}, \tilde{G})$ comme fonction de $z = (\tilde{v}, \tilde{\pi}, h)$ conformément aux expressions des deuxièmes membres des (2.5)-(2.9) pour le cas stationnaire: si $z = (\tilde{v}, \tilde{\pi}, h)$ est donné, on pose

$$\begin{cases} \bar{\bar{h}} = h * \varrho \\ v = \dfrac{\tilde{A}}{|\tilde{A}|}\, \tilde{v} \circ \tilde{\vartheta}^{-1} \\ \pi = \pi \circ \tilde{\vartheta}^{-1} \end{cases} \tag{5.2}$$

et, à l'aide de $\bar{\bar{h}}$ et de $\eta = h - \bar{\bar{h}}$, on définit ϑ et A de la même façon que (2.1)-(2.2), puis

$$F = |A|A^{-1} f \circ \vartheta + F^*(v, \eta, \nabla\pi), \qquad G = G(v, \eta, \nabla\bar{\bar{h}})$$

par la même construction que les deuxièmes membres de (2.5) et de (2.9) respectivement et finalement

$$\tilde{F} = F \circ \tilde{\vartheta}, \qquad \tilde{G} = B^{(\bar{\pi}, e_3)} G.$$

Rappelons que nous avons construit $\tilde{\eta}$ par

$$(\tilde{\eta})\hat{}\,(\xi_1, \xi_2, x_3) = \hat{\eta}(\xi_1, \xi_2) \exp\left(-|\xi|(-x_3)\right),$$

ce qui nous permet d'établir

$$\|\tilde{\eta}\|_{H^{r+1}(\Omega^{(0)})} \leqslant c \|\eta\|_{H^{r+1/2}(R^2)}$$

(voir par exemple th. I-4.2 de [6]). Or, comme les éléments de $A - I$ dif-

férents de zéro sont

$$a_{3i} = \frac{x_3 - b}{\bar{\bar{h}} - b}\,\partial_i \eta^* - \frac{\eta^*}{\bar{\bar{h}} - b}\left(\partial_i b + \frac{(\partial_i \bar{\bar{h}} - \partial_i b)(x_3 - b)}{\bar{\bar{h}} - b}\right), \qquad i = 1, 2$$

$$a_{33} - 1 = \frac{1}{\bar{\bar{h}} - b}\left((x_3 - b)\,\partial_3 \eta^* + \eta^*\right)$$

(voir (2.1)-(2.2)) et que $\eta^* = \tilde{\eta} \circ \tilde{\vartheta}^{-1}$, les éléments de $(A - I) \circ \tilde{\vartheta}$ différents de zéro sont

$$a_{3i} \circ \tilde{\vartheta} = \frac{x_3 - b}{-b}\left(\partial_i \tilde{\eta} + \left(\frac{-x_3 \bar{\bar{h}}\,\partial_i b}{-b(\bar{\bar{h}} - b)} - \frac{x_3 - b}{\bar{\bar{h}} - b}\,\partial_i \bar{\bar{h}}\right)\partial_3 \tilde{\eta}\right)$$

$$- \frac{\tilde{\eta}}{\bar{\bar{h}} - b}\left(\partial_i b + \frac{(\partial_i \bar{\bar{h}} - \partial_i b)(x_3 - b)}{-b}\right), \qquad i = 1, 2$$

$$(a_{33} - 1) \circ \tilde{\vartheta} = \frac{1}{\bar{\bar{h}} - b}\left((x_3 - b)\,\partial_3 \tilde{\eta} + \tilde{\eta}\right);$$

on a par conséquent

$$\|(A - I) \circ \tilde{\vartheta}\|_{H^r(\Omega^{(0)})} \leqslant c \|\tilde{\eta}\|_{H^{r+1}(\Omega^{(0)})} \leqslant c' \|\eta\|_{H^{r+1/2}(R^2)}$$

et c et c' ne dépendent pas de $\bar{\bar{h}}$ autant que $\bar{\bar{h}}$ demeure dans un ensemble borné de $\tilde{H}^s_{(a^*)}(R^2)$. Donc, si on pose

$$\tilde{F}^* = F^* \circ \tilde{\vartheta}$$

et si on rappelle l'expression explicite de F^* (voir (2.5)), on a

$$\|\tilde{F}^*\|_{H^{r-2}(\Omega^{(0)})} \leqslant c\left(\|\eta\|_{H^{r+1/2}(R^2)} + \|\tilde{v}\|_{H^r(\Omega^{(0)})}\right)\left(\|\tilde{v}\|_{H^r(\Omega^{(0)})} + \|\nabla \pi\|_{H^{r-2}(\Omega^{(0)})}\right) \tag{5.3}$$

(on se sert constamment du fait connu:

$$\|\varphi\psi\|_{H^\varrho} \leqslant c\|\varphi\|_{H^\sigma}\|\psi\|_{H^\varrho} \quad \text{pour } \sigma > \frac{n}{2},\ \sigma \geqslant \varrho \geqslant 0\Big).$$

D'autre part, en vertu de la relation

$$\|\varphi\psi\|_{L_1} \leqslant \|\varphi\|_{L_2}\|\psi\|_{L_2},$$

on a

$$\|\tilde{F}^*\|_{L_1(\Omega^{(0)})} + \|D\tilde{F}^*\|_{L_1(\Omega^{(0)})} \leqslant c\left(\|\eta\|_{H^{r+1/2}(R^2)} + \|\tilde{v}\|_{H^r(\Omega^{(0)})}\right)\left(\|\tilde{v}\|_{H^r(\Omega^{(0)})} + \|\nabla \pi\|_{H^{r-2}(\Omega^{(0)})}\right);$$

comme $1 < q < 2$, de (5.3) et de l'inégalité précédente résulte

$$\|\tilde{F}^*\|_{W_q^1(\Omega^{(0)})} \leqslant c(\|\eta\|_{H^{r+1/2}(R^2)} + \|\tilde{v}\|_{H^r(\Omega^{(0)})})(\|\tilde{v}\|_{H^r(\Omega^{(0)})} + \|\nabla\pi\|_{H^{r-2}(\Omega^{(0)})}) . \tag{5.4}$$

En ce qui concerne $\tilde{F}^0 = (|A|A^{-1}(f\circ\vartheta))\circ\tilde{\vartheta}$, on a par hypothèse

$$\|f\circ\vartheta\circ\tilde{\vartheta} - f\|_{H^{r-2}(\Omega^{(0)})\cap W_q^1(\Omega^{(0)})} \leqslant c_0\|h\|_{\tilde{H}^{r+1/2}_{(q^*)}(R^2)};$$

comme d'autre part on a

$$|A|A^{-1} - I = \begin{pmatrix} a_{33}-1 & 0 & 0 \\ 0 & a_{33}-1 & 0 \\ -a_{31} & -a_{32} & 0 \end{pmatrix}$$

et donc

$$\|(|A|A^{-1} - I)\circ\tilde{\vartheta}\|_{H^r(\Omega^{(0)})} \leqslant c\|\eta\|_{H^{r+1/2}(R^2)},$$

on a

$$\|\tilde{F}^0\|_{H^{r-2}(\Omega^{(0)})\cap W_q^1(\Omega^{(0)})} \leqslant (1 + c_7\|\eta\|_{H^{r+1/2}(R^2)})(\|f\|_{(0)} + c_0\|h\|_{\tilde{H}^{r+1/2}_{(q^*)}(R^2)}) \tag{5.5}$$

avec

$$\|f\|_{(0)} = \|f\|_{H^{r-2}(\Omega^{(0)})\cap W_q^1(\Omega^{(0)})} .$$

Comme les éléments de $I - B^{(\eta,\bar{\bar{n}})}$ figurant dans l'expression de $G(v, \eta, \nabla\bar{\bar{h}})$ sont de grandeur $\nabla\eta$ et que ceux de $I - B^{(,\bar{\bar{n}}e_3)}$ sont de grandeur $\nabla\bar{\bar{h}}$, des raisonnements analogues nous conduisent à

$$\|\tilde{G}\|_{H^{r-3/2}(R^2)\cap W_q^{2-1/q}(R^2)} \leqslant c(\|\eta\|_{H^{r+1/2}(R^2)} + \|\nabla h\|_{H^{r-1/2}(R^2)}) \cdot (\|\eta\|_{H^{r+1/2}(R^2)} + \|\nabla h\|_{H^{r-1/2}(R^2)} + \|\tilde{v}\|_{H^r(\Omega^{(0)})}). \tag{5.6}$$

En joignant les inégalités (5.3)-(5.6) et en tenant compte du lemme 2.1, on a

$$\|w(\tilde{v}, \tilde{\pi}, h)\|_Y \leqslant c_8(\|\tilde{v}\|_{H^r(\Omega^{(0)})} + \|\nabla\tilde{\pi}\|_{H^{r-2}(\Omega^{(0)})} + \|h\|_{\tilde{H}^{r+1/2}_{(q^*)}(R^2)})^2 + (1 + c_7\|h\|_{\tilde{H}^{r+1/2}_{(q^*)}(R^2)})(\|f\|_{(0)} + c_0\|h\|_{\tilde{H}^{r+1/2}_{(q^*)}(R^2)})$$

ou

$$\|w(z)\|_Y \leqslant a_0\|z\|_X^2 + b_0\|z\|_X + \|f\|_{(0)} \tag{5.7}$$

avec

$$a_0 = a_0(c_0) = c_8 + c_7 c_0$$

$$b_0 = b_0(c_0, \|f\|_{(0)}) = c_0 + c_7\|f\|_{(0)} .$$

Or, si $\|w(z)\|_Y \leqslant \delta'$, $w(z)$ appartient au domaine de Φ; donc, en vertu de (5.7), à condition que $\|f\|_{(0)} < \delta'$, on a

$$w(X_{\delta_1}) \subset \mathrm{Dom}\ \Phi$$

avec

$$X_{\delta_1} = \{z \in X;\ \|z\|_X \leqslant \delta_1\}$$

$$\delta_1 = \frac{1}{2a_0}\{-b_0 + (b_0^2 + 4a_0(\delta' - \|f\|_{(0)}))^{1/2}\} .$$

De (5.1) et de (5.7) résulte maintenant que, pour $z \in X_{\delta_1}$, on a

$$\|\Phi(w(z))\|_X \leqslant c_6 a_0\|z\|_X^2 + c_6 b_0\|z\|_X + c_6\|f\|_{(0)} . \tag{5.8}$$

Supposons que c_0 et $\|f\|_{(0)}$, et donc b_0 aussi, sont assez petits de sorte que

$$1 - c_6 b_0 > 0$$

$$(1 - c_6 b_0)^2 - 4c_6^2 a_0\|f\|_{(0)} > 0$$

$$\delta_1 > \frac{1}{2c_6 a_0}\{1 - c_6 b_0 - ((1 - c_6 b_0)^2 - 4c_6^2 a_0\|f\|_{(0)})^{1/2}\} ;$$

on a alors

$$c_6 a_0\|z\|_X^2 + c_6 b_0\|z\|_X + c_6\|f\|_{(0)} \leqslant \delta''$$

pour tout $z \in X_{\delta''} = \{\|z\|_X \leqslant \delta''\}$, où

$$\delta'' = \min(\delta_1, \delta_2)$$

$$\delta_2 = \frac{1}{2c_6 a_0}\{1 - c_6 b_0 + ((1 - c_6 b_0)^2 - 4c_6^2 a_0\|f\|_{(0)})^{1/2}\} ;$$

donc l'inégalité (5.8) nous donne

$$(\Phi \circ w)(X_{\delta''}) \subset X_{\delta''} . \tag{5.9}$$

Considérons maintenant deux données

$$z^{(1)} = (\tilde{v}^{(1)}, \tilde{\pi}^{(1)}, h^{(1)}),\ z^{(2)} = (\tilde{v}^{(2)}, \tilde{\pi}^{(2)}, h^{(2)})$$

dans X_{δ_1} et la différence

$$\Phi(w(z^{(1)})) - \Phi(w(z^{(2)}))\,.$$

Posons

$$\Phi(w(z^{(k)})) = z'^{(k)} = (\tilde{v}'^{(k)}, \tilde{\pi}'^{(k)}, h'^{(k)})\,, \qquad k = 1, 2$$

$$V' = \tilde{v}'^{(1)} - \tilde{v}'^{(2)}$$

$$\Pi' = \tilde{\pi}'^{(1)} - \tilde{\pi}'^{(2)}$$

$$H' = h'^{(1)} - h'^{(2)};$$

v', Π', H' satisfont alors aux

$$-\nu\,\Delta V' + \nabla\Pi' = |\tilde{A}^{(1)}|\tilde{A}(1)^{-1}\tilde{F}(z^{(1)}) - |\tilde{A}^{(2)}|\tilde{A}^{(2)^{-1}}\tilde{F}(z^{(2)}) + S(A^{(1)}, \tilde{v}'^{(1)}, \nabla\tilde{\pi}'^{(1)})$$
$$- S(A^{(2)}, \tilde{v}'^{(2)}, \nabla\tilde{\pi}'^{(2)}) \qquad \text{dans } \Omega^{(0)}$$

$$\nabla\cdot V' = 0 \qquad \text{dans } \Omega^{(0)}$$

$$V' = 0 \qquad \text{sur } S_b$$

$$V'_3 = 0 \qquad \text{sur } \{x_3 = 0\}$$

$$\partial_i V'_3 + \partial_3 V'_i = \tilde{G}_i(z^{(1)}) - \tilde{G}_i(z^{(2)}) + T_i(\bar{\bar{n}}'^{(1)}, e_3, \tilde{A}^{(1)}, \tilde{v}'^{(1)})$$
$$- T_i(\bar{\bar{n}}'^{(2)}, e_3, \tilde{A}^{(2)}, \tilde{v}'^{(2)})\,, \qquad i = 1, 2 \quad \text{sur} \quad \{x_3 = 0\}$$

$$(g - \gamma\Delta)H' = \tilde{G}_3(z^{(1)}) - \tilde{G}_3(z^{(2)}) - \Pi'$$
$$+ 2\nu\tilde{a}^{(1)^{-1}}_{ki}\left(\partial_k \frac{\tilde{A}^{(1)}}{|\tilde{A}^{(1)}|}\tilde{v}'^{(1)}\right)\bar{\bar{n}}'^{(1)}_i\,\bar{\bar{n}}'^{(1)}_j$$
$$- 2\nu\tilde{a}^{(2)^{-1}}_{ki}\left(\partial_k \frac{\tilde{A}^{(2)}}{|\tilde{A}^{(2)}|}\tilde{v}'^{(2)}\right)\bar{\bar{n}}'^{(2)}_i\,\bar{\bar{n}}'^{(2)}_j \qquad \text{sur } \{x_3 = 0\}$$

où $\tilde{A}^{(k)} = (\tilde{a}^{(k)}_{ij})$ $(k = 1, 2)$ est définie moyennant $\bar{\bar{h}}'^{(k)} = h'^{(k)} * \varrho$ et $\bar{\bar{n}}'^{(k)}$ désigne la normale sur $S_{\bar{\bar{h}}'^{(k)}}$. Si on applique à ce système d'égalités les théorèmes 3 et 4 et la méthode connue pour les équations elliptiques et si on rappelle que $z^{(k)} \in X_{\delta_1}$ et que donc $\|\bar{\bar{h}}'^{(k)}\|_{\tilde{H}^s} \leqslant \delta$ $(k = 1, 2)$, alors, en raisonnant analoguement à l'estimation de (4.12), (4.13), (4.15), on obtient

$$\|V'\|_{H^r(\Omega^{(0)})} + \|\nabla\Pi'\|_{H^{r-2}(\Omega^{(0)})} + \|H'\|_{\tilde{H}^{r+1/2}_{(q^*)}(R^2)} \leqslant c_9\|\tilde{F}(z^{(1)}) - \tilde{F}(z^{(2)})\|_{H^{r-2}(\Omega^{(0)})\cap W^1_q(\Omega^{(0)})}$$
$$+ c_9\|\tilde{G}(z^{(1)}) - \tilde{G}(z^{(2)})\|_{H^{r-3/2}(R^2)\cap W^{2-1/q}_q(R^2)}$$
$$+ c_{10}\|H'\|_{\tilde{H}^{r+1/2}_{(q^*)}(R^2)}\left(\|z'^{(1)}\|_X + \|\tilde{F}(z^{(1)})\|_{H^{r-2}(\Omega^{(0)})\cap W^1_q(\Omega^{(0)})}\right);$$

Sous l'hypothèse de la petitesse de $\|f\|_{(0)}$ et de c_0, choisissons $\delta_3 > 0$ de sorte que, pour tout z tel que $\|z\|_X \leqslant \delta_3$, on ait

$$c_{10}\Big(c_6(a_0\|z\|_X^2 + b_0\|z\|_X + \|f\|_{(0)}) + \|\tilde{F}(z)\|_{H^{r-2}(\Omega^{(0)}) \cap W_q^1(\Omega^{(0)})}\Big) \leqslant \tfrac{1}{2}$$

(voir (5.3)-(5.5)); si $\|z^{(1)}\|_X \leqslant \delta_3$, alors, en vertu des relations (5.1), (5.7), on a

$$\|z'^{(1)} - z'^{(2)}\|_X \leqslant 2c_9\|\tilde{F}(z^{(1)}) - \tilde{F}(z^{(2)})\|_{H^{r-2}(\Omega^{(0)}) \cap W_q^1(\Omega^{(0)})} + 2c_9\|\tilde{G}(z^{(1)}) - \tilde{G}(z^{(2)})\|_{H^{r-3/2}(R^2) \cap W_q^{2-1/q}(R^2)} . \tag{5.10}$$

D'autre part, si on considère, analoguement aux raisonnements de (5.3)-(5.6), l'expression de $\tilde{F}$ et de $\tilde{G}$ fonction de $z^{(k)}$ $(k = 1, 2)$, il n'est pas difficile d'établir

$$\|\tilde{F}(z^{(1)}) - \tilde{F}(z^{(2)})\|_{H^{r-2}(\Omega^{(0)}) \cap W_q^1(\Omega^{(0)})} + \|\tilde{G}(z^{(1)}) - \tilde{G}(z^{(2)})\|_{H^{r-3/2}(R^2) \cap W_q^{2-1/q}(R^2)} \leqslant c_{11}\|z^{(1)} - z^{(2)}\|_X\big(\|z^{(1)}\|_X + \|z^{(2)}\|_X + \|f\|_{(0)}\big) .$$

En substituant cette estimation dans (5.10), on a

$$\|\Phi(w(z^{(1)})) - \Phi(w(z^{(2)}))\|_X \leqslant 2c_9c_{11}\|z^{(1)} - z^{(2)}\|_X\big(\|z^{(1)}\|_X + \|z^{(2)}\|_X + \|f\|_{(0)}\big); \tag{5.11}$$

donc, si, sous l'hypothèse de la petitesse de $\|f\|_{(0)}$, on choisit $\delta_4 > 0$ de sorte que

$$2c_9c_{11}(2\delta_4 + \|f\|_{(0)}) \equiv K < 1$$

et si $\|f\|_{(0)}$ et c_0 sont assez petits de sorte que

$$\min(\delta_3, \delta_4) > \frac{1}{2c_6a_0}\{1 - c_6b_0 - \big((1 - c_6b_0)^2 - 4c_6^2a_0\|f\|_{(0)}\big)^{1/2}\} ,$$

alors l'application $\Phi \circ w$ restreinte à

$$X_{\delta_0} = \{\|z\|_X \leqslant \delta_0 = \min(\delta'', \delta_3, \delta_4)\}$$

satisfait à

$$\|\Phi(w(z^{(1)})) - \Phi(w(z^{(2)}))\|_X \leqslant K\|z^{(1)} - z^{(2)}\|_X$$

$$\Phi(w(X_{\delta_0})) \subset X_{\delta_0};$$

donc d'après le principe des contractions, il existe $z_0 \in X_{\delta_0}$ tel que

$$z_0 = \Phi(w(z_0)) .$$

Si, à partir de $z_0 = (\tilde{v}, \tilde{\pi}, h)$, on définit (v, π, h) par la relation (5.2) et si, à partir de celle-ci, on construit (u, p, h) par la relation (2.4), qui sert cette fois à définir u et p, alors (u, p, h) satisfait aux (1.1)-(1.6). Comme en outre

$$v \in H^r(\Omega^{(\bar{h})}) , \qquad \nabla\pi \in H^{r-2}(\Omega^{(\bar{h})}) \qquad (\Omega^{(\bar{h})} = \{b < x_3 < \bar{\bar{h}}\})$$

et que, comme on le voit aisément (voir le lemme 5.2 de [3]), la définition de u et de p par (2.4) conserve les espaces auxquels v et $\nabla\pi$ appartiennent à petit changement du domaine près, on a

$$u \in H^r(\Omega)$$

$$\nabla p \in H^{s-2}(\Omega) , \qquad p \xrightarrow[|(x_1, x_2)| \to \infty]{} 0 ,$$

$$h \in \tilde{H}^{r+1/2}_{(a^*)}(R^2)$$

où

$$\Omega = \{b < x_3 < h\} ,$$

ce qu'il fallait démontrer.

VI. – Estimation de la solution de l'équation périodique linéarisée.

Tournons-nous maintenant vers le problème du cas périodique et considérons d'abord l'équation linéarisée dans un domaine donné. Soit

$$\Omega = \{x \in R^3 ; b(x_1, x_2) < x_3 < h(x_1, x_2)\}$$

où h, comme au § III, appartient à $C^\infty(R^2)$ et satisfait à

$$\partial^\alpha h \to 0 \quad \text{pour} \quad |(x_1, x_1)| \to \infty , \quad \text{pour tout} \quad |\alpha| \geqslant 0 ;$$

considérons le système d'équations

$$\partial_t u - \nu \Delta u + \nabla p = f \qquad \text{dans } \Omega \tag{6.1}$$

$$\nabla \cdot u = 0 \qquad \text{dans } \Omega \tag{6.2}$$

$$u = 0 \qquad \text{sur} \quad S_b \tag{6.3}$$

$$\partial_t \eta = (1 + |\nabla h|^2)^{1/2} u \cdot n \qquad \text{sur} \quad S_h \tag{6.4}$$

$$p n_i - \nu((\partial_i u_j + \partial_j u_i) n_j) - (g - \gamma \Delta)(\eta + h) n_i = f_i^* \qquad \text{sur} \quad S_h \tag{6.5}$$

et cherchons la solution périodique pour les données périodiques. On a alors le

THÉORÈME 6. *Si*

$$f \in K^{r-2}(\Omega), \quad f^* \in K^{r-3/2}(R^2), \quad \bar{f}^{(0)} \in W_q^1(\Omega),$$
$$\overline{f^*}^{(0)} \in W_q^{2-1/q}(R^2) \qquad (1 < q < 2),$$

alors il existe une solution et une seule (u, p, η) *du système* (6.1)-(6.5) *dans*

$$u \in K^r(\Omega), \quad \nabla p \in K^{r-2}(\Omega), \quad p \to 0 \quad \textit{pour} \quad |(x_1, x_2)| \to \infty,$$
$$\eta \in \tilde{K}^{r+1/2}_{(q^*)}(R^2) \qquad \left(q^* = \frac{2q}{2-q}\right)$$

et on a

$$\|u\|_{K^r(\Omega)} + \|\nabla p\|_{K^{r-2}(\Omega)} + \|\eta\|_{\tilde{H}^{r+1/2}_{(q^*)}(R^2)} \tag{6.6}$$
$$\leqslant c\{\|f\|_{K^{r-2}(\Omega)} + \|f^*\|_{K^{r-3/2}(R^2)} + \|\bar{f}^{(0)}\|_{W_q^1(\Omega)} + \|\overline{f^*}^{(0)}\|_{W_q^{2-1/q}(S)}\}.$$

Les définitions de $^{-(0)}$, K^s, $\tilde{K}^s$, etc. se trouvent au § I.

DÉMONSTRATION. On va le démontrer en utilisant largement des idées de la démonstration du théorème 1 de [3]. Les lemmes dont on se sert dans la démonstration seront prouvés à la fin de ce paragraphe.

Cherchons d'abord la solution $(\bar{u}^{(0)}, \bar{p}^{(0)}, \bar{\eta}^{(0)})$ qui satisfait au système

$$\begin{cases} -\nu \Delta \bar{u}^{(0)} + \nabla \bar{p}^{(0)} = \bar{f}^{(0)} & \text{dans} \quad \Omega \\ \nabla \cdot \bar{u}^{(0)} = 0 & \text{dans} \quad \Omega \\ \bar{u}^{(0)} = 0 & \text{sur} \quad S_b \\ \bar{u}^{(0)} \cdot n = 0 & \text{sur} \quad S_h \\ \bar{p}^{(0)} n_i - \nu((\partial_i \bar{u}_j^{(0)} + \partial_j \bar{u}_i^{(0)}) n_j) - (g - \gamma \Delta)(\bar{\eta}^{(0)} + h) n_i = \overline{f^*}^{(0)} & \text{sur} \quad S_h. \end{cases} \tag{6.7}$$

Les théorèmes 3 et 4 et des considérations sur (4.6) nous montrent qu'il

existe une solution $(\overline{u}^{(0)}, \overline{p}^{(0)}, \overline{\eta}^{(0)})$ et une seule de (6.7) et qu'on a

$$\|\overline{u}^{(0)}\|_{H^r(\Omega)} + \|\nabla\overline{p}^{(0)}\|_{H^{r-2}(\Omega)} + \|\overline{\eta}^{(0)}\|_{\tilde{H}^{r+1/2}_{(a^*)}(R^2)} \leqslant c\{\|\overline{f}^{(0)}\|_{H^{r-2}(\Omega)\cap W^1_q(\Omega)} + \|\overline{f^*}^{(0)}\|_{H^{r-3/2}(R^2)\cap W^{2-1/q}_q(R^2)}\}\,. \tag{6.8}$$

Construisons maintenant u^* satisfaisant à

$$\left.\begin{aligned} &u^*\cdot n = 0 \\ &\{(\partial_i u_j^* + \partial_j u_i^*)\, n_j\}_{\tan} = \{f^* - \overline{f^*}^{(0)}\}_{\tan} \end{aligned}\right\} \text{ sur } S_h\,.$$

Or, d'après la théorie du ch. 4 de [6], on peut construire une w telle que

$$w = \partial_n w = 0\,, \qquad \partial_n^2 w = -\,n\times\{f^* - \overline{f^*}^{(0)}\}_{\tan} \quad \text{sur } S_h$$

$$w = 0 \text{ au voisinage de } S_b$$

$$\|w\|_{K^{r+1}(\Omega)} \leqslant c\|\{f^* - \overline{f^*}^{(0)}\}_{\tan}\|_{K^{r-3/2}(R^2)};$$

si on pose $u^* = \nabla\times w$, alors u^* satisfait, comme on l'a vu au § III, à la condition exigée sur S_h ainsi qu'à (6.2), (6.3).

Maintenant le problème (6.1)-(6.5) est réduit au cas où les données des équations satisfont à

$$\{f^*\}_{\tan} = 0\,, \qquad \overline{f}^{(0)} = \overline{f^*}^{(0)} = 0\,;$$

on peut donc, en formant la série de Fourier, décomposer le système d'équations en

$$ki\overline{u}^{(k)} - \nu\,\Delta\overline{u}^{(k)} + \nabla\overline{p}^{(k)} = \overline{f}^{(k)} \qquad \text{dans } \Omega \tag{6.10}$$

$$\nabla\cdot\overline{u}^{(k)} = 0 \qquad \text{dans } \Omega \tag{6.11}$$

$$\overline{u}^{(k)} = 0 \qquad \text{sur } S_b \tag{6.12}$$

$$ki\overline{\eta}^{(k)} = (1 + |\nabla h|^2)^{1/2}\overline{u}^{(k)}\cdot n \qquad \text{sur } S_h \tag{6.13}$$

$$\{(\partial_i\overline{u}_j^{(k)} + \partial_j\overline{u}_i^{(k)})\, n_j\}_{\tan} = 0 \qquad \text{sur } S_h \tag{6.14}$$

$$\overline{p}^{(k)} - 2\nu(\partial_i\overline{u}_j^{(k)})\, n_i n_j - (g - \gamma\Delta)\overline{\eta}^{(k)} = \overline{f^*}^{(k)}\cdot n \qquad \text{sur } S_h \tag{6.15}$$

où k parcourt $Z\setminus\{0\}$; pour la simplicité, on a ici supposé que $T = 2\pi$.

Considérons le problème (6.10)-(6.15) en fixant $k \in Z \setminus \{0\}$ et cherchons d'abord v^0 tel que

$$
(6.16)\qquad \begin{cases} kiv^0 - \nu P\,\Delta v^0 = P\bar{f}^{(k)} & \text{dans } \Omega \\ \nabla \cdot v^0 = 0 & \text{dans } \Omega \\ v^0 = 0 & \text{sur } S_b \\ v^0 \cdot n = 0 & \text{sur } S_h \\ \{(\partial_i v_j^0 + \partial_j v_i^0) n_j\}_{\tan} = 0 & \text{sur } S_h \end{cases}
$$

où P est la projection de $L_2(\Omega)$ introduite dans la démonstration du théorème 3.

LEMME 6.1. *Le problème* (6.16) *admet une solution* v^0 *et une seule dans* $H^r(\Omega)$ *et on a*

$$
\|v^0\|_{H^r(\Omega)} \leqslant c\{\|\bar{f}^{(k)}\|_{H^{r-2}(\Omega)} + |k|^{(r-2)/2}\|\bar{f}^{(k)}\|_{H^0(\Omega)}\}
$$

$$
|k|\|v^0\|_{H^0(\Omega)} \leqslant c\|\bar{f}^{(k)}\|_{H^0(\Omega)}\,.
$$

Si on pose $\overline{w}^{(k)} = v^0 + v$, le problème est manitenant réduit aux équations suivantes:

$$
(6.17)\qquad kiv - \nu\,\Delta v + \nabla \overline{p}^{(k)} = (I - P)\bar{f}^{(k)} + \nu(I - P)\,\Delta v^0 \qquad \text{dans } \Omega
$$

$$
(6.18)\qquad \nabla \cdot v = 0 \qquad \text{dans } \Omega
$$

$$
(6.19)\qquad v = 0 \qquad \text{sur } S_b
$$

$$
(6.20)\qquad ki\bar{\eta}^{(k)} = (1 + |\nabla h|^2)^{1/2} v \cdot n \qquad \text{sur } S_h
$$

$$
(6.21)\qquad \{(\partial_i v_j + \partial_j v_i) n_j\}_{\tan} = 0 \qquad \text{sur } S_h
$$

$$
(6.22)\qquad \overline{p}^{(k)} - 2\nu(\partial_i v_j) n_i n_j - (g - \gamma\Delta)\bar{\eta}^{(k)} = \overline{f^*}^{(k)} \cdot n + 2\nu(\partial_i v_j^0) n_i n_j \qquad \text{sur } S_h\,.
$$

On introduit alors la projection P' de $L_2(\Omega)$ orthogonale à

$$
\left\{ \begin{array}{c} u \in L_2(\Omega);\ \text{il existe } \varphi \in H^1(\Omega) \text{ telle que } u = \nabla\varphi \\ \text{et que } \varphi = 0 \text{ sur } S_h \end{array} \right\};
$$

P' est un opérateur borné sur $H^s(\Omega)$ $(s \geqslant 0)$ (voir le lemme 3.1 (i) de [2]);

si on applique P' à (6.17), on a

$$kiv - \nu P' \Delta v + \nabla \pi = (P' - P)\bar{f}^{(k)} + \nu(P' - P)\Delta v^0 \tag{6.23}$$

où π est la solution du problème

$$\begin{aligned} \pi &= \bar{p}^{(k)} && \text{sur} \quad S_h \\ \Delta \pi &= 0 && \text{dans} \quad \Omega \\ \partial_n \pi &= 0 && \text{sur} \quad S_b ; \end{aligned}$$

grâce à (6.22) et (6.20), on peut décomposer π en

$$\pi = \psi^1 + \psi^2 + \psi^3$$

avec

$$\begin{aligned} &\psi^1 = 2\nu(\partial_i v_j) n_i n_j && \text{sur} \quad S_h \\ &\psi^2 = (g - \gamma \Delta)\bar{\eta}^{(k)} = -\frac{i}{k}(g - \gamma \Delta)(1 + |\nabla h|^2)^{1/2} v \cdot n && \text{sur} \quad S_h \\ &\psi^3 = \bar{f}^{*(k)} \cdot n + 2\nu(\partial_i v_j^0) n_i n_j && \text{sur} \quad S_h \\ &\Delta \psi^i = 0 && \text{dans} \quad \Omega ; \ i = 1, 2, 3 \\ &\partial_n \psi^i = 0 && \text{sur} \quad S_b ; \ i = 1, 2, 3 ; \end{aligned}$$

on peut donc écrire (6.23) en forme

$$kiv + Av - \frac{i}{k} Bv = f' \tag{6.24}$$

avec

$$\begin{aligned} Av &= -\nu P' \Delta v + \nabla \psi^1 \\ Bv &= \nabla \psi^2 \\ f' &= (P' - P)\bar{f}^{(k)} - \nu(P' - P)\Delta v^0 - \nabla \psi^3 . \end{aligned}$$

On remarque que les opérateurs A, B jouissent des propriétés suivantes: si $v \in P'H^1(\Omega)$, $w \in H^1(\Omega)$, $\{(\partial_i v_j + \partial_j v_i) n_j\}_{\tan} = 0$ sur S_h, $v = w = 0$ sur S_b, alors on a

$$(Av, w)_\Omega = \frac{\nu}{2} \langle v, w \rangle_\Omega - (\psi^1 + \psi^0, \nabla \cdot w)_\Omega \tag{6.25}$$

avec

$$\nabla\psi^0 = \nu(I - P')\,\Delta v$$

et, si en outre $w \in P'H^1(\Omega)$,

$$(Av, w)_\Omega = \frac{\nu}{2}\langle v, w\rangle_\Omega; \tag{6.25 bis}$$

(6.25) résulte des calculs élémentaires (on a défini $\langle\cdot,\cdot\rangle_\Omega$ après (3.8); remarquer que les fonctions dans la présente discussion sont à valeurs complexes); d'autre part, en posant

$$Rv = (1 + |\nabla h|^2)^{1/2} v\cdot n$$

(v étant prise sur S_h), on a, pour $w \in H^1(\Omega)$ telle que $Rw \in H^1(R^2)$ et que $w = 0$ sur S_b et pour v telle que $Rv \in H^1(R^2)$,

$$(Bv, w)_\Omega = \big((Rv, Rw)\big)_{R^2} - (\psi^2, \nabla\cdot w)_\Omega \tag{6.26}$$

avec

$$\big((Rv, Rw)\big)_{R^2} = g(Rv, Rw)_{R^2} + \gamma(\nabla Rv, \nabla Rw)_{R^2}$$

et, si en outre $w \in P'H^1(\Omega)$,

$$(Bv, w)_\Omega = \big((Rv, Rw)\big)_{R^2} \tag{6.26 bis}$$

en s'appuyant sur les relations

$$\int_\Omega \nabla\psi^2\cdot\overline{w}\,dx = \int_{S_h}((g - \gamma\Delta)Rv)\,\overline{w}\cdot n\,dS_h - \int_\Omega \psi(\nabla\cdot\overline{w})\,dx$$

$$dS_h = (1 + |\nabla h|^2)^{1/2}\,dx_1\,dx_2\,.$$

Si on pose

$$a(v, w) = ki(v, w)_\Omega + \frac{\nu}{2}\langle v, w\rangle_\Omega + \frac{i}{k}\big\{\big((Rv, Rw)\big)_{R^2}\big\},$$

on a

$$|a(u, u)| \geqslant c(\|u\|^2_{H^1(\Omega)} + \|Ru\|^2_{H^1(R^2)})\,; \tag{6.27}$$

en effet, comme

$$ki(u, u)_\Omega - \frac{i}{k}\big((Ru, Ru)\big)_{R^2} = ki\|u\|^2_{L_2(R^2)} - \frac{i}{k}\,(g\|Ru\|^2_{L_2(R^2)} + \gamma\|\nabla Ru\|^2_{L_2(R^2)})$$

est purement imaginaire, on a

$$\frac{1}{2}|a(u,u)| \geqslant \frac{\nu}{4}\langle u,u\rangle_\Omega \geqslant c'\|u\|^2_{H^1(\Omega)}$$

(voir (3.9)); d'autre part, on a

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}|a(u,u)| &\geqslant \frac{1}{2\sqrt{2}}\left\{\frac{\nu}{2}\langle u,u\rangle_\Omega + \left|k\|u\|^2_{L_2(\Omega)} - \frac{1}{k}\left(g\|Ru\|^2_{L_2(R^2)} + \gamma\|\nabla Ru\|^2_{L_2(R^2)}\right)\right|\right\}\\ &\geqslant \frac{1}{2\sqrt{2}}\left\{\frac{2c'}{|k|}\left(|k|\|u\|^2_{L_2(\Omega)}\right) + \left|k\|u\|^2_{L_2(\Omega)} - \frac{1}{k}\left(g\|Ru\|^2_{L_2(R^2)} + \gamma\|\nabla Ru\|^2_{L_2(R^2)}\right)\right|\right\}\\ &\geqslant \frac{1}{2\sqrt{2}}\min\left(\frac{2c'}{|k|},1\right)\frac{1}{|k|}\left(g\|Ru\|^2_{L_2(R^2)} + \gamma\|\nabla Ru\|^2_{L_2(R^2)}\right) \geqslant c''\|Ru\|^2_{H^1(R^2)},\end{aligned}$$

d'où (6.27). Donc, en appliquant le lemme de Lax-Milgram à l'espace hilbertien

$$V^{1,1} = \{w;\ w \in P'H^1(\Omega),\ Rw \in H^1(R^2),\ w = 0 \text{ sur } S_b\},$$

on vérifie l'existence de la solution v de (6.24) unique dans le cadre des fonctions de $V^{1,1}$ qui fournissent (6.25 bis) et (6.26 bis). La norme $\|v\|_{H^1(\Omega)}$ est majorée par $\|f'\|_{H^0(\Omega)}$ multipliée par une constante; en effet, le produit scalaire de (6.24) avec v même est

$$ki(v,v)_\Omega + \frac{\nu}{2}\langle v,v\rangle_\Omega - \frac{i}{k}((Rv,Rv))_{R^2} = (f',v)_\Omega; \tag{6.28}$$

la partie réelle de (6.28), jointe à (3.9), nous donne

$$\|v\|_{H^1(\Omega)} \leqslant c\|f'\|_{H^0(\Omega)}. \tag{6.29}$$

Pour nous procurer des estimations de régularité plus élevée, voyons, à titre de préliminaires, des définitions et des lemmes. On définit

$${}^{(0)}H^s(R^2) = \{\varphi \in H^s(R^2);\ \varphi = \partial_1\Phi_1 + \partial_2\Phi_2 \text{ avec } \Phi_1, \Phi_2 \in L_2(R^2)\}$$

$$V^s = \left\{u \in P'H^s(\Omega);\ u = 0 \text{ sur } S_b\ \{(\partial_i u_j + \partial_j u_i)n_j\}_{\tan} = 0 \text{ sur } S_h\right\}$$

$$\Lambda^s\varphi = \{(1+|\xi|)^s\hat{\varphi}(\xi)\}^\vee \qquad \text{pour } \varphi \in H^s(R^2)$$

$$\Delta_j\varphi = \Delta_{j(N)}\varphi = \{-i\xi_j\hat{\zeta}_N(\xi_j)\hat{\varphi}(\xi)\}^\vee = \zeta'_N(x_j) * \varphi(x_1,x_2), \qquad j = 1,2;$$
$$\text{pour } \varphi \in L_2(R^2)$$

où $\{\zeta_N\}_{N=1}^{\infty}$ est une suite régularisante sur R dont nous précisons, outre les propriétés usuellement supposées, des propriétés

$$\zeta_N(r) = N\zeta_1(Nr), \quad \operatorname{supp}\zeta_1 \subset (-1, 1), \quad \zeta_1(r) = \zeta_1(-r).$$

Alors on voit aisément que

$$(\varphi, \Lambda^s\psi)_{R^2} = (\Lambda^s\varphi, \psi)_{R^2} \qquad \text{pour } \varphi, \psi \in H^s(R^2)$$

$$(\varphi, \Delta_i\psi)_{R^2} = -(\Delta_j\varphi, \psi)_{R^2} \qquad \text{pour } \varphi, \psi \in L_2(R^2)$$

$$\partial_k\Lambda^s = \Lambda^s\partial_k, \quad \partial_k\Delta_j = \Delta_j\partial_k \quad k = 1, 2.$$

LEMME 6.2. *Si* $u \in P'H^s$ $(s \geqslant 1)$, *alors on a*

$$\|Ru\|_{{}^{(0)}H^{s-1/2}(R^2)} \leqslant c\|u\|_{H^s(\Omega)}.$$

LEMME 6.3. *L'application* $V^s \ni u \to (P\Delta u, Ru) \in PH^{s-2}(\Omega) \times {}^{(0)}H_{s-1/2}(R^2)$ $(s \geqslant 2)$ *admet l'inverse bornée.*

LEMME 6.4. *On a*

$$\|\Delta_j\varphi\psi - \varphi\Delta_j\psi\|_{L_2(R^2)} \leqslant c(\max|\partial_j\varphi|)\|\psi\|_{L_2(R^2)}$$

$$\|\Delta_j^2\varphi\psi - \varphi\Delta_j^2\psi\|_{L_2(R^2)} \leqslant c\{(\max|\partial_j\varphi|)\|\Delta_j\psi\|_{L_2(R^2)} + (\max|\partial_j^2\varphi|)\|\psi\|_{L_2(R^2)}\}$$

$$\|\Lambda^s\varphi\psi - \varphi\Lambda^s\psi\|_{L_2(R^2)} \leqslant c_{(s)}\Big\{\Big(\min_{\alpha>1}\|\nabla\varphi\|_{H^{s-1+\alpha}(R)^2}\|(1+|x|)^{-\alpha}\|_{L_2(R^2)}\Big)\|\psi\|_{L_2(R^2)} + \Big(\min_{\alpha>1}\|\nabla\varphi\|_{H^\alpha(R^2)}\|(1+|x|)^{-\alpha}\|_{L_2(R^2)}\Big)\|\psi\|_{H^{s-1}(R^2)}\Big\}$$

$(s \geqslant 1)$; *c ne dépend pas de N.*

On va d'abord voir que $Rv \in H^{3/2}(R^2)$ et que $v \in H^2(\Omega)$. Soit $\{\zeta_N^{(2)}\}$, cette fois, une suite régularisante sur R^2 convenablement choisie. S'appuyant sur le lemme 3.2, on peut construire w tel que

$$w\cdot n = (1+|\nabla h|^2)^{-1/2}(\zeta_N^{(2)} * \Lambda(\zeta_N^{(2)} * Rv)) \quad \text{sur} \quad S_h$$

$$w = 0 \quad \text{sur} \quad S_b$$

$$\nabla\cdot w = 0 \quad \text{dans} \quad \Omega$$

$$\|w\|_{H^1(\Omega)} \leqslant c\|(\zeta_N^{(2)} * \Lambda(\zeta_N^{(2)} * Rv))\|_{{}^{(0)}H^{1/2}(R^2)} \leqslant c'\{\|\Lambda^{1/2}(\zeta * Rv)\|_{H^1(R^2)} + \|v\|_{H^1(\Omega)}\};$$

la dernière inégalité résultant du lemme 6.2. Comme $w \in V^{1,1}$, on a

$$ki(v, w)_\Omega + \frac{\nu}{2}\langle v, w\rangle_\Omega - \frac{i}{k}((Rv, Rw))_{R^2} = (f', w)_\Omega . \tag{6.30}$$

Or, en vertu du bon choix de $\zeta_N^{(2)}$ et de la propriété de Λ, on a

$$(Rv, Rw)_{R^2} = (\Lambda^{1/2}(\zeta_N^{(2)} * Rv), \Lambda^{1/2}(\zeta_N^{(2)} * Rv))_{R^2}$$

$$(\nabla Rv, \nabla Rw)_{R^2} = (\nabla\Lambda^{1/2}(\zeta_N^{(2)} * Rv), \nabla\Lambda^{1/2}(\zeta_N^{(2)} * Rv))_{R^2};$$

on tire donc de (6.30) et de la construction de w

$$\|\Lambda^{1/2}(\zeta_N^{(2)} * Rv)\|_{H^1(R^2)} \leqslant c_{(k)}\{\|\Lambda^{1/2}(\zeta_N^{(2)} * Rv)\|_{H^1(R^2)} + \|v\|_{H^1(\Omega)}\}\{\|v\|_{H^1(\Omega)} + \|f'\|_{H^0(\Omega)}\}$$

ou

$$\|\Lambda^{1/2}(\zeta_N^{(2)} * Rv)\|_{H^1(R^2)} \leqslant c'_{(k)}\{\|v\|_{H^1(\Omega)} + \|f'\|_{H^0(\Omega)}\} .$$

Si on fait tendre N vers $+\infty$, on voit que $Rv \in H^{3/2}(R^2)$. Puis le lemme 6.2 nous permet de le renforcer en

$$\|Rv\|_{(0)H^{3/2}(R^2)} < +\infty ;$$

or, comme v satisfait à

$$\nu P\,\Delta v = kiPv \in PH^0(\Omega)$$

(voir (6.17)), le lemme 6.3 nous garantit que

$$\|v\|_{H^2(\Omega)} < +\infty .$$

Pour établir l'estimation plus précise de $\|v\|_{H^2(\Omega)}$, on va considérer le produit scalaire de (6.24) avec w qu'on fabriquera en usant de la transformation du domaine Ω en

$$\bar{\Omega} = \{x \in R^3;\ b(\infty) < x_3 < 0\} , \qquad (b(\infty) = \lim_{|(x_1, x_2)|\to\infty} b(x_1, x_2)) .$$

Conformément à cette transformation du domaine, on définit $\bar{\vartheta} = (\bar{\vartheta}_1, \bar{\vartheta}_2, \bar{\vartheta}_3)$:

$$\bar{\vartheta}_1(x) = x_1 , \qquad \bar{\vartheta}_2(x) = x_2$$

$$\bar{\vartheta}_3(x) = x_3 + h(x_1, w_2)\frac{x_3 - b(\infty)}{-b(\infty)} + (b(x_1, x_2) - b(\infty))\frac{-x_3}{-b(\infty)}$$

de sorte que

$$\bar{\vartheta}(\Omega) = \bar{\Omega}$$

et que

$$(\partial_j \varphi)\circ\bar{\vartheta} = (\partial_j + \Xi_j \partial_3)(\varphi\circ\bar{\vartheta}) , \quad j = 1, 2, 3 \tag{6.31}$$

avec

$$\Xi_j = -\frac{1}{h-b}\{(-x_3)\,\partial_j b + (x_3 - b(\infty))\,\partial_j h\} , \quad j = 1, 2$$

$$\Xi_3 = -\frac{1}{h-b}\{b - b(\infty) - h\} .$$

Considérons maintenant le produit scalaire

$$\begin{cases} ki(v, w)_\Omega + (Av, w)_\Omega - \dfrac{i}{k}(Bv, w)_\Omega = (f', w)_\Omega \\ w = \overline{w}\circ\bar{\vartheta}^{-1} , \quad \overline{w} = \Delta_j^2 \overline{v} , \quad \overline{v} = v\circ\bar{\vartheta} . \end{cases} \tag{6.32}$$

(le symbole $^-$ qui désigne $\cdot\circ\bar{\vartheta}^{-1}$ et celui qui désigne la conjuguée complexe se distinguent par le contexte). Comme on a

$$(v, w)_\Omega = (\Theta\overline{v}, \Delta_j^2\overline{v})_{\bar{\Omega}} = -(\Delta_j v, \Delta_j v)_\Omega + (\Delta_j \Theta\overline{v} - \Theta\Delta_j\overline{v}, \Delta_j\overline{v})_{\bar{\Omega}}$$

où

$$\Delta_j v = (\Delta_j \overline{v})\circ\bar{\vartheta}^{-1} , \quad \Theta = \frac{h-b}{-b(\infty)} ,$$

le lemme 6.4 nous permet d'établir

$$\begin{cases} (v, w)_\Omega = -\|\Delta_j v\|^2_{H^0(\Omega)} + \varepsilon \\ |\varepsilon| \leqslant c_{(h,b)}\|v\|_{H^0(\Omega)}\|\Delta_j v\|_{H^0(\Omega)}; \end{cases} \tag{6.33}$$

$c_{(h,b)}$ désigne, ici et dans ce qui suit, une constante déterminée par h et b, constante qui est suffisamment petite lorsque h et $b - b(\infty)$ sont assez petites dans les espaces intervenant dans le raisonnement et qui ne dépend pas de N lorsqu'il s'agit de $\Delta_j = \Delta_{j(N)}$. Puis on considère $(Av, w)_\Omega$, qui est, grâce à la condition $w = 0$ sur S_b, égal à

$$\frac{\nu}{2}\langle v, w\rangle_\Omega - (\psi^1 + \psi^0, \nabla\cdot w)_\Omega$$

(voir (6.25)). Or, $\langle v, w\rangle_\Omega$ consiste dans les termes

$$\int_\Omega (\partial_k v_1)\overline{(\partial_k w_l)}\,dx = -\int_\Omega (\partial_k \Delta_j v_l)\overline{(\partial_k \Delta_j v_l)}\,dx + \varepsilon_{k,l,(1)}$$

$$\int_\Omega (\partial_k v_l)\overline{(\partial_l w_k)}\,dx = -\int_\Omega (\partial_k \Delta_j v_l)\overline{(\partial_l \Delta_j v_k)}\,dx + \varepsilon_{k,l,(2)},$$

où $\varepsilon_{k,l,(1)}$, $\varepsilon_{k,l,(2)}$ consistent, à leur tour, en des termes du type

$$\int_{\bar\Omega} (\Delta_j \Theta\, \partial_k \bar v_l - \Theta \Delta_j\, \partial_k \bar v_l)\overline{(\partial_k \Delta_j \bar v_l)}\,dx\,;$$

d'après le lemme 6.4 on a

$$\Big|\sum_{k,l,m} \varepsilon_{k,l,(m)}\Big| \leqslant c_{(h,b)} \|v\|_{H^1(\Omega)} \|\Delta_j v\|_{H^1(\Omega)}\,.$$

D'autre part, l'inégalité de Poincaré, compte tenu de

$$\|\nabla \psi^1\|_{L_2(\Omega)} + \|\nabla \psi^0\|_{L_2(\Omega)} \leqslant c\|v\|_{H^2(\Omega)}$$

$$\psi^1 + \psi^0 = 2\nu(\partial_i v_j) n_i n_j \quad \text{sur } S_h\,,$$

implique

$$\|\psi^1 + \psi^0\|_{L_2(\Omega)} \leqslant c\|v\|_{H^2(\Omega)};$$

or, grâce à $\nabla \cdot v = 0$, on a

$$(\nabla \cdot w)\circ\bar\vartheta = -(\Delta_j^2 \Xi_k\, \partial_3 \bar v_k - \Xi_k\, \Delta_j^2 \partial_3 \bar v_k)\,;$$

donc, en vertu du lemme 6.4, on a

$$|(\psi^1 + \psi^0, \nabla \cdot w)_\Omega| \leqslant c_{(h,b)} \|v\|_{H^2(\Omega)} \big(\|v\|_{H^1(\Omega)} + \|\Delta_j v\|_{H^1(\Omega(}\big);$$

donc on a

$$\text{(6.34)} \qquad \begin{cases} (Av, w)_\Omega = -\dfrac{\nu}{2}\langle \Delta_j v, \Delta_j v\rangle_\Omega + \varepsilon \\ |\varepsilon| \leqslant c_{(h,b)} \|v\|_{H^2(\Omega)} \big(\|v\|_{H^1(\Omega)} + \|\Delta_j v\|_{H^1(\Omega)}\big)\,. \end{cases}$$

D'après (6.26) on a

$$(Bv, w)_\Omega = \big((Rv, Rw)\big)_{R^2} - (\psi^2, \nabla \cdot w)_\Omega;$$

comme on a

$$Rv = -(\partial_1 h)\bar{v}(x_1, x_2, 0) - (\partial_2 h)\bar{v}_2(x_1, x_2, 0) + \bar{v}_3(x_1, x_2, 0)$$

$$Rw = -(\partial_1 h)\,\Delta_j^2\bar{v}_1(x_1, x_2, 0) - (\partial_2 h)\,\Delta_j^2\bar{v}_2(x_1, x_2, 0) + \Delta_j^2\bar{v}_3(x_1, x_2, 0)$$

on a

$$(Rv, Rw)_{R^2} = -(R\Delta_j v, R\Delta_j v)_{R^2} + \varepsilon$$

$$|\varepsilon| \leqslant c_{(h)}\|v\|_{H^1(\Omega)}\|\Delta_j v\|_{H^0(\Omega)};$$

tout analoguement on a

$$(\nabla Rv, \nabla Rw)_{R^2} = -(\nabla R\Delta_j v, \nabla R\Delta_j v)_{R^2} + \varepsilon$$

$$|\varepsilon| \leqslant c_{(h)}\|v\|_{H^2(\Omega)}\|\Delta_j v\|_{H^1(\Omega)}.$$

D'autre part, on a

$$\|\psi^2\|_{L_2(\Omega)} \leqslant c\|v\|_{H^2(\Omega)}; \tag{6.35}$$

en effet, si on définit π de sorte que

$$\Delta\pi = \psi^2 \quad \text{dans } \Omega, \qquad \pi = 0 \quad \text{sur } S_h, \qquad \partial_n\pi = 0 \quad \text{sur } S_b,$$

on a

$$\|\pi\|_{H^2(\Omega)} \leqslant c\|\psi^2\|_{L_2(\Omega)}$$

(voir le lemme 2.8 de [2]) et

$$\|\psi^2\|^2_{L_2(\Omega)} = (\Delta\pi, \psi^2)_\Omega = (\partial_n\pi, \psi^2)_{S_h} - (\nabla\pi, \nabla\psi^2)_\Omega = (\partial_n\pi, \psi^2)_{S_h}$$

puisque

$$\Delta\psi^2 = 0, \qquad \pi|_{S_h} = 0, \qquad \partial_n\psi^2|_{S_b} = 0;$$

si on pose

$$z = -\frac{i}{k}\{(g - \gamma(\partial_1^2 + \partial_2^2))\tilde{v}\}\circ\tilde{\vartheta}^{-1}$$

avec $\tilde{v}$ et $\tilde{\vartheta}$ définies respectivement aux § V et § II, on a

$$\nabla\cdot z = 0 \quad \text{dans } \Omega, \qquad z\cdot n = \psi^2 \quad \text{sur } S_h,$$

$$\|z\|_{L_2(\Omega)} \leqslant c\|v\|_{H^2(\Omega)};$$

si on définit en outre une fonction scalaire $\tilde{\pi}'$ telle que

$$\tilde{\pi}' = \partial_n \pi \quad \text{sur } S_h, \qquad \tilde{\pi}' = 0 \quad \text{au voisinage de } S_b$$
$$\|\tilde{\pi}'\|_{H^1(\Omega)} \leqslant c\|\pi\|_{H^2(\Omega)} \leqslant c'\|\psi^2\|_{L_2(\Omega)},$$

alors on a

$$|(\partial_n \pi, \psi^2)_{S_h}| = |(\nabla \tilde{\pi}', z)_\Omega| \leqslant c\|\psi^2\|_{L_2(\Omega)}\|v\|_{H^2(\Omega)},$$

d'où (6.35). Donc, comme on a

$$\|\nabla \cdot w\|_{L_2(\Omega)} \leqslant c_{(h,b)}(\|v\|_{H^1(\Omega)} + \|\Delta_j v\|_{H^1(\Omega)}),$$

on obtient

$$\text{(6.36)} \qquad \begin{cases} (Bv, w)_\Omega = -\big((R\Delta_j v, R\Delta_j v)\big)_{R^2} + \varepsilon \\ |\varepsilon| \leqslant c_{(h,b)}\|v\|_{H^2(\Omega)}(\|v\|_{H^1(\Omega)} + \|\Delta_j v\|_{H^1(\Omega)}). \end{cases}$$

En résumant (6.33), (6.34), (6.36), on a

$$\text{(6.37)} \qquad \begin{cases} ki\|\Delta_j v\|^2_{L_2(\Omega)} + \dfrac{\nu}{2}\langle \Delta_j v, \Delta_j v\rangle_\Omega - \dfrac{i}{k}\big((R\Delta_j v, R\Delta_j v)\big)_{R^2} = -(f', w) + \varepsilon \\ |\varepsilon| \leqslant c_{(h,b)}(\|v\|^2_{H^2(\Omega)} + \|\Delta_j v\|^2_{H^1(\Omega)}). \end{cases}$$

Comme (3.9) est valide même pour $\Delta_j v$ grâce à $\Delta_j v = 0$ sur S_b, la partie réelle de (6.37), compte tenu de la petitesse de $c_{(h,b)}$, nous donne

$$\|\Delta_j v\|^2_{H^1(\Omega)} \leqslant c_{(h,b)}\|v\|^2_{H^2(\Omega)} + c\|f'\|_{H^0(\Omega)}\|\Delta_j v\|_{H^1(\Omega)}$$

et, en faisant tendre N vers $+\infty$, on obtient

$$\text{(6.38)} \qquad \sum_{j=1}^{2} \|(\partial_j \bar{v}) \circ \bar{\vartheta}^{-1}\|_{H^1(\Omega)} \leqslant c_{(h,b)}\|v\|_{H^2(\Omega)} + c\|f'\|_{H^0(\Omega)}.$$

Or, on a les lemmes suivants:

LEMME 6.5. *Si* $v \in V^s$ $(s \geqslant 0)$ *et si*

$$P(ki - \nu\Delta)v = 0,$$

alors on a

$$\|v\|_{H^s(\Omega)} \leqslant c\{\|Rv\|_{(0)H^{s-1/2}(R^2)} + |k|^{s/2}\|v\|_{H^0(\Omega)}\}.$$

LEMME 6.6. *Si* $v \in P'H^2$, *on a alors*

$$\|Rv\|_{(\omega)H^{3/2}(R^2)} \leqslant c\Big\{\sum_{j=1}^{2} \|(\partial_j \bar{v})\circ\bar{\vartheta}^{-1}\|_{H^1(\Omega)} + \|v\|_{H^0(\Omega)}\Big\} + c_{(h,b)}\|v\|_{H^2(\Omega)};$$

si $v \in P'H^{s+1}$ $(s \geqslant 2)$, *on a alors*

$$\|Rv\|_{(\omega)H^{s+1/2}(R^2)} \leqslant c\Big\{\sum_{j=1}^{2} \|(\partial_j \Lambda^{s-1}\bar{v})\circ\bar{\vartheta}^{-1}\|_{H^1(\Omega)} + \|v\|_{H^0(\Omega)}\Big\} + c_{(h,b)}\|v\|_{H^{s+1}(\Omega)}.$$

Alors, (6.38) et les lemmes 6.5, 6.6, compte tenu de la petitesse de $c_{(h,b)}$, impliquent

$$\|v\|_{H^2(\Omega)} \leqslant c\{\|f'\|_{H^0(\Omega)} + |k|\|v\|_{H^0(\Omega)}\}. \tag{6.39}$$

Tournons à (6.28), dont la partie imaginaire nous donne

$$|k|\|v\|^2_{H^0(\Omega)} \leqslant \frac{c}{|k|}\|Rv\|^2_{H^1(R^2)} + \|f'\|_{H^0(\Omega)}\|v\|_{H^0(\Omega)};$$

or, d'après le théorème de trace et la convexité des espaces de Sobolev, on a

$$\|Rv\|_{H^1(R^2)} \leqslant c\|v\|_{H^{3/2}(\Omega)} \leqslant c'\|v\|^{3/4}_{H^2(\Omega)}\|v\|^{1/4}_{H^0(\Omega)}$$

donc

$$|k|\|v\|^2_{H^0(\Omega)} \leqslant \frac{c}{|k|}\|v\|^{3/2}_{H^2(\Omega)}\|v\|^{1/2}_{H^0(\Omega)} + \|f'\|_{H^0(\Omega)}\|v\|_{H^0(\Omega)},$$

qui, joint à (6.42), entraîne

$$|k|\|v\|_{H^0(\Omega)} \leqslant \bar{c}\left\{|k|^{1/2}\|v\|^2_{H^0(\Omega)} + \frac{1}{|k|}\|v\|^{1/2}_{H^0(\Omega)}\|f'\|^{3/2}_{H^0(\Omega)}\right\} + \|f'\|_{H^0(\Omega)}\|v\|_{H^0(\Omega)}$$

ou

$$(|k|\|v\|_{H^0(\Omega)})^2 \leqslant 2\bar{c}\left(|k|^{3/2} + \frac{1}{4}\right)\|v\|^2_{H^0(\Omega)} + \left(\frac{3\bar{c}}{2} + 1\right)\|f'\|^2_{H^0(\Omega)};$$

donc, si $|k| \geqslant 4\bar{c}(1 + 1/4|k|^{3/2})$, on a

$$|k|\|v\|_{H^0(\Omega)} \leqslant c\|f'\|_{H^0(\Omega)} \tag{6.40}$$

avec c ne dépendant pas de k; mais dans le cas contraire, (6.40) résulte de (6.29). Donc, de (6.39) et de (6.40) on tire

$$\|v\|_{H^2(\Omega)} \leqslant c\|f'\|_{H^0(\Omega)}. \tag{6.41}$$

Notons une autre conséquence de (6.40): la partie imaginaire de (6.28) nous donne aussi

$$\|Rv\|^2_{H^1(R^2)} \leqslant c\big(|k|^2\|v\|^2_{H^0(\Omega)} + |k|\|v\|_{H^0(\Omega)}\|f'\|_{H^0(\Omega)}\big)$$

donc, d'après (6.40), on a

$$\|Rv\|_{H^1(R^2)} \leqslant c\|f'\|_{H^0(\Omega)};$$

d'autre part, comme on a

$$(Rv, \varphi)_{R^2} = (v\cdot n, \varphi)_{S_h} = (v, \nabla\varphi)_\Omega$$

pour tout $\varphi \in H^{1/2}(S_h)$ lorsqu'on prolonge φ dans Ω, on a

$$\|Rv\|_{H^{-1/2}(R^2)} \leqslant c\|v\|_{H^0(\Omega)} \geqslant c'\frac{1}{|k|}\|f'\|_{H^0(\Omega)};$$

la convexité des espaces de Sobolev nous donne donc

$$|k|^{2/3}\|Rv\|_{H^0(R^2)} \leqslant c\|f'\|_{H^0(R)};$$

mais pour la citation ultérieure, il suffit de noter

$$|k|^{1/4}\|Rv\|_{H^0(R^2)} \leqslant c\|f'\|_{H^0(\Omega)}\,. \tag{6.42}$$

On se propose maintenant d'établir, sous l'hypothèse de l'appartenance de v à $H^s(\Omega)$ $(s \leqslant r)$,

$$\|v\|_{H^s(\Omega)} \leqslant c\{\|f'\|_{H^{s-2}(\Omega)} + |k|^{(s-2)/2}\|f'\|_{H^0(\Omega)}\} \tag{6.43}$$

et par cela

$$\|Rv\|_{H^{s+1/2}(R^2)} \leqslant c\{|k|\|f'\|_{H^{s-2}(\Omega)} + |k|^{s/2}\|f'\|_{H^0(\Omega)}\}\,. \tag{6.44}$$

Pour démontrer (6.43), considérons le produit scalaire

$$\begin{cases} ki(v, w)_\Omega + (Av, w)_\Omega - \dfrac{i}{k}(Bv, w)_\Omega = (f', w)_\Omega \\ w = (\Lambda^{s-2}\Delta_j^2\Lambda^{s-2}\bar{v})\circ\bar{\vartheta}^{-1}\,. \end{cases}$$

Comme $w = 0$ sur S_b, on a d'après (6.25), (6.26),

$$(Av, w)_\Omega = \langle v, w\rangle_\Omega - (\psi^1 + \psi^0, \nabla\cdot w)_\Omega$$

$$(Bv, w)_\Omega = \big((Rv, Rw)\big)_{R^2} - (\psi^2, \nabla\cdot w)_\Omega;$$

alors on voit aisément que les propriétés de Δ_j et de Λ et le lemme 6.4 nous permettent, compte tenu du fait que $\nabla\cdot v = 0$ dans Ω, d'établir, avec la notation abrégée

$$\Delta_j \Lambda^{s-2} v = (\Delta_j \Lambda^{s-2} \overline{v})\circ\bar{\vartheta}^{-1},$$

$$(v, w)_\Omega = -\|\Delta_j \Lambda^{s-2} v\|^2_{L_2(\Omega)} + \varepsilon_1$$

$$|\varepsilon_1| \leqslant c_{(h,b)} \|v\|_{H^{s-2}(\Omega)} \|\Delta_j \Lambda^{s-2} v\|_{H^0(\Omega)}$$

$$\langle v, \overline{w}\rangle_\Omega = -\langle \Delta_j \Lambda^{s-2} v, \Delta_j \Lambda^{s-2} v\rangle_\Omega + \varepsilon_2$$

$$|\varepsilon_2| \leqslant c_{(h,b)} \|v\|_{H^{s-1}(\Omega)} \|\Delta_j \Lambda^{s-2} v\|_{H^1(\Omega)}$$

$$|(\psi^1 + \psi^0, \nabla\cdot w)_\Omega| \leqslant c_{(h,b)} \|v\|_{H^s(\Omega)} (\|\Delta_j \Lambda^{s-2} v\|_{H^0(\Omega)} + \|v\|_{H^{s-1}(\Omega)})$$

$$\big((Rv, Rw)\big)_{R^2} = -\big((R\Delta_j \Lambda^{s-2} v, R\Delta_j \Lambda^{s-2} v)\big)_{R^2} + \varepsilon_3$$

$$|\varepsilon_3| \leqslant c_{(h,b)} \|v\|_{H^s(\Omega)} \|\Delta_j \Lambda^{s-2} v\|_{H^1(\Omega)}$$

$$|(\psi^2, \nabla\cdot w)_\Omega| \leqslant c_{(h,b)} \|v\|_{H^s(\Omega)} (\|\Delta_j \Lambda^{s-2} v\|_{H^1(\Omega)} + \|v\|_{H^s(\Omega)})$$

$$|(f', w)_\Omega| \leqslant c \|f'\|_{H^{s-2}(\Omega)} \|\Delta_j \Lambda^{s-2} v\|_{H^1(\Omega)};$$

on a donc

$$ki \|\Delta_j \Lambda^{s-2} v\|^2_{H^0(\Omega)} + \frac{\nu}{2} \langle \Delta_j \Lambda^{s-2} v, \Delta_j \Lambda^{s-2} v\rangle_\Omega$$

$$- \frac{i}{k} \big((R\Delta_j \Lambda^{s-2} v, R\Delta_j \Lambda^{s-2} v)\big)_{R^2} = -(f', w)_\Omega + \varepsilon$$

$$|\varepsilon| \leqslant c_{(h,b)} \{\|v\|^2_{H^s(\Omega)} + \|\Delta_j \Lambda^{s-2} v\|^2_{H^1(\Omega)}\},$$

dont la partie réelle, compte tenu de la petitesse de $c_{(h,b)}$ et de la relation (3.9), nous donne

$$\|\Delta_j \Lambda^{s-2} v\|^2_{H^1(\Omega)} \leqslant c \|f'\|^2_{H^{s-2}(\Omega)} + c_{(h,b)} \|v\|^2_{H^s(\Omega)}$$

ou, en faisant tendre N vers $+\infty$,

$$\sum_{j=1}^{2} \|(\partial_j \Lambda^{s-2} \overline{v})\circ\bar{\vartheta}^{-1}\|_{H^1(\Omega)} \leqslant c \|f'\|_{H^{s-2}(\Omega)} + c_{(h,b)} \|v\|_{H^s(\Omega)}; \tag{6.45}$$

alors, encore compte tenu de la petitesse de $c_{(h,b)}$, les lemmes 6.5, 6.6 et les relations (6.40), (6.45) impliquent (6.43).

Pour prouver (6.44), on construit w à l'aide de z choisie de sorte que

$$z\cdot n = (1+|\nabla h|^2)^{-1/2}\Delta_j\Lambda^{s-3/2}Rv \quad \text{sur } S_h$$

$$\nabla\cdot z = 0 \quad \text{dans } \Omega, \qquad z = 0 \quad \text{sur } S_b$$

$$\|z\|_{H^{3/2}(\Omega)} \leqslant c\{\|\Delta_j\Lambda^{s-3/2}Rv\|_{H^1(R^2)} + \|\Lambda^{s-3/2}Rv\|_{L_2(R^2)}\}$$

(voir le lemme 3.2); on pose

$$w = (\Delta_j\Lambda^{s-3/2}(z\circ\vartheta))\circ\vartheta^{-1}$$

et on considère le produit scalaire

$$ki(v, w)_\Omega + (Av, w)_\Omega - \frac{i}{k}(Bv, w)_\Omega = (f', w)_\Omega$$

on voit aisément que les relations (6.25), (6.26), les propriétés de Δ_j et de Λ, le lemme 6.4 et les faits que $w = 0$ sur S_b et que $\nabla\cdot z = 0$ dans Ω, impliquent

$$|(v, w)_\Omega| \leqslant c\|v\|_{H^{s-2}(\Omega)}\|z\|_{H^{3/2}(\Omega)}$$

$$(Av, w)_\Omega = \frac{\nu}{2}\langle v, w\rangle_\Omega - (\psi^1 + \psi^0, \nabla\cdot w)_\Omega$$

$$|\langle v, w\rangle_\Omega| \leqslant c\|v\|_{H^s(\Omega)}\|z\|_{H^{3/2}(\Omega)}$$

$$|(\psi^1 + \psi^0, \nabla\cdot w)_\Omega| \leqslant c\|\psi^1 + \psi^0\|_{H^{s-2}(\Omega)}\|z\|_{H^{3/2}(\Omega)} \leqslant c'\|v\|_{H^{s-1}(\Omega)}\|z\|_{H^{3/2}(\Omega)}$$

$$(Bv, w)_\Omega = ((Rv, Rw))_{R^2} - (\psi^2, \nabla\cdot w)_\Omega$$

$$((Rv, Rw))_{R^2} = -((\Delta_j\Lambda^{s-3/2}Rv, \Delta_j\Lambda^{s-3/2}Rv))_{R^2}$$

$$|(\psi^2, \nabla\cdot w)_\Omega| \leqslant c\|\psi^2\|_{H^{s-2}(\Omega)}\|z\|_{H^{3/2}(\Omega)} \leqslant c'\|v\|_{H^s(\Omega)}\|z\|_{H^{3/2}(\Omega)}\,.$$

On a donc

$$\frac{1}{|k|}\|\Delta_j\Lambda^{s-3/2}Rv\|^2_{H^1(R^2)} \leqslant c\|z\|_{H^{3/2}(R^2)}\{\|v\|_{H^s(\Omega)} + |k|\|v\|_{H^{s-2}(\Omega)} + \|f'\|_{H^{s-2}(\Omega)}\}\,;$$

en tenant compte des relations

$$|k|\|v\|_{H^{s-2}(\Omega)} \leqslant c\|v\|_{H^s(\Omega)}^{(s-2)/2}\left(|k|^{s/2}\|v\|_{H^0(\Omega)}\right)^{2/s} \leqslant c'\{\|v\|_{H^s(\Omega)} + |k|^{s/2}\|v\|_{H^0)\Omega)}\}$$

$$\|z\|_{H^{s/2}(\Omega)A} \leqslant \frac{\varepsilon}{|k|}\left(\|\Delta_j \Lambda^{s-3/2} Rv\|_{H^1(R^2)}^2 + \|Rv\|_{H^{s-3/2}(R^2)}^2\right) + c_{(\varepsilon)}|k|A^2 \quad \text{(pour } A \geqslant 0\text{)},$$

on obtient

$$\|\Delta_j \Lambda^{s-3/2} Rv\|_{H^1(R^2)} \leqslant c|k|\{\|v\|_{H^s(\Omega)} + |k|^{s/2}\|v\|_{H^0(\Omega)} + \|f'\|_{H^{s-2}(\Omega)}\},$$

ce qui, joint à (6.40), (6.43), implique

$$\|\Delta_j \Lambda^{s-3/2} Rv\|_{H^1(R^2)} \leqslant c\{|k|\|f'\|_{H^{s-2}(\Omega)} + |k|^{s/2}\|f'\|_{H^0(\Omega)}\}$$

en faisant tendre N vers $+\infty$, on obitnet (6.44).

Or, d'après le lemme 6.3, la relation (6.44), renforcée par le fait que $\|Rv\|_{(0)H^{s-1}(R^2)} < \infty$, et jointe à la relation $P\Delta v = ikPv \in PH^s(\Omega)$, implique que $v \in H^{s+1}(\Omega)$. On peut donc procéder inductivement sur s de sorte que l'on obtient (6.43), (6.44) pour $s = r$. En joignant ces résultats aux (6.40) et (6.42), on a

$$(6.46)\quad \begin{cases} \|v\|_{H^r(\Omega)} + |k|^{r/2}\|v\|_{H^0(\Omega)} \leqslant c\{\|f'\|_{H^{r-2}(\Omega)} + |k|^{(r-2)/2}\|f'\|_{H^0(\Omega)}\} \\ \|Rv\|_{H^{r+1/2}(R^2)} + |k|^{(r+1/2)/2}\|Rv\|_{H^0(R^2)} \leqslant c|k|\{\|f'\|_{H^{r-2}(\Omega)} + |k|^{(r-2)/2}\|f'\|_{H^0(\Omega)}\}, \end{cases}$$

si on détermine $\bar{\eta}^{(k)}$ et $\bar{p}^{(k)}$ moyennant (6.20), (6.22), (6.17), on voit aisément que

$$(6.47)\quad \|\bar{\eta}^{(k)}\|_{H^{r+1/2}(R^2)} + |k|^{(r+1/2)/2}\|\bar{\eta}^{(k)}\|_{H^0(R^2)} \leqslant c\{\|f'\|_{H^{r-2}(\Omega)} + |k|^{(r-2)/2}\|f'\|_{H^0(\Omega)}\}$$

$$(6.48)\quad \|\nabla\bar{p}^{(k)}\|_{H^{r-2}(\Omega)} + |k|^{(r-2)/2}\|\nabla\bar{p}^{(k)}\|_{H^0(\Omega)}$$
$$\leqslant c\{\|\bar{f}^{(k)}\|_{H^{r-2}(\Omega)} + |k|^{(r-2)/2}\|\bar{f}^{(k)}\|_{H^0(\Omega)} + \|v^0\|_{H^r(\Omega)}$$
$$+ |k|^{(r-2)/2}\|v^0\|_{H^2(\Omega)} + \|f'\|_{H^{r-2}(\Omega)} + |k|^{(r-2)/2}\|f'\|_{H^0(\Omega)}\}.$$

Il est clair que $(v, \bar{\eta}^{(k)}, \bar{p}^{(k)})$ ainsi obtenue est la solution unique du problème (6.17)-(6.22). Nous pouvons maintenant conclure la démonstration du théorème 6 par joindre (6.8), (6.9), lemme 6.1, (6.46), (6.47), (6.48).

Reste à démontrer les lemmes.

DÉMONSTRATION DU LEMME 6.1. En utilisant le lemme de Lax-Milgram et l'existence, l'unicité et l'estimation de la solution du problème (3.8),

(3.2)-(3.5) avec $f^* = 0$ qu'on a prouvées au § III, on vérifie le lemme 6.1 d'une manière analogue au lemme 3.4 de [2] (voir aussi le lemme 3.3 (iii) de [3]).

DÉMONSTRATION DU LEMME 6.2. C'est une conséquence immédiate du lemme 3.1 et du théorème de trace.

DÉMONSTRATION DU LEMME 6.3. Soit (f, ψ^*) une donnée dans $PH^{s-2}(\Omega) \times^{(0)} H^{s-1/2}(R^2)$. D'après le lemme 3.2, il existe π tel que

$$\partial_n \pi = (1 + |\Delta h|^2)^{-1/2} \psi^* \qquad \text{sur } S_h$$

$$\Delta \pi = 0 \quad \text{dans } \Omega, \qquad \partial_n \pi = 0 \quad \text{sur } S_b$$

et que

$$\|\nabla \pi\|_{H^s(\Omega)} \leqslant c \|\psi^*\|_{(0)H^{s-1/2}(R^2)}.$$

Or, comme on l'a vu au § III, on peut construire w tel que

$$\nabla \times w = -\nabla \pi \quad \text{sur } S_b, \qquad n \cdot \nabla \times w = 0 \qquad \text{sur } S_h$$

$$\{(\partial_i (\nabla \times w)_j + \partial_j (\nabla \times w)_i) n_j\}_{\tan} = -2\{(\partial_i \partial_j \pi) n_j\}_{\tan} \qquad \text{sur } S_h$$

$$\|\nabla \times w\|_{H^s(\Omega)} \leqslant c \|\nabla \pi\|_{H^s(\Omega)} \qquad \text{sur } S_h .$$

Si on pose

$$u^{(0)} = u - \nabla \pi - \nabla \times w ,$$

le problème est réduit à celui de (3.8), (3.2)-(3.5) avec $f^* = 0$, dont on a, dans la démonstration du théorème 3, montré l'existence, l'unicité et l'estimation désirée de la solution.

DÉMONSTRATION DU LEMME 6.4. Pour $j = 1$, on a

$$\Delta_1(\varphi\psi) - \varphi \Delta_1 \psi = \int_{-1/N}^{1/N} \zeta_N'(y_1)(\varphi(x_1 - y_1, x_2) - \varphi(x_1, x_2)) \psi(x_1 - y_1, x_2) \, dy_1$$

et

$$|\zeta_N'(y_1)(\varphi(x_1 - y_1, x_2) - \varphi(x_1, x_2))| \leqslant cN^2 |y_1| \max |\partial_1 \varphi| \leqslant cN \max |\partial_1 \varphi|$$

donc

$$|\Delta_1(\varphi\psi) - \varphi\,\Delta_1\psi| \leqslant cN \max|\partial_1\varphi| \int_{-1/N}^{1/N} |\psi(x_1 - y_1, x_2)|\,dy_1 ;$$

il en est de même pour Δ_2; il n'est pas difficile d'obtenir d'ici la première inégalité du lemme. On voit aisément que la deuxième inégalité sera vérifiée d'une manière analogue en s'appuyant sur le fait qu'on a

$$\Delta_1^2(\varphi\psi) - \varphi\,\Delta_1^2\psi = \int_{-1/N}^{1/N}\int_{-1/N}^{1/N} \zeta_N'(z_1)\zeta_N'(y_1)K(x, y_1, z_1)\psi(x_1 - y_1 - z_1, x_2)\,dy\,dz + 2(\Delta_1\varphi\,\Delta_1\psi - \varphi\,\Delta_1^2\psi)$$

$$K(x, y_1, z_1) = \varphi(x_1 - y_1 - z_1, x_2) - \varphi(x_1 - z_1, x_2) - \{\varphi(x_1 - y_1, x_2) - \varphi(x_1, x_2)\}$$

$$|\zeta_N'(z_1)\zeta_N'(y_1)K(x, y_1, z_1)| \leqslant cN^2 \max|\partial_1\varphi| .$$

Pour vérifier la troisième inégalité, on utilise la transofrmation de Fourier et on observe qu'on a

$$\begin{aligned}|(\Lambda^s\varphi\psi - \varphi\Lambda^s\varphi)\hat{}\,(\xi)| &\leqslant \int_{R^2(\xi')} |\hat{\varphi}(\xi')||(1 + |\xi|)^s - (1 + |\xi - \xi'|)^s||\hat{\psi}(\xi - \xi')|\,d\xi' \\ &\leqslant c_{(s)}\int_{R^2(\xi')} |\xi'||\hat{\varphi}(\xi')|\big((1 + |\xi|)^{s-1} + (1 + |\xi - \xi'|)^{s-1}\big)|\hat{\psi}(\xi - \xi')|\,d\xi' \\ &= c_{(s)}\{(\Lambda^{s-1}\Phi')\Psi + \Phi'(\Lambda^{s-1}\Psi)\}\hat{}\,(\xi)\end{aligned}$$

où

$$\Phi'(x) = (|\xi||\hat{\varphi}(\xi)|)\check{}\,, \qquad \Psi(x) = (|\hat{\psi}(\xi)|)\check{}\,;$$

on a d'autre part

$$\max_{x_1, x_2} |\Lambda^{s-1}\Phi'| \leqslant \min_{\alpha > 1} \|\Lambda^{s-1+\alpha}\Phi'\|_{L_2(R^2)} \|(1 + |\xi|)^{-\alpha}\|_{L_2(R^2_{(\xi)})}$$

$$\max_{x_1, x_2} |\Phi'| \leqslant \min_{\alpha > 1} \|\Lambda^{\alpha}\Phi'\|_{L_2(R^2)} \|(1 + |\xi|)^{-\alpha}\|_{L_2(R^2_{(\xi)})}$$

$$\|\Lambda^{\sigma}\Phi'\|_{L_2(R^2)} = \|\nabla\varphi\|_{H^{\sigma}(R^2)}, \qquad \|\Lambda^{\sigma}\Psi\|_{L_2(R^2)} = \|\psi\|_{H^{\sigma}(R^2)} \qquad \text{pour tout } \sigma \geqslant 0 ;$$

de ces relations on tire la troisième inégalité du lemme.

DÉMONSTRATION DU LEMME 6.5. D'après le lemme 6.3, on a

$$\|v\|_{H^s(\Omega)} \leqslant c\{|k|\|v\|_{H^{s-2}(\Omega)} + \|Rv\|_{(0)H^{s-1/2}(R^2)}\};$$

or, en vertu de la convexité des espaces de Sobolev, on a

$$|k|\|v\|_{H^{s-2}(\Omega)} \leqslant c\big(\|v\|_{H^s(\Omega)}\big)^{(s-2)/s}\big(|k|^{s/2}\|v\|_{H^0(\Omega)}\big)^{2/s} \leqslant \varepsilon\|v\|_{H^s(\Omega)} + c_{(\varepsilon)}|k|^{s/2}\|v\|_{H^0(\Omega)},$$

d'où le lemme.

DÉMONSTRATION DU LEMME 6.6. Posons

$$w^{(1)} = (\partial_j \Lambda^{s-1}\bar{v})\circ\bar{\vartheta}^{-1}$$

$$w^{(2,k)} = (\partial_k\,\partial_j \Lambda^{s-1}\bar{v})\circ\bar{\vartheta}^{-1}, \qquad k = 1, 2$$

pour $s = 1$ ou $s \geqslant 2$. Soit $\varphi \in H^{1/2}(S_h)$ quelconque et on suppose qu'elle est prolongée dans Ω de sorte que

$$\|\varphi\|_{H^1(\Omega)} \leqslant c\|\varphi\|_{H^{1/2}(S_h)}$$

avec c ne dépendant pas du choix de φ. On a alors

$$(Rw^{(m)}, \varphi)_{R^2} = (n\cdot w^{(m)}, \varphi)_{S_h} = (\nabla\cdot w^{(m)}, \varphi)_\Omega + (w^{(m)}\,\nabla\varphi)_\Omega$$

où $(m) = (1), (2, 1), (2, 2)$; or, comme $\nabla\cdot v = 0$, on a

$$(\nabla\cdot w^{(1)})\circ\bar{\vartheta} = -(\partial_j \Xi_l)\Lambda^{s-1}\,\partial_3\bar{v}_l + \partial_j(\Xi_l\Lambda^{s-1} - \Lambda^{s-1}\Xi_l)\,\partial_3\bar{v}_l$$

(voir (6.31)), donc d'après le lemme 6.4, on a

$$\|\nabla\cdot w^{(1)}\|_{L_2(\Omega)} \leqslant c_{(h,b)}\|v\|_{H^s(\Omega)}$$

et analoguement

$$\|\nabla\cdot w^{(2,k)}\|_{L_2(\Omega)} \leqslant c_{(h,b)}\|v\|_{H^{s+1}(\Omega)} \qquad (k = 1, 2);$$

en vertu de l'arbitrarité de φ, on a

$$\|Rw^{(1)}\|_{H^{-1/2}(R^2)} + \sum_{k=1}^{2}\|Rw^{(2,k)}\|_{H^{-1/2}(R^2)} \leqslant c\|(\partial_j \Lambda^{s-1}\bar{v})\circ\bar{\vartheta}^{-1}\|_{H^1(\Omega)} + c_{(h,b)}\|v\|_{H^{s+1}(\Omega)}.$$

D'autre part, on a

$$\partial_j \Lambda^{s-1} Rv = \partial_j \Lambda^{s-1} \Big\{ -\sum_{l=1}^{2} (\partial_l h)\bar{v}_l(x_1, x_2, 0) + \bar{v}_3(x_1, x_2, 0) \Big\}$$
$$= Rw^{(1)} - \partial_j \Big\{ \sum_{l=1}^{2} (\Lambda^{s-1}(\partial_l h) - (\partial_l h)\Lambda^{s-1})\bar{v}_l \Big\} - \sum_{l=1}^{2} (\partial_j \partial_l h)\Lambda^{s-1}\bar{v}^l$$

d'où

$$\| \partial_j \Lambda^{s-1} Rv \|_{H^{-1/2}(R^2)} \leqslant \| Rw^{(1)} \|_{H^{-1/2}(R^2)} + c_{(h,b)} \| v \|_{H^{s-1}(\Omega)}$$

et analoguement

$$\| \partial_k \partial_j \Lambda^{s-1} Rv \|_{H^{-1/2}(R^2)} \leqslant \| Rw^{(2,k)} \|_{H^{-1/2}(R^2)} + c_{(h,b)} \| v \|_{H^s(\Omega)} .$$

En adjoignant ces relations et le lemme 3.1, on achève la démonstration.

VII. – Démonstration du théorème 2.

Le résultat du paragraphe précédent, joint aux théorèmes 3, 4, 5, nous permet de prouver le théorème 2 avec les mêmes idées qu'au § V.

Posons, en effet,

$$Y = \left\{ \begin{array}{l} w = (\tilde{F}, \tilde{G});\ \tilde{F} = (\tilde{F}_1, \tilde{F}_2, \tilde{F}_3) \in K^{r-2}(\Omega^{(0)}),\ F^{(0)} \in W_q^1(\Omega^{(0)}) \\ \qquad\qquad \tilde{G} = (\tilde{G}_1, \tilde{G}_2, \tilde{G}_3) \in K^{r-3/2}(R^2) \\ \qquad\qquad \bar{\tilde{G}}_1^{(0)}, \bar{\tilde{G}}_2^{(0)} \in W_q^{2-1/q}(R^2) \end{array} \right\}.$$

Comme on l'a vu au § V, à chaque $w \in Y$ tel que $\| w^{(0)} \|_Y \leqslant \delta'$ $(w^{(0)} = (\bar{\tilde{F}}^{(0)}, \bar{\tilde{G}}^{(0)}))$, Φ associe $z^{(0)} = \Phi(w^{(0)}) = (\bar{v}^{(0)}, \bar{\pi}^{(0)}, \bar{h})$ tel que, dans $\Omega = \{b < x_3 < \bar{\bar{h}} = \bar{h} * \varrho\}$, $(\bar{v}^{(0)} = \bar{\tilde{v}}^{(0)} \circ \tilde{\vartheta}^{-1}$, $\bar{\pi}^{(0)} = \bar{\tilde{\pi}}^{(0)} \circ \tilde{\vartheta}^{-1}$, $\bar{h})$ satisfait aux (4.1)-(4.6) avec les seconds membres $\bar{F}^{(0)} = \bar{\tilde{F}}^{(0)} \circ \tilde{\vartheta}^{-1}$ à (4.1), $B^{(\bar{n}, e_3)^{-1}}(\bar{\tilde{G}}_1^{(0)}, \bar{\tilde{G}}_2^{(0)}, 0)$ à (4.5) et $\tilde{G}_3$ à (4.6), où $\tilde{\vartheta}$ et $B^{(\cdot,\cdot)}$ sont les mêmes que ceux définis au § II, $\bar{n}$ la normale sur $S_{\bar{\bar{h}}}$; on a en outre

$$\| \bar{\bar{h}} \|_{\tilde{H}^s_{(q^*)}(R^2)} \leqslant \delta , \qquad \| z^{(0)} \|_X \leqslant c_7 \| w^{(0)} \|_Y .$$

D'autre part, le domaine Ω étant une fois fixé avec $\bar{\bar{h}}$ assez régulière, le théorème 6 nous fournit la solution (v, π, η) du problème (6.1)-(6.5) avec les seconds membres $F = \tilde{F} \circ \tilde{\vartheta}^{-1}$ à (6.1) et $G = B^{(\bar{n}, e_3)^{-1}} \tilde{G}$ à (6.5). Si on pose

$$\tilde{v} = |\tilde{A}| \tilde{A}^{-1} v \circ \tilde{\vartheta} , \qquad \tilde{\pi} = \pi \circ \tilde{\vartheta} \qquad (\tilde{A} \text{ comme au § V}),$$

alors $\tilde{v}, \tilde{\pi}, \eta$ satisfont aux

$$
(7.1)\qquad \begin{cases} \partial_t \tilde{v} - \nu \Delta \tilde{v} + \nabla \tilde{\pi} = |\tilde{A}|\tilde{A}^{-1}\tilde{F} + S(\tilde{A}, \tilde{v}, \nabla\tilde{\pi}) & \text{dans } \Omega^{(0)} \\ \nabla \cdot \tilde{v} = 0 & \text{dans } \Omega^{(0)} \\ \tilde{v} = 0 & \text{sur } S_b \\ \partial_t \eta = \tilde{v}_3 & \text{sur } \{x_3 = 0\} \\ \partial_i \tilde{v}_3 + \partial_3 \tilde{v}_i = \tilde{G}_i + T_i(\bar{\bar{n}}, e_3, \tilde{A}, \tilde{v}), \quad i = 1, 2, & \text{sur } \{x_3 = 0\} \\ (g - \gamma\Delta)(\eta + \bar{\bar{h}}) = \tilde{G}_3 - \tilde{\pi} + 2\nu \tilde{a}_{ki}^{-1} \left(\partial_k \left(\frac{\tilde{A}}{|\tilde{A}|} \tilde{v} \right)_j \right) \bar{\bar{n}}_j \bar{\bar{n}}_i & \\ & \text{sur } \{x_3 = 0\}. \end{cases}
$$

Comme $\tilde{A}$ ainsi que $\bar{\bar{n}}$ ne dépendent pas du temps, il n'est pas difficile d'estimer les seconds membres de (7.1) dans la norme $K^{r-2}(\Omega^{(0)})$ et $K^{r-3/2}(R^2)$; on a ainsi

$$
\| |\tilde{A}|\tilde{A}^{-1}\tilde{F} \|_{K^{r-2}(\Omega^{(0)})} \leqslant (1 + c\delta) \| \tilde{F} \|_{K^{r-2}(\Omega^{(0)})}
$$

$$
\| S(\tilde{A}, \tilde{v}, \nabla\tilde{\pi}) \|_{K^{r-2}(\Omega^{(0)})} \leqslant c\delta \left(\| \tilde{v} \|_{K^r(\Omega^{(0)})} + \| \nabla\pi \|_{K^{r-2}(\Omega^{(0)})} \right)
$$

$$
\| T_i(n, e_3, \tilde{A}, \tilde{v}) \|_{K^{r-3/2}(R^2)} \leqslant c\delta \| \tilde{v} \|_{K^r(\Omega^{(0)})}
$$

$$
\| \tilde{a}_{ki}^{-1} \left(\partial_k \frac{\tilde{A}}{|\tilde{A}|} \tilde{v} \right)_j \bar{\bar{n}}_i \bar{\bar{n}}_j \|_{K^{r-3/2}(R^2)} \leqslant c\delta \| \tilde{v} \|_{K^r(\Omega^{(0)})};
$$

d'autre part, on a déjà vu l'estimation de leur 0-ième composante de la série de Fourier dans la norme $W_q^1(\Omega^{(0)})$ et $W_q^{2-1/q}(R^3)$ (voir les considérations sur (4.9), (5.1)); donc, le théorème 6 et la méthode connue pour les équations elliptiques appliqués à (7.1) nous donnent

$$
(7.2)\qquad \| (\tilde{v}, \tilde{p}) \|_{X'} + \| \eta \|_{\tilde{K}_{(q^*)'}^{r+1/2}(R^2)} \leqslant c_{12} \Big\{ \| \tilde{F} \|_{K^{r-2}(\Omega^{(0)})} + \| \bar{\bar{F}}^{(0)} \|_{W_q^1(\Omega^{(0)})} + \| \tilde{G} \|_{K^{r-3/2}(R^2)} + \sum_{i=1}^{2} \| \bar{\bar{G}}_i^{(0)} \|_{W_q^{2-1/q}(R^2)} \Big\} = c_{12} \| w \|_Y
$$

où

$$
\| (\tilde{v}, \tilde{p}) \|_{X'} = \| \tilde{v} \|_{K^r(\Omega^{(0)})} + \| \bar{\bar{v}}^{(0)} \|_{W_q^2(\Omega^{(0)})} + \| \nabla\tilde{\pi} \|_{K^{r-2}(\Omega^{(0)})} + \| \nabla\bar{\bar{\pi}}^{(0)} \|_{W_q^1(\Omega^{(0)})}.
$$

Ecrivons maintenant

$$
\Phi(w) = z = (\tilde{v}, \tilde{\pi}, h), \qquad h = \bar{\bar{h}} + \eta.
$$

On définit d'un autre côté $w = (\tilde{F}, \tilde{G})$ comme fonction de $z = (\tilde{v}, \tilde{\pi}, h)$ conformément aux expressions des deuxièmes membres des (2.5), (2.9) pour le cas périodique, de la même manière qu'on l'a fait au § V. En outre, on voit aisément que, grâce à la définition de $\tilde{\eta}$:

$$\tilde{\eta}\hat{}(\xi_1, \xi_2, x_3, t) = \hat{\eta}(\xi_1, \xi_2, t) \exp\left(-|\xi|(-x_3)\right),$$

on a

$$\|\tilde{\eta}\|_{K^r(\Omega^{(0)})} + \|\nabla\tilde{\eta}\|_{K^r(\Omega^{(0)})} \leqslant c\|\eta\|_{K^{r+1/2}(R^2)}$$

et

$$\partial_t\tilde{\eta} = \{(\partial_t\eta)\hat{}(\xi_1, \xi_2, t) \exp\left(-|\xi|(-x_2)\right)\}\check{},$$

ce qui, joint à la relation

$$\partial_t\eta = \tilde{v}_3 \quad \text{sur } \{x_3 = 0\},$$

nous donne

$$\|\partial_t\tilde{\eta}\|_{K^r(\Omega^{(0)})} \leqslant c\|\tilde{v}\|_{K^r(\Omega^{(0)})}.$$

Pour estimer $\tilde{F}$ et $\tilde{G}$ dans $K^{r-2}(\Omega^{(0)})$ et $K^{r-3/2}(\Omega^{(0)})$ respectivement, on se sert du

LEMME 7.1. *Soient* $\varphi \in K^\varrho(R^n)$, $\psi \in K^\sigma(R^n)$, $\varrho > (n+2)/2$, $\varrho \geqslant \sigma \geqslant 0$; *alors*

$$\varphi\psi \in K^\sigma(R^n)$$

et on a

$$\|\varphi\psi\|_{K^\sigma(R^n)} \leqslant c_{(n)}\|\varphi\|_{K^\varrho(R^n)}\|\psi\|_{K^\sigma(R^n)}.$$

Le lemme 7.1 est prouvé analoguement au lemme 5.1 de [3], si on remarque que

$$\overline{\varphi\psi}^{(k)} = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} \bar{\varphi}^{(m)}\bar{\psi}^{(k-m)} = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} \bar{\varphi}^{(k-m)}\bar{\psi}^{(m)}.$$

Il n'est maintenant pas difficile d'étendre au cas périodique les raisonnements qui nous ont conduit à (5.3), (5.5), (5.6) de sorte qu'on a

$$\|\tilde{F}\|_{K^{r-2}(\Omega^{(0)})} \leqslant \left(\|f\|_{K^{r-2}(\Omega^{(0)})} + c_0\|h\|_{\tilde{K}^{r+1/2}_{(q^*)}(R^2)}\right)\left(1 + \|\eta\|_{K^{r+1/2}(R^2)}\right)$$
$$+ c\left(\|\eta\|_{K^{r+1/2}(R^2)} + \|\tilde{v}\|_{K^r(\Omega^{(0)})}\right)\left(\|\tilde{v}\|_{K^r(\Omega^{(0)})} + \|\nabla\pi\|_{K^{r-2}(\Omega^{(0)})}\right)$$

$$\|\tilde{G}\|_{K^{r-3/2}(R^2)} \leqslant c\left(\|\eta\|_{K^{r+1/2}(R^2)} + \|\nabla h\|_{K^{r-1/2}(R^2)}\right)\left(\|\eta\|_{K^{r+1/2}(R^2)} + \|\nabla h\|_{K^{r-1/2}(R^2)} + \|\tilde{v}\|_{K^r(\Omega^{(0)})}\right).$$

On a d'autre part

$$\overline{\varphi\psi}^{(0)} = \sum_{k\in Z} \tilde{\varphi}^{(k)}\tilde{\psi}^{(-k)}$$

et donc

$$\|\overline{\varphi\psi}^{(0)}\|_{W_q^s} \leqslant c\|\overline{\varphi\psi}\|_{W_1^s} + c'\|\overline{\varphi\psi}^{(0)}\|_{H^s} \leqslant c''\Big(\sum_{k\in Z}\tilde{\varphi}^{(k)}\|_{H^s}^2\Big)^{1/2}\Big(\sum_{k\in Z}\|\tilde{\psi}^{(k)}\|\Big)^{1/2}$$

ce qui nous permet d'établir

$$\|\tilde{\tilde{F}}^{(0)}\|_{W_q^1(\Omega^{(0)})} \leqslant c\big(\|f\|_{K^{r-2}(\Omega^{(0)})} + \|\tilde{f}^{(0)}\|_{W_q^1(\Omega^{(0)})} + c_0\|h\|_{\tilde{K}^{r+1/2}_{(q^*)}(R^2)}\big)\big(1 + \|\eta\|_{K^{r+1/2}(R^2)}\big)$$
$$+ c'\big(\|\eta\|_{K^{r+1/2}(R^2)} + \|\tilde{v}\|_{K^r(\Omega^{(0)})}\big)\big(\|\tilde{v}\|_{K^r(\Omega^{(0)})} + \|\nabla\tilde{\pi}\|_{K^{r-2}(\Omega^{(0)})}\big)$$

$$\|\tilde{\tilde{G}}^{(0)}\|_{W_q^{2-1/q}(\Omega^{(0)})} \leqslant c\big(\|\eta\|_{K^{r+1/2}(R^2)} + \|\nabla h\|_{K^{r-1/2}(R^2)}\big)$$
$$\cdot\big(\|\eta\|_{K^{r+1/2}(R^2)} + \|\nabla h\|_{K^{r-1/2}(R^2)} + \|\tilde{v}\|_{K^r(\Omega^{(0)})}\big)\,.$$

En joignant ces inégalités, on obtient

$$\|w(z)\|_Y \leqslant c_{13}\|z\|_X^2 + (1 + c_{14}\|z\|_X)(\|f\|_{(0)} + c_0\|z\|_X) \tag{7.3}$$

où

$$\|z\|_X = \|(\tilde{v}, \tilde{p})\|_{X'} + \|h\|_{\tilde{K}^{r+1/2}_{(q^*)}(R^2)}$$

$$\|f\|_{(0)} = \|f\|_{K^{r-2}(\Omega^{(0)})} + \|\tilde{f}^{(0)}\|_{W_q^1(\Omega^{(0)})}\,.$$

Les inégalités (7.2), (7.3) impliquent

$$\Phi\big(w(X_{\delta''})\big) \subset X_{\delta''} = \{z \in X;\ \|z\|_X \leqslant \delta''\} \tag{7.4}$$

à condition que δ'' ainsi que $\|f\|_{(0)}$ et c_0 soient assez petits (voir la déduction de (5.9)).

D'autre part, si on raisonne pareillement à (5.11) en gardant la méthode d'estimation qu'on vient d'établir pour le cas périodique, on obtient

$$\|\Phi(w(z^{(1)})) - \Phi(w(z^{(2)}))\|_X \leqslant c_{15}\|z^{(1)} - z^{(2)}\|_X(\|z^{(1)}\|_X + \|z^{(2)}\|_X + \|f\|_{(0)}) \tag{7.5}$$

pour $z^{(1)}, z^{(2)} \in X_{\delta^*} = \{\|z\|_X \leqslant \delta^*\}$ avec un assez petit δ^*.

Donc, analoguement à ce qu'on a vu au § V, si $\|f\|^{(0)}$ et c_0 sont assez petits, les relations (7.4), (7.5) impliquent qu'il existe δ_0 tel que $\Phi \circ w$ soit contraction dans $X_{\delta_0} = \{\|z\|_X \leqslant \delta_0\}$ et que donc il existe $z_0 \in X_{\delta_0}$ tel que

$$z_0 = \Phi\big(w(z_0)\big)\,.$$

Si on construit (u, p, h) à partir de $(\tilde{v}, \tilde{\pi}, h)$ (voir (5.2), (2.1)-(2.4)), alors (u, p, h) est solution du problème (1.7)-(1.13) et il est clair que, si on prolonge convenablement u et p au voisinage de $Q = \{(x, t);\ x \in \Omega_t\}$, on a

$$u \in K^r\Big(\bigcup_t \Omega_t\Big)\,, \qquad \nabla p \in K^{r-2}\Big(\bigcup_t \Omega_t\Big)\,, \qquad p \xrightarrow[|(x_1, x_2)|\to\infty]{} 0\,, \qquad h \in \tilde{K}^{r+1/2}_{(a^*)}(R^2)\,,$$

ce qu'il fallait démontrer.

OUVRAGES CITÉS

[1] S. Agmon - A. Douglis - L. Nirenberg, *Estimates near the boundary for solutions of elliptic partial differential equations satisfying general boundary conditions*, Part I, Comm. Pure Appl. Math., **12** (1959); Part II, Comm. Pure Appl. Math., **17** (1964).

[2] J. Th. Beale, *The initial value problem for the Navier-Stokes equations with a free surface*, Comm. Pure Appl. Math., **34** (1981).

[3] J. Th. Beale, *Large-time regularity of viscous surface wave*, Arch. Rat. Mech. Anal., **84** (1984).

[4] L. Cattabriga, *Su un problema al contorno relativo a sistema di equazioni di Stokes*, Rend. Mat. Sem. Univ. Padova, **31** (1961).

[5] O. A. Ladyzhenskaya, *Problèmes mathématiques de la dynamique des fluides visqueux incompressibles*, 2ª éd. en russe, Nauka, Moscou (1969), traduction anglaise sous le titre: *The mathematical theory of viscous incompressible flows*, New York (1969).

[6] J. L. Lions - E. Magenes, *Problèmes aux limites non homogènes et applications*, Dunod, Paris (1968).

[7] B. A. Solonnikov, *Sur les problèmes aux limites généraux pour les systèmes elliptiques au sens de Douglis-Nirenberg* (en russe), 1ª partie, Izvestiya A. N. URSS, série de math., **28** (1964); 2- partie, Troudy Math. Inst. A. N., **92** (1966)

[8] B. A. Solonnikov, *Solubilité d'un problème sur le mouvement d'un fluide visqueux incompressible, borné par une surface libre* (en russe), Izvestiya A. N. URSS, série de math., **41** (1977).

[9] B. A. Solonnikov, *Solubilité d'un problème sur le mouvement bidimensionnel d'un fluide lourd visqueux incompressible muni de la capillarité et occupant partiellement un certain récipient* (en russe), Izvestiya A. N. URSS, série de math., **43** (1979).

[10] B. A. Solonnikov, *Solubilité d'un problème tridimensionnel avec une surface libre pour un système stationnaire de l'équation de Navier-Stokes* (en russe), Zapisky Nauch; Sem. Steklov Inst., **84** (1979).

[11] B. A. Solonnikov - B. E. Chtchadilov, *Sur un problème aux limites pour un système stationnaire de l'équation de Navier-Stokes* (en russe), Troudy Math. Inst. A. N., **125** (1973).

Scuola Normale Superiore
Piazza dei Cavalieri, 7
56100 Pisa