

ANNALI DELLA  
SCUOLA NORMALE SUPERIORE DI PISA  
*Classe di Scienze*

A. BENSOUSSAN

J.-L. LIONS

**Inéquations quasi variationnelles dépendant d'un paramètre**

*Annali della Scuola Normale Superiore di Pisa, Classe di Scienze 4<sup>e</sup> série*, tome 4, n° 2  
(1977), p. 231-255

<[http://www.numdam.org/item?id=ASNSP\\_1977\\_4\\_4\\_2\\_231\\_0](http://www.numdam.org/item?id=ASNSP_1977_4_4_2_231_0)>

© Scuola Normale Superiore, Pisa, 1977, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Annali della Scuola Normale Superiore di Pisa, Classe di Scienze » (<http://www.sns.it/it/edizioni/riviste/annaliscienze/>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme  
Numérisation de documents anciens mathématiques  
<http://www.numdam.org/>

# Inéquations quasi variationnelles dépendant d'un paramètre.

A. BENSOUSSAN (\*) - J-L. LIONS (\*\*)

dédié à Hans Lewy

## Introduction.

Par « *Inéquation Quasi Variationnelle* » — en abrégé I.Q.V. — on entend des problèmes du type suivant: soit  $V$  un espace de Hilbert sur  $\mathbf{R}$ ,  $K(v)$  une famille d'ensembles convexes fermés non vides dépendant de  $v \in V$ ; soit  $a(u, v)$  une forme bilinéaire continue sur  $V$ , coercive (ce qui peut être affaibli dans les applications); on cherche alors  $u$  telle que

$$(1) \quad \begin{cases} u \in K(u), \\ a(u, v - u) \geq (f, v - u), \quad \forall v \in K(u) \end{cases}$$

où  $v \rightarrow (f, v)$  est une forme linéaire continue sur  $V$ .

Ces I.Q.V. ont été introduites dans Bensoussan-Lions [1] pour l'étude de problèmes de *contrôle impulsif*. Si  $K(v) = K$  ne dépend pas de  $v$  on retrouve la notion d'*Inéquation Variationnelle* (I.V.) (cf. Stampacchia [1], Lions-Stampacchia [1]).

Pour le cas où  $a(u, v)$  correspond à un opérateur elliptique du 2-ème ordre, on connaît (Bensoussan-Goursat-Lions [1], L. Tartar [1]) des résultats généraux d'*existence* de solution, un résultat d'*unicité* ayant été donné par Th. Laetsch [1].

On n'a, pour l'instant, que des résultats partiels sur la régularité de la solution (cf. en particulier Hanouzet-Joly [1]) <sup>(1)</sup> et, semble-t-il, aucun résultat du type de ceux de Lewy-Stampacchia [1], Kinderlehrer [1] sur la

(\*) Université Paris Dauphine.

(\*\*) Collège de France.

<sup>(1)</sup> Pour la régularité dans le cas des I.V. cf. Brézis-Stampacchia [1], Brézis [1].  
Pervenuto alla Redazione il 1° Giugno 1976.

*régularité de la surface libre liée aux I.Q.V.* (les I.Q.V. correspondent en effet, dans le cas des problèmes de contrôle impulsif, à des problèmes à frontière libre et par ailleurs Baiocchi [1] a montré que certains problèmes à frontière libre de l'hydraulique peuvent se transformer en I.Q.V.; cf. aussi un problème de la physique des plasmas se ramenant à une I.Q.V. dans J. Mossino [1]).

Nous abordons ici les problèmes suivants:

1) supposant que l'on ait une famille de formes bilinéaires  $a(\lambda; u, v)$  dépendant continûment (dans un sens convenable) du paramètre  $\lambda$ , et  $u(\lambda)$  désignant la solution de l'I.Q.V. correspondante,  $u(\lambda)$  dépend-elle continûment de  $\lambda$ ?

Nous donnons au n. 1 une réponse positive dans le cas d'I.Q.V. correspondant à des problèmes de contrôle impulsif (la démonstration ainsi obtenue est donc *indirecte*) et au n. 2 nous donnons, pour un système particulier, une autre réponse positive, dans un problème où l'on a des résultats de régularité;

2) nous considérons ensuite une famille d'opérateurs  $A^\varepsilon$  (ou  $A^\lambda$ , si  $\lambda = \varepsilon$ ) convergents en un sens très faible (la  $G$ -convergence; cf. de Giorgi-Spagnolo [1], Spagnolo [1], Sbordone [1]) vers  $\mathcal{A}$  et nous montrons au n. 3 pour le même système que celui considéré au n. 2, que la solution de l'I.Q.V. relative à  $A^\varepsilon$  converge vers la solution relative à  $\mathcal{A}$ . Pour le cas d'I.V. un phénomène analogue avait été observé par Bensoussan-Lions-Papanicolaou [1] [2], Boccardo et Capuzzo-Dolcetta [1], Boccardo-Marcellini [1], Attouch et Konishi [1], Murat [1] et, pour d'autres propriétés dans ces directions, L. Carbone [1] ainsi que des résultats (non publiés) de L. Tartar. Nous terminons par un problème général ouvert dans ces directions.

On peut donner, par l'usage des I.Q.V. d'évolution (cf. Bensoussan-Lions [2], [3], [4], Mignot-Puel [1]) des extensions des résultats qui suivent à des I.Q.V. d'évolution avec paramètre. On n'explicité pas cela ici — cf. Bensoussan-Lions [5].

## 1. — I.Q.V. du contrôle impulsif.

### 1.1. Hypothèses. Notations. Énoncés des résultats.

Soit  $\mathcal{O}$  un ouvert borné de  $R^n$ , de frontière  $\Gamma$  régulière. On se donne des fonctions  $g_\lambda: R^n \rightarrow R^n$ ,  $\sigma_\lambda: R^n \rightarrow \mathcal{L}(R^n; R^n)$  où  $\lambda \in [0, 1]$ , vérifiant:

$$(1.1) \quad |g_\lambda(x) - g_\lambda(x')| + |\sigma_\lambda(x) - \sigma_\lambda(x')| \stackrel{(1)}{\leq} K|x - x'|,$$

(1) La norme de  $\sigma_\lambda$  est  $\text{tr } \sigma_\lambda \sigma_\lambda^*$ , où  $\text{tr} = \text{trace}$ .

$$(1.2) \quad |g_\lambda(x)| + |\sigma_\lambda(x)| \leq K_0 \text{ (}^1\text{)},$$

$$(1.3) \quad \begin{cases} \lambda \rightarrow g_\lambda(x) \text{ (resp. } \sigma_\lambda(x)) \text{ est continue de } [0, 1] \text{ dans} \\ C^0(\mathbf{R}^n; \mathbf{R}^n) \text{ (resp. } C^0(\mathbf{R}^n; \mathfrak{L}(\mathbf{R}^n; \mathbf{R}^n))). \end{cases}$$

On note

$$(1.4) \quad a_\lambda(x) = \frac{1}{2} \sigma_\lambda \sigma_\lambda^*(x); \quad a_\lambda = a_{ij}^\lambda$$

et on suppose que l'on a

$$(1.5) \quad \sum_{ij=1}^n a_{ij}^\lambda(x) \xi_i \xi_j \geq \beta \sum_{i=1}^n \xi_i^2, \quad \forall \xi_1, \dots, \xi_n \in \mathbf{R}, \beta > 0.$$

On se donne aussi

$$(1.6) \quad f \in C^0(\mathbf{R}^n), \quad f \geq 0.$$

Soit  $k > 0, \alpha > 0$  et  $c(\xi): \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}$  vérifiant

$$(1.7) \quad \begin{cases} c(\xi) \rightarrow +\infty \text{ lorsque } |\xi| \rightarrow +\infty; c \text{ continue } \geq 0, \\ c(\xi_1 + \xi_2) \leq c(\xi_1) + c(\xi_2) \text{ si } \xi_1, \xi_2 \geq 0; \\ c(o) = 0; \quad c(\xi_1) \leq c(\xi_2) \text{ si } \xi_1 \leq \xi_2 \text{ et } \xi_1 \geq 0. \end{cases}$$

On définit maintenant un problème de contrôle impulsif. Tout d'abord à  $g_\lambda, \sigma_\lambda$  est associée une équation différentielle stochastique

$$(1.8) \quad \begin{cases} dy_\lambda = g_\lambda(y_\lambda) dt + \sigma_\lambda(y_\lambda) dw, \\ y_\lambda(0) = x \end{cases}$$

où  $w(t)$  est un processus de Wiener dans  $\mathbf{R}^n$ , normalisé, construit sur un espace de probabilité  $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ . On se donne une famille  $\mathcal{F}^t$  croissante de sous  $\sigma$ -algèbres de  $\mathcal{A}$ , continue à droite pour laquelle  $w(t)$  est une  $\mathcal{F}^t$  martingale.

Un contrôle impulsif est un ensemble

$$(1.9) \quad \mathcal{U} = \{\theta^1, \xi^1; \theta^2, \xi^2; \dots; \theta^n, \xi^n; \dots\}$$

où les  $\theta^i$  forment une suite croissante de temps d'arrêt de  $\mathcal{F}^t$  telle que

(<sup>1</sup>) Seules les valeurs sur  $\mathcal{O}$  interviendront, de sorte que (1.2) n'est pas restrictif.

$\theta^i \rightarrow +\infty$ , lorsque  $i \rightarrow +\infty$ , et où

$$(1.10) \quad \xi^i \text{ est } \mathcal{F}^{\theta^i} \text{ mesurable, } \xi^i \geq 0.$$

A tout contrôle  $\mathcal{U}$  correspond la trajectoire  $y_\lambda = y_{x\lambda}(t)$

$$(1.11) \quad \begin{cases} dy_\lambda = g_\lambda(y_\lambda) dt + \sigma_\lambda(y_\lambda) dw + \sum_i \xi_i \delta(t - \theta_i) dt \\ y_\lambda(0) = x. \end{cases}$$

On note  $\tau_\lambda = \tau_{x\lambda}$  le temps de sortie de  $y_\lambda(t)$  de l'ouvert  $\mathcal{O}$ . On pose

$$(1.12) \quad J_x^\lambda(\mathcal{U}) = E \left( \int_0^{\tau_\lambda} \exp[-\alpha t] f(y_\lambda(t)) dt + \sum_i (k + c(\xi_i)) \exp[-\alpha \theta_i] \right)$$

et

$$(1.13) \quad u_\lambda(x) = \text{Inf}_{\mathcal{U}} J_x^\lambda(\mathcal{U}).$$

On rappelle le résultat suivant (Bensoussan-Lions [4], [5]):

$$(1.14) \quad \begin{cases} u_\lambda \text{ appartient à } C_0(\mathcal{O}) \cap H_0^1(\mathcal{O}) \text{ et est la solution maximum de l'I.Q.V.} \\ u_\lambda \leq M(u_\lambda) p \cdot p, \\ a_\lambda(u_\lambda, v - u_\lambda) \geq (f, v - u_\lambda), \quad \forall v \in H_0^1, v \leq M u_\lambda p \cdot p, \end{cases}$$

avec les notations suivantes:

$$(1.15) \quad M\varphi(x) = \text{Inf}_{\substack{x+\xi \in \mathcal{O} \\ \xi \geq 0}} [\varphi(x + \xi) + c(\xi)],$$

$$(1.16) \quad a_\lambda(u, v) = \sum_{ij} \int_{\mathcal{O}} a_{ij}^\lambda(x) \frac{\partial u}{\partial x_j} \frac{\partial v}{\partial x_i} dx + \sum_i \int_{\mathcal{O}} a_i^\lambda(x) \frac{\partial u}{\partial x_i} v dx + \alpha \int_{\mathcal{O}} uv dx$$

où l'on a posé

$$(1.17) \quad a_i^\lambda(x) = -g_{\lambda,i}(x) + \sum_j \frac{\partial a_{i,j}^\lambda}{\partial x_j}.$$

Notre but est de démontrer le

**THÉORÈME 1.1.** *Sous les hypothèses (1.1), (1.2), (1.3), (1.5), (1.6), (1.7), on a*

$$(1.18) \quad \lambda \rightarrow u_\lambda \text{ est continue de } [0, 1] \rightarrow C^0(\bar{\mathcal{O}}).$$

1.2. *Démonstration du Théorème 1.1.*

Nous allons utiliser la formule de représentation (1.13).

Soit  $T > 0$ , qui sera choisi ultérieurement et  $\delta > 0$ . Soit

$$(1.19) \quad \mathcal{O}_\delta = \{ \xi \in \mathcal{O} \mid d(\xi, \partial\mathcal{O}) > \delta \} .$$

On pose

$$(1.20) \quad \begin{cases} A_\lambda^\delta = A_{x\lambda}^\delta = \inf \{ s \geq 0 \mid y_\lambda(s - 0) \notin \mathcal{O}_\delta \} \\ \tau_\lambda = \tau_{x\lambda} = \inf \{ s \geq 0 \mid y_\lambda(s) \notin \mathcal{O} \} \\ \tau_\lambda^\delta = \tau_{x\lambda}^\delta = \inf \{ s \geq 0 \mid y_\lambda(s) \notin \mathcal{O}_\delta \} . \end{cases}$$

Soit  $\mathcal{U}_{x\lambda}^{\delta, T}$  l'ensemble des contrôles impulsionnels vérifiant les propriétés suivantes:

$$(1.21) \quad 0 \leq \theta_i < \theta_{i+1} \quad \text{si } \theta_i < +\infty ,$$

$$(1.22) \quad \text{Max } \{ i \mid \theta_i < T \} < +\infty ; \quad \theta_i \geq T \Rightarrow \theta_i = +\infty ,$$

$$(1.23) \quad \theta_i \leq \tau_\lambda^\delta = A_\lambda^\delta \quad \text{si } \theta_i < +\infty ,$$

$$(1.24) \quad y_\lambda(\theta_i - 0) \in \mathcal{O}_\delta \quad \text{si } \theta_i < +\infty ,$$

$$(1.25) \quad y_\lambda(\tau_\lambda^\delta) \in \partial\mathcal{O}_\lambda^\delta .$$

Soit  $\psi_\lambda$  la solution de

$$(1.26) \quad \begin{cases} A_\lambda \psi_\lambda = 1, \quad \psi_\lambda|_\Gamma = 0, \\ \text{avec} \\ A_\lambda = - \sum_{ij} \frac{\partial}{\partial x_i} a_{ij}^\lambda \frac{\partial}{\partial x_j} + \sum_i a_i^\lambda \frac{\partial}{\partial x_i}, \end{cases}$$

qui possède une solution régulière vérifiant en particulier

$$(1.27) \quad \begin{cases} |\psi_\lambda(\xi) - \psi_\lambda(\xi')| \leq C |\xi - \xi'|^\gamma, \quad \gamma \in ]0, 1[ \\ \text{où les constantes } C \text{ et } \gamma \text{ ne dépendent pas de } \lambda . \end{cases}$$

On va démontrer que l'on a

$$(1.28) \quad \left| \inf_{\mathcal{U} \in \mathcal{U}_{x\lambda}^{\delta, T}} J_x^\lambda(\mathcal{U}) - u_\lambda(x) \right| \leq C(\delta^\gamma + \exp[-\alpha T])$$

où la constante  $C$  ne dépend ni de  $x$ , ni de  $\lambda$ , ni de  $\delta$ , ni de  $T$ . Naturellement, on a

$$(1.29) \quad \inf_{\mathcal{U} \in \mathcal{U}_{x\lambda}^{\delta, T}} J_x^\lambda(\mathcal{U}) \geq u_\lambda(x).$$

Soit  $\mathcal{U}$  un contrôle impulsif quelconque; on va construire un contrôle

$$\tilde{\mathcal{U}} \in \mathcal{U}_{x\lambda}^{\delta, T}$$

tel que

$$(1.30) \quad J_x^\lambda(\tilde{\mathcal{U}}) \leq J_x^\lambda(\mathcal{U}) + C(\delta^\gamma + \exp[-\alpha T])$$

d'où l'on déduira aisément (1.28).

On peut sans perte de généralité supposer que le contrôle impulsif satisfait (1.21).

En effet, si plusieurs impulsions ont lieu en même temps, on les remplace par une seule impulsion dont l'intensité est la somme des intensités (c'est loisible). La trajectoire est inchangée. On obtient un contrôle impulsif dont le coût est plus bas, grâce à la sous linéarité de  $c$  et au fait que l'on ne paye qu'un seul coût fixe.

Soit

$$N = \text{Max} \{i | \theta_i < T\}.$$

Si sur un ensemble de mesure non nulle  $N = +\infty$ , alors

$$\int_0^{\tau_\lambda} \exp[-\alpha t] f(y_\lambda(t)) dt + \sum_i (k + c(\xi_i)) \exp[-\alpha \theta_i] \geq Nk \exp[-\alpha T] = \infty$$

et donc  $J_x^\lambda(\mathcal{U}) = +\infty$ . On peut donc encore sans perte de généralité supposer que la première partie de (1.22) est vraie.

A partir de  $\mathcal{U}$ , on construit  $\tilde{\mathcal{U}}$  de la manière suivante <sup>(1)</sup>:

$$(1.31) \quad \tilde{\theta}_i = \theta_i, \quad \tilde{\xi}_i = \xi_i \quad \text{si } \theta_i < \Lambda^\delta \wedge T$$

$$(1.32) \quad \tilde{\theta}_i = +\infty \text{ }^{(2)}, \quad \text{si } y(\theta_i - 0) \notin \mathcal{O}_\delta \quad \text{et } \theta_i = \Lambda^\delta < T$$

$$(1.33) \quad \tilde{\theta}_i = +\infty, \quad \text{si } \theta_i \geq T, \quad \text{ou } \theta_i > \Lambda^\delta,$$

$$(1.34) \quad \begin{cases} \tilde{\theta}_i = \theta_i, & \tilde{\xi}_i = \lambda_i \xi_i, & \text{si } \theta_i = \Lambda^\delta \text{ et } \Lambda^\delta < T, \\ y(\theta_i - 0) \in \mathcal{O}_\delta, & \text{et } \lambda_i \in [0, 1] \text{ est tel que } y(\theta_i - 0) + \lambda_i \xi_i \in \partial \mathcal{O}_\delta. \end{cases}$$

<sup>(1)</sup> On omet d'écrire l'indice  $\lambda$ .

<sup>(2)</sup> Lorsque  $\tilde{\theta}_i = +\infty$ ,  $\tilde{\xi}_i$  a une valeur arbitraire.

Dans le dernier cas, on notera que si  $y(\theta_i - 0) \in \mathcal{O}_\delta$  et  $\theta_i = A^\sigma$ , alors il y a un saut en  $\theta_i$  qui fait sortir le processus de  $\mathcal{O}_\delta$ , donc il existe  $\lambda_i$  vérifiant (1.34). On définit bien par (1.31), ..., (1.34) un nouveau contrôle impulsionnel admissible. Remarquons que, au moins si (1.21) est vérifiée, alors

$$(1.35) \quad A^\sigma \leq \tau^\sigma.$$

En effet (1.35) est évident si  $\tau^\sigma$  est un point de continuité de la trajectoire  $y$ . Si  $\tau^\sigma$  est un point de discontinuité, alors  $y(\tau^\sigma) \notin \mathcal{O}$  et la trajectoire se comporte comme une diffusion pendant un petit intervalle de temps après  $\tau^\sigma$ , et donc sort de  $\bar{\mathcal{O}}$ , ce qui fait que  $\forall \varepsilon$  on peut trouver  $s$  tel que  $\tau^\sigma < s \leq \tau^\sigma + \varepsilon$  et  $y(s - 0) \notin \mathcal{O}_\delta$ , d'où  $A^\sigma \leq s$ , et donc (1.35). La trajectoire  $\tilde{y}(s)$  coïncide avec  $y(s)$  sur  $[0, A^\sigma \wedge T[$ ; de plus

$$(1.36) \quad \tilde{\tau}^\sigma \wedge T = A^\sigma \wedge T.$$

En effet si  $A^\sigma < T$  et si  $A^\sigma$  est un point de continuité de la trajectoire  $y(s)$ , alors d'après (1.32),  $\tilde{y}(s)$  coïncide avec  $y(s)$  sur  $[0, A^\sigma]$ , et  $\tau^\sigma = A^\sigma$ , donc, d'après (1.33),  $\tilde{y}(s)$  évolue librement après  $A^\sigma$ , d'où  $\tilde{\tau}^\sigma = A^\sigma$ . Si  $A^\sigma$  est un instant de saut de  $y(s)$ , alors ou bien  $y(A^\sigma - 0) \in \partial \mathcal{O}_\delta$  et alors d'après (1.32)  $\tilde{y}(A^\sigma) = y(A^\sigma - 0)$ , ou bien  $y(A^\sigma - 0) \in \mathcal{O}_\delta$  et alors  $A^\sigma = \tau^\sigma$  et d'après (1.34)  $\tilde{y}(A^\sigma) \in \partial \mathcal{O}_\delta$ . Donc encore  $\tilde{\tau}^\sigma = A^\sigma$ . Si  $A^\sigma \geq T$ , alors  $\tilde{\tau}^\sigma \geq T$ , d'où (1.36).

On vérifie par ailleurs que  $\tilde{\mathcal{V}}$  satisfait (1.21), ..., (1.25). Comparons  $J_x(\tilde{\mathcal{V}})$  et  $J_x(\mathcal{V})$ . Comme de  $\mathcal{V}$  à  $\tilde{\mathcal{V}}$  on diminue éventuellement le nombre d'impulsions et la taille des sauts, on a

$$(1.37) \quad J_x(\tilde{\mathcal{V}}) - J_x(\mathcal{V}) \leq E \int_0^{\tilde{\tau}} f(\tilde{y}_x(t)) \exp[-\alpha t] dt - E \int_0^{\tau} f(y_x(t)) \exp[-\alpha t] dt = I.$$

Or

$$I = E \int_0^{T \wedge \tilde{\tau}_\sigma} f(\tilde{y}_x(t)) \exp[-\alpha t] dt + E \int_{T \wedge \tilde{\tau}_\sigma}^{\tilde{\tau}} f(\tilde{y}_x(t)) \exp[-\alpha t] dt - E \int_0^{T \wedge \tau_\sigma} f(y_x(t)) \exp[-\alpha t] dt - E \int_{T \wedge \tau_\sigma}^{\tau} f(y_x(t)) \exp[-\alpha t] dt.$$

Comme  $T \wedge \tilde{\tau}_\sigma = T \wedge A^\sigma \leq T \wedge \tau^\sigma$ , on obtient (puisque  $f \geq 0$ ),

$$I \leq E \int_{T \wedge \tilde{\tau}_\sigma}^{\tilde{\tau}} f(\tilde{y}_x(t)) \exp[-\alpha t] dt - E \int_{T \wedge \tau_\sigma}^{\tau} f(y_x(t)) \exp[-\alpha t] dt \leq E \int_{T \wedge \tilde{\tau}_\sigma}^{\tilde{\tau}} f(\tilde{y}_x(t)) \exp[-\alpha t] dt = II.$$

Or

$$\text{II} = E \int_{T \wedge \tilde{\tau}_\delta}^{T \wedge \tilde{\tau}} f(\tilde{y}_x(t)) \exp[-\alpha t] dt + E \int_{T \wedge \tilde{\tau}}^{\tilde{\tau}} f(\tilde{y}_x(t)) \exp[-\alpha t] dt = \text{II}_1 + \text{II}_2$$

et

$$\text{II}_2 \leq \left( \int_T^{+\infty} \exp[-\alpha t] dt \right) \max_{\mathcal{O}} f \leq C \exp[-\alpha T].$$

Par ailleurs

$$\text{II}_1 \leq CE(T \wedge \tilde{\tau} - T \wedge \tilde{\tau}_\delta) \leq CE(\tilde{\tau} - \tilde{\tau}_\delta).$$

D'après (1.26) et la formule de Ito, on a

$$E\psi(\tilde{y}_x(\tilde{\tau})) = E\psi(\tilde{y}_x(\tilde{\tau}_\delta)) - E(\tilde{\tau} - \tilde{\tau}_\delta)$$

soit, puisque  $y_x(\tilde{\tau}) \in \partial\mathcal{O}$ ,

$$E(\tilde{\tau} - \tilde{\tau}_\delta) = E\psi(\tilde{y}_x(\tilde{\tau}_\delta)).$$

Or  $\tilde{y}_x(\tilde{\tau}_\delta) \in \partial\mathcal{O}_\delta$ , donc  $\exists \xi_0 \in \partial\mathcal{O}$  tel que

$$|\tilde{y}_x(\tilde{\tau}_\delta) - \xi_0| = d(\tilde{y}_x(\tilde{\tau}_\delta), \partial\mathcal{O}) = \delta.$$

Comme  $\psi(\xi_0) = 0$ , on obtient

$$E(\tilde{\tau} - \tilde{\tau}_\delta) = E(\psi(\tilde{y}_x(\tilde{\tau}_\delta)) - \psi(\xi_0)) \leq C\delta^\nu, \quad \text{d'après (1.28).}$$

On a bien démontré (1.30), d'où (1.28).

Soit  $\mathcal{U}_\lambda$  un contrôle  $\in \mathcal{U}_{x_\lambda}^{\delta, T}$ . On note  $y_\lambda$  la trajectoire correspondante, et  $y_{\lambda'}$  la trajectoire correspondant au *même contrôle*  $\mathcal{U}_\lambda$ , mais avec les coefficients  $g_{\lambda'}$ ,  $\sigma_{\lambda'}$ . On notera  $\tau_{\lambda'}$ ,  $\tau_{\lambda'}^\delta$  les quantités analogues à  $\tau_\lambda$ ,  $\tau_\lambda^\delta$  pour la trajectoire  $y_{\lambda'}(t)$ . Comme

$$\begin{aligned} dy_\lambda &= g_\lambda(y_\lambda) dt + \sigma_\lambda(y_\lambda) dw + \sum \delta(t - \theta_i) \xi_i dt, \\ dy_{\lambda'} &= g_{\lambda'}(y_{\lambda'}) dt + \sigma_{\lambda'}(y_{\lambda'}) dw + \sum \delta(t - \theta_i) \xi_i dt, \\ y_\lambda(0) &= y_{\lambda'}(0) = x, \end{aligned}$$

on a donc

$$d(y_{\lambda'} - y_\lambda) = (g_{\lambda'}(y_{\lambda'}) - g_\lambda(y_\lambda)) dt + (\sigma_{\lambda'}(y_{\lambda'}) - \sigma_\lambda(y_\lambda)) dw$$

d'où

$$(1.38) \quad \frac{1}{2}|y_{\lambda'}(t) - y_{\lambda}(t)|^2 = \int_0^t (g_{\lambda'}(y_{\lambda'}) - g_{\lambda}(y_{\lambda})) \cdot (y_{\lambda'} - y_{\lambda}) \, ds + \\ + \int_0^t (y_{\lambda'} - y_{\lambda}) \cdot (\sigma_{\lambda'}(y_{\lambda'}) - \sigma_{\lambda}(y_{\lambda})) \, dw + \\ + \frac{1}{2} \int_0^t \text{tr}(\sigma_{\lambda'}(y_{\lambda'}) - \sigma_{\lambda}(y_{\lambda})) (\sigma_{\lambda'}(y_{\lambda'}) - \sigma_{\lambda}(y_{\lambda}))^* \, ds.$$

D'où

$$(1.39) \quad E|y_{\lambda'}(t) - y_{\lambda}(t)|^2 \leq C_1 \int_0^t E|y_{\lambda'}(s) - y_{\lambda}(s)|^2 \, ds + \\ + C_2 \left[ E \int_0^t |g_{\lambda'}(y_{\lambda'}) - g_{\lambda}(y_{\lambda})|^2 \, ds + E \int_0^t |\sigma_{\lambda'}(y_{\lambda'}) - \sigma_{\lambda}(y_{\lambda})|^2 \, ds \right].$$

Posons

$$(1.40) \quad \varphi_{\lambda'} = \sup_x |g_{\lambda'}(x) - g_{\lambda}(x)|^2 + \sup_x |\sigma_{\lambda'}(x) - \sigma_{\lambda}(x)|^2.$$

D'après (1.3) on a

$$(1.41) \quad \varphi_{\lambda'} \rightarrow 0 \quad \text{lorsque } \lambda' \rightarrow \lambda.$$

Donc

$$E|y_{\lambda'}(t) - y_{\lambda}(t)|^2 \leq C_1 \int_0^t E|y_{\lambda'}(s) - y_{\lambda}(s)|^2 \, ds + C_2 t \varphi_{\lambda'}.$$

D'après l'inégalité de Gronwall, on voit que

$$(1.42) \quad \sup_{0 \leq t \leq T} E|y_{\lambda'}(t) - y_{\lambda}(t)|^2 \leq C(T) \varphi_{\lambda'}.$$

Reprenant (1.38), on a

$$E \sup_{0 \leq t \leq T} |y_{\lambda'}(t) - y_{\lambda}(t)|^2 \leq C_1 E \int_0^T |y_{\lambda'}(s) - y_{\lambda}(s)|^2 \, ds + C_2 T \varphi_{\lambda'}$$

d'où

$$(1.43) \quad E \sup_{0 \leq t \leq T} |y_{\lambda'}(t) - y_{\lambda}(t)|^2 \leq C(T) \varphi_{\lambda'}.$$

On déduit de (1.43)

$$(1.44) \quad P \left\{ \sup_{0 \leq t \leq T} |y_{\lambda'}(t) - y_{\lambda}(t)| > \frac{\delta}{2} \right\} \leq \frac{C(T)\delta_{\lambda'\lambda}}{\delta^2}.$$

On peut toujours supposer  $x \in \mathcal{O}$  (car si  $x \in \partial\mathcal{O}$ , alors  $u_{\lambda}(x) = u_{\lambda'}(x) = 0$ ), et en prenant  $\delta$  assez petit, que  $x \in \mathcal{O}_{\delta}$ .

Pour un événement  $\omega$  tel que

$$(1.45) \quad \sup_{0 \leq t \leq T} |y_{\lambda'}(t) - y_{\lambda}(t)| \leq \frac{\delta}{2}$$

on a nécessairement

$$(1.46) \quad A_{\lambda}^{\delta} \wedge T \leq \tau_{\lambda'\lambda} \wedge T.$$

En effet pour  $s \in [0, A_{\lambda}^{\delta} \wedge T[$ , on a  $y_{\lambda}(s) \in \mathcal{O}_{\delta}$ , donc, d'après (1.45)

$$d(y_{\lambda'}(s), \partial\mathcal{O}) \geq d(y_{\lambda}(s), \partial\mathcal{O}) - |y_{\lambda}(s) - y_{\lambda'}(s)| \geq \delta - \frac{\delta}{2}$$

et donc  $y_{\lambda'}(s) \in \mathcal{O}$  pour  $s \in [0, A_{\lambda}^{\delta} \wedge T[$ , d'où

$$T_{\lambda'} \geq A_{\lambda}^{\delta} \wedge T, \quad \text{i.e. (1.46)}.$$

Par conséquent, on a

$$(1.47) \quad P\{A_{\lambda}^{\delta} \wedge T > \tau_{\lambda'\lambda} \wedge T\} \leq \frac{C(T)\varphi_{\lambda'\lambda}}{\delta^2}.$$

Si  $A_{\lambda}^{\delta} \wedge T < \tau_{\lambda'\lambda} \wedge T$ , alors  $A_{\lambda}^{\delta} < T$  et  $A_{\lambda}^{\delta} < \tau_{\lambda'\lambda}$ , donc  $y_{\lambda'}(A_{\lambda}^{\delta}) \in \mathcal{O}$ . Comme  $A_{\lambda}^{\delta}$  est le dernier instant éventuel de saut (cf. (1.23)), alors  $y_{\lambda'}$  est une diffusion après  $A_{\lambda}^{\delta}$ , donc

$$(1.48) \quad \begin{cases} \text{si } A_{\lambda}^{\delta} \wedge T < \tau_{\lambda'\lambda} \wedge T, & \text{alors } y_{\lambda'}(A_{\lambda}^{\delta} \wedge T) \in \mathcal{O}, \\ \text{et } y_{\lambda'}(s) & \text{est une diffusion après } A_{\lambda}^{\delta} \wedge T. \end{cases}$$

Posons

$$M = (A_{\lambda}^{\delta} \wedge T) \wedge (\tau_{\lambda'\lambda} \wedge T).$$

On utilise maintenant la fonction  $\psi_{\lambda}(x, t)$  solution de

$$(1.49) \quad \begin{cases} -\frac{\partial \psi_{\lambda}}{\partial t} + A_{\lambda} \psi_{\lambda} = 1, \\ \psi_{\lambda|_T} = 0, \quad \psi_{\lambda}(x, T) = 0. \end{cases}$$

On a, de manière analogue à (1.28)

$$(1.50) \quad |\psi_\lambda(\xi, t) - \psi_\lambda(\xi', t)| \leq C(T)|\xi - \xi'|^{\gamma_T}, \quad \forall \xi, \xi' \in \bar{\mathcal{O}}$$

où  $\gamma_T \in ]0, 1[$ , et  $C(T)$  sont indépendants de  $\lambda$ .

Or

$$(1.51) \quad E(\tau_{\lambda'} \wedge T - M) = E\psi_{\lambda'}(y_{\lambda'}(M), M) = E\psi_{\lambda'}(y_\lambda(A \wedge T), A \wedge T) + \\ + E(\psi_{\lambda'}(y_{\lambda'}(M)) - \psi_{\lambda'}(y_\lambda(M))) + E(\psi_{\lambda'}(y_\lambda(M)) - \psi_{\lambda'}(y_\lambda(A_\lambda^\delta \wedge T))).$$

Mais

$$E\psi_{\lambda'}(y_\lambda(A_\lambda^\delta \wedge T), A_\lambda^\delta \wedge T) = E\psi_{\lambda'}(y_\lambda(A_\lambda^\delta), A_\lambda^\delta) \chi_{A_\lambda^\delta < T}.$$

Or  $A_\lambda^\delta = \tau_\lambda^\delta$  et d'après (1.25)  $y_\lambda(A_\lambda^\delta) \in \partial\mathcal{O}_\delta$  donc  $\exists \xi_0 \in \partial\mathcal{O}$  tel que

$$|y_\lambda(A_\lambda^\delta) - \xi_0| = \delta$$

d'où

$$\chi_{A_\lambda^\delta < T} \psi_{\lambda'}(y_\lambda(A_\lambda^\delta), A_\lambda^\delta) = [\psi_{\lambda'}(y_\lambda(A_\lambda^\delta), A_\lambda^\delta) - \psi(\xi_0, A_\lambda^\delta)] \chi_{A_\lambda^\delta < T} \leq C(T)\delta^{\gamma_T}.$$

Puis

$$E(\psi_{\lambda'}(y_\lambda(M)) - \psi_{\lambda'}(y_\lambda(A_\lambda^\delta \wedge T))) = E(\psi_\lambda(y_\lambda(M)) - \psi_{\lambda'}(y_\lambda(A_\lambda^\delta \wedge T))) \chi_{A_\lambda^\delta \wedge T > \tau_{\lambda'} \wedge T}$$

et d'après (1.47) cette quantité est majorée par  $C(T)\varphi_{\lambda'}/\delta^2$ .

Enfin, d'après (1.43)

$$E(\psi_{\lambda'}(y_{\lambda'}(M)) - \psi_{\lambda'}(y_\lambda(M))) \leq C(T)\varphi_{\lambda'}.$$

Donc finalement

$$(1.52) \quad E(\tau_{\lambda'} \wedge T - M) \leq C(T) \left\{ \delta^{\gamma_T} + \frac{\varphi_{\lambda'}}{\delta^2} + \varphi_{\lambda'} \right\}.$$

Alors

$$(1.53) \quad E|\tau_{\lambda'} \wedge T - \tau_\lambda \wedge T| \leq E(\tau_{\lambda'} \wedge T - M) + \\ + E|M - A_\lambda^\delta \wedge T| + E(\tau_\lambda \wedge T - A_\lambda^\delta \wedge T) \leq C(T) \left\{ \delta^{\gamma_T} + \frac{\varphi_{\lambda'}}{\delta^2} + \varphi_{\lambda'} \right\}.$$

On calcule alors

$$\begin{aligned}
 J_x^\lambda(\mathcal{U}_\lambda) - J_x^{\lambda'}(\mathcal{U}_\lambda) &= E \int_0^{\tau_\lambda} f(y_\lambda(t)) \exp[-\alpha t] dt - \\
 &- E \int_0^{\tau_{\lambda'}} f(y_{\lambda'}(t)) \exp[-\alpha t] dt = E \int_0^{\tau_\lambda \wedge T} (f(y_\lambda(t)) - f(y_{\lambda'}(t))) \exp[-\alpha t] dt + \\
 &+ E \int_{\tau_\lambda \wedge T}^{\tau_\lambda} f(y_\lambda(t)) \exp[-\alpha t] dt - E \int_{\tau_{\lambda'} \wedge T}^{\tau_{\lambda'}} f(y_{\lambda'}(t)) \exp[-\alpha t] dt + \\
 &+ E \int_0^{\tau_\lambda \wedge T} f(y_{\lambda'}(t)) \exp[-\alpha t] dt - E \int_0^{\tau_{\lambda'} \wedge T} f(y_{\lambda'}(t)) \exp[-\alpha t] dt = \text{I} + \text{II} + \text{III}.
 \end{aligned}$$

Sans perte de généralité, on peut supposer que  $f$  est uniformément continue et bornée sur  $R^n$ ; si l'on pose

$$h(\varrho) = \sup_{|\xi - \xi'| \leq \varrho} |f(\xi) - f(\xi')|$$

alors  $h(\varrho) \rightarrow 0$  lorsque  $\varrho \rightarrow 0$ . Donc, puisque  $h$  est croissante et bornée

$$|\text{I}| \leq CEh \left( \sup_{|\xi - \xi'| \leq \varrho} |y_{\lambda'}(t) - y_\lambda(t)|^2 \right) \leq C \left\{ h \left( \frac{\delta}{2} \right) + \frac{C(T)\varphi_{\lambda\lambda}}{\delta^2} \right\}.$$

Puis

$$|\text{II}| \leq C \exp[-\alpha T],$$

$$\begin{aligned}
 \text{III} &= E \int_{(\tau_\lambda \wedge T) \wedge (\tau_{\lambda'} \wedge T)}^{\tau_\lambda \wedge T} f(y_{\lambda'}(t)) \exp[-\alpha t] dt - E \int_{(\tau_\lambda \wedge T) \wedge (\tau_{\lambda'} \wedge T)}^{\tau_{\lambda'} \wedge T} f(y_{\lambda'}(t)) \exp[-\alpha t] dt
 \end{aligned}$$

et d'après (1.53)

$$|\text{III}| \leq C(T) \left\{ \delta \nu_x + \frac{\varphi_{\lambda\lambda}}{\delta^2} + \varphi_{\lambda\lambda} \right\}.$$

Donc finalement

$$\begin{aligned}
 (1.54) \quad |J_y^\lambda(\mathcal{U}_\lambda) - J_x^{\lambda'}(\mathcal{U}_\lambda)| &\leq C \left\{ h \left( \frac{\delta}{2} \right) + \frac{C(T)\varphi_{\lambda\lambda}}{\delta^2} + \right. \\
 &\left. + \exp[-\alpha T] + C(T) \left( \delta \nu_x + \frac{\varphi_{\lambda\lambda}}{\delta^2} + \varphi_{\lambda\lambda} \right) \right\}.
 \end{aligned}$$

On en déduit

$$u_{\lambda'}(x) \leq \text{Inf}_{\mathcal{U}_\lambda \in \mathcal{U}_{x\lambda}^{\delta, T}} J_x^\lambda(\mathcal{U}) + C\{ \}$$

et d'après (1.28)

$$(1.55) \quad u_{\lambda'}(x) - u_{\lambda}(x) \leq C(\delta^\nu + \exp[-\alpha T]) + C\{ \}.$$

Mais échangeant les rôles de  $\lambda$  et  $\lambda'$ , on obtient le même second membre. Donc

$$(1.56) \quad \sup_{x \in \mathcal{O}} |u_{\lambda'}(x) - u_{\lambda}(x)| \leq C(\delta^\lambda + \exp[-\alpha T]) + C \left\{ h \left( \frac{\delta}{2} \right) + \frac{C(T)\varphi_{\lambda'\lambda}}{\delta^2} + \exp[-\alpha T] + C(T) \left( \delta^{\nu x} + \frac{\varphi_{\lambda'\lambda}}{\delta^2} + \varphi_{\lambda\lambda} \right) \right\}.$$

En faisant tendre successivement  $\lambda' \rightarrow \lambda$ , puis  $\delta \rightarrow 0$ , puis  $T \rightarrow +\infty$ , on en déduit

$$\lim_{\lambda' \rightarrow \lambda} \sup_{x \in \mathcal{O}} |u_{\lambda'}(x) - u_{\lambda}(x)| = 0$$

ce qui achève la démonstration du Théorème 1.1. ■

REMARQUE 1.1. Des résultats analogues peuvent s'établir dans les cas non stationnaires, ou pour d'autres I.Q.V. susceptibles d'interprétation du type contrôle impulsif.

## 2. - Un système d'I.Q.V. avec paramètre.

### 2.1. *Énoncés des résultats.*

Dans l'ouvert borné  $\mathcal{O}$  de frontière régulière  $\Gamma$ , on considère l'opérateur  $A(\lambda)$  donné par

$$(2.1) \quad A(\lambda)\varphi = - \sum \frac{\partial}{\partial x_i} \left( a_{ij}(x, \lambda) \frac{\partial \varphi}{\partial x_j} \right) + \sum a_j(x, \lambda) \frac{\partial \varphi}{\partial x_j} + a_0(x, \lambda)\varphi;$$

pour chaque  $\lambda \in [0, 1]$ , on suppose que

$$(2.2) \quad \begin{cases} a_{ij}(\cdot, \lambda), \quad a_j(\cdot, \lambda), \quad a_0(\cdot, \lambda) \in L^\infty(\mathcal{O}), \\ \sum a_{ij}(x, \lambda) \xi_i \xi_j \geq \alpha \sum \xi_i^2, \quad \alpha > 0, \text{ p.p.} \\ \alpha \text{ indépendant de } \lambda \in [0, 1]; \end{cases}$$

On suppose que  $A(\lambda)$  dépend continûment de  $\lambda$  au sens suivant

$$(2.3) \quad \begin{cases} \lambda \rightarrow a_{ij}(\cdot, \lambda), a_j(\cdot, \lambda), a_0(\cdot, \lambda) \text{ est continue de } [0, 1] \rightarrow L^\infty(\mathcal{O}) \\ \text{faible étoile.} \end{cases}$$

On se donne par ailleurs

$$(2.4) \quad k_i \geq 0, \quad i = 1, 2, \quad k_1 + k_2 > 0;$$

$$(2.5) \quad f_i \in L^\infty(\mathcal{O}), \quad f_i \geq 0, \quad i = 1, 2.$$

Pour  $\lambda$  fixé dans  $[0, 1]$  on considère le système d'I.Q.V. que voici — qui correspond à un problème de contrôle impulsif (de tels systèmes ont été introduits dans Bensoussan-Lions [3]):

$$(2.6) \quad \begin{cases} Au_1(\lambda) - f_1 \leq 0, & u_1(\lambda) - k_2 - u_2(\lambda) \leq 0, \\ (Au_1(\lambda) - f_1)(u_1(\lambda) - k_2 - u_2(\lambda)) = 0 \end{cases}$$

$$(2.7) \quad \begin{cases} Au_2(\lambda) - f_2 \leq 0, & u_2(\lambda) - k_1 - u_1(\lambda) \leq 0, \\ (Au_2(\lambda) - f_2)(u_2(\lambda) - k_1 - u_1(\lambda)) = 0 \end{cases}$$

$$(2.8) \quad u_1(\lambda) = u_2(\lambda) = 0 \quad \text{sur } \Gamma.$$

REMARQUE 2.1. Ce qui suit est valable, avec des changements mineurs, si l'on remplace les conditions de Dirichlet (2.8) par celles de Neumann

$$(2.9) \quad \frac{\partial u_i}{\partial \nu_A}(\lambda) = 0 \quad \text{sur } \Gamma, \quad i = 1, 2. \quad \blacksquare$$

On commencera par rappeler l'essentiel de la démonstration du résultat suivant, pour  $A$  fixé:

THÉORÈME 2.1. *On suppose que (2.2), (2.4), (2.5) ont lieu et que*

$$(2.10) \quad a_{ij}(\cdot, \lambda) \in C^1(\bar{\mathcal{O}}).$$

*Alors le problème (2.6), (2.7), (2.8) admet une solution unique telle que*

$$(2.11) \quad u_i(\lambda) \in W^{2,p}(\mathcal{O}), \quad \forall p \text{ fini}, \quad i = 1, 2 \quad (1).$$

$$(1) \quad W^{2,p}(\mathcal{O}) = \left\{ \varphi \mid \varphi, \frac{\partial \varphi}{\partial x_i}, \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_i \partial x_j} \in L^p(\mathcal{O}) \right\}.$$

REMARQUE 2.2. On a également, sans l'hypothèse (2.10), existence et unicité d'une solution faible. ■

On démontrera ensuite le résultat suivant, exprimant la dépendance continue de la solution en  $\lambda$ :

THÉORÈME 2.2. On suppose que (2.2), (2.3), (2.4), (2.5) ont lieu et que (complément à (2.10))  $\lambda \rightarrow a_{ij}(\cdot, \lambda)$  est continue de  $[0, 1] \rightarrow C^1(\mathcal{O})$ . Alors, lorsque  $\lambda \rightarrow \lambda_0$ , on a:

$$(2.12) \quad u_i(\lambda) \rightarrow u_i(\lambda_0) \quad \text{dans } W^{2,p}(\mathcal{O}) \text{ faible, } \quad i = 1, 2.$$

2.2. Démonstration de l'unicité dans le Théorème 2.1.

On va en fait démontrer l'unicité de la solution faible, par une adaptation de la méthode de Th. Laetsch [1]

Pour  $u, v \in H^1(\mathcal{O})$  posons <sup>(1)</sup>

$$(2.13) \quad a(\lambda; u, v) = a(u, v) = \sum_{\mathcal{O}} \int a_{ij}(x, \lambda) \frac{\partial u}{\partial x_j} \frac{\partial v}{\partial x_i} dx + \sum_{\mathcal{O}} \int a_j(x, \lambda) \frac{\partial u}{\partial x_j} v dx + \int_{\mathcal{O}} a_0(x, \lambda) u(x)v(x) dx;$$

alors la solution éventuelle du problème (2.6), (2.7), (2.8) satisfait à

$$(2.14) \quad \begin{cases} a(u_1, v_1 - u_1) \geq (f_1, v_1 - u_1), & \forall v_1 \leq k_2 + u_2, v_1 \in H_0^1(\mathcal{O}), \\ u_1 \in H_0^1(\mathcal{O}), & u_1 \leq k_2 + u_2, \\ a(u_2, v_2 - u_2) \geq (f_2, v_2 - u_2), & \forall v_2 \leq k_1 + u_1, v_2 \in H_0^1(\mathcal{O}), \\ u_2 \in H_0^1(\mathcal{O}), & u_2 \leq k_1 + u_1. \end{cases}$$

D'après la théorie des I.Q.V. stationnaires (Bensoussan-Goursat-Lions [1], L. Tartar [1]) on sait qu'il existe une solution maximum  $u_1, u_2$  i.e. telle que, si  $w_1, w_2$  est une autre solution éventuelle, on a:

$$(2.15) \quad w_i \leq u_i, \quad i = 1, 2.$$

Le théorème de Laetsch, loc. cit., donne l'unicité si

$$k_i > 0 \quad \text{pour } i = 1 \text{ et } 2.$$

(1) On va supprimer l'indice  $\lambda$  dans cette démonstration, ainsi qu'au point 2.3, puisque  $\lambda$  est fixé.

L'adaptation suivante du raisonnement de Laetsch conduit à l'unicité sans l'hypothèse (2.4), donc avec l'un des  $k_i$  pouvant être nul. Nous ne restreignons pas la généralité en supposant que

$$(2.16) \quad k_1 > 0, \quad k_2 \geq 0.$$

Suit  $\alpha_i$  le plus grand réel  $\geq 0$  tel que

$$(2.17) \quad \alpha_i u_i \leq w_i, \quad i = 1, 2;$$

$\alpha_i$  existe et d'après (2.15),  $0 \leq \alpha_i \leq 1$ .

Vérifions que l'on a nécessairement

$$(2.18) \quad \alpha_1 = \alpha_2.$$

On déduit de la 2-ème I.Q.V. (2.14) que

$$(2.19) \quad \begin{cases} a(\alpha_1 u_2, \alpha_1 v_2 - \alpha_1 u_2) \geq (\alpha_1 f_2, \alpha_1 v_2 - \alpha_1 u_2), \\ \alpha_1 v_2, \alpha_1 u_2 \leq \alpha_1 k_1 + \alpha_1 u_1 \leq k_1 + w_1 \end{cases}$$

et par définition

$$(2.20) \quad \begin{cases} a(w_2, v_2 - w_2) \geq (f_2, w_2 - w_2), \\ v_2, w_2 \leq k_1 + w_1. \end{cases}$$

Comparant (2.19), (2.20), comme  $\alpha_1 f_2 \leq f_2$ , on en déduit que  $\alpha_1 u_2 \leq w_2$  et donc d'après la définition de  $\alpha_2$ :  $\alpha_1 \leq \alpha_2$ .

Mais l'on peut échanger les rôles de  $u_1$  et  $u_2$  (le raisonnement précédent étant valable même si  $k_1 = 0$ ), donc  $\alpha_2 \leq \alpha_1$  donc on a (2.18).

Montrons maintenant que  $\alpha_1 = \alpha_2 = 1$  ce qui montre que  $u_i = w_i$ .

Supposons par l'absurde que

$$0 \leq \alpha_1 = \alpha_2 < 1.$$

On introduit alors  $\beta$  tel que

$$(2.21) \quad \begin{cases} \alpha_1 = \alpha_2 < \beta < 1, \\ \beta(k_1 + u_1) \leq k_1 + \alpha_1 u_1, \quad \text{p.p.} \end{cases}$$

(ce qui est possible grâce au fait que  $k_1 > 0$ ).

On a alors, d'après la 2-ème I.Q.V. (2.14):

$$\begin{aligned} a(\beta u_2, \beta v_2 - \beta u_2) &\geq (\beta f_2, \beta v_2 - \beta u_2), \\ \beta v_2, \beta u_2 &\leq \beta(k_1 + u_1) \leq k_1 + \alpha_1 u_1 \leq k_1 + w_1 \end{aligned}$$

et donc  $\beta u_2 \leq w_2$  donc  $\alpha_2 < \beta$  ce qui contredit la définition de  $\alpha_2$ . Donc  $\alpha_1 = \alpha_2 = 1$ . ■

2.3. *Démonstration de l'existence dans le Théorème 2.1.*

En supprimant toujours l'indice  $\lambda$  dans l'écriture — mais nous vérifions dans ce qui suit que les estimations a priori obtenues sont *indépendantes* de  $\lambda$  — on introduit le *problème pénalisé* suivant: on désigne par  $w_{1,\varepsilon}$ ,  $w_{2,\varepsilon}$  la solution de

$$(2.22) \quad \begin{cases} Aw_{1\varepsilon} + \frac{1}{\varepsilon} \beta_{1\varepsilon}^+ = f_1, \\ Aw_{2\varepsilon} + \frac{1}{\varepsilon} \beta_{2\varepsilon}^+ = f_2, \quad w_{i\varepsilon} = 0 \text{ sur } \Gamma, \quad i = 1, 2 \end{cases}$$

où

$$(2.23) \quad \beta_{1\varepsilon} = w_{1\varepsilon} - k_2 - w_{2\varepsilon}, \quad \beta_{2\varepsilon} = w_{2\varepsilon} - k_1 - w_{1\varepsilon}$$

et où, comme d'ordinaire,  $\varphi^+ = \sup(\varphi, 0)$ .

Le problème (2.22) admet une solution unique par application du principe du maximum. On voit facilement que

$$(2.24) \quad 0 \leq w_{i\varepsilon} \leq \Phi_i, \quad i = 1, 2$$

où  $\Phi_i$  est la solution du problème de Dirichlet

$$(2.25) \quad A\Phi_i = f_i, \quad \Phi_i = 0 \quad \text{sur } \Gamma. \quad \blacksquare$$

On note maintenant que, grâce à (2.4),

$$(2.26) \quad \beta_{1\varepsilon}^+ \beta_{2\varepsilon}^+ = 0.$$

On déduit de (2.22) que

$$(2.27) \quad A(w_{1\varepsilon} - w_{2\varepsilon}) + \frac{1}{\varepsilon} (\beta_{1\varepsilon}^+ - \beta_{2\varepsilon}^+) = f_1 - f_2, \quad w_{1\varepsilon} - w_{2\varepsilon} = 0 \text{ sur } \Gamma,$$

et on multiplie scalairement (2.27) par  $(\beta_{1\varepsilon}^+)^{p-1}$ ,  $p > 1$ .

Comme  $\beta_{1\varepsilon}^+ = 0$  au bord de  $\mathcal{O}$ , on en déduit

$$a(w_{1\varepsilon} - w_{2\varepsilon}, (\beta_{1\varepsilon}^+)^{p-1}) + \frac{1}{\varepsilon} \|\beta_{1\varepsilon}^+\|_{L^p(\mathcal{O})}^p = (f_1 - f_2, (\beta_{1\varepsilon}^+)^{p-1})$$

d'où,  $\mu$  désignant un nombre  $> 0$  quelconque

$$(2.28) \quad a(\beta_{1\varepsilon}, (\beta_{1\varepsilon}^+)^{p-1}) + (a_0 k_2 + \mu \beta_{1\varepsilon}, (\beta_{1\varepsilon}^+)^{p-1}) + \frac{1}{\varepsilon} \|\beta_{1\varepsilon}^+\|_{L^p(\mathcal{O})}^p = (f_1 - f_2 + \mu \beta_{1\varepsilon}, (\beta_{1\varepsilon}^+)^{p-1}).$$

Mais  $a(\varphi, (\varphi^+)^{p-1}) = a(\varphi^+, (\varphi^+)^{p-1})$  et l'on peut choisir  $\mu$  de façon que

$$a(\varphi^+, (\varphi^+)^{p-1}) + \mu(\varphi^+, (\varphi^+)^{p-1}) \geq 0;$$

comme  $(a_0 k_2, (\beta_{1\varepsilon}^+)^{p-1}) \geq 0$ , on déduit donc de (2.28) que

$$(2.29) \quad \begin{cases} \frac{1}{\varepsilon} \|\beta_{1\varepsilon}^+\|_{L^p(\mathcal{O})}^p \leq (f_1 - f_2 + \mu \beta_{1\varepsilon}, (\beta_{1\varepsilon}^+)^{p-1}), \\ \mu \text{ fixé (indépendant de } \lambda) \end{cases}$$

D'après (2.24) et (2.5), on a :

$$\|f_1 - f_2 + \mu \beta_{1\varepsilon}\|_{L^{p'}(\mathcal{O})} \leq C \quad (\text{indépendant de } \lambda)$$

et (2.29) donne donc

$$(2.30) \quad \left\| \frac{1}{\varepsilon} \beta_{1\varepsilon}^+ \right\|_{L^p(\mathcal{O})} \leq C = \text{constante indépendante de } \varepsilon \text{ et de } \lambda.$$

Echangeant, ce qui est loisible, les rôles de  $w_{1\varepsilon}$  et  $w_{2\varepsilon}$ , on a aussi

$$(2.31) \quad \left\| \frac{1}{\varepsilon} \beta_{2\varepsilon}^+ \right\|_{L^p(\mathcal{O})} \leq C.$$

Mais alors (2.22) donne

$$(2.32) \quad \|Aw_{1\varepsilon}\|_{L^p(\mathcal{O})} + \|Aw_{2\varepsilon}\|_{L^p(\mathcal{O})} \leq C.$$

Mais si  $Aw_{i\varepsilon} \in L^p(\mathcal{O})$ ,  $w_{i\varepsilon} = 0$  sur  $\Gamma$  alors, d'après la théorie classique des problèmes de Dirichlet dans  $L^p(\mathcal{O})$ , on a :

$$(2.33) \quad \begin{cases} w_{i\varepsilon} \in W^{2,p}(\mathcal{O}), & \|w_{i\varepsilon}\|_{W^{2,p}(\mathcal{O})} \leq C, \quad i = 1, 2, \\ \lambda \text{ fixé.} \end{cases}$$

Si en outre, comme dans le Théorème 2.2, on suppose que  $\lambda \rightarrow a_{ij}(\cdot, \lambda)$  est continue de  $[0, 1] \rightarrow C^1(\mathcal{O})$ , alors (2.33) est uniforme en  $\lambda$ . ■

On sait par ailleurs que, lorsque  $\varepsilon \rightarrow 0$ ,  $w_{i\varepsilon} \rightarrow u_i$  dans  $H^1(\mathcal{O})$  faible,  $u_i$  solution faible de l'I.Q.V. Cela, joint à (2.33) montre que la solution  $u_i = u_i(\lambda)$  vérifie (2.11), ce qui achève la démonstration du Théorème 2.1 et montre en outre que, sous les hypothèses du Théorème 2.2 on a :

$$(2.34) \quad \|u_i(\lambda)\|_{W^{2,p}(\mathcal{O})} \leq C, \quad i = 1, 2, \lambda \in [0, 1].$$

2.4. Démonstration du Théorème 2.2.

D'après (2.34) on peut extraire de  $u_i(\lambda)$ , lorsque  $\lambda \rightarrow \lambda_0$ , une suite encore notée  $u_i(\lambda)$  telle que

$$u_i(\lambda) \rightarrow \psi_i \quad \text{dans } W^{2,p}(\mathcal{O}) \text{ faible.}$$

On a alors

$$(2.35) \quad A(\lambda)u_i(\lambda) \rightarrow A(\lambda_0)\psi_i \quad \text{dans } L^p(\mathcal{O}) \text{ faible.}$$

En effet,  $A(\lambda)u_i(\lambda)$  demeure dans un borné de  $L^p(\mathcal{O})$ , et on peut donc supposer que pour une sous suite,  $A(\lambda)u_i(\lambda) \rightarrow \chi_i$  dans  $L^p(\mathcal{O})$  faible. Reste à voir que  $\chi_i = A(\lambda_0)\psi_i$ . Prenant  $\varphi \in \mathcal{D}(\mathcal{O})$ , il suffit donc de vérifier que

$$(2.36) \quad a(\lambda; u_i(\lambda), \varphi) \rightarrow a(\lambda_0; \psi_i, \varphi)$$

i.e. que, par exemple,

$$(2.37) \quad \int_{\mathcal{O}} a_{ij}(x, \lambda) \frac{\partial u_i}{\partial x_j}(x, \lambda) \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} dx \rightarrow \int_{\mathcal{O}} a_{ij}(x, \lambda_0) \frac{\partial \psi_i}{\partial x_j} \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} dx.$$

Mais  $(\partial u_i / \partial x_j)(x, \lambda) \rightarrow (\partial \psi_i / \partial x_j)$  dans  $L^p(\mathcal{O})$  fort, d'où (2.37) et (2.35).

Donc  $A(\lambda)u_1(\lambda) - f_1 \rightarrow A(\lambda_0)\psi_1 - f_1$  dans  $L^p(\mathcal{O})$  faible et

$$u_1(\lambda) - k_2 - u_2(\lambda) \rightarrow \psi_1 - k_2 - \psi_2 \quad \text{dans } L^p(\mathcal{O}) \text{ fort ;}$$

comme on peut prendre  $p > 2$ , on a donc

$$O = (A(\lambda)u_1(\lambda) - f_1)(u_1(\lambda) - k_2 - u_2(\lambda)) \rightarrow (A(\lambda_0)\psi_1 - f_1)(\psi_1 - k_2 - \psi_2)$$

dans  $L^{p/2}(\mathcal{O})$  faible et même chose en échangeant les indices 1 et 2.

Donc on vérifie que  $\psi_1, \psi_2$  est solution de l'I.Q.V. relative à  $\lambda_0$ , donc  $\psi_i = u_i(\lambda_0)$  et (2.34) démontre alors le Théorème 2.2. ■

### 3. - Homogénéisation d'I.Q.V.

#### 3.1. Position du problème.

On considère  $Y = ]0, y_i^0[$  dans  $\mathbf{R}^n$ ; une fonction  $\in L^\infty(\mathbf{R}^n)$  est dite  $Y$ -périodique si elle est de période  $y_i^0$  en  $y_i$ . On se donne

$$(3.1) \quad \begin{cases} a_{ij} \in L^\infty(\mathbf{R}^n), & Y \text{ périodique,} \\ \sum a_{ij}(y) \xi_i \xi_j \geq \alpha \sum \xi_i^2, & \alpha > 0, \text{ p.p. dans } Y. \end{cases}$$

Pour chaque  $\varepsilon > 0$  on considère alors l'opérateur  $A^\varepsilon$  donné par

$$(3.2) \quad A^\varepsilon \varphi = - \sum \frac{\partial}{\partial x_i} \left( a_{ij} \left( \frac{x}{\varepsilon} \right) \frac{\partial \varphi}{\partial x_j} \right).$$

**REMARQUE 3.1.** On pourrait aussi considérer un opérateur  $A^\varepsilon$  avec des termes du 1-er ordre et d'ordre 0,  $a_j(x/\varepsilon)$ ,  $a_0(x/\varepsilon)$ ,  $a$ , et  $a_0 \in L^\infty(\mathbf{R}^n)$ ,  $Y$ -périodiques,  $a_0 \geq 0$ . ■

On se donne par ailleurs  $k_i$ ,  $f_i$  comme au n. 2 et l'on désigne par  $u_{i\varepsilon}$  la solution de l'I.Q.V.

$$(3.3) \quad \begin{cases} A^\varepsilon u_{1\varepsilon} - f_1 \leq 0, & u_{1\varepsilon} - k_2 - u_{2\varepsilon} \leq 0, \\ (A^\varepsilon u_{1\varepsilon} - f_1)(u_{1\varepsilon} - k_2 - u_{2\varepsilon}) = 0, \\ A^\varepsilon u_{2\varepsilon} - f_2 \leq 0, & u_{2\varepsilon} - k_1 - u_{1\varepsilon} \leq 0, \\ (A^\varepsilon u_{2\varepsilon} - f_2)(u_{2\varepsilon} - k_1 - u_{1\varepsilon}) = 0 & \text{dans } \mathcal{O}, \\ u_{i\varepsilon} = 0 & \text{sur } \Gamma. \end{cases}$$

On veut étudier le comportement de  $u_{i\varepsilon}$  lorsque  $\varepsilon \rightarrow 0$ . ■

#### 3.2. Opérateur $\mathcal{A}$ homogénéisé de $A^\varepsilon$ .

On introduit (cf. De Giorgi-Spagnolo [1], Bensoussan-Lions-Papanicolaou [1]) l'opérateur homogénéisé  $\mathcal{A}$  associé à  $A^\varepsilon$ . Pour cela, posons

$$(3.4) \quad \mathcal{A}_1 = - \sum \frac{\partial}{\partial y_i} \left( a_{ij}(y) \frac{\partial}{\partial y_j} \right)$$

et soit  $\chi^j$  la solution — définie à une constante additive près — de

$$(3.5) \quad \begin{cases} A_1(\chi^j - y_j) = 0, & (j = 1, \dots, n) \text{ dans } Y \\ \chi^j \text{ } Y\text{-périodique (i.e. } \chi^j \text{ prend des valeurs égales sur les faces opposées de } Y\text{).} \end{cases}$$

On pose

$$(3.6) \quad a_1(\varphi, \psi) = \sum_{i,j=1}^n \int_Y a_{ij}(y) \frac{\partial \varphi}{\partial y_j} \frac{\partial \psi}{\partial y_i} dy,$$

et l'on définit

$$(3.7) \quad q_{ij} = \frac{1}{|Y|} a_1(\chi^i - y_i, \chi^j - y_j), \quad |Y| = \text{mesure de } Y.$$

Alors

$$(3.8) \quad \mathcal{A}\varphi = - \sum_{i,j=1}^n q_{ij} \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j},$$

ce qui définit un opérateur *elliptique*.

On sait alors que si  $u^\varepsilon$  (resp.  $u$ ) désigne la solution dans  $H_0^1(\mathcal{O})$  de

$$(3.9) \quad A^\varepsilon u_\varepsilon = f$$

(resp. de

$$(3.10) \quad \mathcal{A}u = f)$$

on a

$$(3.11) \quad u^\varepsilon \rightarrow u \quad \text{dans } H_0^1(\mathcal{O}) \text{ faible lorsque } \varepsilon \rightarrow 0.$$

### 3.3. Résultat sur l'homogénéisation de l'I.Q.V. (3.3).

On va démontrer le

**THÉORÈME 3.1.** *On suppose que (3.1) a lieu et que  $A^\varepsilon$  et  $\mathcal{A}$  sont définis par (3.2) et (3.8). Soit  $u_{1\varepsilon}, u_{2\varepsilon}$  la solution dans  $H_0^1(\mathcal{O})$  de l'I.Q.V. (3.3) satisfaisant à*

$$(3.12) \quad A^\varepsilon u_{i\varepsilon} \in L^2(\mathcal{O}).$$

Lorsque  $\varepsilon \rightarrow 0$ , on a:

$$(3.13) \quad \begin{cases} u_{i\varepsilon} \rightarrow u_i & \text{dans } H_0^1(\mathcal{O}) \text{ faible,} \\ A^\varepsilon u_{i\varepsilon} \rightarrow \mathcal{A}u_i & \text{dans } L^2(\mathcal{O}) \text{ faible} \end{cases}$$

où  $u_1, u_2$  est la solution dans  $H_0^1(\mathcal{O})$  avec  $\mathcal{A}u_i \in L^2(\mathcal{O})$  de l'I.Q.V. « homogénéisée »

$$(3.14) \quad \left\{ \begin{array}{l} \mathcal{A}u_1 - f_1 \leq 0, \quad u_1 - k_2 - u_2 \leq 0, \\ (\mathcal{A}u_1 - f_1)(u_1 - k_2 - u_2) = 0, \\ \mathcal{A}u_2 - f_2 \leq 0, \quad u_2 - k_1 - u_1 \leq 0, \\ (\mathcal{A}u_2 - f_2)(u_2 - k_1 - u_1) = 0 \quad \text{dans } \mathcal{O}, \\ u_i = 0 \quad \text{sur } \Gamma. \end{array} \right.$$

#### 3.4. Démonstration du Théorème 3.1.

D'après l'analogie des estimations (2.30), (2.31) avec  $p = 2$  (et où  $\varepsilon$  joue évidemment un rôle différent!), on a :

$$(3.15) \quad \|u_{i\varepsilon}\|_{H^1(\mathcal{O})} \leq C, \quad i = 1, 2,$$

$$(3.16) \quad |A^\varepsilon u_{i\varepsilon}| \leq C, \quad i = 1, 2,$$

(où  $|| =$  norme dans  $L^2(\mathcal{O})$ ).

On peut alors extraire une sous suite, encore notée  $u_{i\varepsilon}$ , telle que

$$(3.17) \quad u_{i\varepsilon} \rightarrow \psi_i \quad \text{dans } H_0^1(\mathcal{O}) \text{ faible, } i = 1, 2$$

$$(3.18) \quad A^\varepsilon u_{i\varepsilon} = g_{i\varepsilon} \rightarrow g_i \quad \text{dans } L^2(\mathcal{O}) \text{ faible.}$$

Comme  $u_{i\varepsilon} \rightarrow \psi_i$  dans  $L^2(\mathcal{O})$  fort, on voit que, par exemple

$$O = (A^\varepsilon u_{2\varepsilon} - f_1)(u_{1\varepsilon} - k_2 - u_{2\varepsilon}) \rightarrow (g_1 - f_1)(\psi_1 - k_2 - \psi_2)$$

dans  $L^1(\mathcal{O})$  faible, et par conséquent

$$(3.19) \quad \left\{ \begin{array}{l} g_1 - f_1 \leq 0, \quad \psi_1 - k_2 - \psi_2 \leq 0, \\ (g_1 - f_1)(\psi_1 - k_2 - \psi_2) = 0, \\ g_2 - f_2 \leq 0, \quad \psi_2 - k_1 - \psi_1 \leq 0, \\ (g_2 - f_2)(\psi_2 - k_1 - \psi_1) = 0 \quad \text{dans } \mathcal{O}, \\ \psi_i = 0 \quad \text{sur } \Gamma. \end{array} \right.$$

On aura alors  $\psi_i = u_i$  et le Théorème si l'on montre que

$$(3.20) \quad g_i = \mathcal{A}\psi_i, \quad i = 1, 2.$$

Mais si l'on définit  $\theta_{i\varepsilon}$  par

$$(3.21) \quad A^\varepsilon \theta_{i\varepsilon} = g_{i\varepsilon} - g_i, \quad \theta_{i\varepsilon} \in H_0^1(\mathcal{O})$$

on a, d'après l'uniforme coercivité en  $\varepsilon$  de  $A^\varepsilon$ :

$$(3.22) \quad \|\theta_{i\varepsilon}\|_{H_0^1(\mathcal{O})} \leq C \|g_{i\varepsilon} - g_i\|_{H^{-1}(\mathcal{O})}.$$

Mais d'après (3.18),  $g_{i\varepsilon} \rightarrow g_i$  dans  $H^{-1}(\mathcal{O})$  fort, donc

$$(3.23) \quad \theta_{i\varepsilon} \rightarrow 0 \quad \text{dans } H_0^1(\mathcal{O}) \text{ fort, } i = 1, 2.$$

Alors

$$(3.24) \quad A^\varepsilon(u_{i\varepsilon} - \theta_{i\varepsilon}) = g_i, \quad u_{i\varepsilon} - \theta_{i\varepsilon} \in H_0^1(\mathcal{O})$$

et d'après (3.11) on a:

$$(3.25) \quad \begin{cases} u_{i\varepsilon} - \theta_{i\varepsilon} \rightarrow \hat{u}_i & \text{dans } H_0^1(\mathcal{O}) \text{ faible,} \\ \mathcal{A}\hat{u}_i = g_i. \end{cases}$$

Mais d'après (3.17) et (3.23)  $u_{i\varepsilon} \rightarrow \psi_i = \hat{u}_i$  et (3.25) montre (3.20).

### 3.5. Problème ouvert.

Soit  $M(v)$  un opérateur comme au numéro 1

$$(3.26) \quad Mv(x) = \inf_{\xi \in \mathcal{U}, x + \xi \in \mathcal{O}} [k + v(x + \xi)].$$

Supposons  $k > 0$ ; soit  $u_\varepsilon$  la solution de

$$(3.27) \quad \begin{cases} A^\varepsilon u_\varepsilon - f \leq 0, & u_\varepsilon - M(u_\varepsilon) \leq 0, \\ (A^\varepsilon u_\varepsilon - f)(u_\varepsilon - M(u_\varepsilon)) = 0 & \text{dans } \mathcal{O} \end{cases}$$

avec

$$(3.28) \quad u - M(u) \leq 0, \quad \frac{\partial u}{\partial \nu_{A^\varepsilon}} \leq 0, \quad (u - M(u)) \frac{\partial u}{\partial \nu_{A^\varepsilon}} = 0 \quad \text{sur } \Gamma.$$

Soit par ailleurs  $\mathcal{A}$  l'homogénéisé de  $A^\varepsilon$  et  $u$  la solution de l'I.Q.V.

$$(3.29) \quad \begin{cases} \mathcal{A}u - f \leq 0, & u - M(u) \leq 0, \\ (\mathcal{A}u - f)(u - M(u)) = 0 & \text{dans } \mathcal{O}, \end{cases}$$

$$(3.30) \quad u - M(u) \leq 0, \quad \frac{\partial u}{\partial \nu_{\mathcal{A}}} \leq 0, \quad (u - M(u)) \frac{\partial u}{\partial \nu_{\mathcal{A}}} = 0 \quad \text{sur } \Gamma.$$

A-t-on  $u_\varepsilon \rightarrow u$  dans  $H^1(\mathcal{O})$  faible lorsque  $\varepsilon \rightarrow 0$ ?

### BIBLIOGRAPHIE

H. ATTOUCH - Y. KONISHI:

- [1] C.R.A.S., Paris, 1975.

C. BAIocchi:

- [1] *I.Q.V. dans les problèmes à frontière libre en hydraulique*, Colloque I.M.U.-IUTAM, Marseille, Septembre 1975.

A. BENSOUSSAN - J.-L. LIONS:

- [1] *Nouvelle formulation de problèmes de contrôle impulsif et applications*, C.R.A.S., **276** (1973), pp. 1189-1192.  
 [2] *Contrôle impulsif et inéquations quasi variationnelles d'évolution*, C.R.A.S., **276** (1973), pp. 1333-1338.  
 [3] *Contrôle impulsif et systèmes d'I.Q.V.*, C.R.A.S., **278** (1974), pp. 747-751.  
 [4] *Nouvelles méthodes en contrôle impulsif*, Applied Math. and Optimization, **1** (4) (1975), pp. 289-312.  
 [5] *Temps d'arrêt optimaux et Contrôle impulsif*, vol. 2 en préparation.

A. BENSOUSSAN - M. GOURSAT - J.-L. LIONS:

- [1] *Contrôle impulsif et I.Q.V. stationnaires*, C.R.A.S., **276** (1973), pp. 1279-84.

A. BENSOUSSAN - J.-L. LIONS - G. PAPANICOLAOU:

- [1] *Sur quelques phénomènes asymptotiques stationnaires*, C.R.A.S., **281** (1975), pp. 89-94.  
 [2] *Sur quelques phénomènes asymptotiques d'évolution*, C.R.A.S., **281** (1975), pp. 317-322.

L. BOCCARDO - I. CAPUZZO-DOLCETTA:

- [1] *G-convergenza e problema di Dirichlet unilaterale*, Boll. U.M.I.

L. BOCCARDO - P. MARCELLINI:

- [1] *Sulla convergenza delle soluzioni di disequazioni variazionali*, Annali Mat. Pura ed Appl.

H. BRÉZIS:

- [1] *Problèmes unilatéraux*, J.M.P.A., 1972.

H. BRÉZIS - G. STAMPACCHIA:

- [1] *Sur la régularité de la solution d'inéquations elliptiques*, Bull. S.M.F., **96** (1968), pp. 153-180.

L. CARBONE:

- [1] *Sur la  $\Gamma$ -convergence ...*, J.M.P.A., 1976.

E. DE GIORGI - S. SPAGNOLO:

- [1] *Sulla convergenza degli integrali dell'energia per operatori ellittici del 2° ordine*, Boll. U.M.I., **8** (1973), pp. 391-411.

B. HANOZET - J.-L. JOLY:

- [1] *Un résultat de régularité pour une I.Q.V. du type de Neumann intervenant dans un problème de contrôle impulsionnel*, C.R.A.S., 1975.

D. KINDERLEHRER:

- [1] Conférence Congrès Int. Math., Vancouver, 1974, vol. 2, pp. 269-273.

TH. LAETSCH:

- [1] *J. F. Analysis*, 1974.

H. LEWY - G. STAMPACCHIA:

- [1] *On the regularity of the solution of a variational inequality*, C.P.A.M., **22** (1969), pp. 153-188.

J.-L. LIONS - G. STAMPACCHIA:

- [1] *Variational inequalities*, Comm. Pure Applied Math., **20** (1967), pp. 493-519.

F. MIGNOT - J.-P. PUEL:

- [1] *Archive Rat. Mech. Anal.*, 1976.

J. MOSSINO:

- [1] *Sur certaines I.Q.V. apparaissant en Physique*, C.R.A.S. (1975).

F. MURAT:

- [1] *Homogénéisation d'inéquations ...*, à paraître.

C. SBORDONE:

- [1] *Sulla G-convergenza di equazioni ellittiche e paraboliche*, Ric. di Mat., **24** (1975), pp. 76-136.

S. SPAGNOLO:

- [1] *Sulla convergenza di soluzioni di equazioni paraboliche ed ellittiche*, Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa, **22** (1968), pp. 571-597.

G. STAMPACCHIA:

- [1] *Formes bilinéaires coercitives sur les ensembles convexes*, C.R.A.S., **253** (1964), pp. 4413-4416.

L. TARTAR:

- [1] *I.Q.V. abstraites*, C.R.A.S., **278** (1974), pp. 1193-1196.