

ANNALI DELLA SCUOLA NORMALE SUPERIORE DI PISA *Classe di Scienze*

LUCIAN BĂDESCU

Contractions rationnelles des variétés algébriques

Annali della Scuola Normale Superiore di Pisa, Classe di Scienze 3^e série, tome 27, n° 4 (1973), p. 743-768

<http://www.numdam.org/item?id=ASNSP_1973_3_27_4_743_0>

© Scuola Normale Superiore, Pisa, 1973, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Annali della Scuola Normale Superiore di Pisa, Classe di Scienze » (<http://www.sns.it/it/edizioni/riviste/annaliscienze/>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

CONTRACTIONS RATIONNELLES DES VARIÉTÉS ALGÈBRIQUES

par LUCIAN BĂDESCU

Introduction.

Le but de cet article est d'étendre les principaux résultats de [8], utilisant la même méthode. Cette extension sera justifiée à la fin du travail, quand on rencontrera certaines singularités des variétés algébriques à savoir celles qui sont obtenues par contractions rationnelles à un point et qui, pour les surfaces algébriques, sont très proches des singularités isolées rationnelles au sens de M. Artin [2]. On y esquisse une étude de ces singularités.

Soit K un corps commutatif, algébriquement clos de caractéristique arbitraire; dans tout le travail on considérera des variétés algébriques irréductibles sur K , i.e. des schémas séparés, intègres et de type fini sur K .

Soient Y une variété algébrique, Y' une sous-variété fermée d'idéal J dans le faisceau structural $\mathcal{O}_Y$, $j: Y' \hookrightarrow Y$ l'immersion correspondante, $\varphi: X \rightarrow Y$ l'éclatement de Y de centre Y' , $X' = \varphi^{-1}(Y')$, $i: X' \hookrightarrow X$ l'immersion correspondante d'idéal inversible $I = \mathcal{O}_X(1)$ dans $\mathcal{O}_X$, telles que le diagramme suivant:

$$\begin{array}{ccc} X' & \xrightarrow{i} & X \\ \varphi' \downarrow & & \downarrow \varphi \\ Y' & \xrightarrow{j} & Y \end{array}$$

soit cartésien.

DÉFINITION. L'immersion j s'appelle *rationnelle* s'il y a un $\mathcal{O}_{Y'}$ faisceau E localement libre de rang fini et un Y' -isomorphisme $X' \cong P(E)$ ($P(E)$ étant le fibré projectif associé à E) tel que $\mathcal{O}_{P(E)}(s) \cong i^* I$ avec $s > 0$ convenable.

Soient $\varphi': X' \rightarrow Y'$ un morphisme propre surjectif et $i: X' \hookrightarrow X$ une immersion fermée d'idéal I inversible.

DÉFINITION 2. Un morphisme $\varphi: X \rightarrow Y$ est une *contraction rationnelle* de X relativement à φ' (où le long de φ') s'il existe une immersion fermée rationnelle $j: Y' \hookrightarrow Y$ telle que le diagramme

$$\begin{array}{ccc} X' & \xhookrightarrow{i} & X \\ \varphi' \downarrow & & \downarrow \varphi \\ Y' & \xhookrightarrow{j} & Y \end{array}$$

soit cartésien et coïncide avec l'éclatement de Y de centre Y' .

NOTES 1. Si Y' est non-singulière et l'entier s de la définition 2 est égal à 1, alors la contraction φ est régulière au sens de A. T. Lascu [8].

2. Etant donnés le morphisme propre φ' et l'immersion i comme dans la définition 2, s'il y a une contraction rationnelle relativement à φ' , on dira aussi que X est rationnellement contractible relativement à φ' (où le long de φ').

Dans § 1 on établit des propriétés cohomologiques pour les immersions rationnelles et dans § 2 on démontre une extension du critère de contractibilité de A. T. Lascu [8], que voici :

THÉORÈME 2. Soient Y' une variété algébrique arbitraire, E un faisceau localement libre de rang $r \geq 2$ sur Y' , $X' = P(E)$, $\varphi': X' \rightarrow Y'$ la projection canonique de $P(E)$, $i: X' \hookrightarrow X$ une immersion fermée d'idéal I inversible telle que $i^* I = \mathcal{O}_{P(E)}(s)$ avec $s > 0$. Supposons en outre X normale dans chaque point de X' et que $R^1 \psi_*(I^2) = 0$, où $\psi: X \rightarrow T$ est l'application canonique dans l'espace T quotient de X obtenu en identifiant les points des fibres de φ' . Dans ces conditions il existe une contraction rationnelle $\varphi: X \rightarrow Y$ de X relativement à φ' , telle que Y soit normale dans chaque point de Y' et φ est uniquement déterminée avec cette propriété.

Dans § 3 on donne des exemples des contractions rationnelles avec la propriété $i^* I = O_{P(E)}(1)$ qui ne sont pas régulières.

Le quatrième paragraphe contient le suivant critère de contractibilité rationnelle à un point dont l'énoncé est tout à fait plus simple que le théorème ci-dessus et qui généralise un critère de Kodaira :

THÉORÈME 3. Soient X une variété projective de dimension r , $i: X' \hookrightarrow X$ une immersion fermée d'idéal I inversible. Supposons que $X' = P^{r-1}$ (l'espace projectif de dimension $r-1$) et $i^* I = O(s)$ avec $s > 0$. Alors X est rationnellement contractible le long de X' à un point (i.e. le long du morphisme structural de X') y normal et la contraction Y obtenue (qui est unique) est aussi projective. En outre y a les propriétés suivantes : la dimension de l'espace tangent de Zariski de Y dans y est $\binom{s+r-1}{r-1}$ et la multiplicité de l'anneau local de y est s^{r-1} .

Enfin, on montre que, dans le cas des surfaces algébriques, ces singularités sont des singularités isolées rationnelles au sens de M. Artin [2].

L'auteur tient exprimer toute sa reconnaissance au Professeur A. T. Lascu qui lui a posé ces problèmes et l'a encouragé d'écrire ce travail.

§ 1. Immersions rationnelles.

La définition de l'immersion rationnelle étant donnée dans l'introduction on va commencer par quelques exemples.

EXEMPLE 1. Si Y' est une sous-variété fermée de Y localement intersection complète, $j: Y' \hookrightarrow Y$ l'immersion correspondante d'idéal J dans le faisceau structural O_Y , alors $j^*(J) = E$ est un $O_{Y'}$ -module localement libre de rang $r = \text{codim}_Y Y'$ et l'algèbre symétrique $S_{O_{Y'}}(E)$ est canoniquement isomorphe à l'algèbre graduée $\bigoplus_{n \geq 0} J^n/J^{n+1}$. Par conséquent le lieu exceptionnel $X' = \text{Proj} \bigoplus_{n \geq 0} J^n/J^{n+1}$ est isomorphe avec le fibré projectif $P(E)$ et $i^* I = O_{P(E)}(1)$ (donc s de la définition 1 est égal à 1), autrement dit j est une immersion rationnelle ; en particulier toute sous-variété non-singulière d'une variété non-singulière donne une immersion rationnelle.

EXEMPLE 2. Soient Y' une variété algébrique arbitraire, E un faisceau localement libre de rang $r \geq 2$, $X' = P(E)$, $\varphi': X' \rightarrow Y'$ la projection canonique, $X = V(O_{P(E)}(s))$ avec $s > 0$ le fibré vectoriel associé au faisceau inversible $O_{P(E)}(s)$; alors $i^* I = O_{P(E)}(s)$ (EGA II (8.9.3)), i étant la section

nulle. Si $Y = \text{Spec } \bigoplus_{n \geq 0} \varphi'_* \mathcal{O}_{P(E)}(sn)$, la surjection canonique

$$\bigoplus_{n \geq 0} \varphi'_* \mathcal{O}_{P(E)}(sn) \rightarrow \varphi'_* \mathcal{O}_{P(E)} = \mathcal{O}_{Y'}$$

met en évidence l'immersion fermée $j: Y' \hookrightarrow Y$. D'autre part, il existe un morphisme canonique $\varphi: X \rightarrow Y$ associé à l'application identique de l'algèbre graduée $\bigoplus_{n \geq 0} \varphi'_* \mathcal{O}_{P(E)}(sn)$ (tenant compte que $X = \text{Spec } \bigoplus_{n \geq 0} \mathcal{O}_{P(E)}(sn)$ et de la définition de Y), tel que le diagramme suivant

$$\begin{array}{ccc} X' & \xrightarrow{i} & X \\ \varphi' \downarrow & & \downarrow \varphi \\ Y' & \xrightarrow{j} & Y \end{array}$$

soit commutatif. Mais en vertu de EGA II (8.8) ce diagramme est même cartésien et X coïncide à l'éclatement de Y de centre Y' . Donc j est une immersion rationnelle (et φ une contraction rationnelle de X relativement à φ').

EXEMPLE 3. Soit Y la surface de l'espace projectif P^3 de coordonnées homogènes x_0, x_1, x_2, x_3 d'équation

$$x_1^3 + x_2^3 + x_3^3 = 0.$$

Supposons que la caractéristique du corps de base n'est pas 3. Alors le seul point singulier de cette surface est $y = (1, 0, 0, 0)$. Considérons l'éclatement $\varphi: X \rightarrow Y$ de Y de centre $Y' = y$. Le lieu exceptionnel X' est alors la courbe du plan projectif P^2 de coordonnées homogènes x_1, x_2, x_3 ayant la même équation que Y , qui est une courbe non-singulière et de degré 3 donc elliptique, d'où il résulte que cette singularité n'est pas rationnelle (c'est à dire l'immersion $y \hookrightarrow Y$ n'est pas rationnelle).

THÉOREÈME 1. Si $\varphi: X \rightarrow Y$ est une contraction rationnelle relativement au morphisme $\varphi': X' \rightarrow Y'$, avec les mêmes notations comme dans l'introduction, on a :

$$R^p \varphi_*(I^n) = 0 \quad \text{pour chaque } p > 0 \text{ et } n \geq 0$$

(en particulier $R^p \varphi_* (O_X) = 0$ si $p > 0$). Supposons en outre que Y soit normale dans chaque point de Y' , alors

$$\varphi_* (I^n) = J^n$$

pour chaque $n \geq 0$ (en particulier $\varphi_* (O_X) = O_Y$).

DÉMONSTRATION. Le faisceau d'ideaux $I = O_X(1)$ est φ -ample, donc en vertu d'un critère d'amplitude pour les morphismes propres (EGA II (2.6.1)) on a

$$R^p \varphi_* (I^n) = 0 \quad \text{pour tout } p > 0 \text{ et } n \text{ assez grand.}$$

La suite exacte (pour tout $n \geq 0$) :

$$0 \rightarrow I^{n+1} \rightarrow I^n \rightarrow i_* O_{X'}(sn) \rightarrow 0$$

(déduite de la condition $i^* I = O_{X'}(s)$), donne la suite exacte de cohomologie :

$$R^p \varphi_* (I^{n+1}) \rightarrow R^p \varphi_* (I^n) \rightarrow R^p \varphi_* i_* O_{X'}(sn).$$

Si $p > 0$, tenant compte que les foncteurs i_* et j_* sont exacts, on a : $R^p \varphi_* i_* O_{X'}(sn) = R^p (\varphi \circ i)_* O_{X'}(sn) = R^p (j \circ \varphi')_* O_{X'}(sn) = j_* R^p \varphi'_* O_{X'}(sn) = 0$ pour tout $n \geq 0$, parce que $\varphi' : X' \rightarrow Y'$ coïncide avec la projection canonique d'un fibré projectif (à un isomorphisme près) et on tient compte de EGA III (2.1.15). Par conséquent l'homomorphisme

$$R^p \varphi_* (I^{n+1}) \rightarrow R^p \varphi_* (I^n)$$

est surjectif, d'où il résulte que $R^p \varphi_* (I^n) = 0$ pour tout $n \geq 0$ et $p > 0$ par induction décroissante sur n .

Il reste à montrer que, si Y est normale dans chaque point de Y' , on a :

$$\varphi_* (I^n) = J^n.$$

Premièrement on a l'égalité $\varphi_* O_X = O_Y$; en effet, dans la factorisation de Stein (EGA III (4.3.3)) :

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{\varphi_1} & Y_1 = \text{Spec } \varphi_* O_X \\ \varphi \downarrow & & \nwarrow \varphi_2 \\ Y & & \end{array}$$

φ est propre et alors $\varphi_* O_X$ est une O_Y -algèbre cohérente (EGA III (3.2)), donc φ_2 est un morphisme fini (EGA II (6.1.3)). Comme φ est un isomorphisme entre $X - X'$ et $Y - Y'$, il s'ensuit que φ_1 et φ_2 sont aussi des isomorphismes entre $X - X'$ et $Y_1 - \varphi_2^{-1}(Y')$, $Y_1 - \varphi_2^{-1}(Y')$ et $Y - Y'$ respectivement, donc φ_2 est un isomorphisme à cause du théorème principal de Zariski (Y étant normale le long de Y') et l'affirmation est prouvée.

D'autre part on a l'égalité $\varphi_*(I) = J$; pour prouver ça, il faut considérer la suite exacte :

$$0 \rightarrow I \rightarrow O_X \rightarrow i_* O_{X'} \rightarrow 0$$

qui donne la suite exacte de cohomologie :

$$0 \rightarrow \varphi_*(I) \rightarrow \varphi_*(O_X) \rightarrow \varphi_* i_*(O_{X'}) \rightarrow R^1 \varphi_*(I) = 0$$

et on conclut en tenant compte que $\varphi_* O_X = O_Y$ et $\varphi_* i_* O_{X'} = j_* O_{Y'}$.

Il reste seulement à prouver que $J^n = \varphi_*(I^n)$ pour chaque $n \geq 2$,

L'homomorphisme canonique d'algèbres graduées (EGA II (3.3.2))

$$\alpha : \bigoplus_{n \geq 0} J^n \rightarrow \bigoplus_{n \geq 0} \varphi_* I^n$$

est un TN -isomorphisme (EGA III (2.3)). Du diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccc} J^n & \xrightarrow{\alpha_n} & \varphi_*(I^n) \\ \downarrow & & \downarrow \\ O_Y & \xlongequal{\quad} & \varphi_*(O_X) \end{array}$$

il s'ensuit que α_n est injectif pour tout n , donc il reste à voir que est aussi surjectif pour tout n . Or $X' = \text{Proj } \bigoplus_{n \geq 0} J^n/J^{n+1}$ et le fibré en droites tautologique de ce Proj est $O_{P(E)}(s)$, d'où on a l'homomorphisme canonique d'algèbres graduées (EGA II (3.3.2)) :

$$\alpha' : \bigoplus_{n \geq 0} J^n/J^{n+1} \rightarrow \bigoplus_{n \geq 0} \varphi'_* O_{X'}(sn).$$

La composante de degré 1 de cet homomorphisme est surjective ; en effet de la suite exacte :

$$0 \rightarrow I^2 \rightarrow I \rightarrow i_* O_{X'}(s) \rightarrow 0$$

on déduit la suite exacte de cohomologie :

$$J = \varphi_* (I) \rightarrow \varphi_* i_* O_{X'}(s) \rightarrow R^1 \varphi_* (I^2)$$

et $R^1 \varphi_* (I^2) = 0$.

D'autre part, l'algèbre graduée $\bigoplus_{n \geq 0} \varphi'_* O_{X'}(sn)$ est engendrée par sa partie homogène de degré 1 en tant que $O_{X'}$ -algèbre, donc α' est un homomorphisme surjectif.

Enfin, de la suite exacte

$$0 \rightarrow I^{n+1} \rightarrow I^n \rightarrow i_* O_{X'}(sn) \rightarrow 0$$

on déduit la suite exacte de cohomologie

$$0 \rightarrow \varphi_* (I^{n+1}) \rightarrow \varphi_* (I^n) \rightarrow \varphi_* i_* O_{X'}(sn) \rightarrow R^1 \varphi_* (I^{n+1})$$

et puisque $R^1 \varphi_* (I^{n+1}) = 0$ on a :

$$\varphi_* (I^n) / \varphi_* (I^{n+1}) = j_* \varphi'_* O_{X'}(sn)$$

de tel sorte que l'homomorphisme canonique

$$\alpha'' : \bigoplus_{n \geq 0} J^n / J^{n+1} \rightarrow \bigoplus_{n \geq 0} \varphi_* (I^n) / \varphi_* (I^{n+1})$$

est surjectif et, comme $J^n = \varphi_* (I^n)$ pour n assez grand, on peut conclure par induction décroissante sur n .

COROLLAIRE 1. *Dans les hypothèses du théorème 1, l'homomorphisme canonique d'algèbres graduées (EGA II (3.3.2))*

$$\alpha' : \bigoplus_{n \geq 0} J^n / J^{n+1} \rightarrow \bigoplus_{n \geq 0} \varphi'_* O_{X'}(sn)$$

est un isomorphisme.

DÉMONSTRATION. Cela résulte immédiatement de l'égalité $J^n = \varphi_* (I^n)$ et de la suite exacte

$$0 \rightarrow I^{n+1} \rightarrow I^n \rightarrow i_* O_{X'}(sn) \rightarrow 0$$

qui donne la relation

$$\varphi_* (I^n) / \varphi_* (I^{n+1}) = j_* \varphi'_* O_{X'}(sn).$$

COROLLAIRE 2. Si $\varphi: X \rightarrow Y$ est une contraction rationnelle, X propre sur K et Y normale dans chaque point de Y' , alors $\chi(X, O_X) = \chi(Y, O_Y)$ (les caractéristiques d'Euler-Poincaré coïncident).

NOTE. Si X est propre sur K , alors Y l'est aussi, donc la deuxième caractéristique a du sens.

DÉMONSTRATION. Pour tous $p, q \geq 0$ la suite spectrale de Leray dont le terme initial est

$$E_2^{pq} = H^p(Y, R^q \varphi_* O_X)$$

converge vers $H^{p+q}(X, O_X)$. Le théorème 1 montre que cette suite spectrale dégénère d'où, en tenant compte de $\varphi_* O_X = O_Y$, on obtient les isomorphismes :

$$H^p(Y, O_Y) \cong H^p(X, O_X) \quad \text{pour tout } p \geq 0.$$

REMARQUE. Dans le corollaire 2 l'hypothèse de rationalité est essentielle; en effet, si l'on considère l'éclatement de l'exemple 3, on a l'inégalité (cf. [1]):

$$\chi(Y, O_Y) - \chi(X, O_X) \geq p_a(X') = 1$$

$p_a(X')$ désignant le genre arithmétique de la courbe X' .

PROPOSITION 1. Soient $\varphi': X' \rightarrow Y'$ un morphisme propre surjectif et $i: X' \hookrightarrow X$ une immersion fermée d'idéal I inversible. On suppose qu'il y a un morphisme $\varphi: X \rightarrow Y$ et une immersion fermée $j: Y' \hookrightarrow Y$ tels que le diagramme suivant

$$\begin{array}{ccc} X' & \xrightarrow{i} & X \\ \varphi' \downarrow & & \downarrow \varphi \\ Y' & \xrightarrow{j} & Y \end{array}$$

soit cartésien, que φ soit un isomorphisme entre $X - i(X')$ et $Y - j(Y')$ et que Y soit normale dans chaque point de $j(Y')$. Alors, si $\varphi = (\varphi_0, \varphi_1)$, l'espace topologique sous-jacent de Y s'identifie à l'espace quotient de X obtenu en tuant les fibres de φ , φ_0 -à l'application canonique dans l'espace quotient et l'homomorphisme $\varphi_1: O_Y \rightarrow (\varphi_0)_*(O_X)$ est un isomorphisme.

NOTE. Autrement dit, la proposition affirme que, si T est l'espace quotient de X qui s'obtient en tuant les fibres de φ et ψ l'application continue correspondante, l'espace annelé $(T, \psi_* O_X)$ est une variété dans les hypothèses ci-dessus.

DÉMONSTRATION. Puisque φ' est propre, il en résulte que φ est fermé, donc la topologie de Y est la topologie quotient de X pour la relation d'équivalence: $x \sim x' \iff \varphi(x) = \varphi(x')$. Le même raisonnement comme dans la démonstration du théorème 1 montre que, dans les conditions de la proposition, φ_1 est un isomorphisme.

REMARQUE. La proposition ci-dessus montre que, si X est rationnellement contractible relativement à φ' , alors la contraction $\varphi: X \rightarrow Y$ est uniquement déterminée avec la condition que Y soit normale le long de Y' .

§ 2. L'existence des contractions rationnelles.

Soient $\varphi': X' \rightarrow Y'$ un morphisme propre surjectif et $i: X' \hookrightarrow X$ une immersion fermée d'idéal I inversible. L'existence d'une contraction rationnelle de X relativement à φ' implique :

i) Il existe un faisceau E localement libre de rang $r \geq 2$ sur Y' (on suppose que $\dim Y' < \dim X'$) tel que $X' = P(E)$ et φ' coïncide avec l'application canonique de $P(E)$ dans Y' (à un isomorphisme près).

ii) $i^* I = O_{P(E)}(s)$ avec s un entier strictement positif.

i) et ii) constituent une généralisation des conditions de Castelnuovo-Enriques pour les courbes exceptionnelles de première espèce sur une surface algébrique.

Mais en général ces conditions n'impliquent plus l'existence d'une contraction rationnelle de X relativement à φ' (voir [8] pour un contre-exemple). Le problème est de trouver des conditions nécessaires et suffisantes pour que X soit rationnellement contractible relativement à φ' .

En tout cas, d'après la proposition 1, l'espace topologique sous-jacent T d'une telle contraction (dans le cas où elle existe) est parfaitement déterminé (la même chose pour les applications continues sous-jacentes de φ et de j), donc on a le diagramme commutatif dans la catégorie des espaces topologiques :

$$\begin{array}{ccc} X' & \xrightarrow{i} & X \\ \varphi' \downarrow & & \downarrow \psi \\ Y' & \xrightarrow{j'} & T \end{array}$$

L'existence d'une contraction rationnelle implique (en vertu du théorème 1):

$$R^1 \psi_*(I^2) = 0$$

Maintenant on peut énoncer le résultat principal de ce paragraphe:

THEOREME 2. Soient Y' une variété algébrique arbitraire, E un faisceau localement libre de rang $r \geq 2$ sur Y' , $X' = P(E)$, $\varphi': X' \rightarrow Y'$ la projection canonique, $i: X' \hookrightarrow X$ une immersion fermée d'idéal I inversible telle que $i^* I = \mathcal{O}_{P(E)}(s)$ avec s un entier strictement positif. On suppose en outre X normale dans chaque point de X' et $R^1 \psi_*(I^2) = 0$ avec $\psi: X \rightarrow T$ l'application continue canonique de X dans l'espace quotient T , obtenu en tuant les fibres de ψ . Dans ces conditions il existe une contraction rationnelle $\varphi: X \rightarrow Y$ de X relativement à φ' telle que Y soit normale dans chaque point de Y' .

La démonstration de ce théorème se fait en plusieurs étapes.

LEMME 1. Soient Y' une variété affine, $X' = Y' \times P^{r-1}$ ($r \geq 2$), $\varphi': X' \rightarrow Y'$ la projection canonique, $i: X' \hookrightarrow X$ une immersion fermée d'idéal I inversible. On suppose $i^* I = \mathcal{O}_{X'}(s)$ avec $s > 0$, X normale, les homomorphismes de restriction $H^0(X, \mathcal{O}_X) \rightarrow H^0(X', \mathcal{O}_{X'})$ et $H^0(X, I) \rightarrow H^0(X', \mathcal{O}_{X'}(s))$ surjectifs et $p\mathcal{O}_X = I$ avec $p = H^0(X, I)$. Alors X est rationnellement contractible relativement à φ' .

DÉMONSTRATION. Soit $Y_1 = \text{Spec } H^0(X, \mathcal{O}_X)$, comme $H^0(Y', \mathcal{O}_{Y'}) = H^0(X', \mathcal{O}_{X'})$, il en résulte la commutativité du diagramme

$$\begin{array}{ccc} X' & \xrightarrow{i} & X \\ \varphi' \downarrow & & \downarrow \varphi_1 \\ Y' & \xrightarrow{j_1} & Y_1 \end{array}$$

dans lequel l'immersion fermée j_1 correspond à la surjection

$$H^0(X, \mathcal{O}_X) \rightarrow H^0(X', \mathcal{O}_{X'}) = H^0(Y', \mathcal{O}_{Y'})$$

(donc l'idéal de Y' dans Y_1 est p), et φ_1 — à l'homomorphisme identique de l'anneau $H^0(X, \mathcal{O}_X)$. Considérons l'éclatement $\pi: X_1 \rightarrow Y_1$ de Y_1 de centre Y' ; parce que $p\mathcal{O}_X = I$ est inversible, il existe un morphisme unique

$\varepsilon: X \rightarrow X_1$ qui rend commutatif le diagramme

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{\varepsilon} & X_1 \\ & \searrow \varphi_1 & \swarrow \pi \\ & Y_1 & \end{array}$$

(par la propriété universelle de l'éclatement). On montrera les choses suivantes :

a) $\varepsilon(X') = \pi^{-1}(Y')$.

b) Il y a un voisinage U de X' dans X tel que ε/U soit une immersion ouverte.

Ça suffit car alors, avec les notations précédentes, l'espace annelé (T, O_T) , $O_T = \psi_* O_X$ en résultera une variété algébrique.

On a d'abord que ε est le morphisme associé à l'homomorphisme d'algèbres graduées

$$\bigoplus_{n \geq 0} p^n \rightarrow \bigoplus_{n \geq 0} H^0(X, I^n)$$

dont les composantes sont les inclusion canoniques. Il en résulte que $\varepsilon \circ i$ sera associé à la composition

$$\bigoplus_{n \geq 0} p^n \rightarrow \bigoplus_{n \geq 0} H^0(X, I^n) \rightarrow \bigoplus_{n \geq 0} H^0(X', i^* I^n) = \bigoplus_{n \geq 0} H^0(X', O_{X'}(sn)).$$

Puisque la composante de degré 1 de cette composition est par hypothèse surjective et l'algèbre graduée $\bigoplus_{n \geq 0} H^0(X', O_{X'}(sn))$ est engendrée par les éléments homogènes de degré 1 (EGA III (2.1.12)), il résulte que $\varepsilon \circ i$ est associé à un homomorphisme surjectif d'algèbres graduées, c'est à dire $\varepsilon \circ i$ est une immersion fermée. Donc $\dim X' \leq \dim \pi^{-1}(Y')$, ou $\dim X \leq \dim Y_1$, ou bien $\dim X = \dim Y_1$, car φ_1 étant dominant, l'inégalité contraire est aussi vraie.

L'hypothèse que X est normale implique $H^0(X, O_X)$ -intégralement clos dans le corps des fonctions rationnelles $K(X)$, donc φ_1 est un morphisme birationnel. En effet, $\dim X = \dim Y_1$ implique $K(X)$ algébrique sur $K(Y_1)$; soit $f \in K(X)$ arbitraire, puisque f est la racine d'un polynôme non-nul à coefficients dans $K(Y_1)$, il en résulte fg entier sur $H^0(X, O_X)$ pour un $g \in H^0(X, O_X)$ convenable, donc $fg = h \in H^0(X, O_X)$, c'est à dire $f \in K(Y_1)$.

Chaque point $x \in X'$ est isolé dans sa fibre par rapport à ε compte tenu des relations $\varepsilon^{-1}(\pi^{-1}(Y')) = \varphi_1^{-1}(Y') = X'$. D'après le théorème principal de Zariski il y a un voisinage U' de X' dans X et une immersion

ouverte $\eta: U' \hookrightarrow Z$ avec Z la normalisée de X_1 et un morphisme fini $\zeta: Z \rightarrow X$ qui rendent commutatif le diagramme

$$\begin{array}{ccc} U' & \xrightarrow{\eta} & Z \\ \eta \downarrow & & \downarrow \zeta \\ X & \xrightarrow{\varepsilon} & X \end{array}$$

Par conséquent $\eta(X')$ est une composante connexe de $(\pi \circ \zeta)^{-1}(Y')$. Mais Y_1 est normale et le théorème de connexion de Zariski implique $(\pi \circ \zeta)^{-1}(Y') = \eta(X')$, donc $\pi^{-1}(Y') = \varepsilon(X')$, i.e. a est démontré.

Il en résulte que la restriction de ζ à $(\pi \circ \zeta)^{-1}(Y')$ est une bijection et, comme ζ est fini, pour chaque $z \in (\pi \circ \zeta)^{-1}(Y') = \eta(X')$ l'homomorphisme d'anneaux locaux

$$\zeta_z^*: O_{X_1, \zeta(z)} \rightarrow O_{Z, z}$$

est aussi fini, i.e. pour tout $x \in X'$ l'homomorphisme d'anneaux locaux

$$\varepsilon_x^*: O_{X_1, \varepsilon(x)} \rightarrow O_{X, x}$$

est fini. Pour démontrer b) il suffit de voir que ε_x^* est un isomorphisme pour tout $x \in X'$. Or ces deux anneaux locaux ont le même corps résiduel, donc par Nakayama il suffit de montrer qu'on a

$$(*) \quad m_{X_1, \varepsilon(x)} O_{X, x} = m_{X, x}$$

($m_{X, x}$ étant l'idéal maximal de l'anneau local $O_{X, x}$). En effet l'injectivité de ε_x^* est garantie par la birationalité de ε , et, d'autre part, si l'on considère le diagramme commutatif:

$$\begin{array}{ccccccc} \circ & \longrightarrow & p_y O_{X_1, \varepsilon(x)} & \longrightarrow & O_{X_1, \varepsilon(x)} & \longrightarrow & O_{\pi^{-1}(Y'), \varepsilon(x)} \longrightarrow \circ \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ \circ & \longrightarrow & I_x & \longrightarrow & O_{X, x} & \longrightarrow & O_{X', x} \longrightarrow \circ \end{array}$$

dans lequel les lignes sont exactes, $y = \varphi'(x)$ et la dernière flèche verticale

est une surjection ($\varepsilon \circ i$ étant immersion fermée), la relation (*) résulte aussitôt de la relation $pO_X = I$ ce qui achève la démonstration.

LEMME 2. Soient Y' une variété algébrique, E un fibré vectoriel sur Y' , $X' = P(E)$, $\varphi': X' \rightarrow Y'$ la projection canonique, $i: X' \hookrightarrow X$ une immersion fermée d'idéal I inversible. Supposons en outre X normale et que pour chaque $y \in Y'$ il y a un voisinage Y'_y de y dans Y' , un ouvert X_y dans X tel que $X' \cap X_y = \varphi'^{-1}(Y'_y)$ et X_y soit rationnellement contractible relativement au morphisme $\varphi'^{-1}(Y'_y) \rightarrow Y'_y$ à une variété Y_y normale. Alors X est rationnellement contractible relativement à φ' et la variété obtenue par contraction est normale.

DÉMONSTRATION. On choisit un recouvrement fini $Y'_i = Y'_{y_i}$ de Y' avec les propriétés ci-dessus; si $\psi_i: X_i \rightarrow T_i$ (respectivement $\psi: X \rightarrow T$) est l'application continue canonique dans l'espace quotient obtenu en tuant les fibres de φ'_i (respectivement de φ'), (T_i, O_{T_i}) avec $O_{T_i} = (\psi_i)_* O_{X_i}$ est un espace annelé isomorphe avec la variété Y_i . En remplaçant éventuellement X par l'ouvert $\bigcup X_i$, on a que l'espace annelé (T, O_T) avec $O_T = \psi_* O_X$ admet un recouvrement fini ouvert $\{T_i\}_i$, tel que la structure induite sur T_i soit isomorphe avec la variété Y_i . Pour conclure il reste à prouver que la diagonale Δ est fermée dans $Y \times Y$ ($Y = (T, O_T)$), ce qui revient à montrer que $\Delta_{ij} = \Delta \cap (Y_i \times Y_j)$ est fermée dans $Y_i \times Y_j$ pour tous i et j . Or, si l'on désigne par D la diagonale de $X \times X$, alors $D_{ij} = D \cap (X_i \times X_j)$ est fermée dans $X_i \times X_j$ (X étant variété) et l'affirmation résulte de la relation évidente $(\psi_i \times \psi_j)(D_{ij}) = \Delta_{ij}$.

DÉMONSTRATION DU THEOREME 2. L'hypothèse $R^1 \psi_*(I^2) = 0$ implique $R^1 \psi_*(I) = 0$; en effet, en écrivant la suite exacte

$$0 \rightarrow I^2 \rightarrow I \rightarrow i_* O_{X'}(s) \rightarrow 0$$

on obtient la suite exacte de cohomologie

$$R^1 \psi_*(I^2) \rightarrow R^1 \psi_*(I) \rightarrow R^1 \psi_* i_* O_{X'}(s)$$

et, comme $\psi \circ i = j' \circ \varphi'$ et i_* et j_* sont des foncteurs exacts, on a:

$$R^1 \psi_* i_* O_{X'}(s) = R^1 (\psi \circ i)_* O_{X'}(s) = R^1 (j' \circ \varphi')_* O_{X'}(s) = j'_* R^1 \varphi'_* O_{X'}(s) = 0$$

puisque $s > 0$. Donc l'homomorphisme

$$R^1 \psi_*(I^2) \rightarrow R^1 \psi_*(I)$$

est surjectif.

Pour démontrer le théorème il suffira, compte tenu du lemme 2, de prouver qu'on peut restreindre convenablement Y' autour du chaque point $y \in Y'$ tel que les hypothèses du lemme 1 soient satisfaites.

Soit donc $y \in Y'$; on peut remplacer Y' par un ouvert affine assez petit de telle manière que la restriction du fibré vectoriel E à cet ouvert soit triviale, i.e. on peut supposer Y' affine d'anneau de coordonnées $K[\alpha_1, \dots, \alpha_n]$ et E — un $K[\alpha_1, \dots, \alpha_n]$ -module libre de base $e_1, e_2, \dots, e_r$. Alors $H^0(X', O_{X'}(s))$ coïncide avec la s -ième puissance symétrique du module libre E , donc $H^0(X', O_{X'}(s))$ est un $K[\alpha_1, \dots, \alpha_n]$ -module libre ayant une base formée de tout les monômes de degré s en $e_1, e_2, \dots, e_r$ (en nombre de $t = \binom{s+r-1}{r-1}$). On la denote par $\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_t$.

D'autre part, on a les suites exactes :

$$0 \rightarrow I \rightarrow O_X \rightarrow i_* O_{X'} \rightarrow 0$$

$$0 \rightarrow I^2 \rightarrow I \rightarrow i_* O_{X'}(s) \rightarrow 0$$

d'où on obtient les suites exactes de cohomologie :

$$\psi_* O_X \rightarrow \psi_* i_* O_{X'} \rightarrow R^1 \psi_*(I) = 0$$

$$\psi_* I \rightarrow \psi_* i_* O_{X'}(s) \rightarrow R^1 \psi_*(I^2) = 0$$

donc les homomorphismes suivants sont surjectifs :

$$(*) \quad \psi_* O_X \rightarrow \psi_* i_* O_{X'} = j'_* \varphi'_* O_{X'} = j'_* O_{Y'}$$

$$(**) \quad \psi_* I \rightarrow \psi_* i_* O_{X'}(s) = j'_* \varphi'_* O_{X'}(s) = j'_* S^s(E)$$

($S^s(E)$ étant la s -ième puissance symétrique de E). La surjectivité de (**) signifie qu'en restreignant éventuellement Y' autour de y , on peut supposer en outre qu'il existe $\varepsilon'_i \in H^0(X, I)$ tels que $i^*(\varepsilon'_i) = \varepsilon_i$. On va voir qu'il y a un ouvert affine Y'_0 dans Y' qui contient y tel que, si $Y'_0 = \text{Spec } K[\xi_1, \dots, \xi_m]$, il existe $\bar{\xi}_t \in K(X)$ ($1 \leq t \leq m$) définies dans un ouvert X_0 tels que $X_0 \cap X' = \varphi'^{-1}(Y'_0)$ et $i^* \bar{\xi}_t = \varphi'^*(\xi_t)$ pour chaque $t = 1, \dots, m$.

En effet, la surjectivité de (*) signifie qu'il y a $\bar{\alpha}_j \in K(X)$ ($1 \leq j \leq n$) définies dans un voisinage ouvert V dans X de la fibre $\varphi'^{-1}(y)$, telles que $i^* \bar{\alpha}_j = \varphi'^*(\alpha_j)$. Soit $F = X' - V$; alors $\varphi'(F)$ est fermé dans Y' , φ' étant propre. Il est clair que $\varphi'^{-1}(Y' - \varphi'(F)) \subset V$ et $y \in Y' - \varphi'(F)$. Il existe alors un polynôme $A \in K[T_1, \dots, T_n]$ tel que si $f = A(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$, alors

$y \in D(f) \subset Y' = \varphi'(F)$. Posons $Y'_0 = D(f) = \text{Spec } K[\alpha_1, \dots, \alpha_n, f^{-1}]$, $X'_0 = \varphi'^{-1}(Y'_0)$, $g = A(\bar{\alpha}_1, \dots, \bar{\alpha}_n)$; c'est clair que $i^*(g) = \varphi'^*(f)$, $g(x) \neq 0$ pour tout $x \in X'_0$, donc $X'_0 \subset D(g)$ où $D(g) = \{x \in V/g(x) \neq 0\}$. On peut trouver un ouvert $X_0 \subset D(g)$ dans X tel que $X_0 \cap X' = X'_0$ et $g^{-1} \in H^0(X_0, O_X)$. L'ouvert cherché Y'_0 et $D(f)$, $m = n + 1$, $\xi_1 = \alpha_1, \dots, \xi_{m-1} = \alpha_n$, $\xi_m = f^{-1}$, $\bar{\xi}_1 = \bar{\alpha}_1, \dots, \bar{\xi}_{m-1} = \bar{\alpha}_n$, $\bar{\xi}_m = g^{-1}$.

On peut donc supposer Y' affine, X normale et les homomorphismes

$$H^0(X, I) \rightarrow H^0(X', O_{X'}(s))$$

$$H^0(X, O_X) \rightarrow H^0(X', O_{X'})$$

surjectifs. Il reste seulement à prouver la relation $pO_X = I$ où $p = H^0(X, I)$. Pour cela il suffit de montrer que

$$(***) \quad \sum_{i=1}^t \varepsilon'_i O_{X,x} = I_x$$

pour chaque $x \in X'$.

En effet, $X' = P(E) = \bigcup_{i=1}^t D_+(\varepsilon_i)$, donc pour tout $x \in X'$ il y a un i tel que $\varepsilon_i(x) \neq 0$ (i.e. $\varepsilon_i \notin m_x(O_{X'}(s))_x$). Alors $\varepsilon'_i(x) \neq 0$ compte tenu de la relation $\varepsilon_i = i^*(\varepsilon'_i)$ et, comme l'idéal I_x est principal, $\varepsilon'_i O_{X,x} = I_x$, d'où (***) et le théorème 2 est complètement démontré.

COROLLAIRE 1. *Les hypothèses sont celles du théorème 2 et soit $\varphi: X \rightarrow Y$ la contraction (qui est unique). Pour que Y' soit localement intersection complète dans Y il faut et il suffit que $i^* I = O_{P(E)}(1)$.*

DÉMONSTRATION. On a en vertu du corollaire 1 du théorème 1 que $J/J^2 = \varphi'_* O_{P(E)}(1)$ (on a supposé vraie la relation $i^* I = O_{P(E)}(1)$, car l'implication inverse résulte en tenant compte du premier exemple); donc si r est le rang du fibré E , alors J_y/J_y^2 est un $O_{Y',y} = O_{Y,y}/J_y$ -module libre de base (disons) $\bar{f}_1, \dots, \bar{f}_r$ ($f_i \in O_{Y,y}$), compte tenu de l'égalité $\varphi'_* O_{P(E)}(1) = E$, (EGA I||I (2.1.15)). Par Nakayama $f_1, \dots, f_r$ engendrent J_y , et comme $r = \text{codim}_Y Y'$, il faut montrer que ces éléments forment une $O_{Y,y}$ -suite.

On a donc réduit le problème au suivant: si A est un anneau local, p un idéal premier d'hauteur r et engendré par r éléments $f_1, \dots, f_r$, alors ces éléments forment une A -suite. Pour cela il suffit de prouver que si A est un anneau local (pas nécessairement intègre), $f \in A$ un élément qui engendre un idéal premier de hauteur 1, alors f est non-diviseur de zéro dans A . Soit donc $p = fA$, alors le localisé A_p est de valuation discrète et

f est un générateur de l'idéal maximal pA_p . Si $fg = 0$ il en résulte $g \in p$ car autrement on aurait $f = 0$ dans A_p , donc si $g \neq 0$ on aurait $v(g) > 0$ (v étant la fonction ordre dans A_p). Alors on pourrait écrire $bg = f^{v(g)}a$ avec $a, b \notin p$ et il résulterait $abf^{v(g)+1} = 0$ dans A , i.e. f était nilpotent dans A_p .

COROLLAIRE 2. *Dans les hypothèses du corollaire 1, si Y' est non-singulière et $i^*I = O_{P(E)}(1)$, alors Y est non-singulière dans chaque point de Y' (autrement dit X est régulièrement contractible relativement à φ').*

DÉMONSTRATION. D'après le corollaire 1 Y' est localement intersection complète dans Y et, comme Y' est non-singulière, Y résulte aussi non-singulière dans chaque point de Y' .

REMARQUE. Ce corollaire est le principal résultat de [8] concernant les contractions régulières. On a déjà vu dans l'exemple 2 qu'il y a des contractions rationnelles n'étant pas régulières (s peut être un entier positif arbitraire); d'autre part si $s = 1$ il suffit de prendre Y' avec des singularités mais localement intersection complète dans Y pour avoir des contractions rationnelles et non-régulières. Dans la section suivante on montrera qu'il existe telles contractions avec la propriété que X soit factorielle dans chaque point de X' (donc normale dans ces points).

§ 3. Quelques exemples.

LEMME 3. *Soient A un anneau factoriel, p un idéal premier engendré par les éléments $f_1, \dots, f_r$ qui forment une A suite et f_1 soit irréductible. Alors l'anneau*

$$A[f_2/f_1, \dots, f_r/f_1]$$

est aussi factoriel.

DÉMONSTRATION. Soit $v: A - 0 \rightarrow Z$ la fonction ordre par rapport à l'idéal premier p , i.e. si $x \neq 0$

$$v(x) = \max \{ n \in Z / x \in p^n \}$$

donc $x \in p^{v(x)}$ et $x \notin p^{v(x)+1}$. Si $x, y \in A - 0$, alors

$$v(xy) = v(x) + v(y)$$

En effet, il suffit de montrer que l'anneau gradué associé à p :

$$G(p) = A/p \oplus p/p^2 \oplus p^2/p^3 \oplus \dots$$

est intègre. Mais dans les hypothèses précédentes $f_i \bmod. p^2$ forment une base de p/p^2 en tant que A/p -module et l'homomorphisme canonique

$$S_{A/p}(p/p^2) \rightarrow \bigoplus_{n \geq 0} p^n/p^{n+1}$$

est un isomorphisme ([9] proposition (3.4) et lemme (2.3)), $S_{A/p}(p/p^2)$ étant l'algèbre symétrique du A/p -module p/p^2 . Donc cet anneau est isomorphe à un anneau de polynômes en r indéterminées à coefficients dans A/p , évidemment intègre.

Si $A' = A[f_2/f_1, \dots, f_r/f_1]$ alors $x/f_1^\alpha \in A'$ si et seulement si $\alpha \leq v(x)$ et dans le cas où $\alpha < v(x)$, x/f_1^α est un multiple de f_1 :

$$x/f_1^\alpha = x/f_1^{v(x)} \cdot f_1^{v(x)-\alpha}.$$

Pour finir il suffit de voir que f_1 est un élément premier dans A' , car alors l'anneau de fractions $A'_f = A_f$ est factoriel et le lemme résultera à l'aide du suivant théorème de Nagata: si A' est un anneau commutatif intègre, $f \in A'$ un élément premier tel que A'_f soit factoriel, alors A' est aussi factoriel (voir par exemple [10]).

Soit alors $z/f_1^\gamma \cdot f_1 = x/f_1^\alpha \cdot y/f_1^\beta$ (f_1 diviseur du produit $x/f_1^\alpha \cdot y/f_1^\beta$); si $\alpha < v(x)$ ou $\beta < v(y)$, f_1 était un diviseur de x/f_1^α ou de y/f_1^β respectivement d'après la remarque ci-dessus. Dans le cas contraire on aurait (dans A):

$$f^{v(x)+v(y)+1} z = f^\gamma x y$$

d'où $v(x) + v(y) + v(z) + 1 = \gamma + v(x) + v(y)$, c'est à dire $\gamma = v(z) + 1$ ce qui est absurde puisque $z/f_1^\gamma \in A'$.

EXEMPLE 4. Soient $A = K[T_1, \dots, T_n]$ l'anneau de polynômes à coefficients dans le corps K et $f_1, \dots, f_r$ un système de polynômes qui forment une A -suite tels que l'idéal $p = (f_1, \dots, f_r)$ soit premier et f_i irréductible pour tout i . Si Y est l'espace affine K^n et Y' la sous-variété de Y d'équations $f_i = 0$ ($i = 1, \dots, r$), alors l'immersion $Y' \hookrightarrow Y$ est rationnelle et l'éclatement X de Y de centre Y' est factoriel, puisque X admet un recouvrement ouvert X_i ($i = 1, \dots, r$) où

$$X_i = \text{Spec } A[f_1/f_i, \dots, f_r/f_i]$$

et on tient compte du lemme 3. En outre la contraction $\varphi: X \rightarrow Y$ a la propriété $i^* I = O_{X'}(1)$. Mais c'est évident que Y' peut être choisie de telle façon qu'elle aie des singularités: par exemple $n = 3$, $f_1 = T_1$ et $f_2 = T_2^2 - T_3^3$ a l'origine comme singularité.

§ 4. Contractions rationnelles à un point.

Soient Y une variété algébrique, $y \in Y$ un point. L'immersion fermée $y \hookrightarrow Y$ est rationnelle si et seulement si le lieu exceptionnel de l'éclatement de Y de centre y est isomorphe à l'espace projectif P^{r-1} où $r = \dim X$ et $i^* I = O(s)$ avec $s > 0$. Avec les notations du n. 2 on a :

THEOREME 3. *Soient X une variété algébrique projective de dimension r , $i: X' \hookrightarrow X$ une immersion fermée d'idéal I inversible. Supposons $X' = P^{r-1}$, $i^* I = O(s)$ avec $s > 0$ et X normale dans chaque point de X' . Alors X est rationnellement contractible le long de X' (i.e. relativement au morphisme structural $X' \rightarrow \text{Spec } K$) à un point normal et la contraction Y obtenue (qui est unique) est aussi projective. De plus $\chi(X, O_X) = \chi(Y, O_Y)$.*

NOTE. Le théorème 3 montre que la condition cohomologique $R^1\psi_*(I^2) = 0$ du théorème 2 est une conséquence des conditions $X' = P^{r-1}$ et $i^* I = O(s)$ où $s > 0$ dans ce cas, donc on a un « vrai critère » de contractibilité rationnelle dans le sens classique.

DÉMONSTRATION. On va voir qu'on peut se placer dans les hypothèses du lemme 1. Pour cela soit H un faisceau inversible très ample sur X ; on peut supposer que $i^* H = O(ts)$ avec $t > 0$ puisque H est très ample, remplaçant au besoin H par $H^{\otimes s}$. L'hypothèse $i^* I = O(s)$ entraîne $i^* I^N = O(sN)$ pour tout entier N , donc on a la suite exacte :

$$0 \rightarrow I^{N+1} \rightarrow I^N \rightarrow i_* O(sN) \rightarrow 0.$$

Si l'on choisie un entier positif assez grand tel que $H^1(X, I(n)) = 0$ avec $I(n) = I \otimes H^{\otimes n}$, on obtient par tensorisation avec $I(n)$ la suite exacte :

$$0 \rightarrow I^{N+1} \otimes I(n) \rightarrow I^N \otimes I(n) \rightarrow i_* O(s(N+1+tn)) \rightarrow 0.$$

En prenant successivement pour N les valeurs $-1, -2, \dots, -tn-1$, on a les suites exactes :

$$\begin{aligned} 0 \rightarrow I(n) &\rightarrow I^{-1} \otimes I(n) \rightarrow i_* O(stn) \rightarrow 0 \\ 0 \rightarrow I^{-1} \otimes I(n) &\rightarrow I^{-2} \otimes I(n) \rightarrow i_* O(s(tn-1)) \rightarrow 0 \\ \cdot &\quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ 0 \rightarrow I^{-nt+1} \otimes I(n) &\rightarrow I^{-nt} \otimes I(n) \rightarrow i_* O(s) \rightarrow 0 \\ 0 \rightarrow I^{-nt} \otimes I(n) &\rightarrow I^{-nt-1} \otimes I(n) \rightarrow i_* O_{X'} \rightarrow 0 \end{aligned}$$

d'où les suites exactes de cohomologie :

$$\begin{array}{ccccccc}
 H^1(X, I(n)) & \rightarrow & H^1(X, I^{-1} \otimes I(n)) & \rightarrow & H^1(X', O(stn)) & & \\
 H^1(X, I^{-1} \otimes I(n)) & \rightarrow & H^1(X, I^{-2} \otimes I(n)) & \rightarrow & H^1(X', O(s(tn-1))) & & \\
 \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\
 H^1(X, I^{-nt+1} \otimes I(n)) & \rightarrow & H^1(X, I^{-nt} \otimes I(n)) & \rightarrow & H^1(X', O(s)). & &
 \end{array}$$

D'autre part, $H^1(X', O(a)) = 0$ si $a \geq 0$ parce que $X' = P^{r-1}$, d'où il s'ensuit que la relation $H^1(X, I(n)) = 0$ entraîne $H^1(X, I^{-nt+1} \otimes I(n)) = 0$ et $H^1(X, I^{-nt} \otimes I(n)) = 0$, i.e. les homomorphismes suivants :

$$H^0(X, I^{-nt} \otimes I(n)) \rightarrow H^0(X', O(s))$$

$$H^0(X, I^{-nt} \otimes I(n)) \rightarrow H^0(X', O_X)$$

sont surjectifs. De la deuxième surjection on déduit l'existence d'une section $\alpha \in H^0(X, I^{-nt-1} \otimes I(n))$ telle que $\alpha/X' = 1$, donc, si on considère le diviseur de Cartier D de la section α , on a $X' \cap \text{Supp } D = \emptyset$, c'est à dire $X' \subset U = X - \text{Supp } D$; alors D/U est linéairement équivalent à zéro, d'où $I^{-nt} \otimes I(n)/U = I/U$ et en tenant compte du diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccc}
 H^0(X, I^{-nt} \otimes I(n)) & & \\
 \downarrow & \searrow & \\
 H^0(U, I) & \nearrow & H^0(X', O(s))
 \end{array}$$

on obtient :

LEMME 4. Dans les hypothèses du théorème 4, il y a un voisinage ouvert U de X' dans X tel que l'homomorphisme de restriction

$$i^* : H^0(U, I) \rightarrow H^0(X', O(s))$$

soit surjectif et U soit normale.

Comme l'homomorphisme de restriction $H^0(U, O_X) \rightarrow H^0(X', O_{X'}) = K$ est toujours surjectif dans ce cas, pour prouver l'existence de la contraction il reste seulement à voir qu'il existe un voisinage ouvert U' de X'

dans X tel que $pO_{U'} = I/U'$ (où $p = H^0(U, I)$). Dans ce but on choisie une base $(\varepsilon_i)_i$ de l'espace vectoriel (sur K) $H^0(X', O(s))$ et $\varepsilon'_i \in H^0(U, I)$ (U étant l'ouvert du lemme 4) tels que $i^* \varepsilon'_i = \varepsilon_i$. Puisque $X' = P^{r-1} = \bigcup_i D_+(\varepsilon_i)$, pour tout $x \in X'$ il existe un i tel que $x \in D_+(\varepsilon_i)$, i. e. $\varepsilon_i \notin m_{X',x}(i^* I)_x = m_{X',x} O(s)_x$. Compte tenu de l'égalité $\varepsilon_i = i^* \varepsilon'_i$, on en déduit $\varepsilon'_i(x) \neq 0$, i. e. $\varepsilon'_i \notin m_{X,x} I_x$ et, comme I_x est principal, $I_x = \varepsilon'_i O_{X,x}$, c'est à dire

$$\sum_i \varepsilon'_i O_{X,x} = I_x$$

pour tout $x \in X'$. On en déduit donc l'existence du voisinage U' tel que $pO_{U'} = I/U'$.

L'égalité $\chi(X, O_X) = \chi(Y, O_Y)$ a été déjà prouvée dans le corollaire 2 du théorème 1. Il reste à voir que Y est projective. Avec les notations du lemme 4, $I^{-nt-1} \otimes I(n)/X - X' = H^n/X - X'$ est très ample sur $X - X'$, parce que H est lui-même très ample sur X . D'autre part $i^*(I^{-nt-1} \otimes I(n)) = O_X$ et la restriction

$$i^*: H^0(X, I^{-nt-1} \otimes I(n)) \rightarrow H^0(X', O_{X'})$$

est surjective, donc si $\alpha \in H^0(X, I^{-nt-1} \otimes I(n))$ est une section telle que $i^*(\alpha) = 1$, alors l'application canonique

$$u: X \rightarrow P(H^0(X, I^{-nt-1} \otimes I(n)))$$

est partout définie et isomorphisme entre $X - X'$ et $u(X - X')$ ($P(V)$ étant l'espace projectif de l'espace vectoriel V). Mais $u(X')$ se réduit à un seul point puisque, si on choisit une base $\alpha_1 = \alpha, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ de l'espace vectoriel $H^0(X, I^{-nt-1} \otimes I(n))$ telle que $i^*(\alpha_i) = 0$ pour $i \geq 2$, alors $u(X') = (1, 0, \dots, 0)$. Par conséquent $u(X)$ est une variété projective, $u(X') = y'$ et u est un isomorphisme entre $X - X'$ et $u(X) - y'$. On peut supposer $u(X)$ normale dans y' , en remplaçant au besoin $u(X)$ par sa normalisée (qui reste encore projective). La proposition 1 montre que Y doit être isomorphe avec $u(X)$, donc Y est projective, ce qui achève la démonstration du théorème 3.

PROPOSITION 2. Soient Y une variété algébrique de dimension $r \geq 2$, $y \in Y$ un point normal sur Y tel que l'immersion fermée $y \hookrightarrow Y$ soit rationnelle. Alors, si m_y est l'idéal maximal de l'anneau local $O_{Y,y}$, on a

$$\dim_K m_y^n / m_y^{n+1} = \binom{ns + r - 1}{r - 1}$$

où s est l'entier déduit de l'égalité $i^* I = O(s)$. En particulier la dimension de l'espace tangent de Zariski de Y dans y est $\binom{s+r-1}{r-1}$.

DÉMONSTRATION. D'après le corollaire 1 du théorème 1 on a $J^n/J^{n+1} = \varphi'_*(O_{X'}(sn)) = H^0(X', O(sn))$; d'autre part, le faisceau J^n/J^{n+1} est concentré dans le point y , donc c'est un $O_{Y,y}$ -module isomorphe avec m_y^n/m_y^{n+1} . Il reste à remarquer que :

$$\dim_K H^0(X', O(ns)) = \binom{ns+r-1}{r-1}$$

(EGA III (2.1.15) ou FAC chap. III).

COROLLAIRE 1. Dans les hypothèses de la proposition 2, le point y est non-singulier sur Y si et seulement si $s = 1$.

En effet, y est non-singulier si et seulement si la dimension de l'espace tangent de Zariski de Y dans y est égale à r , d'où le corollaire compte tenu de la proposition 2.

COROLLAIRE 2. (Théorème de Kodaira). Soient $X' = P^{r-1}$, $i: X' \hookrightarrow X$ une immersion fermée d'idéal I inversible avec X projective. Alors X est rationnellement contractible le long de X' à un point non-singulier (i.e. régulièrement contractible) si et seulement si $i^* I = O(1)$ et la variété obtenue par contraction est aussi projective.

C'est une conséquence immédiate du théorème 3 et du corollaire ci-dessus.

COROLLAIRE 3. Dans les hypothèses de la proposition 2, la multiplicité de l'anneau local $O_{Y,y}$ est s^{r-1} .

DÉMONSTRATION. Si $P(n) = \text{longueur}(O_{Y,y}/m_y^n)$, alors $P(n)$ est une fonction polynomiale de degré r :

$$P(n) = a_0 n^r + \dots + a_r, \quad a_i \in \mathbb{Q}$$

et la multiplicité de $O_{Y,y}$ est par définition $r! a_0$, qui est la même chose que $(r-1)! b_0$ avec b_0 le coefficient de n^{r-1} dans la fonction différence

$$\Delta P(n) = P(n+1) - P(n)$$

(car $r \geq 2$). Or

$$\Delta P(n) = \dim_K m_y^n/m_y^{n+1}$$

donc $b_0 = s^{r-1}/(r-1)!$.

On peut exprimer le multiplicité de $O_{X,y}$ en termes de la théorie d'intersection (au sens de S. Kleiman [7] par exemple).

PROPOSITION 3. Soient $X' = P^{r-1}$ et $i: X' \hookrightarrow X$ une immersion fermée d'idéal I inversible. Si $i^* I = O(s)$, alors :

$$(X')^r = (-1)^{r-1} s^{r-1}.$$

Dans le cas où r est pair, les conditions suivantes sont équivalentes :

- a) $s > 0$.
- b) $(X')^r < 0$.

DÉMONSTRATION. Tout d'abord X est non singulière dans chaque point de X' puisque X' l'est et l'idéal I est inversible, donc la multiplicité d'intersection $(X')^r$ est comprise dans le sens classique, X' étant considérée comme diviseur de Weil (qui correspond au faisceau inversible I^{-1}). On a donc :

$$(X')^r = (X' \cdot (I^{-1})^{r-1}) = (i^* (I^{-1})^{r-1}) = (O(-s)^{r-1}) = (-s)^{r-1} = (-1)^{r-1} s^{r-1}.$$

Dans le cas où r est pair, l'équivalence des conditions résulte aussitôt.

NOTE. Si r est impair une telle équivalence n'est pas vraie, car alors $(X')^r = s^{r-1}$ et, par exemple pour $s = \pm 1$, on a $(X')^r = 1$.

COROLLAIRE. Dans les hypothèses de la proposition 3, X est rationnellement contractible le long de X' (pour $\dim X$ paire) si et seulement si $(X')^r < 0$; alors la multiplicité de l'anneau $O_{X,y}$ (dans les mêmes notations que ci-dessus) est $-(X')^r$. En général cette multiplicité est $(-1)^{r-1} (X')^r$.

REMARQUE. Soient Y une variété algébrique, $y \in Y$ un point qui donne une immersion rationnelle tel que $i^* I = O(s)$ ($s > 0$). Alors le gradué de $O_{X,y}$ par rapport à son idéal maximal m_y est isomorphe avec l'anneau gradué $K[T_1, \dots, T_r]^{(s)}$, T_i étant indéterminées et, si S est un anneau gradué par $S^{(s)}$ (pour tout $s > 0$) on désigne l'anneau gradué tel que $S_n^{(s)} = S_{ns}$ pour tout $n \in \mathbb{Z}$.

EXEMPLE 5. Soient $X' = P^{r-1}$, $X = V(O(s))$ avec $s > 0$ et $r \geq 2$, $i: X' \hookrightarrow X$ la section nulle (voir l'exemple 2). Alors X est rationnellement contractible le long de X' et la variété contractée est

$$Y = \operatorname{Spec} \bigoplus_{n \geq 0} H^0(X', O(ns)).$$

Cette variété est un cône affine et l'algèbre graduée $\bigoplus_{n \geq 0} H^0(X', \mathcal{O}(ns))$ est isomorphe avec l'algèbre sur K engendrée par tous les monômes de degré s en r indéterminées, qui à son tour, est isomorphe avec l'algèbre quotient de la K -algèbre des polynômes en indéterminées $T_{i_1}, \dots, T_{i_r}$ avec $i_k \geq 0$ et $i_1 + \dots + i_r = s$ (en nombre de $\binom{s+r-1}{r-1}$) factorisée par l'idéal engendré par les polynômes de la forme :

$$(1) \quad T_{i_1, \dots, i_r} T_{j_1, \dots, j_r} - T_{h_1, \dots, h_r} T_{e_1, \dots, e_r}$$

tels que $i_k + j_k = h_k + e_k$, $k = 1, \dots, r$ (l'algèbre de la variété de Veronese).

Autrement dit, dans l'espace affine de dimension $\binom{s+r-1}{r-1}$ la variété d'équations (1) est un cône affine ayant une seule singularité — l'origine — et ce point donne une immersion rationnelle dans le cône. En outre l'éclatement du cône dans l'origine est non-singulier. La dimension de l'espace tangent de Zariski du cône dans l'origine est $\binom{s+r-1}{r-1}$, d'où il résulte le fait bien connu que le cône de la variété de Veronese ne peut pas être plongé dans un espace affine de dimension plus petite que $\binom{s+r-1}{r-1}$. (En particulier la variété de Veronese est projectivement normale).

§ 5. Cas des surfaces algébriques.

PROPOSITION 4. Soient Y une surface algébrique propre sur K , $y \in Y$ un point normal, $\varphi: X \rightarrow Y$ l'éclatement de Y de centre y . Les conditions suivantes sont équivalentes :

- a) φ est une contraction rationnelle.
- b) $R^1 \varphi_* \mathcal{O}_X = 0$.
- c) $\chi(X, \mathcal{O}_X) = \chi(Y, \mathcal{O}_Y)$.

DÉMONSTRATION. a) $\Rightarrow$ b) résulte du théorème 1. b) $\Rightarrow$ c). Parce que y est un point normal, $\varphi_* \mathcal{O}_X = \mathcal{O}_Y$ et on a d'après EGA III (4.4.2) que, si $p \geq 2$, $R^p \varphi_* \mathcal{O}_X = 0$, donc $R^p \varphi_* \mathcal{O}_X = 0$ pour tout $p > 0$, d'où c) compte tenu de la démonstration du corollaire 2 du théorème 1.

c) $\implies$ a). La relation $R^p \varphi_* O_X = 0$ pour $p \geq 2$ et la suite exacte déduite de la suite spectrale de Leray donnent :

$$\chi(Y, O_Y) - \chi(X, O_X) = \dim H^0(X, R^1 \varphi_* O_X).$$

Mais $R^1 \varphi_* O_X$ est un faisceau cohérent sur Y , concentré dans le point y , donc il est parfaitement déterminé par sa fibre $(R^1 \varphi_* O_X)_y$ qui est K -espace vectoriel de dimension finie. En tenant compte de c) on obtient :

$$\dim_K H^0(X, R^1 \varphi_* O_X) = 0$$

et ainsi $(R^1 \varphi_* O_X)_y = 0 = (R^1 \varphi_* O_X)_y^\wedge$ (complété dans la topologie m_y -adique). Le théorème des fonctions holomorphes (EGA III (4.2.)) entraîne :

$$\varprojlim_n H(X', O_X/I^n) = 0$$

D'autre part, on a la suite exacte :

$$0 \rightarrow I^n/I^{n+1} \rightarrow O_X/I^{n+1} \rightarrow O_X/I^n \rightarrow 0$$

d'où on obtient la suite exacte de cohomologie :

$$H^1(X', O_X/I^{n+1}) \rightarrow H^1(X', O_X/I^n) \rightarrow H^2(X', I^n/I^{n+1}) = 0$$

puisque $\dim X' = 1$, donc les homomorphismes du système projectif sont surjectifs, ce qui implique que les projections canoniques

$$\varprojlim_n H^1(X', O_X/I^n) \rightarrow H^1(X', O_X/I^n)$$

sont aussi surjectifs. On en déduit :

$$H^1(X', O_X/I) = H^1(X', O_X) = 0$$

donc X' est isomorphe à la droite projective, ce qui achève la démonstration.

COROLLAIRE. Dans les hypothèses de la proposition 4, si $y \hookrightarrow Y$ est une immersion rationnelle (ou φ une contraction rationnelle), alors y est un point singulier isolé rationnel au sens de M. Artin [2].

DÉMONSTRATION. Il faut remarquer que X est non-singulière dans chaque point de X' , donc y est une singularité isolée et X peut être con-

sidérée comme une résolution de cette singularité qui a la propriété $R^2\varphi_*O_X=0$ (proposition 4), d'où le résultat.

PROPOSITION 5. *Si X est une surface projective non-singulière dans chaque point de la courbe rationnelle X' (i.e. $X' = P^1$), la condition nécessaire et suffisante pour que X soit rationnellement contractible le long de X' est $(X'^2) < 0$. En outre la variété Y obtenue par contraction est aussi projective et $\chi(X, O_X) = \chi(Y, O_Y)$. Si m_y est l'idéal maximal de l'anneau local du point y obtenu par contraction de X' , alors :*

$$\dim_K m_y^n / m_y^{n+1} = -n(X'^2) + 1$$

(en particulier la dimension de l'espace tangent de Zariski de Y dans y est $-(X'^2) + 1$ et la multiplicité de l'anneau $O_{X,y}$ est $-(X'^2)$).

Cette proposition est un cas particulier du corollaire de la proposition 3 et de la proposition 2. D'autre part, elle représente de cas spéciaux de certains résultats de M. Artin pour les surfaces algébriques : théorème (2.3) de [1], théorème 4 et corollaire 6 de [2], et est obtenue par des méthodes différentes de celles utilisées dans [1] et [2].

Université de Bucarest
Faculté de Mathématiques
14, Rue Academiei
Bucarest, Roumanie.

BIBLIOGRAPHIE

- [1] M. ARTIN - *Some numerical criteria for contractibility of curves on algebraic surface*, Amer. J. Math. Vol. 84, Nr. 3, 1962, p. 485-496.
- [2] M. ARTIN - *On isolated rational singularities of surfaces*, Amer. J. Math. Vol. 88, Nr. 1, 1966, p. 129-136.
- [3] M. ARTIN - *Algebraisation of formal moduli : II. Existence of modifications*, Annals Math. Vol. 91, Nr. 1, 1970, p. 89-135.
- [4] A. GROTHENDIECK - *Sur quelques points d'algèbre homologique*, Tohoku Math. Journ. IX, 1957, p. 119-221.
- [5] A. GROTHENDIECK, J. DIEUDONNÉ - *EGA - Eléments de Géométrie Algébrique*, IHES chap. I-III.
- [6] M. FIORENTINI - *Esempi di anelli di Cohen-Macaulay semifattoriali che non sono di Gorenstein*, Atti Accad. Lincei, VIII, vol. L, 1971, p. 245-249.
- [7] S. KLEIMAN - *Toward a numerical theory of ampleness*, Annals Math. Vol. 84, Nr. 2, 1966, p. 293-344.
- [8] A. T. LASCU - *Sous-variétés régulièrement contractibles d'une variété algébrique*, Annali Sc. Norm. Pisa, Ser. III, vol. 23, 1969, p. 675-696.
- [9] Y. MANIN - *Leçons sur K-foncteur en Géométrie Algébrique* (en russe), Uspehi Mat. Nauk. 1966, tome 24, 5 (149).
- [10] D. MUMFORD - *Lectures on Curves on an Algebraic Surface*, Memoirs Notes Harvard Univ. Cambridge 1964.
- [11] I. R. SAFAREVICH - *Fondaments de la Géométrie Algébrique* (en russe), Uspehi Mat. Nauk 1969, tome 24, 6 (150).
- [12] I. R. SAFAREVICH - *Lectures on Minimal Models and Birational Transformations of Two Dimensional Schemes*, Tata Inst. Bombay, 1966.
- [13] J. P. SERRE - *FAC-Faisceaux algébriques cohérents*, Annals Math, Vol. 61, 1955, p. 197-278.
- [14] J. P. SERRE - *Algèbre locale. Multiplicités*, Springer Lectures Notes Math. 11, 1965 (rédigé par P. Gabriel).