

ANNALI DELLA SCUOLA NORMALE SUPERIORE DI PISA *Classe di Scienze*

VALENTIN POENARU

Quelques remarques sur les diagrammes de Heegard en grandes dimensions

*Annali della Scuola Normale Superiore di Pisa, Classe di Scienze 3^e série, tome 24,
n° 4 (1970), p. 717-739*

http://www.numdam.org/item?id=ASNSP_1970_3_24_4_717_0

© Scuola Normale Superiore, Pisa, 1970, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Annali della Scuola Normale Superiore di Pisa, Classe di Scienze » (<http://www.sns.it/it/edizioni/riviste/annaliscienze/>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

*Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques*
<http://www.numdam.org/>

QUELQUES REMARQUES SUR LES DIAGRAMMES DE HEEGARD EN GRANDES DIMENSIONS

Par VALENTIN POENARU

1. Introduction :

Le présent travail développe les remarques du dernier paragraphe de [5]. En particulier on veut démontrer qu'une certaine conjecture sur le «unknotting» en dimensions supérieures (et codimension 2) implique que toute variété de dimension 3 qui a le type d'homotopie de S_3 , est (différentiablement) S_3 (la conjecture de Poincaré). On montre donc, que la topologie «en grandes dimensions», pourrait être utile pour prouver des choses en dimension 3.

Pour pouvoir énoncer explicitement notre résultat, on aura besoin de quelques définitions et notations. Si X^n est une variété C^∞ (de dimension n) et $\varphi_\lambda: S_\lambda \times D_{n-\lambda} \rightarrow \partial X_n$, un plongement C^∞ , on définit :

$$X_n + (\varphi_\lambda) = X_n \cup_{\varphi_\lambda} D_\lambda \times D_{n-\lambda}$$

(X_n «auquel on a attaché l'anse d'indice λ , φ_λ »). Il est entendu que, dans $X_n + (\varphi_\lambda)$ chaque $x \in S_{\lambda-1} \times D_{n-\lambda} \subset S_{\lambda-1} \times D_{n-\lambda} + D_\lambda \times S_{n-\lambda-1} = \partial(D_\lambda \times D_{n-\lambda})$ est identifié avec $\varphi_\lambda(x) \in \partial X_n$. On sait que $X_n + (\varphi_\lambda)$ est déterminée (à difféomorphisme près) par la classe d'isotopie (C^∞) de $\varphi_\lambda|_{S_{\lambda-1} \times O_{n-\lambda}} \in Pl^\infty(S_{\lambda-1}, \partial X_n)$ et par la trivialisatión du fibre normal de $\varphi_\lambda(S_{\lambda-1} \times O_{n-\lambda})$, dans ∂X_n , induite par $\varphi_\lambda(S_{\lambda-1} \times D_{n-\lambda})$ ($O_{n-\lambda}$ = le centre des $D_{n-\lambda}$, Pl^∞ = l'espace de plongements C^∞).

On aura besoin aussi d'anses négatives. On va considérer un plongement :

$$\psi_\lambda: (D_\lambda, S_{\lambda-1}) \rightarrow (X_n, \partial X_n)$$

tel que :

$$\psi_\lambda^{-1}(\partial X_n) = S_{\lambda-1}$$

et que $\psi_\lambda(D_\lambda)$ rencontre ∂X_n transversalement.

On remarque qu'il existe un plongement C^∞ :

$$\Psi_\lambda : D_\lambda \times D_{n-\lambda} \rightarrow X_n$$

tel que :

$$a) \quad \Psi_\lambda | D_\lambda \times 0_{n-\lambda} = \psi_\lambda,$$

$$b) \quad \Psi_\lambda^{-1}(\partial X_n) = S_{\lambda-1} \times D_{n-\lambda},$$

$$c) \quad \Psi_\lambda | D_\lambda \times S_{n-\lambda-1} \text{ rencontre } \partial X_n, \text{ transversalement.}$$

L'existence de Ψ_λ et son unicité (à difféotopie près) sont immédiates (vu que le fibré normal de $\psi_\lambda(D_\lambda)$ est trivial, sa trivialisatation unique, e. a. d. s.).

Par définition :

$$X_n - (\psi_\lambda) = X_n - \Psi_\lambda(D_\lambda \times \text{int } D_{n-\lambda}).$$

(le « — » du membre gauche est un symbole désignant une « anse négative » tandis que le « — » du membre droit est la différence habituelle, ensembliste).

C'est X_n avec une anse d'indice λ , négative. On obtient X_n en ajoutant à $X_n - (\psi_\lambda)$ l'anse (« positive ») d'indice $n - \lambda$: $\varphi_{n-\lambda} = \Psi_\lambda | D_\lambda \times S_{n-\lambda-1} : D_\lambda \times S_{n-\lambda-1} \rightarrow \partial(X_n - (\psi_\lambda))$.

On remarque que $X_n - (\psi_\lambda)$ est déterminé (à difféomorphisme près) par la classe d'isotopie (C^∞) de

$$\psi_\lambda \in Pl^\infty((D_\lambda, \partial D_\lambda), (X_n, \partial X_n)).$$

Pour les anses négatives il n'y a pas de différence entre la « chirurgie abstraite » et la « chirurgie plongée », puisqu'une anse négative est toujours plongée.

Considérons maintenant :

$$T_3^p = (S_1 \times D_2) \# \dots \# (S_1 \times D_2) \quad (p \text{ fois})$$

et p cercles, différentiablement plongés, 2-à-2 disjoints : $\gamma_i \subset \partial T_3^p$, $i = 1, \dots, p$ tels qu'ils existent p plongements différentiables, 2-à-2 disjoints :

$$g_i : (D_2, \partial D_2) \rightarrow (T_3^p, \partial T_3^p), (g_i^{-1}(\partial T_3^p) = \partial D_2)$$

avec la propriété :

$$g_i(\partial D_2) \cap \gamma_i = \emptyset \text{ si } i \neq j \text{ et } g_i(\partial D_2) \text{ rencontre } \gamma_i$$

exactement en un point, transversalement.

On choisit un entier $n \geq 2$, qui sera fixé dans la suite et l'on considère la variété C^∞ de dimension $(n + 3)$: $T_3^p \times S_n$. $\Pi \in S_n$ sera un point « base », fixé, dans S_n . On considère p plongements C^∞ , 2-à-2 disjoints :

$$\Psi_2^i : S_1 \times D_{n+1} \rightarrow \partial(T_3^p \times S_n) = \partial T_3^p \times S_n$$

($i = 1, \dots, p$), tels que

$$\Psi_2^i(S_1 \times 0_{n+1}) = \gamma_i \times \Pi.$$

On remarque que :

$$(1) \quad Y_{n+3}^p = T_3^p \times S_n + (\Psi_2^1) + \dots + (\Psi_2^p) =$$

$$T_3^p \times S_n \cup_{\Psi_2^1} D_2^1 \times D_{n+1}^1 \cup_{\Psi_2^2} D_2^2 \times D_{n+2}^2 \cup \dots \cup_{\Psi_2^p} D_2^p \times D_{n+2}^p$$

dépend seulement de p et de n , à difféomorphisme près. On considère p plongement, 2-à-2 disjoints :

$$\Phi_{n+1}^i : (D_{n+1}, \partial D_{n+1}) \rightarrow (Y_{n+3}^p, \partial Y_{n+3}^p)$$

avec

$$(\Phi_{n+1}^i)^{-1}(\partial Y_{n+3}^p) = \partial D_{n+1}$$

et qui rencontrent ∂Y_{n+3}^p transversalement (on peut donc les utiliser comme anses négatives).

Les Φ_{n+1}^i seront supposés tels que :

$$\Phi_{n+1}^i(\partial D_{n+1}) = 0_2^i \times \partial D_{n+1}^i \subset \partial Y_{n+3}^p \quad (i = 1, \dots, p).$$

Notre résultat peut s'énoncer maintenant comme suit (en fait, comme le lecteur va le remarquer plus loin, on va prouver quelque chose d'un tout petit peu plus fort, mais pour des raisons de commodité on se contente ici d'un énoncé un peu plus restrictif).

THÉORÈME A : n étant donné (≥ 2) et p arbitraire, l'assertion $(*)_n$ ci-dessous implique que toute sphère d'homotopie de dimension 3, différentiable, est difféomorphe à S_3 :

ASSERTION $(*)_n$: Si :

$$Y_{n+3}^p - (\Phi_{n+1}^1) - \dots - (\Phi_{n+1}^p) = T_3^p \times S_n$$

(difféomorphisme), il existe une isotopie (C^∞) :

$$h_t \in \text{Diff}(Y_{n+3}^p)$$

telle que

$$a) \quad h_0 = id(Y_{n+3}^p)$$

$$b) \quad h_t | \partial Y_{n+3}^p = id(\partial Y_{n+3}^p)$$

c) il existe un $\pi' \in S_n$, tel que

$$h_1(\Phi_{n+1}^i(D_{n+1})) \cap (T_3^p \times \pi') = \emptyset \quad \text{pour } i = 1, \dots, p.$$

REMARQUES :

1) Le sens de l'assertion $(*)_n$ devient, peut-être, plus clair si l'on remarque que c) est impliqué par :

$$c') \quad h_1(\Phi_{n+1}^i(D_{n+1})) = O_2^i \times D_{n+1}^i.$$

Dans le même ordre d'idées, le théorème A reste vrai si l'on remplace l'assertion $(*)_n$ par l'assertion $(*_1)_n$.

ASSERTION $(*_1)_n$:

Soient Y_{n+3}^p, Φ_{n+1}^i comme dans l'assertion $(*)_n$. Soit W un voisinage régulier C^∞ de $\partial Y_{n+3}^p \cup (\cup \Phi_{n+1}^i(D_{n+1}))$ dans Y_{n+3}^p et W' un voisinage régulier C^∞ de $\partial Y_{n+3}^p \cup (\cup O_2^i \times D_{n+1}^i)$ dans Y_{n+3}^p . Il existe une isotopie C^∞ :

$$g_t \in \text{Diff}(Y_{n+3}^p)$$

telle que :

$$a) \quad g_0 = id(Y_{n+3}^p)$$

$$b) \quad g_t | \partial Y_{n+3}^p = id | \partial Y_{n+3}^p$$

$$c) \quad g_1(W) = W'.$$

La démonstration est la même que pour le théorème A.

2) Je ne sais pas si la réciproque du théorème A est vraie, mais une fois qu'on a compris les techniques de ce travail, ça paraît très plausible.

3) Le théorème A reste vrai, si l'assertion $(*)_n$ est remplacée par l'assertion plus faible : la (démonstration est la même que pour le théorème A).

ASSERTION $(**)_n$:

Soient Y_{n+3}^p, Φ_{n+1}^i comme ci-dessus (c'est-à-dire comme dans l'hypothèse de l'assertion $(*)_n$). Ils existent p plongements C^∞ , 2-à-2 disjoints :

$$\varphi_2^i : (D_2, \partial D_2) \rightarrow T_3^p,$$

et une isotopie C^∞ : $h_t \in \text{Diff}(Y_{n+3}^p)$, tels que :

a) $T_3^p - (\varphi_2^1) - \dots - (\varphi_2^p) = D_3$

b) $h_0 = id(Y_{n+3}^p)$

c) $h_t|_{\partial Y_{n+3}^p} = id(\partial Y_{n+3}^p)$

d) il existe un $\pi' \in S_n$, tel que :

$$h_1^i(\Phi_{n+1}^i(D_{n+1})) \cap [(\cup \varphi_2^j(D_2)) \times \pi'] = \emptyset.$$

La démonstration est la même que pour le théorème A.

4) PROPOSITION (DE LA REMARQUE 4) :

Soient Y_{n+3}^p, Φ_{n+1}^i comme ci-dessus (c'est-à-dire comme dans l'énoncé du théorème A). Soit $W \subset Y_{n+3}^p$ un voisinage régulier C^∞ de $\partial Y_{n+3}^p \cup \cup (\cup \Phi_{n+1}^i(D_{n+1}))$, dans Y_{n+3}^p . Ils existent p anses d'indice 2 et une anse d'indice 3 qu'on peut ajouter à W dans Y_{n+3}^p :

$$Y_{n+3}^p \supset W_1 = W + (\psi_2^1) + \dots + (\psi_2^p) + (\psi_3),$$

et une isotopie C^∞ : $g_t \in \text{Diff}(Y_{n+3}^p)$ telles que :

a) $g_0 = id(Y_{n+3}^p)$

b) $g_t|_{\partial Y_{n+3}^p} = id(\partial Y_{n+3}^p)$

c) il existe un $\pi' \in S_n$, tel que $g_1(W_1) \cap (T_3^p \times \pi')$ soit un voisinage régulier (= tubulaire) C^∞ de $\partial T_3^p \times \pi'$ dans $T_3^p \times \pi'$.

d) (qui implique c) : on considère un voisinage régulier de $\partial T_{n+3}^p \cup \cup (\cup O_2^i \times \partial D_{n+1}^i)$ dans Y_{n+3}^p , qu'on désigne par V . On a des difféomorphi-

smes « canoniques » (voir la fin du travail) :

$$\begin{aligned} Cl(Y_{n+3}^p - V) = T_3^p \times S_n = D_{3+n} + (\varphi_1^1) + \dots + (\varphi_1^p) + (\varphi_n) + (\varphi_{n+1}^1) \\ + \dots + (\varphi_{n+1}^p). \end{aligned}$$

Par la dualité des anses :

$$V_1 = Y_{n+3}^p - \text{int}(D_{3+n} + (\varphi_1^1) + \dots + (\varphi_1^p)) = V + (\overline{\varphi_2^1}) + \dots + (\overline{\varphi_2^p}) + (\overline{\varphi_3})$$

où $\overline{\varphi_2^i}$ et $\overline{\varphi_3}$ sont certaines anses d'indices 2 et 3 qu'on laisse au lecteur le soin d'explicitier.

On a

$$g_1(W_1) = V_1.$$

2. Sphères d'homotopie (de dimension 3), multipliées par des disques.

On va désigner par Σ_3 une sphère d'homotopie C^∞ , de dimension 3, et par S_3 la sphère habituelle.

LEMME 1 : Soient $\delta_3 \subset \Sigma_3$, $d_3 \subset S_3$ deux disques de dimension 3, différemment plongés, et D_n ($n \geq 3$) le n -disque, de bord $\partial D_n = S_{n-1}$.

On désigne par $i: \delta_3 \rightarrow \Sigma_3$, $j: d_3 \rightarrow S_3$ les plongements canoniques. Ils existent deux difféomorphismes : $\psi(n, \Sigma_3): \Sigma_3 \times D_n \rightarrow S_3 \times D_n$, $\varphi: \delta_3 \rightarrow d_3$, tel que le diagramme suivant soit commutatif :

$$\begin{array}{ccc} \Sigma_3 \times D_n & \xrightarrow{\psi(n, \Sigma_3)} & S_3 \times D_n \\ \uparrow i \times id(D_n) & & \uparrow j \times id(D_n) \\ \delta_3 \times D_n & \xrightarrow{\varphi \times id(D_n)} & d_3 \times D_n \end{array}$$

En particulier, si $\psi_1((n-1), \Sigma_3) = \psi(n, \Sigma_3) |_{\Sigma_3 \times S_{n-1}}$, on a un diagramme commutatif de difféomorphismes :

$$\begin{array}{ccc} \Sigma_3 \times S_{n-1} & \xrightarrow{\psi_1(n-1, \Sigma_3)} & S_3 \times S_{n-1} \\ \uparrow i \times id(S_{n-1}) & & \uparrow j \times id(S_{n-1}) \\ \delta_3 \times S_{n-1} & \xrightarrow{\varphi \times id(S_{n-1})} & d_3 \times S_{n-1} \end{array}$$

DÉMONSTRATION : On peut toujours partir d'une décomposition en anses :

$$\Sigma_3 = D_3 + (\varphi_1^1) + \dots + (\varphi_1^p) + (\varphi_2^1) + \dots + (\varphi_2^p) + (\varphi_3)$$

où

$$\varphi_1^i \in Pl^\infty(S_0^i \times D_2^i, \partial D_3), \quad \varphi_2^i \in Pl^\infty(S_1^i \times D_1^i, \partial D_3 + \sum_{i=1}^p (\varphi_1^i))$$

et

$$\varphi_3 \in Pl^\infty\left(S_2^1, \partial\left(D_3 + \sum_{i=1}^p (\varphi_1^i) + \sum_{i=1}^p (\varphi_2^i)\right)\right).$$

(On suppose ici que l'anse d'indice 3 de la décomposition de Σ_3 donnée ci-dessus est D_3^1 et on désigne ∂D_3^1 par S_2^1).

Sans perdre la généralité, on peut supposer que $\delta_3 \subset \text{int } D_3^1$. La variété $D_3 + (\varphi_1^1) + \dots + (\varphi_2^p) = W_3$ étant contractible, il résulte tout de suite du théorème de h -cobordisme ([1], [3], [6]) que : $W_3 \times D_n = D_{3+n}$ (pour cela, il suffit de remarquer que $n \geq 1$, implique déjà que $\pi_1(\partial(W_3 \times D_n)) = 0$).

On remarque que φ_3 est un difféomorphisme entre ∂D_3^1 et ∂W_3 et on désigne par $\Phi_3 \in Pl^\infty(S_2 \times D_n, \partial D_{3+n})$ le plongement C^∞ :

$$\begin{aligned} S_2^1 \times D_n &= \partial D_3^1 \times D_n \xrightarrow{\varphi_3 \times id(D_n)} \partial W_3 \times D_n \subset \partial W_3 \times D_n + W_3 \times \partial D_n \\ &= \partial(W_3 \times D_n) = \partial D_{3+n}. \end{aligned}$$

Alors

$$(\Sigma_3 \times D_n, \delta_3 \times D_n) = (D_{3+n} \bigcup_{\Phi_3} (D_3^1 \times D_n, \delta_3 \times D_n)).$$

Il existe un plongement $\Psi_3 \in Pl^\infty(\partial D_3^1 \times D_n, \partial D_{3+n})$ tel que :

$$(S_3 \times D_n, d_3 \times D_n) = (D_{3+n} \bigcup_{\Psi_3} (D_3^1 \times D_n, \delta_3 \times D_n)).$$

(L'égalité étant un difféomorphisme

$$\psi' : S_3 \times D_n \rightarrow D_{3+n} \bigcup_{\Psi_3} D_3^1 \times D_n$$

qui induit :

$$\varphi^{-1} \times id(D_n) : d_3 \times D_n \rightarrow \delta_3 \times D_n,$$

où φ est un certain difféomorphisme $\varphi : \delta_3 \rightarrow d_3$.

D'autre part

$$\pi_0(Pl^\infty(S_2 \times D_n, S_{n+2})) = 0 \quad (\text{si } n \geq 3).$$

[En effet, par « position générale » : $\pi_0(Pl^\infty(S_2, S_k)) = 0$ si $k \geq 5$; d'autre part un fibré vectoriel trivial de base S_2 et de dimension l n'admet qu'une seule trivialisations (puisque deux trivialisations diffèrent par un élément de $\pi_2(SO(l)) = 0$).

Il s'ensuit que :

$$(D_{3+n} \bigcup_{\mathcal{V}_3} (D_3^1 \times D_n, \delta_3 \times D_n)) = (D_{3+n} \bigcup_{\mathcal{V}_3} (D_3^1 \times D_n, \delta_3 \times D_n))$$

où l'égalité est un difféomorphisme qui induit

$$id(\delta_3) \times id(D_n) : \delta_3 \times D_n \rightarrow \delta_3 \times D_n,$$

ce qui finit notre démonstration.

3. Diagrammes de Heegard et homomorphisme de Stallings.

On rappelle que toute variété de dimension 3, fermée, orientable, M_3 admet des « diagrammes de Heegard », qui sont des paires (M_3, X_3) telles qu'ils existent des difféomorphismes : $h : X_3 \rightarrow T_3^p$, $h' : M_3 - \text{int } X_3 \rightarrow T_3^p$. Par définition p est la *longueur* du diagramme de Heegard (M_3, X_3) . On montre (facilement) qu'une sphère d'homotopie qui admet un diagramme de Heegard de longueur 1 est difféomorphe à S_3 .

On va désigner par G_p le groupe $\pi_1(p \# (S_1 \times S_1))$ et par F_p le groupe libre à p générateurs.

Par définition, un *homomorphisme de Stallings (de longueur p)* est un homomorphisme :

$$\mu : G_p \rightarrow F_p \times F_p$$

(où \times désigne le produit direct (cartésien) de groupes) tel que, si $F_p \times F_p \xrightarrow{\pi_1} F_p$, $(F_p \times F_p \xrightarrow{\pi_2} F_p)$ sont les projections de $F_p \times F_p$ sur le premier (second) facteur, alors : $\pi_i \circ \mu : G \rightarrow F_p$ ($i = 1, 2$) sont des surjections. (voir [2], [5], [7]).

Deux homomorphismes de Stallings (de la même longueur) :

$$G_p \begin{array}{c} \xrightarrow{\mu} \\ \xrightarrow{\mu'} \end{array} F_p \times F_p$$

sont dits équivalents, s'ils existent des isomorphismes α, β, γ qui rendent

le diagramme suivant commutatif :

$$\begin{array}{ccccc}
 G_p & \xrightarrow{\mu} & F_p & \times & F_p \\
 \alpha \downarrow & & \beta \downarrow & & \downarrow \gamma \\
 G_p & \xrightarrow{\mu'} & F_p & \times & F_p .
 \end{array}$$

Si (M_3, X_3) est un diagramme de Heegard (de longueur p), on lui attache un homomorphisme de Stallings, déterminé à équivalence près, de la manière suivante. On choisit un point de base $X_0 \in \partial X_3$, et l'on considère les inclusions :

$$\begin{aligned}
 i_1 &: (\partial X_3, x_0) \rightarrow (X_3, x_0) \\
 i_2 &: (\partial X_3, x_0) \rightarrow (M_3 - \text{int } X_3, x_0) .
 \end{aligned}$$

On a les homomorphismes d'inclusion pour les groupes fondamentaux

$$\begin{array}{ccc}
 & (i_1)_* \rightarrow \pi_1(X_3, x_0) & F_p \\
 G_p = \pi_1(\partial X_3, x_0) & \searrow & \\
 & (i_2)_* \rightarrow \pi_1(M_3 - \text{int } X_3, x_0) & = F_p
 \end{array}$$

et, clairement les $(i_1)_*$, $(i_2)_*$ sont surjectifs.

Par définition, l'homomorphisme de Stallings $\mu = \mu(M_3, X_3)$ attaché à (M_3, X_3) est l'homomorphisme unique qui rend commutatif le diagramme suivant :

$$\begin{array}{ccc}
 & F_p & \\
 (i_1)_* \nearrow & & \nwarrow \pi_1 \\
 G_p & \xrightarrow{\mu} & F_p \times F_p \\
 (i_2)_* \searrow & & \swarrow \pi_2
 \end{array}$$

On a le :

LEMME 2 : (Stallings [7], voir aussi [5]) :

« μ est surjectif si et seulement si $\pi_1(M_3) = 0$ ».

Le lemme suivant combine des résultats de Stallings [7] et de Jaco [2] (voir aussi [5]).

LEMME 3 : « Les trois assertions suivantes sont équivalentes :

A-1) : Soit $\mu : G_p \rightarrow F_p \times F_p$ un homomorphisme de Stallings SURJECTIF, de longueur $p > 1$. Il existe un produit libre, de groupes de présentation finie, non trivial, $G^1 * G^2$, et un diagramme commutatif (d'homomorphismes de groupes) :

$$(2) \quad \begin{array}{ccc} G_p & \xrightarrow{\mu} & F_p \times F_p \\ & \searrow a & \nearrow b \\ & & G^1 * G^2 \end{array}$$

tel que a soit une factorisation « non triviale », dans le sens suivant : les images de G_p dans G^1 et G^2 sont non triviales. (On considère ici les « projections » canoniques $G^1 * G^2 \rightarrow G^1 \rightarrow G^2$, obtenues en tuant $G^1 \subset G^1 * G^2$ ou $G^2 \subset G^1 * G^2$).

A-2) Soit $\mu : G_p \rightarrow F_p \times F_p$ un homomorphisme de Stallings SURJECTIF, de longueur $p > 1$. Il existe un élément non trivial ξ du $\text{Ker } \mu$ qui puisse être représenté par un $f \in \text{Pl}^\infty(S_1, p \# (S_1 \times S_1))$ ($[f] = \xi$).

A-3) Si Σ_3 est une sphère d'homotopie différentiable, alors $\Sigma_3 = S_3$ ».

REMARQUE : En fait, on peut remplacer A-1), A-2) par les assertions (à priori plus faibles, mais en fait équivalentes) A'-1), A'-2) qui ont la même forme que A-1), A-2), sauf qu'on suppose, en plus, que μ est l'homomorphisme de Stallings d'un diagramme de Heegard (de sphère d'homotopie). Ceci résulte du fait que d'après le théorème de Jaco tout homomorphisme de Stallings provient d'un diagramme de Heegard.

Pour notre travail, on a besoin seulement des implications A'-1) \implies \implies A'-2) \implies A-3) dont on va rappeler brièvement la démonstration. A'-2) \implies A-3) est presque immédiate : d'après le lemme de Dehn [4] ils existent deux plongements C^∞ :

$$\varphi : (D_2, \partial D_2) \rightarrow (X_3, \partial X_3)$$

$$\varphi' : (D_2, \partial D_2) \rightarrow (\Sigma_3 - \text{int } X_3, \partial X_3)$$

avec $\varphi|_{\partial D_2} = f = \varphi'|_{\partial D_2} \in \text{Pl}^\infty(S_1, \partial X_3)$. En coupant $T_3^p = X_3$ suivant φ on obtient deux tores pleins T_3^a, T_3^b ($a + b = p$; $a, b > 0$). De même pour $\Sigma_3 - \text{int } X_3$ (voir [5], lemme 3). Donc $S_2 = \varphi(D_2) + \varphi'(D_2) \subset \Sigma_3$, induit une décomposition de (Σ_3, X_3) en « somme connexe » de deux diagrammes de Heegard (de sphères d'homotopie) de longueurs strictement inférieures à p . Puisque pour $p = 1$ il n'y a pas de problèmes : A'-2) \implies A-3).

Trivialement : $A'-2) \implies A'-1)$. En partant de $A'-1)$ on démontre $A'-2)$ comme suit. On peut trouver deux polyèdres finis : X, Y tels que $\pi_1(X, x_0) = G^1, \pi_1(Y, y_0) = G^2$. On considère le « wedge » $X \vee Y$, et on remarque qu'il n'y a aucune obstruction pour construire un diagramme d'applications polyédrales, commutatif (à homotopie près) :

$$(3) \quad \begin{array}{ccc} \partial T_3^p & \xrightarrow{f} & \bigvee_{i=1}^p S_1^i \\ & \searrow g & \nearrow h \\ & X \vee Y & \end{array}$$

tel que (2) soit le diagramme commutatif induit par (3), pour les groupes fondamentaux. Soit $x_0 (= y_0) \in X \vee Y$. Sans perdre la généralité, on peut supposer que $g^{-1}(x_0) \subset \partial T_3^p$ est un sous-polyèdre de dimension 1. Il suffit de montrer que $g^{-1}(x_0)$ contient un lacet simple qui soit non trivial dans $\pi_1(\partial T_3^p)$. Par des homotopies de f, g, h , on peut s'arranger de telle façon que $g^{-1}(x_0)$ n'ait pas de bouts (libres) et ceci sans toucher au type d'homotopie de $g^{-1}(x_0)$.

On voit ceci de la manière suivante : on peut trouver un disque $D_2 \subset \partial T_3^p$ tel que : 1) $\partial D_2 \cap g^{-1}(x_0)$ consiste d' un point unique P ,
 2) $D_2 \cap g^{-1}(x_0)$ est un arbre ($D_2 \cap g^{-1}(x_0) - P \subset \text{int } D_2$),
 3) $g^{-1}(x_0) - \text{int } D_2 \cap g^{-1}(x_0)$ a moins de bouts libres que $g^{-1}(x_0)$.

On voit que $g(D_2)$ est contenu dans l'un des facteurs X, Y de $X \vee Y$, disons que $g(D_2) \subset X$ (Ceci résulte du fait que $g^{-1}(x_0) \cap D_2$ ne sépare pas D_2).

Si $g|_{\text{int } D_2} : \text{int } D_2 \rightarrow X$ était un plongement on pourrait contracter à un point $D_2 \cap g^{-1}(x_0) \subset \partial T_2^p$ et $g(D_2 \cap g^{-1}(x_0)) \subset X$ ce qui nous donnerait un

$$\gamma : \partial T_2^{p/D_2} \cup g^{-1}(x_0) = \partial T_2^p \rightarrow (X/g(D_2 \cap g^{-1}(x_0))) \vee Y$$

homotope à g . De plus on aurait :

$$g^{-1}(x_0) = g^{-1}(x_0) - (\text{int } D_2 \cap g^{-1}(x_0)).$$

Pour se ramener à cette situation on ajoute à X une celle de dimension 2, D_2^1 , de bord $g(\partial D_2)$ et à $X \cup_g D_2^1$ une cellule de dimension 3, de bord $g(D_2) \cup D_2^1$. On obtient un X' homotope à X et on change g sur D_2 en envoyant D_2 homéomorphiquement dans $D_2^1 \subset X'$.

Soit $C \subset g^{-1}(x_0)$ un lacet simple. Si $[C] \neq 1$ on a pagné, si $[C] = 1$ on sait que C borde un 2-disque dans ∂T_3^p . On change g à l'intérieur du

2-disque, en l'envoyant entièrement dans x_0 . Ceci ne change ni f (à homotopie près) ni $g_* : \pi_1(\partial T_3^p) \rightarrow \pi_1(X \vee Y)$. On a une nouvelle factorisation de f (à homotopie près) par un $g_1 : \partial T_3^p \rightarrow X \vee Y$. Sans changer le type d'homotopie de $g_1^{-1}(x_0)$ on peut s'arranger (par homotopie de g_1) de telle manière qu'il devienne polyèdre de dimension 1, et clairement

$$\dim_{\mathbb{Z}_2} H_1(g_1^{-1}(x_0), \mathbb{Z}_2) < \dim_{\mathbb{Z}_2}(g^{-1}(x_0), \mathbb{Z}_2).$$

On peut continuer, par induction. Si $g^{-1}(x_0)$ consiste d'un seul lacet simple, il faut que $[g^{-1}(x_0)] \neq 1$, autrement l'image de G_p dans l'un des G^i serait nulle. (puisque $g^{-1}(x_0)$ séparerait ∂T_3^p dans deux régions dont l'une s'en irait dans X , l'autre dans Y).

4. Diagrammes de Heegard en dimension supérieures (voir aussi [5]). Soit V_{n+3} une variété C^∞ , fermée, avec $n \geq 2$.

Un diagramme de Heegard de V_{n+3} est une paire de variétés différentiables : (V_{n+3}, X_{n+3}) telle qu'ils existent des difféomorphismes :

$$h : X_{n+3} \rightarrow T_3^p \times S_n$$

$$h' : V_{n+3} - \text{int } X_{n+3} \rightarrow T_3^q \times S_n.$$

Puisque $\partial(T_3^p \times S_n) = \partial T_3^p \times S_n$, $\partial X_{n+3} = \partial(V_{n+3} - \text{int } X_{n+3})$ et $H_1(\partial T_3^p \times S_n, \mathbb{Z}) \cong H_1(\partial T_3^q \times S_n, \mathbb{Z})$ (si $p \neq q$) on voit que $p = q$. p est appelé la *longueur* du diagramme de Heegard (V_{n+3}, X_{n+3}) .

Par définition $T_3^0 = D_3 \cdot V_{n+3}$ n'admet pas nécessairement un diagramme de Heegard mais si (M_3, X_3) est un diagramme de Heegard de dimension 3, la variété $M_3 \times S_n$ admet clairement le diagramme de Heegard $(M_3 \times S_n, X_3 \times S_n)$.

Puisque $n \geq 2$, S_n est simplement connexe, donc tout à fait comme dans le cas tridimensionnel, on attache à (V_{n+3}, X_{n+3}) un homomorphisme de Stallings :

$$\mu(V_{n+3}, X_{n+3}) = \mu : G_p \rightarrow F_p \times F_p.$$

On a, trivialement, le :

LEMME 4 : « Soit (M_3, X_3) un diagramme de Heegard de longueur p , en dimension 3. Si $n \geq 2$, les homomorphismes de Stallings :

$$G_p \begin{array}{c} \xrightarrow{\mu(M_3, X_3)} \\ \xrightarrow{\mu(M_3 \times S_n, X_3 \times S_n)} \end{array} F_p \times F_p,$$

sont les mêmes, à équivalence près ».

Soit maintenant Σ_3 , une sphère d'homotopie différentiable de dimension 3, et (Σ_3, X_3) un diagramme de Heegard de longueur p . D'après le lemme 1, on a un difféomorphisme $\Sigma_3 \times S_n = S_3 \times S_n$ ($n \geq 2$), donc $(\Sigma_3 \times S_n, X_3 \times S_n) = (S_3 \times S_n, X_3 \times S_n)$ (où c'est entendu que la seconde paire n'est pas le produit d'une paire de dimension 3 par S_n tandis que la première l'est). Un diagramme de Heegard $(S_3 \times S_n, X_3 \times S_n)$ obtenu comme ci-dessus, sera appelé *spécial*. La connaissance des homomorphismes de Stallings pour ces diagrammes permettrait donc, en principe, de décider si Σ_3 est S_3 ou pas.

5. Diagrammes de Heegard spéciaux :

Dans les deux paragraphes qui suivent on va faire les premiers pas pour dégager la structure géométrique (c'est-à-dire la position de $X_3 \times S_n$) dans un diagramme de Heegard spécial $(S_3 \times S_n, X_3 \times S_n)$.

On va considérer un diagramme de Heegard de longueur $p : (S_3, T_3^p)$ tel qu'ils existent $2p$ plongements C^∞ :

$$g_i : (D_2, \partial D_2) \rightarrow (T_3^p, \partial T_3^p)$$

$$h_i : (D_2, \partial D_2) \rightarrow (S_3 - \text{int } T_3^p, \partial T_3^p)$$

tels que :

$$g_i^{-1}(\partial T_3^p) = \partial D_2,$$

$$h_i^{-1}(\partial T_3^p) = \partial D_2,$$

$$g_i(\partial D_2) \cap g_j(\partial D_2) = h_i(\partial D_2) \cap h_j(\partial D_2) = h_i(\partial D_2) \cap g_j(\partial D_2) = \emptyset \text{ (si } i \neq j)$$

et

$$g_i(\partial D_2) \cap h_i(\partial D_2)$$

consiste en un seul point (d'intersection transversale).

$$\text{On désigne } h_i(\partial D_2) = \gamma_i \subset \partial T_3^p.$$

C'est facile de voir que (S_3, T_3^p) est déterminé, à difféomorphisme près, par les données ci-dessus.

D'autre part, Waldhausen [8] a montré qu'il n'y a pas d'autres diagrammes de Heegard de S_3 .

On va considérer $(S_3 \times S_n, T_3^p \times S_n) = (S_3, T_3^p) \times S_n$. On peut ajouter à $T_3^p \times S_n$ des anses :

$$\Psi_2^i : S_1 \times D_{n+1} \rightarrow \partial T_3^p \times S_n$$

(comme au paragraphe 1), plongées dans $S_3 \times S_n$, correspondant aux $h_i(D_2)$. Donc, en reprenant la formule (1) du premier paragraphe on a un :

$$Y_{n+3}^p \subset S_3 \times S_n,$$

et, une fois que le diagramme $(S_3 \times S_n, T_3^p \times S_n)$ est donné, le plongement (de Y_{n+3}^p dans $S_3 \times S_n$) est déterminé (à difféotopie près) par :

$$D_2^i \times O_{n+1}^i = h_i(D_2) \times \pi \quad (\pi \in S_n, \text{ comme au paragraphe 1}).$$

On a le :

THÉORÈME B : « Soit (Σ_3, X_3) un diagramme de Heegard de longueur p de la sphère d'homotopie Σ_3 , et :

$$\psi_1(n, \Sigma_3) : \Sigma_3 \times S_n \rightarrow S_3 \times S_n$$

le difféomorphisme du lemme 1 ($n \geq 2$).

On considère $Y_{n+3}^p \subset S_3 \times S_n$, comme ci-dessus. Ils existent p plongements 2-à-2 disjoints :

$$\Phi_{n+1}^i : (D_{n+1}, \partial D_{n+1}) \rightarrow (Y_{n+3}^p, \partial Y_{n+3}^p)$$

tels que

$$a) \quad (\Phi_{n+1}^i)^{-1}(\partial Y_{n+3}^p) = \partial D_{n+1} \text{ et } \Phi_{n+1}^i(D_{n+1}) \text{ coupe } \partial Y_{n+3}^p$$

transversalement.

$$b) \quad \Phi_{n+1}^i(\partial D_{n+1}) = O_2^i \times \partial D_{n+1}^i \subset \partial Y_{n+3}^p.$$

c) On a un difféomorphisme de paires de variétés différentiables :

$$\begin{aligned} (S_3 \times S_n, Y_{n+3}^p - (\Phi_{n+1}^1) - \dots - (\Phi_{n+1}^p)) = \\ = (S_3 \times S_n, (\psi_1(n, \Sigma_3))(X_3 \times S_n)). \end{aligned}$$

(REMARQUE : pour le premier membre de l'égalité c), on remarque que la chirurgie négative est automatiquement plongée).

6. Démonstration du théorème B :

On va commencer par décrire une certaine paire de variétés C^∞ .

On commence par considérer $(D_3, \partial D_3 = S_2)$, avec une orientation donnée, et $2p$ plongements C^∞ , 2-à-2 disjoints :

$$\alpha_i : D_2 \rightarrow S_2, \quad \beta_i : D_2 \rightarrow S_2 \quad (i = 1, \dots, p)$$

tels que les α_i conservent l'orientation et les β_i la renversent. On considère aussi

$$S_n = D_n \cup D'_n \quad (D_n \cap D'_n = S_{n-1} = \partial D_n = \partial D'_n), \text{ et un point } q \in \partial D_2.$$

On définit la variété C^∞ :

$$Z_{n+3}^p = D_3 \times S_n \cup (I^1 \times D_2^1 \times D_n^1) \dots (I_2^p \times D^p \times D_n^p),$$

où les $I^i \times D_2^i \times D_n^i$ sont des exemplaires de $I \times D_2 \times D_n$ et $I^i \times D_2^i \times D_n^i$ est recollé à $D_3 \times S_n = D_2 \times (D_n \cup D'_n)$ en identifiant $0 \times x \times y \in I^i \times D_2^i \times D_n^i$ (où $\partial I^i = 1 - 0$, $x \in D_2^i$, $y \in D_n^i$) à $\alpha_i(x) \times y \in S_2 \times D_n \subset \partial(D_3 \times D_n) \cap \partial(D_3 \times S_n)$, et $1 \times x \times y$ à $\beta_i(x) \times y$. (Donc Z_{n+3}^p est $D_3 \times D_n$ avec p anses d'indice 1, qui conservent l'orientabilité). On remarque que :

$$S_n^i = (\alpha_i(q) \times D'_n) + (I^i \times q \times \partial D_n^1) + (\beta_i(q) \times D'_n) \quad (\text{où } q \in \partial D_2 = \partial D_2^i),$$

est une sous-variété de ∂Z_{n+3}^p qui est une sphère de dimension n . (Par un arrondissement d'angles, on peut supposer que c'est une sous-variété C^∞ , difféomorphe à S_n). (On conseille au lecteur de prendre $p = n = 1$, de remplacer $T_3^1 = S_1 \times D_2$ par $S_1 \times I$, et de faire un dessin, pour comprendre exactement de quoi il s'agit).

Clairement $S_n^i \cap S_n^j = \emptyset$ (si $i \neq j$). La paire de variétés qu'on va considérer sera $(Z_{n+3}^p, \cup S_n^i)$. A difféomorphisme près, cette paire ne dépend que de p et n (pas de $\alpha_i, \beta_i, q, \dots$). Ceci résulte du fait que si $(x_1, \dots, x_p) \subset S_2$, $(y_1, \dots, y_p) \subset S_2$ ($x_i \neq x_j, y_i \neq y_j$), alors les $(p + 1)$ -triples :

$$(S_2 \times S_n, x_1 \times S_n, \dots, x_p \times S_n)$$

et

$$(S_2 \times S_n, y_1 \times S_n, \dots, y_p \times S_n)$$

sont difféomorphes, par un difféomorphisme qui respecte la projection $S_2 \times S_n \rightarrow S_n$.

On a le :

LEMME 5 : Soit W_{n+3} une variété C^∞ telle que $\partial W_{n+3} = \emptyset$ et $\pi_1(W_{n+3}) = 0$. Soient

$$f, g \in Pl^\infty(Z_{n+3}^p, W_{n+3})$$

tels que $f|_{D_3 \times S_n}$ et $g|_{D_3 \times S_n}$ soient isotopes (C^∞). Alors les triples de variétés C^∞ :

$$(W_{n+3}; f(Z_{n+3}^p), f(\cup S_n^i))$$

et

$$(W_{n+3}; g(Z_{n+3}^p), g(\cup S_n^i))$$

sont difféomorphes.

(REMARQUE ; on n'affirme pas que le difféomorphisme $h : W_{n+3} \rightarrow W_{n+3}$ entre les deux triples induise l'identité sur Z_{n+3}^p ou $\cup S_n^i$).

DÉMONSTRATION :

On peut supposer, sans perdre la généralité, que

$$f|_{D_3 \times S_n} = g|_{D_3 \times S_n}$$

$$f|_{I^i \times O_2^i \times O_n^i} = g|_{I^i \times O_2^i \times O_n^i}.$$

Ceci nous montre déjà que les paires $(W_{n+3}, f(Z_{n+3}^p))$ et $(W_{n+3}, g(Z_{n+3}^p))$ sont difféomorphes.

La seule chose par laquelle f et g puissent être différentes c'est, pour chaque $i = 1, \dots, p$, un difféomorphisme

$$\xi_i : I^i \times D_2^i \times D_n^i \rightarrow I^i \times D_2^i \times D_n^i,$$

qui induisent l'identité sur :

$$(I^i \times O_2^i \times O_n^i) \cup (\partial I^i \times D_n^i \times D_n^i).$$

Un tel difféomorphisme définit d'une manière évidente un élément de $\pi_1((I, \partial I), (SO(n+2), e)) = \pi_1(SO(n+2)) = Z_2$ (où $e \in SO(n+2)$ est la matrice identité), qui le détermine, à isotopie (C^∞) près. Puisque $n \geq 2$, on

a la suite exacte :

$$\pi_1(SO(n)) \rightarrow \pi_1(SO(n+2)) \rightarrow O$$

donc ξ_i peut être supposé de la forme suivante : On se donne un

$$\eta_i : (I^i, \partial I^i) \rightarrow (SO(n), e)$$

et

$$\xi_i = \text{id}(I^i \times D_2^i) \times \eta_i.$$

Notre lemme en résulte tout de suite, puisque le difféomorphisme qu'on vient de décrire laisse invariant le sous-ensemble $S_n^i \cap (I^i \times D_2^i \times D_n^i)$.

LEMME 6: « Soit $J : Z_{n+3}^p \rightarrow S_3 \times S_n$ un plongement C^∞ , tel que, pour une certaine décomposition $S_3 = D_3 \cup D_3'$ ($D_3 \cap D_3' = S_2$) on ait :

$$J|_{D_3 \times S_n} = \text{id}(D_3) \times \text{id}(S_n) : D_3 \times S_n \rightarrow D_3 \times S_n \subset (D_3 \cup D_3') \times S_n.$$

On a un difféomorphisme de paires :

$$(S_3 \times S_n - \text{int } J(Z_{n+3}^p), \cup S_n^i) = (Y_{n+3}^p, \cup O_2^i \times \partial D_{n+1}^i)$$

où $Y_{n+3}^p, O_2^i \times \partial D_{n+1}^i \subset \partial Y_{n+3}^p$ sont comme au paragraphe 1 ».

DÉMONSTRATION : D'après le lemme 5, il suffit de construire un seul plongement $Z_{n+3}^p \rightarrow S_3 \times S_n$ pour lequel le lemme 6 soit vrai. On considère un bouquet de p cercles : $S_1^1 \vee \dots \vee S_1^p$ (« wedge ») qui est considéré comme CW -complexe avec une cellule de dimension 0 et p cellules de dimension 1. S_n est considéré comme CW -complexe avec une cellule de dimension 0 et une de dimension n . Ceci définit pour $(S_1^1 \vee \dots \vee S_1^p) \times S_n$ une décomposition cellulaire avec une cellule de dimension 0, p cellules de dimensions 1, une cellule de dimension n et $(p+1)$ cellules de dimensions $(n+1)$. Cette décomposition cellulaire peut être considérée comme « recette » pour obtenir une décomposition en anses (définie à difféotopie près).

$$T_3^p \times S_n = D_{3+n} + (\varphi_1^1) + \dots + (\varphi_1^p) + (\varphi_n) + (\varphi_{n+1}^1) + \dots + (\varphi_{n+1}^p).$$

En particulier on considère les n -sphères :

$$\varphi_{n+1}^i(S_n \times O_3^i) = \varphi_{n+1}^i(S_n) \subset \partial(D_{3+n} + (\varphi_1^1) + \dots + (\varphi_1^p) + (\varphi_n)).$$

On remarque tout de suite que :

$$(D_{3+n} + (\varphi_1^1) + \dots + (\varphi_1^p) + (\varphi_n), \cup \varphi_{n+1}^i(S_n)) = (Z_{n+3}^p, S_n^i).$$

D'autre part, si l'on part du diagramme de Heegard (unique !) (S_3, T_3^p) et on considère

$$(S_3 \times S_n, T_3^p \times S_n) = (S_3, T_3^p) \times S_n,$$

on peut considérer :

$$(S_3 \times S_n, D_{3+n} + (\varphi_1^1) + \dots + (\varphi_1^p) + (\varphi_n)) \subset (S_3 \times S_n, T_3^p \times S_n),$$

et, on remarque que :

$$(S_3 \times S_n - \text{int}(D_{3+n} + (\varphi_1^1) + \dots + (\varphi_1^p) + (\varphi_n)), \varphi_{n+1}^i(S_n)) = (Y_{n+3}^p, \cup O_2^i \times \partial D_{n+1}^i).$$

q.e.d.

On considère maintenant des plongements 2-à-2 disjoints :

$$\psi_\lambda^i : (D_\lambda, \partial D_\lambda) \rightarrow (X_n, \partial X_n) \quad (i = 1, \dots, k)$$

où X_n est une variété C^∞ quelconque, tels que la « chirurgie négative » :

$$X_n \implies X_n - (\psi_\lambda^1) - \dots - (\psi_\lambda^k)$$

soit définie. Comme au paragraphe 1, on a des plongements 2-à-2 disjoints :

$$\Psi_\lambda^i : (D_\lambda \times D_{n-\lambda}, S_{\lambda-1} \times D_{n-\lambda}) \rightarrow (X_n, \partial X_n)$$

et la paire

$$(X_n - (\psi_\lambda^1) - \dots - (\psi_\lambda^k), \cup \Psi_\lambda^i(O_\lambda \times S_{n-\lambda-1}))$$

(où

$$\Psi_\lambda^i(O_\lambda \times S_{n-\lambda-1}) \subset \partial (X_n - (\psi_\lambda^1) - \dots - (\psi_\lambda^k)))$$

est complètement définie (à difféomorphisme près) par $(X_n, \psi_\lambda^1, \dots, \psi_\lambda^k)$.

LEMME 7 : « Soient $\psi_2^i : (D_2, \partial D_2) \rightarrow (T_3^p, \partial T_3^p)$ ($i = 1, \dots, p$) p plongements C^∞ , 2-à-2 disjoints, tels que :

$$T_3^p - (\psi_2^1) - \dots - (\psi_2^p) = D_3.$$

On considère $\pi \in S_n$ et :

$$\widehat{\psi}_2^1 = \psi_2^1 \times \pi : (D_2, \partial D_2) \rightarrow (T_3^p \times S_n, \partial (T_3^p \times S_n)).$$

On a un difféomorphisme de paires :

$$(T_3^p \times S_n - (\widehat{\psi}_2^1) - \dots - (\widehat{\psi}_2^p), \cup \widehat{\Psi}_2^i(O_2 \times S_n)) = (Z_{n+3}^p, \cup S_n^i).$$

La démonstration est la suivante :

$$\begin{aligned} T_3^p \times S_n &= (D_3 \cup (I^1 \times D_2^1) \cup \dots \cup (I^p \times D_2^p)) \times (D_n \cup D'_n) = \\ &D_3 \times (D_n \cup D'_n) \cup (\cup_i (I^i \times D_2^i \times D_n)) \cup (\cup_i (I^i \times D_2^i \times D'_n)). \end{aligned}$$

Sans perdre la généralité, on peut supposer que :

$$T_3^p \times S_n - (\psi_2^1) - \dots - (\psi_2^p) = (D_3 \times (D_n \cup D'_n)) \cup (\cup_i (I^i \times D_2^i \times D_n)).$$

On remarque que :

$$\begin{aligned} (I^i \times D_2^i \times D'_n) \cap ((D_3 \times (D_n \cup D'_n)) \cup (\cup_i (I^i \times D_2^i \times D_n))) \\ = \partial I^i \times D_2^i \times D'_n \cup I^i \times D_2^i \times \partial D'_n = S_n^i, \quad \text{e.a.d.s.} \end{aligned}$$

Maintenant, on peut prouver le théorème B : On part d'un diagramme de Heegard de $\Sigma_3 : (\Sigma_3, T_3^p)$, qu'on considère plutôt comme décomposition :

$$\Sigma_3 = \bar{T}_3^p \cup T_3^p, \quad \text{avec} \quad \bar{T}_3^p = \Sigma_3 - \text{int } T_3^p.$$

On considère pour \bar{T}_3^p , p disques de dimension 2 :

$$\psi_2^i : (D_2, \partial D_2) \rightarrow (\bar{T}_3^p, \partial \bar{T}_3^p)$$

comme dans le lemme 7. On prend $\pi \in S_n$ et on définit $\widehat{\psi}_2^i = \psi_2^i \times \pi$, $\widehat{\Psi}_2^i : (D_2 \times D_{n+1}, S_i \times D_{n+1}) \rightarrow (\bar{T}_3^p \times S_n, \partial (\bar{T}_3^p \times S_n))$. On peut considérer, au lieu de : $\Sigma_3 \times S_n = (\bar{T}_3^p \times S_n) \cup (T_3^p \times S_n)$ la décomposition :

$$\Sigma_3 \times S_n = [(\bar{T}_3^p \times S_n) - (\widehat{\psi}_2^1) - \dots - (\widehat{\psi}_2^p)] \cup [T_3^p \times S_n + \cup \widehat{\Psi}_2^i(D_2 \times D_{n+1})].$$

D'après le lemme 7, $((\bar{T}_3^p \times S_n) - (\widehat{\psi}_2^1) - \dots - (\widehat{\psi}_2^p), \cup \widehat{\Psi}_2^i (D_2 \times D_{n+1})) = (Z_{n+3}^p, \cup S_n^i)$, et d'après le lemme 1, en appliquant le difféomorphisme $\psi_1(n, \Sigma_3)$ à $\Sigma_3 \times S_n$, on trouve un plongement $Z_{n+3}^p \subset S_3 \times S_n$ qui est comme dans le lemme 6. Le lemme 6 implique alors, tout de suite le théorème B.

7. Démonstration du théorème A :

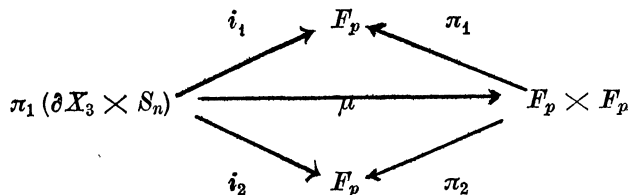
D'après le lemme 4, les homomorphisme de Stallings : $\mu(\Sigma_3, X_3)$ et $\mu = \mu(S_3 \times S_n, \psi_1(n, \Sigma_3)(X_3 \times S_n))$ coïncident. On va essayer d'expliciter μ , en utilisant le théorème B et l'assertion (conjecturale) $(*)_n$, du théorème A.

LEMME 8 : « Si l'assertion $(*)_n$ est vraie, il existe une présentation de $\pi_1(\partial X_3 \times S_n)$:

$$(x_1, \dots, x_p, y_1, \dots, y_p = x_1 y_1 x_1^{-1} y_1^{-1} x_2 y_2 x_2^{-1} y_2^{-1} \dots x_p y_p x_p^{-1} y_p^{-1} = 1)$$

tel que l'homomorphisme de Stallings

$$\mu = \mu(S_3 \times S_n, \psi_1(n, \Sigma_3)(X_3 \times S_n)) :$$



ait la propriété : $\pi_1 \circ \mu(x_i) = 1, \pi_2 \circ \mu(y_j) = 1$ ».

REMARQUES : 1) Ceci est la seule manière par laquelle $(*)_n$ intervient ; on peut donc la replacer par des conjectures plus faibles...

2) Si $\pi_1 \circ \mu(x_i) = 1, \pi_2 \circ \mu(y_j) = 1$, alors $\pi_1 \circ \mu$ induit un isomorphisme entre le (sous)-groupe libre des (y) et le premier F_p , tandis que $\pi_2 \circ \mu$ induit un isomorphisme entre le (sous)-groupe libre des (x) et le second F_p , donc μ est complètement déterminé ; en particulier, il est nécessairement surjectif.

3) Le lemme 8 implique le théorème A. En effet : $\mu(x_1 y_1 x_1^{-1} y_1^{-1}) = 1 \times 1 \in F_p \times F_p$, ce qui permet de factoriser μ (d'une manière non triviale) par le produit libre

$$\pi_1(\partial X_3 \times S_n)/N = G^1 * G^2,$$

où $N \subset \pi_1(\partial X_3 \times S_n)$ est le sous-groupe distingué engendré par $x_1 y_1 x_1^{-1} y_1^{-1}$, et G^1, G^2 sont :

$$G^1 = (x_1, y_1; x_1 y_1 x_1^{-1} y_1^{-1} = 1)$$

$$G^2 = (x_2, y_2, \dots, x_p, y_p; x_2 y_2 x_2^{-1} y_2^{-1} \dots x_p y_p x_p^{-1} y_p^{-1} = 1).$$

Le lemme 3 donne alors la conclusion du théorème A.

DÉMONSTRATION (du lemme 8) : En revenant aux notations du paragraphe 1, on considère les $2p$ cercles plongés : $\gamma_i, g_i(\partial D_2) \subset \partial T_3^p$. En les poussant un peu on peut toujours supposer qu'ils ont exactement un point commun (le point de base de $\pi_1(\partial T_3^p)$) et alors $[\gamma_i] = x_i, [g_i(\partial D_2)] = y_i$ est un système de générateurs de $\pi_1(\partial T_3^p) = G_p$, avec une seule relation, comme ci-dessus.

Pour d'écrire :

$$\pi_1(\partial X_3 \times S_n) = \pi_1(\partial(Y_{n+3}^p - (\Phi_{n+1}^1) - \dots - (\Phi_{n+1}^p)))$$

(théorème B), on remarque qu'il existe un difféomorphisme :

$$h : \partial(Y_{n+3}^p - (\Phi_{n+1}^1) - \dots - (\Phi_{n+1}^p)) \rightarrow \partial(Y_{n+3}^p - (O_2^1 \times D_{n+1}^1) - \dots - (O_2^p \times D_{n+2}^p))$$

qui induit l'identité en dehors d'un voisinage des anses négatives (ceci est évident puisque $\Phi_{n+1}^i(\partial D_{n+1}) = O_2^i \times \partial D_{n+1}^i$). On a un difféomorphisme « canonique » :

$$Y_{n+3}^p - (O_2^1 \times D_{n+1}^1) - \dots - (O_2^p \times D_{n+2}^p) = T_3^p \times S_n$$

ce qui nous permet de définir

$$\gamma_i \times \pi, g_i(\partial D_2) \times \pi \subset \partial(Y_{n+3}^p - (O_2^1 \times D_{n+1}^1) - \dots - (O_2^p \times D_{n+2}^p)).$$

Ils vont représenter les générateurs du π_1 , et par h_* , les générateurs de $\pi_1(\partial(Y_{n+3}^p - (\Phi_{n+1}^1) - \dots))$.

L'existence des anses (positives !) correspondant aux Φ_{n+1}^i nous dit que les $[h^{-1}(\gamma_i \times \pi)]$ sont tuées par l'inclusion de $\partial(Y_{n+3}^p - (\Phi_{n+1}^1) - \dots)$ dans l'adhérence du complémentaire de $Y_{n+3}^p - (\Phi_{n+1}^1) - \dots$, tandis que l'assertion $(*)_n$ nous dit que les $[h^{-1}(g_i(\partial D_2) \times \pi)]$ sont tuées par l'inclusion :

$$\partial(Y_{n+3}^p - (\Phi_{n+1}^1) - \dots) \subset Y_{n+3}^p - (\Phi_{n+1}^1) - \dots.$$

En effet :

$$[h^{-1}(g_i(\partial D_2)) \times \pi] = [h^{-1}(g_i(\partial D_2)) \times \pi']$$

π' étant le point $\pi' \in S_n$ du théorème A.

Puisque π' est « loin » de π et h est l'identité en dehors de ... :

$$h^{-1}(g_i(\partial D_2) \times \pi') = g_i(\partial D_2) \times \pi',$$

et comme d'après $(*)_n$, $g_i(D_2) \times \pi'$ existe comme sous-ensemble de $Y_{n+3}^p - (\Phi_{n+1}^1) - \dots$, on a :

$$[h^{-1}(g_i(\partial D_2) \times \pi)] = 1 \in \pi_1(Y_{n+3}^p - (\Phi_{n+1}^1) - \dots).$$

Ceci finit la démonstration du lemme 8.

8. Démonstration de la remarque 4⁰, du paragraphe 1 :

Comme on l'a remarqué au cours de la démonstration du lemme 6, on a une décomposition en anses (plus ou moins canonique) :

$$T_3^p \times S_n = D_{3+n} + (\varphi_1^1) + \dots + (\varphi_1^p) + (\varphi_n) + (\varphi_{n+1}^1) + \dots + (\varphi_{n+1}^p).$$

On va désigner $D_{3+n} + (\varphi_1^1) + \dots + (\varphi_1^p)$ par T_{n+3}^p .

En se plaçant dans les hypothèses de l'assertion $(*)_n$ qui nous dit que : (Cl = adhérence).

$$(\alpha) \quad Cl(Y_{n+3}^p - W) = T_3^p \times S_n$$

et en appliquant la dualité (des anses) à la décomposition qu'on vient d'écrire, on a une nouvelle décomposition en anses :

$$Y_{n+3}^p - \text{int } T_{n+3}^p = W + (\psi_2^1) + \dots + (\psi_2^p) + (\psi_3) = W_1.$$

Puisque $\pi_1(Y_{n+3}^p) = 0$, le plongement $i: T_{n+3}^p \subset Y_{n+3}^p$ (défini par le plongement « canonique » $T_{n+3}^p \subset T_n^p \times S_n$ et le difféomorphisme (α)) est univoquement déterminé à difféotopie près. En particulier on peut trouver une isotopie C^∞ :

$$G_i \in Pl^\infty(T_{n+3}^p, \text{int } Y_{n+3}^p) \text{ telle que :}$$

$$a) \quad G_0 = i$$

b) $T_3^p \times \pi' - \text{int } G_1(T_{n+3}^p)$ est un voisinage régulier C^∞ (= voisinage tubulaire) de $\partial T_3^p \times \pi'$ dans $T_3^p \times \pi'$.

On peut recouvrir G_t par une isotopie C^∞ , globale $g_t \in \text{Diff}(Y_{n+3}^p)$, constamment égale à l'identité sur ∂Y_{n+3}^p , et ceci finit notre démonstration (le point d) se trouve démontré implicitement).

FACULTE DES SCIENCES D'ORSAY
Département de Mathématiques
ORSAY — 91 — (France)

BIBLIOGRAPHIE

- [1] J. CERF et A. GRAMAIN : *Le théorème de h-cobordisme*. (E. N. S. (Notes miméographiées).
- [2] W. JACO : *Constructing 3-manifolds from group homomorphisms*. B. A. M. S. 74 (1968) pp. 936-940.
- [3] J. MILNOR : *Lectures on the h-cobordism theorem*. Princeton.
- [4] C. D. PAPA KYRIAKOPOULOS : *On Dehn's lemma and the asphericity of knots*. Ann. of Math. 66 (1957) pp. 1-26.
- [5] V. POENARU : *Quelques remarques sur les diagrammes de Heegard*. (à paraître aux « Annali di Pisa »).
- [6] S. SMALE : *On the structure of manifolds*. Amer. Journ. of Math. 84 (1952) pp. 387-399.
- [7] J. STALLINGS : *How not to prove the Poincaré conjecture*. Topology Seminar Wisconsin 1965, Ann. Math. Studies N° 60.
- [8] F. WALDHAUSEN : *Heegard-zerlegungen der 3-Sphäre*. Topology 7 (1968) pp. 195-203.