

# ANNALI DELLA SCUOLA NORMALE SUPERIORE DI PISA *Classe di Scienze*

A. MARINO

S. SPAGNOLO

**Un tipo di approssimazione dell'operatore  $\sum_{j=1}^n D_i(a_{ij}(x)D_j)$**

**con operatori  $\sum_{j=1}^n D_j(\beta(x)D_j)$**

*Annali della Scuola Normale Superiore di Pisa, Classe di Scienze 3<sup>e</sup> série, tome 23, n° 4 (1969), p. 657-673*

[http://www.numdam.org/item?id=ASNSP\\_1969\\_3\\_23\\_4\\_657\\_0](http://www.numdam.org/item?id=ASNSP_1969_3_23_4_657_0)

© Scuola Normale Superiore, Pisa, 1969, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Annali della Scuola Normale Superiore di Pisa, Classe di Scienze » (<http://www.sns.it/it/edizioni/riviste/annaliscienze/>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme  
Numérisation de documents anciens mathématiques  
<http://www.numdam.org/>

# UN TIPO DI APPROSSIMAZIONE DELL'OPERATORE

$$\sum_{i=1}^n D_i (a_{ij}(x) D_j) \text{ CON OPERATORI } \sum_{j=1}^n D_j (\beta(x) D_j)$$

A. MARINO - S. SPAGNOLO

## § 1. Introduzione e richiami.

In [2] e [3] è stata studiata la convergenza in  $L^2$  delle soluzioni di problemi di Dirichlet relativi ad equazioni ellittiche autoaggiunte del 2° ordine e, equivalentemente, delle soluzioni di problemi di Cauchy relativi ad equazioni paraboliche.

Precisamente, per ogni aperto  $\Omega$  di  $\mathbb{R}^n$  si è considerata la classe

$$M(\lambda_0, A_0, \Omega) \quad 0 < \lambda_0 < A_0$$

degli operatori differenziali della forma

$$\sum_{i,j=1}^n D_i (a_{ij}(x) D_j) \quad (1)$$

con  $a_{ij}$  funzioni misurabili su  $\Omega$  che verificano le condizioni

$$a_{ij} = a_{ji}$$

$$\lambda_0 |\xi|^2 \leq \sum_{i,j=1}^n a_{ij}(x) \xi_i \xi_j \leq A_0 |\xi|^2 \quad \forall x \in \Omega, \xi \in \mathbb{R}^n.$$

E' noto che questi operatori applicano  $H^1(\Omega)$  in  $H^{-1}(\Omega)$  e sono equilimitati rispetto alle norme corrispondenti; inoltre, detta  $J$  l'immersione

---

Pervenuto alla Redazione il 28 Giugno 1969.

Lavoro eseguito nell'ambito dei gruppi di ricerca per la matematica del C.N.R..

(1) In ogni sistema di riferimento su  $\mathbb{R}^n$ , un tale operatore individua in modo univoco i suoi coefficienti.

canonica di  $H_0^1(\Omega)$  in  $H^{-1}(\Omega)$ , gli operatori  $\lambda J - A$ , al variare di  $A$  in  $M(\lambda_0, A_0, \Omega)$ , sono isomorfismi di  $H_0^1(\Omega)$  su  $H^{-1}(\Omega)$  con inversi  $(\lambda J - A)^{-1}$  equilimitati, per ogni fissato  $\lambda > 0$  (ed anche per  $\lambda = 0$  se  $\Omega$  è limitato).

Si è allora introdotta su  $M(\lambda_0, A_0, \Omega)$  la seguente convergenza, detta *G-convergenza*:

DEFINIZIONE. Siano  $A_k$  ( $k = 1, 2, 3, \dots$ ) ed  $A$  in  $M(\lambda_0, A_0, \Omega)$ . Si dice che

$$\{A_k\} \xrightarrow{G} A \quad \text{su } \Omega$$

se per ogni  $\lambda > 0$  ( $\lambda \geq 0$  per  $\Omega$  limitato) si ha

$$\lim_k \|(\lambda J - A_k)^{-1} f - (\lambda J - A)^{-1} f\|_{L^2(\Omega)} = 0 \quad \forall f \in H^{-1}(\Omega).$$

(Si noti che se questo limite è zero per un certo  $\lambda$  allora lo è anche per tutti gli altri).

Come si è accennato, questa definizione può essere tradotta in termini di problemi di Cauchy di tipo parabolico:

Dati  $B \in M(\lambda_0, A_0, \Omega)$  e  $\varphi \in H_0^1(\Omega)$ , indichiamo,  $T_t(B) \varphi = u_t$  ( $t > 0$ ) la soluzione in  $H_0^1(\Omega)$  del problema:

$$\begin{cases} \frac{du_t}{dt} = Bu_t, & t > 0 \\ \lim_{t \rightarrow 0+} \|u_t - \varphi\|_{H_0^1(\Omega)} = 0. \end{cases}$$

Si ha allora

$$\{A_k\} \xrightarrow{G} A$$

se e solo se

$$\{T_t(A_k) \varphi\} \xrightarrow{k} T_t(A) \varphi \quad \text{in } L^2(\Omega), \quad \forall \varphi \in H_0^1(\Omega), \quad \forall t > 0.$$

In questo lavoro prendiamo in considerazione una classe speciale di operatori, invarianti per trasformazioni ortogonali su  $\mathbb{R}^n$ : gli operatori della forma

$$\sum_{j=1}^n D_j (\beta(x) D_j) \quad (\text{« isotropi »})$$

e dimostriamo (Teor. 3.1) che tale classe è densa, rispetto alla *G-convergenza*, in ogni  $M(\lambda_0, A_0, \Omega)$ .

Più esattamente proviamo (Teor. 3.4) che esiste una costante  $c$ , dipendente solo da  $n$ , per cui ogni operatore di  $M(\lambda_0, A_0, \Omega)$  è  $G$ -approssimabile con operatori isotropi di  $M(c^{-1}\lambda_0, cA_0, \Omega)$ .

Si giunge a questo risultato tramite una caratterizzazione, in termini dei coefficienti, della  $G$ -convergenza sulla sottoclasse degli operatori isotropi a coefficienti decomponibili in prodotti di funzioni di una variabile.

Le principali proprietà della  $G$ -convergenza, che saranno qui utilizzate, sono le due seguenti:

### 1.1 (compattezza)

*Ogni successione di operatori di  $M(\lambda_0, A_0, \Omega)$  ammette una sottosuccessione  $G$ -convergente ad un operatore di  $M(\lambda_0, A_0, \Omega)$ .* (vedi [3], pag. 582)

### 1.2 (località)

*Siano  $\Omega_p$  aperti di  $\Omega$  tali che  $\text{mis}(\Omega - \bigcup_p \Omega_p) = 0$  ed  $A_k$  ( $k = 1, 2, 3, \dots$ ),  $A$  operatori di  $M(\lambda_0, A_0, \Omega)$  (e quindi anche di  $M(\lambda_0, A_0, \Omega_p)$ ,  $\forall_p$ ).*

*Allora*

$$\begin{aligned} \{A_k\} &\xrightarrow{G} A \quad \text{su } \Omega \\ \text{se e solo se} \quad \{A_k\} &\xrightarrow{G} A \quad \text{su } \Omega_p, \forall_p. \end{aligned}$$

(vedi [3], pag. 594, dove però si considera il caso particolare  $\Omega = \bigcup_p \Omega_p$ ; la prova di questo caso è comunque la stessa).

Riportiamo altri risultati sulla  $G$ -convergenza che saranno utilizzati.

Siano

$$A_k = \sum_{i,j=1}^n D_i(a_{ij}^{(k)} D_j) \quad (k = 1, 2, 3, \dots)$$

ed

$$A = \sum_{i,j=1}^n D_i(a_{ij} D_j)$$

in  $M(\lambda_0, A_0, \Omega)$  e siano  $A_k^{-1}$ ,  $A^{-1}$  gli operatori inversi da  $H^{-1}(\Omega)$  su  $H_0^1(\Omega)$  rispetto al problema di Dirichlet su  $\Omega$ , avendo supposto per semplicità  $\Omega$  limitato in  $\mathbb{R}^n$  (se  $\Omega$  non è limitato basta sostituire ad  $A_k^{-1}$ ,  $A^{-1}$  gli operatori  $(\lambda J - A_k)^{-1}$ ,  $(\lambda J - A)^{-1}$  per  $\lambda > 0$ ). Si ha allora:

$$\begin{aligned} 1.3 \quad \{A_k\} &\xrightarrow{G} A \\ \text{se e solo se} \quad \{A_k^{-1} f\} &\xrightarrow{k} A^{-1} f \quad \text{debolmente in } L^2(\Omega), \forall f \in L^2(\Omega). \end{aligned}$$

(segue facilmente da 1.1)

1.4 Se  $\{A_k\} \xrightarrow{G} A$  ed  $\{f_k\} \xrightarrow{k} f$  in  $H^{-1}(\Omega)$ , si ha:

$$\lim_k \|A_k^{-1} f_k - A^{-1} f\|_{L^2(\Omega)} = 0$$

(segue facilmente dalla def. di  $G$ -convergenza).

1.5 Valgono le implicazioni (a)  $\implies$  (b)  $\implies$  (c) con:

$$(a) \quad \{a_{ij}^{(k)}\} \xrightarrow{k} a_{ij} \quad \text{in } L^1_{\text{loc}}(\Omega), \quad \forall ij$$

$$(b) \quad \lim_k \|A_k^{-1} f - A^{-1} f\|_{H_0^1(\Omega)} = 0, \quad \forall f \in H^{-1}(\Omega)$$

$$(c) \quad \{A_k\} \xrightarrow{G} A$$

(vedi [3] pag. 589)

1.6. La  $G$ -convergenza su  $M(\lambda_0, A_0, \Omega)$  è indotta da una metrica.  
(Basta definire per  $A, B \in M(\lambda_0, A_0, \Omega)$ ,

$$d_G(A, B) = \sum_{i=1}^{\infty} 2^{-i} \|A^{-1} f_i - B^{-1} f_i\|_{L^2(\Omega)}$$

dove  $f_i$  ( $i = 1, 2, 3, \dots$ ) è un insieme denso nella palla unitaria di  $H^{-1}(\Omega)$ ).

### Notazioni.

$\mathbb{R}^n$  è lo spazio delle  $n$ -ple  $x = (x_1, \dots, x_n)$  con la norma  $|x| = \left(\sum_{i=1}^n x_i^2\right)^{\frac{1}{2}}$ ;

$D_i = \frac{\partial}{\partial x_i}$  la derivazione  $i$ -ma.

Il termine *funzione* sta per *classe di funzioni quasi ovunque coincidenti*, e la locuzione *quasi ovunque* sarà in genere sottintesa. Saranno considerati i seguenti spazi lineari sul *corpo reale*  $\mathbb{R}$ , muniti delle solite strutture topologiche: ( $\Omega$  aperto di  $\mathbb{R}^n$ )

$\mathcal{D}(\Omega)$  *funzioni reali*  $C^\infty$  (cioè indefinitamente derivabili) ed *aventi supporto compatto* su  $\Omega$

$\mathcal{D}'(\Omega)$  *distribuzioni reali* su  $\Omega$

$L^\infty(\Omega)$  *funzioni reali misurabili ed essenzialmente limitate* su  $\Omega$

$L^p(\Omega)$  *funzioni reali di potenza  $p$ -ma sommabile* su  $\Omega$

$L^p_{\text{loc}}(\Omega)$  funzioni reali di potenza  $p$ -ma sommabile su ogni compatto di  $\Omega$

$$H^1(\Omega) = \{\varphi \in L^2(\Omega) : D_i \varphi \in L^2(\Omega), i = 1, \dots, n\}$$

$$H^1_{\text{loc}}(\Omega) = \{\varphi \in L^2_{\text{loc}}(\Omega) : D_i \varphi \in L^2_{\text{loc}}(\Omega), i = 1, \dots, n\}$$

$$H^1_0(\Omega) \text{ aderenza di } \mathcal{D}(\Omega) \text{ in } H^1(\Omega)$$

$$H^{-1}(\Omega) = \{f \in \mathcal{D}'(\Omega) : f = g_0 + \sum_1^n D_j g_j; g_j \in L^2(\Omega)\}$$

$K \subset\subset \Omega$  significa che  $\bar{K}$  è un compatto di  $\Omega$ .

## § 2. La $G$ -convergenza su una classe speciale di operatori.

Nel caso di una sola variabile ( $n = 1$ ) si può vedere facilmente ([3], pag. 596) che

$$\{D(\beta_k(x) D)\} \xrightarrow{G} D(\beta(x) D) \quad \text{su } \Omega$$

se e solo se

$$\lim_k \int_{\Omega} \left( \frac{1}{\beta_k} - \frac{1}{\beta} \right) w \, dx = 0 \quad \forall w \in L^1(\Omega).$$

Nel caso generale ( $\Omega$  aperto di  $\mathbb{R}^n$ ,  $n > 1$ ) non siamo in grado di tradurre la  $G$ -convergenza in termini di convergenza dei coefficienti, se non su classi particolari di operatori.

Una di queste classi è quella degli operatori del tipo

$$\sum_1^n D_j (\beta(x) D_j) \quad \text{con } \beta(x) = \prod_{i=1}^n \beta^{(i)}(x_i).$$

Per caratterizzare la  $G$ -convergenza per questi operatori (Teor. 2.2), è utile il seguente risultato:

**LEMMA 2.1.** *Consideriamo, su un aperto limitato  $\Omega$  di  $\mathbb{R}^n$ , l'operatore*

$$B = \sum_1^n D_j (\beta(x) D_j)$$

dove  $\beta$  è una funzione misurabile su  $\Omega$  della forma

$$\beta(x) = \prod_{i=1}^n \beta^{(i)}(x_i) \quad x = (x_1, \dots, x_n)$$

con

$$0 < \lambda \leq \beta^{(i)} \leq A.$$

Se  $u \in H_0^1(\Omega)$  è tale che  $f = Bu$  appartiene ad  $L^2(\Omega)$ , si ha:

$$\beta^{(i)}(x_i) D_i u \in H_{\text{loc}}^1(\Omega) \quad \forall i,$$

e

$$(1) \quad \|\beta^{(i)}(x_i) D_i u\|_{H^1(\Omega_0)} \leq C \|f\|_{L^2(\Omega)}, \quad \forall \Omega_0 \subset\subset \Omega,$$

con  $C$  costante dipendente solo da  $\Omega_0, \Omega, \lambda, A$ .

**DIMOSTRAZIONE 1.** Supponiamo dapprima che  $\beta$  sia di classe  $C^\infty$ .

In tal caso, il teorema di regolarità locale delle soluzioni di operatori ellittici (vedi ad es. [1], pag. 138) assicura che  $u \in H_{\text{loc}}^2(\Omega)$  e quindi  $\beta^{(i)}(x_i) D_i u \in H_{\text{loc}}^1(\Omega)$ .

Per provare la (1), consideriamo gli operatori ellittici

$$L_i = \sum_{j=1}^n D_j \left[ \frac{\beta(x)}{(\beta^{(i)}(x_i))^2} D_j \right] \quad (i = 1, 2, \dots, n).$$

Poichè si verifica che

$$L_i(\beta^{(i)}(x_i) D_i u) = D_i \left( \frac{f}{\beta^{(i)}(x_i)} \right)$$

si ha per una nota maggiorazione (ad es. [4], pag. 170)  $\forall \Omega_0 \subset\subset \Omega$

$$\begin{aligned} \|\beta^{(i)}(x_i) D_i u\|_{H^1(\Omega_0)} &\leq C_1 \left\{ \|\beta^{(i)}(x_i) D_i u\|_{L^2(\Omega)} + \left\| D_i \left( \frac{f}{\beta^{(i)}(x_i)} \right) \right\|_{H^{-1}(\Omega)} \right\} \\ &\leq C_2 \{ \|u\|_{H^1(\Omega)} + \|f\|_{L^2(\Omega)} \} \end{aligned}$$

con  $C_1, C_2$  dipendenti solo da  $\Omega_0, \Omega, \lambda, A$ , e quindi vale la (1).

2. Se  $\beta$  è semplicemente una funzione misurabile, si possono costruire, per convoluzione, delle funzioni  $C^\infty$ ,  $\beta_k^{(i)}(x_i)$ , ( $k = 1, 2, 3, \dots$ ) tali che

$$\lambda \leq \beta_k^{(i)} \leq A$$

$$\{\beta_k^{(i)}(x_i)\} \xrightarrow{k} \beta^{(i)}(x_i) \text{ in } L_{\text{loc}}^2(\Omega).$$

Detto allora  $B_k$  l'operatore  $\sum_j^n D_j \left[ \left( \prod_{i=1}^n \beta_k^{(i)}(x_i) \right) D_j \right]$  ed  $u_k, u$  le funzioni, in  $H_0^1(\Omega)$ , tali che  $B_k u_k = Bu = f$ , si ha (vedi 1.5):

$$\{u_k\} \xrightarrow{k} u \text{ in } H^1(\Omega)$$

e quindi anche

$$\{\beta_k^{(i)}(x_i) D_i u_k\} \xrightarrow{k} \beta^{(i)}(x_i) D_i u \quad \text{in } L_{loc}^1(\Omega).$$

D'altra parte si ha, per la (1) nel caso già provato,  $\forall \Omega_0 \subset \subset \Omega$ :

$$\|\beta_k^{(i)}(x_i) D_i u_k\|_{H^1(\Omega_0)} \leq C(\Omega_0, \Omega, \lambda, A) \|f\|_{L^2(\Omega)},$$

cosicchè, estraendo una sottosuccessione debolmente convergente in  $H^1(\Omega_0)$ , si ha la tesi:

$$\beta^{(i)}(x_i) D_i u \in H^1(\Omega_0)$$

$$\|\beta^{(i)}(x_i) D_i u\|_{H^1(\Omega_0)} \leq C(\Omega_0, \Omega, \lambda, A) \|f\|_{L^2(\Omega)}.$$

**TEOREMA 2.2.** *Consideriamo, su aperto  $\Omega$  di  $\mathbb{R}^n$ , gli operatori*

$$B_k = \sum_j^n D_j (\beta_k(x) D_j) \quad (k = 1, 2, 3, \dots)$$

con  $\beta_k$  funzioni misurabili su  $\Omega$  della forma

$$\beta_k(x) = \prod_{i=1}^n \beta_k^{(i)}(x_i)$$

$$e \quad 0 < \lambda \leq \beta_k^{(i)} \leq A \quad (2)$$

e l'operatore

$$A = \sum_j^n D_j (\lambda_j(x) D_j)$$

(2) Se  $\lambda \leq \prod_{i=1}^n \beta^{(i)}(x_i) \leq A$ , si può sempre trovare un'altra decomposizione  $\prod_{i=1}^n \beta^{(i)}(x_i) = \prod_{i=1}^n \tilde{\beta}^{(i)}(x_i)$  per cui

$$\text{Min } \{\lambda, 1\} \leq \tilde{\beta}^{(i)} \leq \text{Max } \{A, 1\}$$

con  $\lambda_j$  funzioni misurabili su  $\Omega$  e

$$\lambda \leq \lambda_j \leq A.$$

Allora

$$\{B_k\} \xrightarrow{G} A$$

se e solo se,  $\forall j$ ,

$$(2) \quad \lim_k \int_{\Omega} \left| \frac{\beta_k(x) - \lambda_j(x)}{\beta_k^{(j)}(x_j)} \right| w(x) dx = 0 \quad \forall w \in L^1(\Omega)^{(3)}$$

**DIMOSTRAZIONE.** Per la località della  $G$ -convergenza (vedi 1.2) si può supporre  $\Omega$  limitato.

1. Proviamo che (2) implica:  $\{B_k\} \xrightarrow{G} A$ .

Per questo, detti  $B_k^{-1}, A^{-1}: H^{-1}(\Omega) \longrightarrow H_0^1(\Omega)$  gli operatori inversi. (rispetto al problema di Dirichlet su  $\Omega$ ) di  $B, A$ , basta verificare (vedi 1.3) che:

$$\lim_k \int_{\Omega} (g \cdot B_k^{-1} f - g \cdot A^{-1} f) dx = 0 \quad \forall f, g \in L^2(\Omega)$$

e, anzi, che

$$\lim_k \int_{\Omega} (f \cdot B_k^{-1} f - f \cdot A^{-1} f) dx = 0 \quad \forall f \in L^2(\Omega)$$

dal momento che  $A$  e  $B_k$  sono operatori simmetrici.

Ora, posto  $u_k = B_k^{-1} f, u = A^{-1} f$ , si ha

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} (f \cdot B_k^{-1} f - f \cdot A^{-1} f) dx &= \sum_1^n \int_{\Omega} (-\lambda_j(x) D_j u D_j u_k + \beta_k(x) D_j u_k D_j u) dx \\ &= \sum_1^n \int_{\Omega} \left( \frac{\beta_k(x) - \lambda_j(x)}{\beta_k^{(j)}(x_j)} \beta_k^{(j)}(x_j) D_j u_k D_j u \right) dx. \end{aligned}$$

Ma, per la (1),  $\{\beta_k^{(j)}(x_j) D_j u_k\}$  è, per ogni  $j$ , una successione limitata in  $H_{loc}^1(\Omega)$ , quindi compatta in  $L_{loc}^2(\Omega)$ ; inoltre tale successione è limitata in  $L^2(\Omega)$ , in quanto le  $u_k (= B_k^{-1} f)$  sono equilimitate in  $H^1(\Omega)$ .

---

<sup>(3)</sup> La (2) non dipende dalla scelta della decomposizione delle  $\beta_k$  (purchè  $\lambda \leq \beta_k^{(i)} \leq A$ ).

Pertanto  $\{\beta_k^{(j)}(x_j) D_j u_k D_j u\}$  è una successione compatta in  $L^1(\Omega)$  e quindi, dalla (2), segue:  $\{B_k\} \xrightarrow{G} A$ .

2. Proviamo che da  $\{B_k\} \xrightarrow{G} A$  segue la (2).

Le successioni  $\left\{\frac{\beta_k(x)}{\beta_k^{(j)}(x_j)}\right\}$  e  $\left\{\frac{1}{\beta_k^{(j)}(x_j)}\right\}$  sono, per ogni  $j$ , limitate in  $L^\infty(\Omega)$  e quindi compatte nella topologia debole  $\sigma(L^\infty(\Omega), L^1(\Omega))$  <sup>(4)</sup>.

Se pertanto la (2) non valesse, esisterebbero degli interi  $\{k_r\} \rightarrow \infty$  e delle funzioni  $\tilde{\lambda}_1(x), \dots, \tilde{\lambda}_n(x)$ , con  $\tilde{\lambda}_{j_0} \neq \lambda_{j_0}$  per qualche  $j_0$ , tali che,  $\forall j$ :

$$\left\{ \frac{\beta_{k_r}(x)}{\beta_{k_r}^{(j)}(x_j)} - \frac{\tilde{\lambda}_j(x)}{\beta_{k_r}^{(j)}(x_j)} \right\} \xrightarrow{r} 0 \text{ in } \sigma(L^\infty(\Omega), L^1(\Omega)).$$

Ma allora, per la parte 1. della dimostrazione, si avrebbe

$$\{B_{k_r}\} \xrightarrow{G} \sum_1^n D_j \tilde{\lambda}_j(x) D_j$$

e quindi per l'unicità del  $G$ -limite

$$\tilde{\lambda}_j = \lambda_j, \quad \forall j, \quad \text{contraddittorio.}$$

### § 3. Il teorema di densità.

Con l'aiuto del Teor. 2.2 siamo ora in grado di provare il risultato principale di questo articolo:

**TEOREMA 3.1.** *Sia  $\Omega$  un aperto di  $\mathbb{R}^n$  ed  $A = \sum_1^n D_i (a_{ij}(x) D_j)$  con  $a_{ij}$  funzioni misurabili su  $\Omega$  e verificanti le condizioni*

$$(3) \quad \begin{cases} a_{ij} = a_{ji} \\ \lambda_0 |\xi|^2 \leq \sum_1^n a_{ij}(x) \xi_i \xi_j \leq A_0 |\xi|^2 \end{cases} \quad \forall x \in \Omega, \xi \in \mathbb{R}^n (\lambda_0 > 0).$$

---

<sup>(4)</sup>  $\sigma(L^\infty(\Omega), L^1(\Omega))$  è la topologia debole su  $L^\infty(\Omega)$  come duale di  $L^1(\Omega)$ :  $\{\varphi_k\} \xrightarrow{k} 0$  in tale topologia se  $\lim_k \int_\Omega \varphi_k w \, dx = 0$ ,  $\forall w \in L^1(\Omega)$ .

Si può allora  $G$ -approssimare su  $\Omega$  l'operatore  $A$  con una successione di operatori della forma ( $k = 1, 2, 3, \dots$ )

$$(4) \quad \left\{ \sum_1^n D_j (\beta_k(x) D_j) \right\}$$

con

$$\beta_k \in C^\infty(\bar{\Omega}) \quad \text{e} \quad 0 < \lambda'_0 \leq \beta_k \leq \lambda'_0.$$

**DIMOSTRAZIONE.** La dimostrazione può suddividersi in due parti.

Nella 1ª parte si mostra che si può trovare, in ogni intorno (nella  $G$ -convergenza) di  $A$  un operatore con coefficienti costanti a tratti e verificanti le stesse limitazioni (3) degli  $a_{ij}$ ; ciò permette, localizzando il problema ed eseguendo un cambiamento di coordinate, di ridursi al caso che  $A$  sia diagonale ed a coefficienti costanti.

Nella 2ª parte si approssima un  $A$  di questo tipo con operatori del tipo (4).

1. Non è restrittivo, prima di tutto, supporre che le  $a_{ij}$  siano  $C^\infty$  su  $\bar{\Omega}$ .

Infatti si possono costruire, per convoluzione, delle funzioni  $C^\infty$  su  $\bar{\Omega}$ ,  $a_{ij,k}(k = 1, 2, 3, \dots)$ , verificanti uniformemente le (3), tali che

$$\{a_{ij,k}\} \xrightarrow{k} a_{ij} \quad \text{in } L^1_{\text{loc}}(\Omega);$$

ma la convergenza dei coefficienti in  $L^1_{\text{loc}}$  implica la  $G$ -convergenza dei corrispondenti operatori (vedi 1.5)

Per lo stesso motivo, ci si può limitare a cercare i coefficienti  $\beta_k$  degli operatori approssimanti nell'ambito delle funzioni misurabili su  $\Omega$ .

A questo punto, data la continuità delle  $a_{ij}$  su  $\bar{\Omega}$ , si possono trovare, fissato  $\varepsilon > 0$ , degli aperti limitati di  $\Omega$ ,  $\Omega_r^{(\varepsilon)}$  ( $r = 1, 2, 3, \dots$ ) con  $\Omega_r^{(\varepsilon)} \cap \Omega_s^{(\varepsilon)} = \emptyset$  per  $r \neq s$ , mis  $\left( \Omega - \bigcup_{r=1}^{\infty} \Omega_r^{(\varepsilon)} \right) = 0$  e  $\sup_{x \in \Omega_r^{(\varepsilon)}} a_{ij}(x) - \inf_{x \in \Omega_r^{(\varepsilon)}} a_{ij}(x) \leq \varepsilon$ . Allora le funzioni  $a_{ij}^{(\varepsilon)}$  che assumono su  $\Omega_r^{(\varepsilon)}$  il valore costante  $a_{ij}(x_r^{(\varepsilon)})$ , dove  $x_r^{(\varepsilon)}$  è un arbitrario punto di  $\Omega_r^{(\varepsilon)}$ , verificano uniformemente la (3) e inoltre

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \|a_{ij}^{(\varepsilon)} - a_{ij}\|_{L^\infty(\Omega)} = 0.$$

Pertanto, essendo la convergenza  $L^\infty$  dei coefficienti più forte della  $G$ -con-

vergenza, non è restrittivo supporre che i coefficienti  $a_{ij}$  siano costanti su degli aperti limitati  $\Omega_r$  tali che  $\Omega_r \cap \Omega_s = \emptyset$  per  $r \neq s$ , mis  $\left( \Omega - \bigcup_{r=1}^{\infty} \Omega_r \right) = 0$ .

Per 1.2 è quindi sufficiente approssimare  $A$  (con operatori del tipo (4)) su ciascuno degli  $\Omega_r$ , il che è come supporre  $A$  a coefficienti costanti su  $\Omega$  ed  $\Omega$  limitato.

Il problema si semplifica ulteriormente se si osserva che gli operatori del tipo (4) restano invariati per rotazioni degli assi coordinati: scegliendo un opportuno sistema di riferimento si può quindi fare in modo che la matrice  $a_{ij}$  sia diagonale, cioè che

$$A = \sum_{j=1}^n \lambda_j D_j^2, \quad \lambda_j \in \mathbb{R}, \lambda_0 \leq \lambda_j \leq A_0.$$

2. In vista del Teor. 2.2 costruiremo delle funzioni  $\beta_k(x) = \prod_{i=1}^n \beta_k^{(i)}(x_i)$  ( $k = 1, 2, 3, \dots$ ) che verificano la (2) (con le  $\lambda_j$  costanti su  $\Omega$ ).

Per questo è sufficiente che sia,  $\forall i, :$

$$(5) \quad \left\{ \begin{array}{l} \{\beta_k^{(i)}(x_i)\} \xrightarrow{k} \mu^{(i)} \\ \left\{ \frac{1}{\beta_k^{(i)}(x_i)} \right\} \xrightarrow{k} \frac{1}{\nu^{(i)}} \end{array} \right. \quad \text{in } \sigma(L^\infty(\Omega), L^1(\Omega))$$

per certi  $\mu^{(i)}, \nu^{(i)} \in \mathbb{R}$  tali che  $(5) \prod_{i \neq j} \mu^{(i)} - \frac{\lambda_j}{\nu^{(j)}} = 0, \forall j$ , cioè

$$(6) \quad \left\{ \begin{array}{l} \lambda_1 = \nu^{(1)} \mu^{(2)} \mu^{(3)} \dots \mu^{(n)} \\ \lambda_2 = \mu^{(1)} \nu^{(2)} \mu^{(3)} \dots \mu^{(n)} \\ \vdots \\ \lambda_n = \mu^{(1)} \mu^{(2)} \mu^{(3)} \dots \nu^{(n)}. \end{array} \right.$$

Supponiamo di aver scelto le  $\mu^{(i)}, \nu^{(i)}$  (con  $\mu^{(i)} \geq \nu^{(i)} > 0$ ); un modo di costruire le  $\beta_k^{(i)}$  verificanti la (5) è il seguente:

(5) Si noti che, essendo  $\int_{\Omega} \beta_k^{(i)} dx \cdot \int_{\Omega} (\beta_k^{(i)})^{-1} dx \geq (\text{mis } \Omega)^2, \forall k$ , (5) implica la relazione  $\mu^{(i)} \geq \nu^{(i)}$ .

Si considera, per ogni  $k$ , una ripartizione di  $\mathbb{R}$  in intervalli eguali di lunghezza  $\frac{1}{k}$ ,  $\mathbb{R} = \bigcup_{m=-\infty}^{+\infty} I_{m,k}$ ,  $I_{m,k}$  precedente  $I_{m+1,k}$ , e si definisce

$$\beta_k^{(i)} \equiv \begin{cases} a_i & \text{su } I_{m,k}, \text{ per } m \text{ pari} \\ b_i & \text{su } I_{m,k}, \text{ per } m \text{ dispari} \end{cases}$$

dove  $a_i, b_i$  sono numeri  $> 0$  da determinarsi

Poichè

$$\begin{cases} \{\beta_k^{(i)}\} \xrightarrow{k} \frac{1}{2}(a_i + b_i) \\ \left\{\frac{1}{\beta_k^{(i)}}\right\} \xrightarrow{k} \frac{1}{2}\left(\frac{1}{a_i} + \frac{1}{b_i}\right) \end{cases} \quad \text{in } \sigma(L^\infty, L^1)$$

$(a_i, b_i)$  devono risolvere il sistema

$$\begin{cases} \frac{1}{2}(a_i + b_i) = \mu^{(i)} \\ \frac{1}{2}\left(\frac{1}{a_i} + \frac{1}{b_i}\right) = \frac{1}{\nu^{(i)}} \end{cases}$$

Ora questo sistema è certamente risolubile e le sue soluzioni sono positive, in quanto  $\mu^{(i)} \geq \nu^{(i)} > 0$ .

Pertanto, resta solo da scegliere una decomposizione (6) con  $\mu^{(i)} \geq \nu^{(i)} > 0$ . Una scelta possibile è

$$\mu^{(i)} = A^{1/n}, \quad \nu^{(i)} = \lambda_i A^{(1-n)/n}$$

dove  $A = \text{Max } \{\lambda_i\}$ .

I valori  $a_i, b_i$  attribuiti a  $\beta_k^{(i)}(x_i)$  nella parte 2 della precedente dimostrazione sono tali che

$$2^{-1} \nu^{(i)} \leq a_i \leq b_i \leq 2\mu^{(i)}$$

quindi

$$2^{-n} \prod_{i=1}^n \nu^{(i)} \leq \beta_k(x) \leq 2^n \prod_{i=1}^n \mu^{(i)}.$$

Si è così provata la seguente

PROPOSIZIONE 3.2. *Ogni operatore diagonale a coefficienti costanti*

$$A = \sum_1^n \lambda_j D_j^2 \quad (\lambda_j > 0)$$

è *G*-limite di una successione di operatori  $B_k$  del tipo seguente

$$(7) \quad B_k = \sum_1^n D_j(\beta_k(x) D_j) \quad (\beta_k \in C^\infty \text{ su } \bar{\Omega})$$

$$(8) \quad \beta_k(x) = \prod_{i=1}^n \beta_k^{(i)}(x_i)$$

$$(9) \quad 2^{-n} A^{1-n} \prod_{i=1}^n \lambda_i \leq \beta_k \leq 2^n A$$

dove  $A = \text{Max } \{\lambda_i\}$ .

Vogliamo ora studiare il legame fra le costanti di ellitticità  $L_k$  dei  $B_k$  ( $L_k = \text{Sup}_\Omega \beta_k \cdot (\text{Inf}_\Omega \beta)^{-1}$ ) ed  $L$  di  $A$  ( $L = \text{Max } \{\lambda_j\} \cdot (\text{Min } \{\lambda_j\})^{-1}$ ).

Si può anzitutto verificare che, per ogni successione di operatori  $\{B_k\}$ , del tipo (7), (8) che *G*-converga ad  $A$ , si ha

$$\text{Min}_k \lim_\Omega \{\text{Sup}_\Omega \beta_k\} \geq A$$

$$\text{Max}_k \lim_\Omega \{\text{Inf}_\Omega \beta_k\} \leq A^{1-n} \prod_{i=1}^n \lambda_i.$$

Infatti se  $\{B_k\} \xrightarrow{G} A$ , passando eventualmente ad una sottosuccessione dev'essere verificata la (5) per certe  $\mu^{(i)}$ ,  $\nu^{(i)}$  verificanti la (6). Ma (5) implica

$$\text{Min}_k \lim_\Omega \text{Sup}_\Omega \beta_k^{(i)} \geq \mu^{(i)} \geq \nu^{(i)} \geq \text{Max}_k \lim_\Omega \text{Inf}_\Omega \beta_k^{(i)}, \quad \forall i$$

mentre in ogni decomposizione di tipo (6) (con  $\mu^{(i)} \geq \nu^{(i)} > 0$ ) si ha

$$\prod_{i=1}^n \mu^{(i)} \geq A, \quad \prod_{i=1}^n \nu^{(i)} \leq A^{1-n} \cdot \prod_{i=1}^n \lambda_i.$$

In particolare, indicata  $L_k$  la costante di ellitticità di  $B_k$  ed  $L$  quella di  $A$ , si ha

$$\text{Min}_k \lim_\Omega \{L_k\} \geq A^n \left( \prod_{i=1}^n \lambda_i \right)^{-1},$$

stima che si riduce a  $\text{Min} \lim_k \{L_k\} \geq L^{n-1}$  qualora sia

$$A = \lambda_1 > \lambda_2 = \lambda_3 = \dots = \lambda_n.$$

Si può ora cercare una migliore approssimazione ( $L_k \leq c_n L$ ) di  $A$  con operatori del tipo (7), se si rinuncia alla (8).

Per ottenerla (Teor. 3.4), utilizzeremo un lemma relativo alla  $G$ -convergenza di operatori le cui matrici dei coefficienti siano costituite da due blocchi dipendenti da differenti variabili:

Se  $E = \sum_{ij}^k D_j (\theta_{ij}(x) D_j)$  è un operatore su un aperto  $\Omega_0$  di  $\mathbb{R}^k$  ( $k < n$ ), dove le  $\theta_{ij}$  sono funzioni misurabili su  $\Omega_0$ , introduciamo gli operatori (in  $\mathbb{R}^n$ ):

$$E' = \sum_{ij}^k D_i (\theta_{ij}(x_1, \dots, x_k) D_j), \quad \text{su } \Omega_0 \times \mathbb{R}^{n-k}$$

$$E'' = \sum_{ij}^k D_{n-k+i} (\theta_{ij}(x_{n-k+1}, \dots, x_n) D_{n-k+j}), \quad \text{su } \mathbb{R}^{n-k} \times \Omega_0.$$

Si ha allora:

LEMMA 3.3. Sia  $\Omega = \Omega' \times \Omega''$  un aperto di  $\mathbb{R}^n$ , con  $\Omega' \subseteq \mathbb{R}^p$ ,  $\Omega'' \subseteq \mathbb{R}^q$  ( $p + q = n$ ) e siano ( $k = 1, 2, 3, \dots$ )

$$B_k, B \in M(\lambda_0, A_0, \Omega')$$

$$C_k, C \in M(\lambda_0, A_0, \Omega'')^{(6)}$$

$$A_k = B'_k + C'_k, \quad A = B' + C'' \quad (A_k, A \in M(\lambda_0, A_0, \Omega)).$$

Allora

$$\begin{array}{lll} \{A_k\} \xrightarrow{G} A & \text{su } \Omega \\ \text{se (e solo se)} & & \\ \{B_k\} \xrightarrow{G} B & \text{su } \Omega' \\ e & & \\ \{C_k\} \xrightarrow{G} C & \text{su } \Omega''. \end{array}$$

DIMOSTRAZIONE. Per 1.2 si può supporre  $\Omega$  limitato.

Per la compattezza della  $G$ -convergenza (vedi 1.1) e per il fatto che da  $B' + C'' = B_* + C''_*$  segue  $B = B_*$ ,  $C = C_*$ , basta dimostrare che se

---

<sup>(6)</sup> Per definizione di  $M(\lambda_0, A_0, \Omega)$  vedi il § 1.

$\{A_k\} \xrightarrow{G} A$ ,  $\{B_k\} \xrightarrow{G} B$ ,  $\{C_k\} \xrightarrow{G} C$ , allora si ha

$$A = B' + C''.$$

Per questo basta verificare che

$$A(u \otimes v) = (B' + C'')(u \otimes v) \quad \forall u \in H_0^1(\Omega'), v \in H_0^1(\Omega'')$$

dove

$$(u \otimes v)(x) = u(x_1, \dots, x_k) v(x_{k+1}, \dots, x_n).$$

Infatti le funzioni del tipo  $u \otimes v$  generano un sottospazio denso di  $H_0^1(\Omega)$ .

Siano ora  $u_k \in H_0^1(\Omega')$ ,  $v_k \in H_0^1(\Omega'')$  le funzioni tali che  $B_k u_k = Bu$ ,  $C_k v_k = Cv$ ; per definizione di  $G$ -convergenza si ha allora

$$\begin{aligned} \{u_k\} &\xrightarrow{k} u \quad \text{in } L^2(\Omega') \\ \{v_k\} &\xrightarrow{k} v \quad \text{in } L^2(\Omega''). \end{aligned}$$

Ma

$$A_k(u_k \otimes v_k) = (B_k u_k) \otimes v_k + u_k \otimes (C_k v_k) = Bu \otimes v_k + u_k \otimes Cv$$

quindi

$$\{A_k(u_k \otimes v_k)\} \xrightarrow{k} Bu \otimes v + u \otimes Cv \quad \text{in } H^{-1}(\Omega).$$

D'altra parte

$$\{u_k \otimes v_k\} \xrightarrow{k} u \otimes v \quad \text{in } L^2(\Omega)$$

e, poiché  $\{A_k\} \xrightarrow{G} A$ , per 1.4 si ha la tesi:

$$A(u \otimes v) = (Bu) \otimes v + u \otimes (Cv).$$

**TEOREMA 3.4.** Sia  $\Omega$  un aperto di  $\mathbb{R}^n$  ed  $A = \sum_{i,j=1}^n D_i(a_{ij}(x) D_j)$  con  $a_{ij}$  funzioni misurabili su  $\Omega$  e verificanti le (3).

Si può allora  $G$ -approssimare su  $\Omega$  l'operatore  $A$  con una successione di operatori della forma ( $k = 1, 2, 3, \dots$ )

$$\sum_{j=1}^n D_j(\beta_k(x) D_j)$$

con

$$c^{-1} \lambda_0 \leq \beta_k \leq c A_0$$

dove  $c$  è una costante che dipende solo da  $n$  e non da  $\lambda_0, A_0$ .

DIMOSTRAZIONE. Se  $n = 1$  il teorema è banale ( $c = 1$ ).

Supponiamo vero il teorema su  $\mathbb{R}^{n-1}$  e verifichiamolo su  $\mathbb{R}^n$ .

Per 1.2 si può supporre  $\Omega = \Omega' \times \Omega''$ , con  $\Omega' \subseteq \mathbb{R}^{n-1}$ ,  $\Omega'' \subseteq \mathbb{R}$ .

Inoltre, procedendo esattamente come nella parte 1. della dimostrazione del Teor. 3.1, ci si può ricondurre ad approssimare un operatore della forma

$$A = \sum_1^n \lambda_j D_j^2, \quad \lambda_j \in \mathbb{R}, \quad \lambda_0 \leq \lambda_j \leq A_0,$$

e anche, cambiando eventualmente il sistema di riferimento, si può supporre che

$$\lambda_n \leq \lambda_{n-1} \leq \dots \leq \lambda_1.$$

Ora, usando le notazioni del Lemma 3.3, si può, scrivere

$$A = B' + C''$$

$$\text{con} \quad B = \sum_1^{n-1} \lambda_j D_j^2 \quad \text{operatore su } \Omega'$$

$$\text{e} \quad C = \lambda_n D_n^2 \quad \text{operatore su } \Omega''.$$

Per l'ipotesi induttiva, approssimiamo  $B$ , su  $\Omega'$ , con operatori della forma

$$\sum_1^{n-1} D_j (\varrho(x_1, \dots, x_{n-1}) D_j)$$

dove

$$(10) \quad c_{n-1}^{-1} \lambda_{n-1} \leq \varrho \leq c_{n-1} \lambda_1.$$

Quindi utilizzando il Lemma 3.3, ci si riconduce ad approssimare (nel modo desiderato) su  $\Omega$  l'operatore

$$\sum_1^{n-1} D_j (\varrho(x_1, \dots, x_{n-1}) D_j) + \lambda_n D_n^2$$

e anzi, usando di nuovo il procedimento della parte 1. della dimostrazione del Teor. 3.1, basta approssimare l'operatore

$$\sum_1^{n-1} \varrho D_j^2 + \lambda_n D_n^2$$

con  $\varrho$  numero reale verificante la (10).

Ma per la Proposizione 3.2 quest'ultimo operatore è  $G$ -limite di operatori  $\left\{ \sum_{j=1}^n D_j (\beta_k(x) D_j) \right\}$  con

$$2^{-n} \lambda_n \leq \beta_k \leq 2^n \varrho \quad \text{se } \varrho \geq \lambda_n$$

$$2^{-n} \left( \frac{\varrho}{\lambda_n} \right)^{n-1} \lambda_n \leq \beta_k \leq 2^n \lambda_n \quad \text{se } \varrho < \lambda_n.$$

Pertanto, utilizzando la (10) e ricordando che  $\lambda_n \leq \lambda_{n-1} \leq \lambda_1$ , si ha in ogni caso

$$c_n^{-1} \lambda_n \leq \beta_k \leq c_n \lambda_1$$

dove

$$c_n \geq 2^n (c_{n-1})^{n-1}$$

da cui la tesi.

NOTA. Indicata  $L_k$  la costante di ellitticità degli operatori  $\{B_k\}$  che approssimano  $A$ , ed  $L$  la costante di ellitticità di  $A$ , si ha

$$L_k \leq cL$$

con  $c$  costante dipendente solo da  $n$ .

*Istituto Matematico della  
Università di PISA.*

## BIBLIOGRAFIA

- [1] J. L. LIONS - E. MAGENES, *Problème aux limites non homogènes et applications*, Vol. 1. Dunod (Paris) (1968).
- [2] S. SPAGNOLO, *Sul limite delle soluzioni di problemi di Cauchy relativi all'equazione del calore*, Ann. Sc. Norm. Sup. Pisa, Vol. 21, Fasc. 4, (1967) 657-699.
- [3] S. SPAGNOLO, *Sulla convergenza di soluzioni di equazioni paraboliche ed ellittiche*, Ann. Sc. Norm. Sup. Pisa, Vol 22, Fasc. 4, (1968) 571-597.
- [4] G. STAMPACCHIA, *Équations elliptiques du second ordre à coefficients discontinus*, Université de Montréal, Sem. de Math. Sup. (1965).