ANNALI DELLA
SCUOLA NORMALE SUPERIORE DI PISA
Classe di Scienze

G. SORANI

Homologie des q-paires de Runge

Annali della Scuola Normale Superiore di Pisa, Classe di Scienze 3^e série, tome 17, n^o 4 (1963), p. 319-332

<http://www.numdam.org/item?id=ASNSP_1963_3_17_4_319_0>

© Scuola Normale Superiore, Pisa, 1963, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Annali della Scuola Normale Superiore di Pisa, Classe di Scienze » (http://www.sns.it/it/edizioni/riviste/annaliscienze/) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (http://www.numdam.org/conditions). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM
Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
http://www.numdam.org/

HOMOLOGIE DES q-PAIRES DE RUNGE (*)

par G. SORANI (Roma)

On sait [1] que, X étant une variété holomorphiquement complète (c'est à dire une variété de Stein), on a $H_i(X, \mathbb{Z}) = 0$ pour $i > n$.

A. Andreotti et R. Narasimhan [3] ont envisagé les paires de Runge, (X, Y), de variétés holomorphiquement complètes et ont prouvé que les groupes d'homologie relative à coefficients entiers $H_i(X \bmod Y, \mathbb{Z})$ sont nuls pour $i > n$. Ce résultat a été obtenu en utilisant la théorie de Morse et ne dépend pas du théorème démontré en [1].

Nous avons précédemment généralisé [8] aux variétés q-convexes et q-complètes le résultat de [1]: si X est une variété q-complète on a $H_i(X, \mathbb{Z}) = 0$ pour $i > n + q - 1$.

Notre but ici est d'étendre aux variétés q-complètes la notion de paire de Runge et de démontrer que les q-paires de Runge de variétés q-complètes, que nous allons définir, jouissent de propriétés topologiques analogues à celles des paires de Runge de variétés holomorphiquement complètes. Nous y parviendrons en utilisant le théorème démontré en [8].

Ensuite nous démontrerons la propriété topologique suivante des variétés q-complètes: *soit X une variété q-complète par rapport à une fonction différentiable φ fortement q-plurisousharmonique sur X; les ensembles $B_c = \{x \in X \mid \varphi(x) < c, c \in \mathbb{R}\}$ sont q-Runge dans X.* Pour $q = 1$ ce théorème a été démontré par Doquier et Grauert [6] et par Narasimhan [7] si X est un espace de Stein; pour un domaine $X \subset \mathbb{C}^n$, ce théorème est déjà dans Behnke et Stein [4].

Pervenuto alla Redazione il 15 Aprile 1963.

(*) Lavoro eseguito nel gruppo di Ricerca n. 35 del C. M C. N. R. (anno accademico 1962-63).

1. q-paires de Runge.

Soient :

X une variété complexe (1) de dimension complexe n,

Ω^k le faisceau des germes de formes différentielles, à valeurs complexes, de degré k, holomorphes sur X,

$\mathcal{O} = \Omega^0$ le faisceau des germes de fonctions holomorphes sur X,

$A^{k,r}$ le faisceau des germes de formes différentielles, à valeurs complexes, de type (k, r), C^∞ sur X,

$\overline{\partial} : A^{k,r} \longrightarrow A^{k,r+1}$ l'opérateur de différentiation extérieure par rapport aux variables conjuguées.

De la suite exacte de faisceaux et homomorphismes :

$$0 \longrightarrow \Omega^k \longrightarrow A^{k,0} \xrightarrow{\overline{\partial}} A^{k,1} \xrightarrow{\overline{\partial}} \ldots \xrightarrow{\overline{\partial}} A^{k,n} \longrightarrow 0,$$

on obtient la suite non exacte :

$$0 \longrightarrow \Gamma(X, \Omega^k) \longrightarrow \Gamma(X, A^{k,0}) \longrightarrow \Gamma(X, A^{k,1}) \longrightarrow \ldots \longrightarrow \Gamma(X, A^{k,n}) \longrightarrow 0.$$

Pour $0 \leq r \leq n$ nous posons :

$$Z^{k,r}(X) = \operatorname{Ker}(\Gamma(X, A^{k,r}) \xrightarrow{\overline{\partial}} \Gamma(X, A^{k,r+1})).$$

L'espace $Z^{k,r}(X)$, muni de la topologie de la convergence compacte des coefficients de formes différentielles et de toutes leurs dérivées est un espace de Fréchet (2).

Soit Y un ouvert contenu dans X, nous donnons la définition suivante :

DÉFINITION. *On dit que (X, Y) est une q-paire de Runge si l'image de l'homomorphisme de restriction :*

$$r : Z^{k,q-1}(X) \longrightarrow Z^{k,q-1}(Y)$$

est dense dans $Z^{k,q-1}(Y)$ pour $0 \leq k \leq n$.

---

(1) Toute variété est supposée de dimension pure et à base dénombrable.

(2) Un espace de Fréchet est un espace vectoriel topologique sur $\mathbb{C}$, localement convexe, métrisable et complet.

Si X et $Y \subset X$ sont des variétés q-complètes ([3]) on peut envisager une q-paire de Runge de variétés q-complètes ; on dira aussi que Y est q-Runge dans X.

Dans le n. 7 nous montrerons (théorème 3) que la définition précédente généralise, de façon tout à fait naturelle, la définition ordinaire de paire de Runge de variétés de Stein.

Dans cet article nous prouverons (théorème 2) que *si* (X, Y) *est une q-paire de Runge de variétés q-complètes alors* $H_i(X \bmod Y, \mathbb{Z}) = 0$ *pour* $i > n + q - 1$. Pour $q = 1$ (cas des variétés de Stein) A. Andreotti et R. Narasimhan [3] ont en outre prouvé que $H_n(X \bmod Y, \mathbb{Z})$ est sans torsion et en plus libre si Y est relativement compact dans X, à bord différentiable.

Nous exprimons notre reconnaissance à M. Aldo Andreotti pour les conseils reçus pendant la rédaction de cet article, et pour son aide constante.

2. Quelques propriétés des variétés q-complètes.

Une variété complexe X est dite q-complète s'il existe une fonction différentiable $\varphi : X \longrightarrow \mathbb{R}$ fortement q-plurisousharmonique ([4]) sur X telle que les ensembles $\{x \in X \mid \varphi(x) < \alpha, \alpha \in \mathbb{R}\}$ soient relativement compacts dans X. Une variété 1-complète est une variété holomorphiquement complète (cfr. [2]).

Nous rappelons ici quelques propriétés des variétés q-complètes qui sont utilisées dans la suite de ce travail.

P_1 — (A. Andreotti et H. Grauert [2] page 250) *Soit* X *une variété q-complète,* $\mathcal{F}$ *un faisceau analytique cohérent sur* X *; on a* :

$$H^r(X, \mathcal{F}) = 0 \quad \textit{pour } r \geq q .$$

Dans cet article il suffit d'envisager le cas où $\mathcal{F} = \Omega^k$ $(0 \leq k \leq n)$.

P_2 — ([8] page 304) *Soit* X *une variété q-complète ; on a* :

$$H_i(X, \mathbb{Z}) = 0 \qquad \textit{pour} \qquad i > n + q - 1,$$

$$H_{n+q-1}(X, \mathbb{Z}) \qquad \textit{libre.}$$

([3]) Pour la définition de variété q-complète cfr. le n. 2 suivant ; pour les notions relatives aux espaces q-convexes et q-complets cfr. [2].

([4]) Une fonction φ à valeurs réelles, C^∞ sur X, est dite *fortement q-plurisousharmonique* si la forme hermitienne :

$$\mathcal{L}(\varphi)_x = \Sigma \left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^\alpha \, \partial \overline{z^\beta}} \right)_x u^\alpha \, \overline{u^\beta}$$

a $n - q + 1$ valeurs propres > 0, en tout point $x \in X$.

On obtient facilement la démonstration de ce théorème en utilisant la théorie des points critiques de M. Morse ; en [8] nous avons prouvé un théorème plus général qui fournit un résultat analogue pour les variétés q-convexes. Pour ce qui concerne ce travail, relativement à la seconde affirmation du théorème, il suffit de constater que $H_{n+q-1}(X, \mathbb{Z})$ est sans torsion.

3. Formes différentielles sur les variétés q-complètes.

Nous allons prouver ici le théorème suivant :

THÉORÈME 1. *Soit X une variété q-complète. Toute forme différentielle, C^∞ sur X, de degré $n+q-1$, d-fermée $(d = \partial + \bar{\partial})$ est cohomologue à une forme de type $(n, q-1)$, $\bar{\partial}$-fermée (et donc d-fermée).*

Preuve. Soit :

$$\alpha = \alpha^{n,q-1} + \alpha^{n-1,q} + \ldots + \alpha^{q,n-1} + \alpha^{q-1,n} \tag{3,1}$$

une forme différentielle C^∞ sur X, de degré $n+q-1$, d-fermée.

A cause de la bigraduation, la condition $d\alpha = 0$ équivaut aux conditions suivantes :

$$\left\{\begin{array}{l} \bar{\partial}\alpha^{n,q-1} + \partial\alpha^{n-1,q} = 0 \\ \bar{\partial}\alpha^{n-1,q} + \partial\alpha^{n-2,q+1} = 0 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ \bar{\partial}\alpha^{q+1,n-2} + \partial\alpha^{q,n-1} = 0 \\ \bar{\partial}\alpha^{q,n-1} + \partial\alpha^{q-1,n} = 0. \end{array}\right. \tag{3,2}$$

En vertu du théorème de Dolbeault $H^{q-1,n}(X) \approx H^n(X, \Omega^{q-1})$; compte tenu de P_1, $H^n(X, \Omega^{q-1}) = 0$; il s'ensuit que la forme $\bar{\partial}$-fermée $\alpha^{q-1,n}$ est aussi $\bar{\partial}$-exacte ; on a donc $\alpha^{q-1,n} = \bar{\partial}\beta_1^{q-1,n-1}$. On peut alors écrire (3,1) :

$$\alpha = \alpha^{n,q-1} + \alpha^{n-1,q} + \ldots + \alpha^{q,n-1} + \bar{\partial}\beta_1^{q-1,n-1}.$$

La dernière des égalités (3,2) devient alors :

$$\partial(\alpha^{q,n-1} - \partial\beta_1^{q-1,n-1}) = 0,$$

et, comme (vu P_1) $H^{n-1}(X, \Omega^q) = 0$, la forme $\alpha^{q,n-1} - \partial\beta_1^{q-1,n-1}$ est $\bar{\partial}$-exacte ; c'est à dire que $\alpha^{q,n-1} - \partial\beta_1^{q-1,n-1} = \bar{\partial}\beta_2^{q,n-2}$. On peut alors écrire (3,1) :

$$\alpha = \alpha^{n,q-1} + \alpha^{n-1,q} + \ldots + \alpha^{q+1,n-2} + \bar{\partial}\beta_2^{q,n-2} + \partial\beta_1^{q-1,n-1} + \bar{\partial}\beta_1^{q-1,n-1}.$$

Ainsi de suite on arrive à la décomposition suivante :

$$\alpha = \alpha^{n,q-1} + \bar{\partial}\beta_{n-q+1}^{n-1,q-1} + d\beta_{n-q}^{n-2,q} + \ldots + d\beta_2^{q,n-2} + d\beta_1^{q-1,n-1}, \tag{3,3}$$

d'où l'on tire que $d\alpha = 0$ peut s'écrire :

$$(\partial + \bar{\partial})(\alpha^{n,q-1} + \bar{\partial}\beta_{n-q+1}^{n-1,q-1}) = 0 ;$$

ce qui entraine :

$$\bar{\partial}(\alpha^{n,q-1} - \partial\beta_{n-q+1}^{n-1,q-1}) = 0. \tag{3,4}$$

Si l'on ajoute et l'on soustrait $\partial\beta_{n-q+1}^{n-1,q-1}$ au second terme de (3,3) on obtient :

$$\alpha = \alpha^{n,q-1} - \partial\beta_{n-q+1}^{n-1,q-1} + d\beta_{n-q+1}^{n-1,q-1} + \ldots + d\beta_2^{q,n-2} + d\beta_1^{q-1,n-1},$$

ce qui montre l'égalité des classes de de Rham $\{\alpha\} = \{\alpha^{n,q-1} - \partial\beta_{n-q+1}^{n-1,q-1}\}$ et donc, vu (3,4), on a la preuve du théorème.

4. Homologie des q-paires de Runge.

Nous allons démontrer le théorème suivant :

THÉORÈME 2. *Soit (X, Y) une q-paire de Runge de variétés q complètes ; alors :*

$$H_i(X \bmod Y, \mathbb{Z}) = 0 \qquad \textit{pour} \qquad i > n + q - 1. \tag{4,1}$$

Preuve. Comme $Y \subset X$ on a la suite exacte :

$$\begin{aligned} \ldots \longrightarrow H_{n+q+1}(Y, \mathbb{Z}) \longrightarrow H_{n+q+1}(X, \mathbb{Z}) \longrightarrow H_{n+q+1}(X \bmod Y, \mathbb{Z}) \longrightarrow \\ \longrightarrow H_{n+q}(Y, \mathbb{Z}) \longrightarrow H_{n+q}(X, \mathbb{Z}) \longrightarrow H_{n+q}(X \bmod Y, \mathbb{Z}) \longrightarrow \\ \longrightarrow H_{n+q-1}(Y, \mathbb{Z}) \longrightarrow \ldots ; \end{aligned} \tag{4,2}$$

compte tenu de P_2, on a $H_i(X \bmod Y, \mathbb{Z}) = 0$ pour $i > n + q$; il nous reste donc à montrer que $H_{n+q}(X \bmod Y, \mathbb{Z}) = 0$.

Nous démontrerons d'abord que :

$$H_{n+q}(X \bmod Y, \mathbb{C}) = 0. \tag{4,3}$$

Ecrivons de nouveau (4,2) pour l'homologie à coefficients complexes ; compte tenu de P_2 [5] on obtient la suite exacte :

$$\ldots \longrightarrow 0 \longrightarrow H_{n+q}(X \bmod Y, \mathbb{C}) \longrightarrow$$

$$\longrightarrow H_{n+q-1}(Y, \mathbb{C}) \longrightarrow H_{n+q-1}(X, \mathbb{C}) \longrightarrow \ldots .$$

Ceci montre que (4,3) est satisfaite si et seulement si l'homomorphisme :

$$\varrho : H_{n+q-1}(Y, \mathbb{C}) \longrightarrow H_{n+q-1}(X, \mathbb{C})$$

est injectif.

Nous démontrerons d'abord trois lemmes.

5. Soient A, B deux espaces de Fréchet; A', B' leurs duals topologiques. Soit :

$$i : A \longrightarrow B$$

un homomorphisme et soit :

$$i^* : B' \longrightarrow A'$$

l'homomorphisme transposé de i ; on a le lemme suivant :

LEMME 1. *Si l'image de l'homomorphisme* $i : A \longrightarrow B$ *est dense dans* B *alors l'homomorphisme* $i^* : B' \longrightarrow A'$ *est injectif.*

Preuve. Soit $\beta \in B'$; il suffit de montrer que si $\beta(iA) = 0$ alors $\beta = 0$. Supposons $\beta(iA) = 0$; par hypothèse iA est dense dans B ; alors β est une fonctionnelle linéaire continue qui est nulle sur un ensemble partout dense dans B, donc elle est nulle dans tout B et ceci prouve le lemme.

LEMME 2. *Pour* $k \geq 0$, $H^k(X, \mathbb{C})$ *est un espace de Fréchet.*

Preuve. L'espace $Z^k(X, \mathbb{C}) = \{\varphi^k \mid d\varphi^k = 0\}$, muni de la topologie de la convergence compacte des coefficients de formes différentielles et de toutes leurs dérivées, est un espace de Fréchet en tant que sous-espace fermé de l'espace de Fréchet $C^k(X, \mathbb{C})$ des formes différentielles de degré k, C^∞ sur X.

---

(5) La validité de la proposition P_2 pour l'homologie à coefficients complexes a été prouvée en [8].

L'espace $B^k(X, \mathbb{C}) = \{\varphi^k \mid \varphi^k = d\varphi^{k-1}\} \subset Z^k(X, \mathbb{C})$ est fermé dans $Z^k(X, \mathbb{C})$. En effet on a, en indiquant par $z_k \in Z_k$ les cycles de dimension k de X, $B^k(X, \mathbb{C}) = \bigcap_{z_k \in Z_k} B^k_{z_k}$ où $B^k_{z_k} = \left\{\varphi^k \,\middle|\, \int_{z_k} \varphi^k = 0\right\}$.

Tout $B^k_{z_k}$ est fermé en tant que lieu des zéros de la fonctionnelle linéaire continue $l(\varphi^k) = \int_{z_k} \varphi^k$ et donc leur intersection est fermée.

Alors $H^k(X, \mathbb{C})$, étant isomorphe au quotient d'un espace de Fréchet pour un sous-espace fermé, est un espace de Fréchet.

LEMME 3. *Pour* $k \geq 0$, $(H^k(X, \mathbb{C}))'$ *dual topologique de* $H^k(X, \mathbb{C})$ *est isomorphe à* $H_k(X, \mathbb{C})$.

Preuve. Le dual topologique de $H^k(X, \mathbb{C})$ est l'espace $(H^k(X, \mathbb{C}))' = \mathcal{L}(H^k(X, \mathbb{C}), \mathbb{C})$ des formes linéaires continues sur $H^k(X, \mathbb{C})$.

Soit $\mathcal{U} = \{U_i\}$ un recouvrement ouvert convexoïde [6] de X et soient $C^k(\mathcal{U}, \mathbb{C})$, $Z^k(\mathcal{U}, \mathbb{C})$ les groupes de cochaînes et de cocycles différentiables de X définis sur les simplexes petits d'ordre $\mathcal{U}$. On a :

$$H^k(\mathcal{U}, \mathbb{C}) = Z^k(\mathcal{U}, \mathbb{C})/\delta C^{k-1}(\mathcal{U}, \mathbb{C}) \approx H^k(X, \mathbb{C}). \tag{5,1}$$

Soient $H_k(\mathcal{U}, \mathbb{C})$ les groupes d'homologie du complexe de chaînes de simplexes différentiables petits d'ordre $\mathcal{U}$. On a :

$$H_k(\mathcal{U}, \mathbb{C}) \approx H_k(X, \mathbb{C}). \tag{5,2}$$

a) En vertu du théorème de de Rham :

$$R^k(X, \mathbb{C}) = Z^k(X, \mathbb{C})/B^k(X, \mathbb{C}) \approx H^k(\mathcal{U}, \mathbb{C}), \tag{5,3}$$

l'isomorphisme étant induit par l'application qui à toute forme différentielle fermée φ^k associe la cochaîne $c^k \in C^k(\mathcal{U}, \mathbb{C})$:

$$c^k = \int_{\sigma_k} \varphi^k$$

avec σ_k contenu dans un $U_i \in \mathcal{U}$ (comme on vérifie directement).

---

[6] Toute intersection de U_i est un ouvert convexe

b) Si $\alpha \in H^k(X, \mathbb{C})$ et $a \in H_k(X, \mathbb{C})$ la forme linéaire $\langle \alpha, a \rangle = \alpha(a)$ est définie. Compte tenu de (5,1), (5,2), (5,3) on a :

$$\langle \alpha, a \rangle = \int_{c_k} \varphi^k$$

avec $\varphi^k \in R^k(X, \mathbb{C})$, $c_k \in H_k(\mathcal{U}, \mathbb{C})$.

De plus la forme linéaire $\langle \alpha, a \rangle$ sur $H^k(X, \mathbb{C}) \times H_k(X, \mathbb{C})$ est non dégénérée.

Il s'ensuit que :

$$H_k(X, \mathbb{C}) \approx \mathrm{Hom}\,(H^k(X, \mathbb{C}), \mathbb{C})$$

et que, en vertu de *a*), tout $\alpha \in \mathrm{Hom}\,(H^k(X, \mathbb{C}), \mathbb{C})$ est du type $\alpha = \int_{c_k} \varphi^k$ pour un $c_k \in H_k(\mathcal{U}, \mathbb{C})$ convenable.

Mais alors α est continue et donc :

$$\mathrm{Hom}\,(R^k(X, \mathbb{C}), \mathbb{C}) \approx \mathcal{L}(R^k(X, \mathbb{C}), \mathbb{C}) \approx \mathcal{L}(H^k(X, \mathbb{C}), \mathbb{C}) \approx H_k(X, \mathbb{C})$$

et ceci prouve le lemme.

6. Preuve du théorème 2.

L'espace $H_k(Y, \mathbb{C})$ est isomorphe au dual topologique de $H^k(Y, \mathbb{C})$ et l'espace $H_k(X, \mathbb{C})$ est isomorphe au dual topologique de $H^k(X, \mathbb{C})$. Comme l'application naturelle :

$$\varrho : H_k(Y, \mathbb{C}) \longrightarrow H_k(X, \mathbb{C})$$

est la transposée de l'homomorphisme de restriction :

$$\varrho^* : H^k(X, \mathbb{C}) \longrightarrow H^k(Y, \mathbb{C}),$$

en vertu du lemme 1, (4, 3) sera prouvée si nous démontrons que, pour $k = n + q - 1$, l'image de l'homomorphisme ϱ^* est dense dans $H^k(Y, \mathbb{C})$.

Nous allons donc montrer que l'image de l'homomorphisme ϱ^* : $H^{n+q-1}(X, \mathbb{C}) \longrightarrow H^{n+q-1}(Y, \mathbb{C})$ est dense dans $H^{n+q-1}(Y, \mathbb{C})$.

Soit $h_Y^{n+q-1} \in H^{n+q-1}(Y, \mathbb{C})$; en vertu du théorème de de Rham h_Y^{n+q-1} se représente par une forme φ_Y^{n+q-1} d-fermée ; vu le théorème 1 on peut choisir, pour représenter h_Y^{n+q-1}, une forme $\varphi_Y^{n,\,q-1}$ $\bar{\partial}$-fermée ; une telle forme est même d-fermée.

Comme (X, Y) est une q-paire de Runge l'image de l'homomorphisme $r : Z^{n,q-1}(X) \longrightarrow Z^{n,q-1}(Y)$ est dense dans $Z^{n,q-1}(Y)$. Il existe donc une suite de formes $\{\varphi_{X,t}^{n,q-1}\}$ telle que la suite de leurs images par l'homomorphisme induit par ϱ^* a pour limite $\varphi_Y^{n,q-1}$. Les formes $\varphi_{X,t}^{n,q-1}$ sont d-fermées ; donc elles définissent des classes $h_X^{n+q-1} \in H^{n+q-1}(X, \mathbb{C})$ dont les images par ϱ^* ont pour limite h_Y^{n+q-1}. On a donc prouvé que :

$$H_{n+q}(X \bmod Y, \mathbb{C}) = 0. \tag{4,3}$$

Envisageons de nouveau (4,2). On observe que, en vertu de la proposition P_2, l'application :

$$i : H_{n+q}(X \bmod Y, \mathbb{Z}) \longrightarrow H_{n+q-1}(Y, \mathbb{Z})$$

est injective.

De (4,3) il s'ensuit que $H_{n+q}(X \bmod Y, \mathbb{Z})$ est un groupe de torsion, la seconde affirmation de P_2 dit que $H_{n+q-1}(Y, \mathbb{Z})$ est sans torsion ; alors, comme l'application i est injective, on a $H_{n+q}(X \bmod Y, \mathbb{Z}) = 0$ ce qui donne la preuve du théorème.

7. Sur la définition de q-paire de Runge.

Soit X un espace complexe, $Y \subset X$, ouvert. Soit $\mathcal{H}(X)$ $[\mathcal{H}(Y)]$ l'espace des fonctions holomorphes sur X $[Y]$ muni de la topologie de la convergence compacte. On dit que (X, Y) est une paire de Runge si l'image de l'homomorphisme de restriction :

$$r : \mathcal{H}(X) \longrightarrow \mathcal{H}(Y)$$

est dense dans $\mathcal{H}(Y)$.

Nous démontrerons le théorème suivant :

THÉORÈME 3. *(X, Y) est une paire de Runge de variétés de Stein si et seulement si (X, Y) est une 1-paire de Runge (de variétés 1-complètes).*

Preuve. Nous remarquons d'abord que, si $q = 1$, X, Y sont des variétés de Stein, de plus $Z^{k,0}(X) = \Gamma(X, \Omega^k)$ et $Z^{k,0}(Y) = \Gamma(Y, \Omega^k)$, $(0 \leq k \leq n)$.

On a $\mathcal{H}(X) = \Gamma(X, \mathcal{O})$ et $\mathcal{H}(Y) = \Gamma(Y, \mathcal{O})$; ces espaces sont munis de la topologie de la convergence uniforme sur tout compact (théorème de Weierstrass).

Soit (X, Y) une 1-paire de Runge ; par hypothèse l'image de l'homomorphisme $Z^{k,0}(X) \longrightarrow Z^{k,0}(Y)$ est dense dans $Z^{k,0}(Y)$; en faisant $k = 0$ il s'ensuit que (X, Y) est une paire de Runge.

La proposition inverse du théorème découle du lemme suivant :

LEMME 4. *Soient X et $Y \subset X$, des variétés de Stein et soit $\mathcal{F}$ un faisceau analytique cohérent sur X. Si l'image de l'homomorphisme :*

$$\varrho : \Gamma(X, \mathcal{O}) \longrightarrow \Gamma(Y, \mathcal{O})$$

est dense dans $\Gamma(Y, \mathcal{O})$, alors l'image de l'homomorphisme :

$$\varrho' : \Gamma(X, \mathcal{F}) \longrightarrow \Gamma(Y, \mathcal{F})$$

est dense dans $\Gamma(Y, \mathcal{F})$ (7).

Preuve. Soient Π_X et $\Pi_Y \subset \Pi_X$ deux polyèdres analytiques (8) dans X et Y. Envisageons le diagramme commutatif suivant :

$$\begin{array}{ccc} \Gamma(X, \mathcal{O}) & \xrightarrow{\varrho} & \Gamma(Y, \mathcal{O}) \\ \downarrow\alpha & & \downarrow\beta \\ \Gamma(\Pi_X, \mathcal{O}) & \xrightarrow{\sigma} & \Gamma(\Pi_Y, \mathcal{O}) \end{array} \tag{7,1}$$

où les images des homomorphismes α, β sont denses dans $\Gamma(\Pi_X, \mathcal{O})$, $\Gamma(\Pi_Y, \mathcal{O})$ en vertu du théorème de Oka-Weil et l'image de ϱ est dense dans $\Gamma(Y, \mathcal{O})$ par hypothèse.

Soit $f \in \Gamma(\Pi_Y, \mathcal{O})$; il existe une suite $\{g_n\}$, $g_n \in \Gamma(Y, \mathcal{O})$, telle que $\{\beta(g_n)\} \longrightarrow f$. Il existe une suite $\{h_{n\nu}\}$, $h_{n\nu} \in \Gamma(X, \mathcal{O})$, telle que $\{\varrho(h_{n\nu})\} \longrightarrow g_n$; alors la suite $\{\beta\varrho(h_{n\nu})\} \longrightarrow f$.

Comme le diagramme (7,1) est commutatif, la suite $\{\sigma\alpha(h_{n\nu})\} \longrightarrow f$, et ceci montre que l'image par σ de $\alpha(h_{n\nu})$ tend vers f, c'est à dire que l'image de l'homomorphisme σ est dense dans $\Gamma(\Pi_Y, \mathcal{O})$.

Soit $\mathcal{F}$ un faisceau analytique cohérent sur X, soit $\mathcal{O}^p$ la somme directe de p exemplaires du faisceau $\mathcal{O}$. Comme Π_X est holomorphiquement

---

(7) On sait que chaque espace $\Gamma(X, \mathcal{F})$ est muni de façon naturelle d'une structure d'espace de Fréchet.

(8) Un ouvert $\Pi \subset\subset X$ est dit un polyèdre analytique s'il existe un voisinage U de $\overline{\Pi}$ dans X et un nombre fini de fonctions holomorphes f_i $(1 \leq i \leq k)$, tels que $\overline{\Pi} = \{x \in U \mid |f_i(x)| \leq 1\}$.

complet et relativement compact dans X, en vertu du théoreme A de Cartan-Serre [5], il existe sur tout Π_X une résolution de $\mathcal{F}$ du type :

$$\mathcal{O}^p \longrightarrow \mathcal{F} \longrightarrow 0.$$

Envisageons à présent le diagramme suivant :

$$\begin{array}{ccc} \Gamma(\Pi_X, \mathcal{O}^p) & \xrightarrow{\beta_1} & \Gamma(\Pi_X, \mathcal{F}) \longrightarrow 0 \\ \downarrow r_1 & & \downarrow r \\ \Gamma(\Pi_Y, \mathcal{O}^p) & \xrightarrow{\beta_2} & \Gamma(\Pi_Y, \mathcal{F}) \longrightarrow 0 \end{array} \tag{7,2}$$

où, d'après le théorème B de Cartan-Serre [5], les lignes sont exactes car Π_X est holomorphiquement complet.

Comme l'homomorphisme σ de (7,1) a une image dense dans $\Gamma(\Pi_Y, \mathcal{O})$, l'homorphisme r_1 a une image dense dans $\Gamma(\Pi_Y, \mathcal{O}^p)$. Alors le diagramme (7,2) montre que l'image de l'homomorphisme :

$$r : \Gamma(\Pi_X, \mathcal{F}) \longrightarrow \Gamma(\Pi_Y, \mathcal{F}) \tag{7,3}$$

est dense dans $\Gamma(\Pi_Y, \mathcal{F})$.

Envisageons maintenent l'homomorphisme :

$$\varrho_1 : \Gamma(X, \mathcal{F}) \longrightarrow \Gamma(\Pi_X, \mathcal{F});$$

en vertu du théorème de Oka-Weil généralisé aux faisceaux cohérents, l'image de ϱ_1 est dense dans $\Gamma(\Pi_X, \mathcal{F})$. Alors d'après (7,3) l'image de l'homomorphisme :

$$\Gamma(X, \mathcal{F}) \longrightarrow \Gamma(\Pi_Y, \mathcal{F})$$

est dense dans $\Gamma(\Pi_Y, \mathcal{F})$.

Comme pour tout compact $K \subset Y$ on peut trouver un polyèdre analytique $\Pi_Y \supset K$, il s'ensuit que l'image de l'homomorphisme :

$$\varrho' : \Gamma(X, \mathcal{F}) \longrightarrow \Gamma(Y, \mathcal{F})$$

est dense dans $\Gamma(Y, \mathcal{F})$ et ceci prouve le lemme.

Pour $\mathcal{F} = \Omega^k$ on obtient la preuve du théorème.

8. Une propriété topologique des variétés q-complètes.

Nous allons démontrer le théorème suivant :

THÉORÈME 4. *Soit X une variété q-complète par rapport à une fonction C^∞, φ fortement q-plurisousharmonique sur X. Les ensembles $B_c = \{x \in X \mid \varphi(x) < c, c \in \mathbb{R}\}$ sont q-Runge dans X.*

La preuve de ce théorème découle des lemmes suivants :

LEMME 5. *Soit D un ouvert dans $\mathbb{C}^n$ et φ une fonction C^∞ fortement q-plurisousharmonique sur D. Soit $z_0 \in D$ et soit :*

$$Y = \{z \in D \mid \varphi(z) < \varphi(z_0)\}.$$

Si U^* est un voisinage d'holomorphie de z_0 suffisamment petit dans D, pour tout voisinage d'holomorphie de z_0, $U \subset\subset U^*$, qui soit de Runge dans U^*, l'application :

$$r : Z^{k,l}(U) \longrightarrow Z^{k,l}(U \cap Y)$$

a une image dense dans $Z^{k,l}(U \cap Y)$ pour $l \geq q - 1$.

La preuve se tire de la proposition 11 de [2] en remplaçant le faisceau $\mathcal{O}$ par le faisceau $\Omega^k \approx \mathcal{O}^{\binom{n}{k}}$.

Soient A, V deux ouverts relativement compacts dans X, tels que $A = B_c \cup V$ soit q-complet (cfr. [2] pag. 237), $(\overline{B_c - B_c \cap V}) \cap (\overline{V - B_c \cap V}) = \emptyset$.

LEMME 6. *L'image de l'application :*

$$Z^{k,l}(A) \longrightarrow Z^{k,l}(B_c)$$

est dense dans $Z^{k,l}(B_c)$ pour $l \geq q - 1$.

Preuve. (9) i) Dans les conditions de l'énoncé on a la suite de Mayer-Vietoris :

$$\ldots \longrightarrow H^{k,l}(A) \longrightarrow H^{k,l}(B_c) \oplus H^{k,l}(V) \longrightarrow H^{k,l}(B_c \cap V) \xrightarrow{j^*}$$

$$\longrightarrow H^{k,l+1}(A) \longrightarrow \ldots .$$

---

(9) La démonstration de ce lemme, sauf pour le point i) est copiée de celle de la proposition 19 de [2]; il n'y a qu'à remplacer les cocycles de Čech par les formes différentielles.

Définissons une application :

$$j : Z^{k,l}(B_c \cap V) \longrightarrow Z^{k,l+1}(A).$$

Soit $\gamma \in Z^{k,l}(B_c \cap V)$ et soit ϱ une fonction différentiable sur V, $0 \leq \varrho \leq 1$, telle que :

$\varrho = 1$ sur un voisinage dans A de la fermeture dans A de $V - B_c \cap V$,

$\varrho = 0$ sur un voisinage de $\partial V \cap B_c$.

Posons :

$$\alpha_1 = \begin{cases} \varrho\gamma \text{ sur } B_c \cap V \\ 0 \text{ sur } B_c - B_c \cap V, \end{cases} \quad , \qquad \alpha_2 = \begin{cases} (\varrho - 1)\,\gamma \text{ sur } B_c \cap V \\ 0 \qquad\quad \text{sur } V - B_c \cap V \end{cases}$$

on a $\alpha_1 - \alpha_2 = \gamma$ sur $B_c \cap V$.

On définit :

$$j(\gamma) = \bar{\partial}\alpha_1 - \bar{\partial}\alpha_2 \qquad \text{sur } A\,;$$

on aura $\bar{\partial}\alpha_1 - \bar{\partial}\alpha_2 = \bar{\partial}\gamma = 0$ sur $B_c \cap V$, $\bar{\partial} j(\gamma) = 0$ sur A, donc $j(\gamma) \in Z^{k,l+1}(A)$.

On vérifie que l'application j induit l'homomorphisme j^* de la suite de Mayer-Vietoris ; de plus j est une application linéaire continue d'espaces de Fréchet.

ii) Comme l'espace des formes exactes $B^{k,l+1}(A)$ est égal à $Z^{k,l+1}(A)$, (cfr. [2] pag. 250), l'image réciproque par j de $B^{k,l+1}$ est égale à $Z^{k,l}(B_c \cap V)$.

Définissons l'application :

$$r : Z^{k,l}(B_c) \oplus Z^{k,l}(V) \longrightarrow Z^{k,l}(B_c \cap V)$$

par

$$r(\gamma_1 \oplus \gamma_2) = \gamma_1 |_{B_c \cap V} - \gamma_2 |_{B_c \cap V}.$$

A cause de l'exactitude de la suite de Mayer-Vietoris, cette application est bien définie et surjective. De plus, c'est une application continue d'espaces de Fréchet donc c'est un homomorphisme topologique.

iii) On choisit V de manière à satisfaire aux conditions demandées pour l'ouvert U dans le lemme 5. Soit $\xi \in Z^{k,l}(B_c)$, $r(\xi) = \xi |_{B_c \cap V}$. En vertu du lemme 5, si $l \geq q - 1$, on peut trouver une suite de formes $\eta_n \in Z^{k,l}(V)$ telle que $r(\eta_n) \longrightarrow r(\xi)$. Donc $r(\xi) - r(\eta_n) \longrightarrow 0$.

Comme $r(\xi)$ et $r(\eta_n)$ sont dans $Z^{k,l}(B_c \cap V) = j^{-1}(B^{k,l+1}(A))$, en vertu du théorème de Banach, on peut trouver deux formes :

$$\gamma_1(n) \in Z^{k,l}(B_c) \quad \text{et} \quad \gamma_2(n) \in Z^{k,l}(V)$$

telles que

$$\gamma_1(n) \longrightarrow 0, \qquad \gamma_2(n) \longrightarrow 0$$

$$r(\gamma_1(n) \oplus \gamma_2(n)) = r(\xi) - r(\eta_n).$$

Comme

$$r[(\xi - \gamma_1(n)) \oplus (\eta_n - \gamma_2(n))] = 0$$

la forme

$$\xi_1(n) = \begin{cases} \xi - \gamma_1(n) & \text{sur} \quad B_c \\ \eta_n - \gamma_2(n) & \text{sur} \quad V \end{cases}$$

est $\bar{\partial}$-fermée sur A, donc $\xi_1(n) \in Z^{k,l}(A)$. Il est clair que l'image de $\xi_1(n)$ dans $Z^{k,l}(B_c)$ converge vers ξ et ceci prouve le lemme.

Pour obtenir la preuve du théorème il suffit d'appliquer le résultat précédent un nombre fini de fois.

BIBLIOGRAPHIE

[1] ANDREOTTI A. et FRANKEL T., *The Lefschetz theorem on hyperplane sections.* Annals of Math 69 (1959) pag. 713-717.

[2] ANDREOTTI A. et GRAUERT H., *Théorèmes de finitude pour la cohomologie des espaces complexes.* Bull. Soc. Math. de France T. 90 (1962) pag. 193-259.

[3] ANDREOTTI A. et NARASIMHAN R., *A topological property of Runge Pairs* Annals of Math. 76 (1962) pag. 499-509.

[4] BEHNKE H. et STEIN K., *Approximation analytischer Functionen in vorgegebenen Gebieten des Raumes von n komplexen Veränderlichen.* Nachr. Ges. der Wissenschaften zu. Göttingen (1939) pag. 195-202.

[5] CARTAN H., Séminaire E. N. S. 1951/52.

[6] DOQUIER F. et GRAUERT H., *Levisches Problem und Rungescher Satz fur Teilgebiete Steinscher Mannigfaltigkeiten.* Math. Annalen 140 (1960) pag. 94-123.

[7] NARASIMHAN R., *The Levi problem for complex spaces.* Math Annalen 142 (1961) pag. 355-365.

[8] SORANI G., *Omologia degli spazi q-pseudoconvessi.* Ann. Scuola Normale Sup. Pisa Vol. XVI (1962) pag. 299-304.

Istituto di Matematica
Università di Roma