ANNALI DELLA
SCUOLA NORMALE SUPERIORE DI PISA
Classe di Scienze

FABIO MANARESI

Sulla sommabilità $(C, 1)$ delle serie doppie di Fourier

Annali della Scuola Normale Superiore di Pisa, Classe di Scienze 3^e série, tome 12, n° 1-2 (1958), p. 21-30

<http://www.numdam.org/item?id=ASNSP_1958_3_12_1-2_21_0>

© Scuola Normale Superiore, Pisa, 1958, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Annali della Scuola Normale Superiore di Pisa, Classe di Scienze » (http://www.sns.it/it/edizioni/riviste/annaliscienze/) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (http://www.numdam.org/conditions). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM
Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
http://www.numdam.org/

SULLA SOMMABILITÀ $(C, 1)$ DELLE SERIE DOPPIE DI FOURIER

Nota (*) di FABIO MANARESI (a Bologna)

1. È noto che il polinomio trigonometrico di FEJÉR $\sigma_n(x)$ di una funzione $f(x)$, sommabile nell'intervallo $0 \leq x \leq 2\pi$, è convergente, per n tendente all'infinito, ad un limite $\varphi(x)$ in ogni punto x di $0 \leq x \leq 2\pi$ in cui risulta:

$$\int_0^u F(x, u)\, du = o(u), \tag{I}$$

$$\int_0^u |F(x, u)|\, du = O(u), \tag{II}$$

ove $F(x, u) = f(x + 2u) + f(x - 2u) - 2\varphi(x)$ [1].

Volendo estendere questo risultato alle serie doppie di FOURIER si incontra la difficoltà di aggiungere una ipotesi supplementare a quelle ottenute dalle (I) e (II) facendone le analoghe per le funzioni di due variabili. Il teorema, nelle forme più ristrette di LEBESGUE [2] e di FEJÉR [3], è stato dimostrato, per le funzioni di due variabili, con una condizione aggiuntiva, chiamata da TONELLI « condizione L » [4].

(*) Pervenuta in Redazione il

Indirizzo dell'A.: Istituto matematico, Università, Bologna.

(1) Cfr. G. H. HARDY and J. E. LITTLEWOOD, *The Fourier series of a positive function*, « J. London Math. Soc. », 1, (1926), pp. 134-138.

(2) Cfr. L. TONELLI, *Serie trigonometriche*, Zanichelli, Bologna, (1928), p. 495.

(3) Loc. cit. in (2), p. 490.

(4) Loc. cit. in (2), p. 488.

In questa nota si estende il teorema citato in principio, cioè nella forma più generale di HARDY e LITTLEWOOD, adottando una ipotesi, la quale, come si mostrerà nel n. 3, è meno restrittiva della condizione ora menzionata, onde si ottiene anche un miglioramento dei teoremi di LEBESGUE e di FEJÉR, che sono casi particolari di quello.

Pertanto il presente lavoro può trovare applicazione in tutti i risultati, finora ottenuti e che potranno eventualmente ricavarsi in avvenire, sulle serie doppie di FOURIER, nei quali si fa uso dei citati teoremi di FEJÉR, di LEBESGUE e di HARDY e LITTLEWOOD.

In particolare, alcuni asserti, provati recentemente dall'A. [5], restano validi con ipotesi più ampie.

2. Il risultato, di cui si è fatto cenno nel n. 1, è il seguente:

Se $f(x, y)$ *è una funzione sommabile nel quadrato* $Q \equiv (0 \leq x \leq 2\pi,\ 0 \leq y \leq 2\pi)$, *il suo polinomio trigonometrico di* FEJÉR $\sigma_{m,n}(x, y)$ *converge, per* $\left.\begin{matrix} m \\ n \end{matrix}\right\} \to \infty$, *verso la funzione* $\varphi(x, y)$ *in ogni punto* (x, y) *di* Q *in cui risulta:*

$$\lim_{\left.\begin{matrix} u \\ v \end{matrix}\right\} \to 0+} \frac{1}{u\,v} \int_0^u \int_0^v F(x, y, u, v)\, du\, dv = 0, \tag{1}$$

$$\frac{1}{u\,v} \int_0^u \int_0^v |F(x, y, u, v)|\, du\, dv \leq M \quad \text{per} \quad 0 < u \leq \frac{\pi}{2},\ 0 < v \leq \frac{\pi}{2}, \tag{2}$$

ove

$$F(x, y, u, v) = f(x + 2u, y + 2v) + f(x + 2u, y - 2v) +$$
$$+ f(x - 2u, y + 2v) + f(x - 2u, y - 2v) - 4\varphi(x, y)$$

ed M *è una costante positiva* [6].

---

[5] F. MANARESI, *Alcuni teoremi sulle serie coniugate della serie di Fourier di una funzione di più variabili*, « Rend. Sem. Mat. Univ. Padova », 27, (1957), pp. 181-192.

[6] Si noti che, mentre la (1) è l'analoga della (I) per le funzioni di due variabili, altrettanto non può dirsi per le (2) e (II). Invero, è manifesto che dalla (II) segue $\frac{1}{u}\int_0^u |F(x,u)|\, du \leq M$ per $0 < u \leq \frac{\pi}{2}$ e inversamente, ma la $\int_0^u \int_0^v |F(x,y,u,v)|\, du\, dv = O(uv)$ non implica sempre la (2), sicchè questa è più restrittiva della precedente, la quale peraltro non basta, insieme con la (1), ad assicurare la validità della tesi dell'enunciato.

Si osservi anzitutto che dalle (1) e (2) seguono rispettivamente le

$$(1') \qquad \lim_{\substack{u \\ v}\} \to 0+} \frac{1}{\operatorname{sen} u \operatorname{sen} v} \int_0^u \int_0^v F(x, y, u, v)\, du\, dv = 0 ,$$

$$(2') \qquad \frac{1}{\operatorname{sen} u \operatorname{sen} v} \int_0^u \int_0^v |F(x,y,u,v)|\, du\, dv \leq M \text{ per } 0 < u \leq \frac{\pi}{2},\ 0 < v \leq \frac{\pi}{2} .$$

In secondo luogo, scelto ad arbitrio un numero positivo τ, per ogni coppia di numeri naturali m, n tali che riesca

$$(3) \qquad \frac{\tau}{m} < \frac{\pi}{2}, \qquad \frac{\tau}{n} < \frac{\pi}{2},$$

si ha:

$$\sigma_{m,n}(x, y) - \varphi(x, y) = \frac{1}{\pi^2 m n} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{\frac{\pi}{2}} F(x, y, u, v) \left(\frac{\operatorname{sen} mu}{\operatorname{sen} u}\right)^2 \left(\frac{\operatorname{sen} nv}{\operatorname{sen} v}\right)^2 du\, dv =$$

$$= \frac{1}{\pi^2 m n} \int_{\frac{\tau}{m}}^{\frac{\pi}{2}} \int_{\frac{\tau}{n}}^{\frac{\pi}{2}} [\ldots]\, du\, dv + \frac{1}{\pi^2 m n} \int_{\frac{\tau}{m}}^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{\frac{\tau}{n}} [\ldots]\, du\, dv + \frac{1}{\pi^2 m n} \int_0^{\frac{\tau}{m}} \int_{\frac{\tau}{n}}^{\frac{\pi}{2}} [\ldots]\, du\, dv +$$

$$+ \frac{1}{\pi^2 m n} \int_0^{\frac{\tau}{m}} \int_0^{\frac{\tau}{n}} [\ldots]\, du\, dv = I^{(1)}_{m,n} + I^{(2)}_{m,n} + I^{(3)}_{m,n} + I^{(4)}_{m,n} .$$

Ciò premesso, si proverà che:

a) $\lim_{\substack{m \\ n}\} \to \infty} I^{(1)}_{m,n} = 0$. Invero si ha, integrando per parti prima rispetto a v e poi rispetto a u,

$$|I^{(1)}_{m,n}| \leq \frac{1}{\pi^2 m n} \int_{\frac{\tau}{m}}^{\frac{\pi}{2}} \int_{\frac{\tau}{n}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{|F|}{\operatorname{sen}^2 u \operatorname{sen}^2 v}\, du\, dv \leq$$

$$\leq \frac{1}{\pi^2 m n} \int_{\frac{\tau}{m}}^{\frac{\pi}{2}} \left[\frac{1}{\operatorname{sen}^2 u} \int_0^{\frac{\pi}{2}} |F| \, dv \right] du + \frac{2}{\pi^2 m n} \int_{\frac{\tau}{m}}^{\frac{\pi}{2}} \int_{\frac{\tau}{n}}^{\frac{\pi}{2}} \left[\frac{1}{\operatorname{sen}^2 u} \int_0^v |F| \, dv \, \frac{\cos v}{\operatorname{sen}^3 v} \right] du \, dv =$$

$$= \frac{1}{\pi^2 m n} \left[\frac{1}{\operatorname{sen}^2 u} \int_0^u \int_0^{\frac{\pi}{2}} |F| \, du \, dv \right]_{u=\frac{\tau}{m}}^{u=\frac{\pi}{2}} + \frac{2}{\pi^2 m n} \int_{\frac{\tau}{m}}^{\frac{\pi}{2}} \left[\frac{1}{\operatorname{sen} u} \int_0^u \int_0^{\frac{\pi}{2}} |F| \, du \, dv \frac{\cos u}{\operatorname{sen}^2 u} \right] du +$$

$$+ \frac{2}{\pi^2 m n} \int_{\frac{\tau}{n}}^{\frac{\pi}{2}} \left[\frac{1}{\operatorname{sen}^2 u} \int_0^u \int_0^v |F| \, du \, dv \right]_{u=\frac{\tau}{m}}^{u=\frac{\pi}{2}} \frac{\cos v}{\operatorname{sen}^3 v} \, dv +$$

$$+ \frac{4}{\pi^2 m n} \int_{\frac{\tau}{m}}^{\frac{\pi}{2}} \int_{\frac{\tau}{n}}^{\frac{\pi}{2}} \left[\frac{1}{\operatorname{sen} u \operatorname{sen} v} \int_0^u \int_0^v |F| \, du \, dv \cdot \frac{\cos u}{\operatorname{sen}^2 u} \frac{\cos v}{\operatorname{sen}^2 v} \right] du \, dv \leq$$

$$\leq \frac{1}{\pi^2 m n} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{\frac{\pi}{2}} |F| \, du \, dv + \frac{2}{\pi^2 m n} \int_{\frac{\tau}{m}}^{\frac{\pi}{2}} \left[\frac{1}{\operatorname{sen} u} \int_0^u \int_0^{\frac{\pi}{2}} |F| \, du \, dv \cdot \frac{\cos u}{\operatorname{sen}^2 u} \right] du +$$

$$+ \frac{2}{\pi^2 m n} \int_{\frac{\tau}{n}}^{\frac{\pi}{2}} \left[\frac{1}{\operatorname{sen} v} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^v |F| \, du \, dv \cdot \frac{\cos v}{\operatorname{sen}^2 v} \right] dv +$$

$$+ \frac{4}{\pi^2 m n} \int_{\frac{\tau}{m}}^{\frac{\pi}{2}} \int_{\frac{\tau}{n}}^{\frac{\pi}{2}} \left[\frac{1}{\operatorname{sen} u \operatorname{sen} v} \int_0^u \int_0^v |F| \, du \, dv \cdot \frac{\cos u}{\operatorname{sen}^2 u} \cdot \frac{\cos v}{\operatorname{sen}^2 v} \right] du \, dv ,$$

sicchè, per la (2′), riesce

$$|I_{m,n}^{(1)}| \leq \frac{M}{\pi^2 m n} + \frac{2M}{\pi^2 m n} \int_{\frac{\tau}{m}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{d \operatorname{sen} u}{\operatorname{sen}^2 u} + \frac{2M}{\pi^2 m n} \int_{\frac{\tau}{n}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{d \operatorname{sen} v}{\operatorname{sen}^2 v} +$$

$$+\frac{4M}{\pi^2 m n}\int_{\frac{\tau}{m}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{d\,\mathrm{sen}u}{\mathrm{sen}^2 u}\cdot\int_{\frac{\tau}{n}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{d\,\mathrm{sen}v}{\mathrm{sen}^2 v}<\frac{M}{\pi^2 m n}+\frac{M}{\pi\, n\,\tau}+\frac{M}{\pi\, m\,\tau}+\frac{M}{\tau^2}$$

e quest'ultimo membro, prendendo τ abbastanza grande, si può rendere, in virtù delle (3), minore di un numero positivo ε arbitrariamente prefissato.

b) $\lim_{\substack{m\\ n}\}\to\infty} I^{(2)}_{m,n}=0$. Integrando per parti rispetto a v, si trae infatti

$$I^{(2)}_{m,n}=\frac{1}{\pi^2 m n}\int_{\frac{\tau}{m}}^{\frac{\pi}{2}}\left\{\left[\int_0^v F\,dv\left(\frac{\mathrm{sen}\,nv}{\mathrm{sen}\,v}\right)^2\right]_{v\to 0+}^{v=\frac{\tau}{n}}-\right.$$

$$\left.-\int_0^{\frac{\tau}{n}}\left[\int_0^v F\,dv\cdot\frac{d}{dv}\left(\frac{\mathrm{sen}\,nv}{\mathrm{sen}\,v}\right)^2\right]dv\right\}\left(\frac{\mathrm{sen}\,mu}{\mathrm{sen}\,u}\right)^2 du=$$

$$=\frac{1}{\pi^2 m n}\,\frac{\mathrm{sen}^2\tau}{\mathrm{sen}^2\frac{\tau}{n}}\int_{\frac{\tau}{m}}^{\frac{\pi}{2}}\int_0^{\frac{\tau}{n}}F\cdot\left(\frac{\mathrm{sen}\,mu}{\mathrm{sen}\,u}\right)^2 du\,dv-$$

$$-\frac{1}{\pi^2 mn}\int_{\frac{\tau}{m}}^{\frac{\pi}{2}}\int_0^{\frac{\tau}{n}}\left[\left(\frac{\mathrm{sen}\,mu}{\mathrm{sen}\,u}\right)^2\int_0^v F\,dv\cdot\frac{d}{dv}\left(\frac{\mathrm{sen}\,nv}{\mathrm{sen}\,v}\right)^2\right]du\,dv$$

e quindi

$$|I^{(2)}_{m,n}|\le\frac{1}{\pi^2 m n}\,\frac{1}{\mathrm{sen}^2\frac{\tau}{n}}\int_{\frac{\tau}{m}}^{\frac{\pi}{2}}\int_0^{\frac{\tau}{n}}\frac{|F|}{\mathrm{sen}^2 u}\,du\,dv+$$

$$+\frac{1}{\pi^2 m n}\int_{\frac{\tau}{m}}^{\frac{\pi}{2}}\int_0^{\frac{\tau}{n}}\left[\frac{1}{\mathrm{sen}^2 u}\int_0^v|F|\,dv\right]\left|\frac{d}{dv}\left(\frac{\mathrm{sen}\,nv}{\mathrm{sen}\,v}\right)^2\right|du\,dv\,.$$

Mediante integrazione per parti rispetto a u nell'ultimo membro, si deduce

$$|I^{(2)}_{m,n}| \leq \frac{1}{\pi^2 m n} \frac{1}{\operatorname{sen}^2 \frac{\tau}{n}} \int_0^{\frac{\tau}{n}} \left\{ \left[\int_0^u |F|\, du \, \frac{1}{\operatorname{sen}^2 u} \right]_{u=\frac{\tau}{m}}^{u=\frac{\pi}{2}} + \right.$$

$$\left. + 2 \int_{\frac{\tau}{m}}^{\frac{\pi}{2}} \left[\int_0^u |F|\, du \, \frac{\cos u}{\operatorname{sen}^3 u} \right] du \right\} dv +$$

$$+ \frac{1}{\pi^2 m n} \int_0^{\frac{\tau}{n}} \left| \frac{d}{dv} \left(\frac{\operatorname{sen} nv}{\operatorname{sen} v} \right)^2 \right| \left\{ \left[\int_0^u \int_0^v |F|\, du\, dv \, \frac{1}{\operatorname{sen}^2 u} \right]_{u=\frac{\tau}{m}}^{u=\frac{\pi}{2}} + \right.$$

$$\left. + 2 \int_{\frac{\tau}{m}}^{\frac{\pi}{2}} \left[\int_0^u \int_0^v |F|\, du\, dv \, \frac{\cos u}{\operatorname{sen}^3 u} \right] du \right\} dv \leq$$

$$\leq \frac{1}{\pi^2 m \tau} \frac{\frac{\tau}{n}}{\operatorname{sen} \frac{\tau}{n}} \frac{1}{\operatorname{sen} \frac{\tau}{n}} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{\frac{\tau}{n}} |F|\, du\, dv +$$

$$+ \frac{2}{\pi^2 m \tau} \frac{\frac{\tau}{n}}{\operatorname{sen} \frac{\tau}{n}} \int_{\frac{\tau}{m}}^{\frac{\pi}{2}} \left[\frac{1}{\operatorname{sen} u \operatorname{sen} \frac{\tau}{n}} \int_0^u \int_0^{\frac{\tau}{n}} |F|\, du\, dv \, \frac{\cos u}{\operatorname{sen}^2 u} \right] du +$$

$$+ \frac{2}{\pi^2 m n} \int_0^{\frac{\tau}{n}} \left\{ \frac{1}{\operatorname{sen} v} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^v |F|\, du\, dv \, |\operatorname{sen} nv| \left| \frac{d}{dv} \left(\frac{\operatorname{sen} nv}{\operatorname{sen} v} \right) \right| \right\} dv +$$

$$+ \frac{2}{\pi^2 m n} \int_{\frac{\tau}{m}}^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{\frac{\tau}{n}} \left\{ \frac{1}{\operatorname{sen} u \operatorname{sen} v} \int_0^u \int_0^v |F| du\, dv \, \frac{\cos u}{\operatorname{sen}^2 u} |\operatorname{sen} nv| \left| \frac{d}{dv} \left(\frac{\operatorname{sen} nv}{\operatorname{sen} v} \right) \right| \right\} du\, dv,$$

da cui, giusta la (2′) e osservando che per $v > 0$ sussiste la disuguaglianza

$$\left|\frac{\operatorname{sen} n\,v}{n\,v}\right| < \frac{2}{1+n\,v}\ (7),$$

si ricava infine

$$|I^{(2)}_{m,n}| \leq \frac{M}{2\,\pi\,m\,\tau} + \frac{M}{\pi m\,\tau}\int_{\frac{\tau}{m}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\operatorname{sen} u}{\operatorname{sen}^2 u} + \frac{4\,M}{\pi^2\,m}\int_0^{\frac{\tau}{u}} \left|\frac{\operatorname{sen} nv}{n\,v}\right| \left(\frac{v}{\operatorname{sen} v}\right)^2 dv +$$

$$+ \frac{4\,M}{\pi^2\,m}\int_{\frac{\tau}{m}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\operatorname{sen} u}{\operatorname{sen}^2 u} \cdot \int_0^{\frac{\tau}{n}} \left|\frac{\operatorname{sen} n\,v}{n\,v}\right| \left(\frac{v}{\operatorname{sen} v}\right)^2 n\,dv <$$

$$< \frac{M}{2\pi\,m\,\tau} + \frac{M}{2\,\tau^2} + \frac{2\,M}{n}\int_0^{\frac{\tau}{u}} \frac{n}{1+nv}\,dv + \frac{M}{m}\,\frac{2}{\operatorname{sen}\frac{\tau}{m}}\int_0^{\frac{\tau}{n}} \frac{n}{1+nv}\,dv <$$

$$< \frac{M}{2\,\pi\,m\,\tau} + \frac{M}{2\,\tau^2} + \frac{2\,M}{n}\log\,(1+\tau) + \frac{\pi\,M}{\tau}\log\,(1+\tau),$$

laddove l'ultimo membro, per τ abbastanza grande, diviene, per le (3), minore di ε.

In maniera del tutto analoga si prova che $\lim\limits_{\substack{m\\u}\to\infty} I^{(3)}_{m,n} = 0$.

c) $\lim\limits_{\substack{m\\n}\to\infty} I^{(4)}_{m,n} = 0$. Integrando per parti rispetto a v, si ottiene

$$I^{(4)}_{m,n} = \frac{1}{\pi^2\,m\,n}\int_0^{\frac{\tau}{m}} \left(\frac{\operatorname{sen} m\,u}{\operatorname{sen} u}\right)^2 \left\{\left[\int_0^v F\,d\,v \left(\frac{\operatorname{sen} n\,v}{\operatorname{sen} v}\right)^2\right]_{v\to 0+}^{v=\frac{\tau}{u}} -\right.$$

---

(7) Si veda per esempio loc. cit. in (2) p. 176.

$$-\int_0^{\frac{\tau}{n}}\left\{\int_0^v F\,dv\,\frac{d}{dv}\left(\frac{\operatorname{sen} n v}{\operatorname{sen} v}\right)^2\right] dv\Bigg\}du=\frac{1}{\pi^2 m n}\left(\frac{\operatorname{sen}\tau}{\operatorname{sen}\frac{\tau}{n}}\right)^2\int_0^{\frac{\tau}{m}}\int_0^{\frac{\tau}{n}}F\cdot\left(\frac{\operatorname{sen} m u}{\operatorname{sen} u}\right)^2 du\,dv-$$

$$-\frac{1}{\pi^2 m n}\int_0^{\frac{\tau}{m}}\int_0^{\frac{\tau}{n}}\left[\left(\frac{\operatorname{sen} m u}{\operatorname{sen} u}\right)^2\int_0^v F\,dv\,\frac{d}{dv}\left(\frac{\operatorname{sen} n v}{\operatorname{sen} v}\right)^2\right] du\,dv,$$

donde, mediante integrazione per parti rispetto a u, segue

$$I^{(4)}_{m,n}=\frac{\operatorname{sen}^4\tau}{\pi^2\tau^2}\,\frac{\frac{\tau}{m}}{\operatorname{sen}\frac{\tau}{m}}\,\frac{\frac{\tau}{n}}{\operatorname{sen}\frac{\tau}{n}}\,\frac{1}{\operatorname{sen}\frac{\tau}{m}\operatorname{sen}\frac{\tau}{n}}\int_0^{\frac{\tau}{m}}\int_0^{\frac{\tau}{n}}F\,du\,dv-$$

$$-\frac{2\operatorname{sen}^2\tau}{\pi^2 m\tau}\,\frac{\frac{\tau}{n}}{\operatorname{sen}\frac{\tau}{n}}\int_0^{\frac{\tau}{m}}\left[\frac{1}{\operatorname{sen} u\operatorname{sen}\frac{\tau}{n}}\int_0^u\int_0^{\frac{\tau}{n}}F\,du\,dv\operatorname{sen} mu\,\frac{d}{du}\left(\frac{\operatorname{sen} m u}{\operatorname{sen} u}\right)\right]du-$$

$$-\frac{2\operatorname{sen}^2\tau}{\pi^2 n\tau}\,\frac{\frac{\tau}{m}}{\operatorname{sen}\frac{\tau}{m}}\int_0^{\frac{\tau}{n}}\left[\frac{1}{\operatorname{sen}\frac{\tau}{m}\operatorname{sen} v}\int_0^{\frac{\tau}{m}}\int_0^v F\,du\,dv\operatorname{sen} nv\,\frac{d}{dv}\left(\frac{\operatorname{sen} n v}{\operatorname{sen} v}\right)\right]dv+$$

$$+\frac{4}{\pi^2 m n}\int_0^{\frac{\tau}{m}}\int_0^{\frac{\tau}{n}}\left[\frac{1}{\operatorname{sen} u\operatorname{sen} v}\int_0^u\int_0^v F\,du\,dv\operatorname{sen} mu\operatorname{sen} nv\,\frac{d}{du}\left(\frac{\operatorname{sen} mu}{\operatorname{sen} u}\right)\cdot\frac{d}{dv}\left(\frac{\operatorname{sen} nv}{\operatorname{sen} v}\right)\right]du\,dv.$$

Pertanto, fissato τ in modo che valgano le conclusioni di *a*) e *b*), non appena m, n siano abbastanza grandi, risulta, giusta la (1′),

$$\left|\frac{1}{\operatorname{sen} u\operatorname{sen} v}\int_0^u\int_0^v F\,du\,dv\right|<\frac{\varepsilon}{\tau^2},\quad\text{per}\quad 0<u\leq\frac{\tau}{m},\quad 0<v\leq\frac{\tau}{n},$$

e quindi

$$|I^{(4)}_{m,n}| < \frac{\varepsilon}{4\tau^4} + \frac{\varepsilon}{\pi m \tau^3}\int_0^{\frac{\tau}{m}} \frac{2m^2u^2}{\operatorname{sen}^2 u}\,du + \frac{\varepsilon}{\pi n \tau^3}\int_0^{\frac{\tau}{n}} \frac{2n^2v^2}{\operatorname{sen}^2 v}\,dv +$$

$$+ \frac{4\varepsilon}{\pi^2 m n \tau^2}\int_0^{\frac{\tau}{m}} \frac{2m^2u^2}{\operatorname{sen}^2 u}\,du \cdot \int_0^{\frac{\tau}{n}} \frac{2n^2v^2}{\operatorname{sen}^2 v}\,dv < \frac{\varepsilon}{4\tau^4} + \frac{\pi\varepsilon}{2\tau^2} + \frac{\pi\varepsilon}{2\tau^2} + \pi^2\varepsilon,$$

ove l'ultimo membro è, al pari di ε, un numero positivo prefissato a piacere.

L'assunto resta in tal modo completamente provato.

3. Il teorema ora dimostrato si riduce in particolare a quello di LEBESGUE se l'ipotesi (1) viene sostituita con la seguente

$$\lim_{\substack{u\\v}\}\to 0+} \frac{1}{uv}\int_0^u\int_0^v |F(x,y,u,v)|\,du\,dv = 0,$$

mentre la (2) si lascia immutata.

Se poi si suppone che la $f(x,y)$ sia continua nel punto (x,y) interno a Q [oppure che ivi essa ammetta finiti i quattro limiti $f(x \pm 0, y \pm 0)$], ferma restando l'ipotesi (2), e si ponga inoltre $\varphi(x,y)=f(x,y)$ [o, corrispondentemente, $\varphi(x,y) = \dfrac{f(x+0,y+0)+f(x+0,y-0)+f(x-0,y+0)+f(x-0,y-0)}{4}$] si trae il teorema di FEJÉR.

Da ultimo si mostrerà come le precedenti ipotesi, sotto le quali è ancora valido il teorema di LEBESGUE, siano più larghe di quelle adottate nell'enunciato di cui alla nota (2). Allo scopo basta provare che se una funzione $g(x,y)$, sommabile nel quadrato $\left(0 \le x \le \frac{\pi}{2},\ 0 \le y \le \frac{\pi}{2}\right)$, soddisfa alle condizioni:

$$(4)\qquad \begin{cases} \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} |g(x,y)|\,dx \le L \text{ per quasi tutti gli } y \text{ di } 0 \le y \le \frac{\pi}{2}, \\ \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} |g(x,y)|\,dy \le L \text{ per quasi tutti gli } x \text{ di } 0 \le x \le \frac{\pi}{2}, \end{cases}$$

[L costante positiva; le (4) costituiscono la «condizione L»], e

$$\lim_{\substack{x \\ y}\} \to 0+} \frac{1}{x\,y} \int_0^x \int_0^y |g(x, y)|\, dx\, dy = 0, \tag{5}$$

allora la $g(x, y)$ verifica necessariamente la

$$\frac{1}{x\,y} \int_0^x \int_0^y |g(x; y)|\, dx\, dy \leq M \text{ per } 0 < x \leq \frac{\pi}{2},\ 0 < y \leq \frac{\pi}{2}, \tag{6}$$

(M costante positiva), mentre poi è manifesto che le (5) e (6) non implicano le (4).

Infatti dalla (5) segue subito che il primo membro della (6) è limitato per $0 < x < \delta$, $0 < y < \delta$, essendo δ un numero positivo abbastanza piccolo. Inoltre, ove fosse $\delta < \frac{\pi}{2}$, si osservi che le (4) sussistono ancora ovviamente se, in luogo di $\frac{\pi}{2}$, si pone $x \left(\geq 0 \text{ e } \leq \frac{\pi}{2}\right)$ nella prima e $y \left(\geq 0 \text{ e } \leq \frac{\pi}{2}\right)$ nella seconda, e pertanto si riconosce che, per $\delta \leq x \leq \frac{\pi}{2}$, $0 < y \leq \frac{\pi}{2}$ e per $0 < x \leq \delta$, $\delta \leq y \leq \frac{\pi}{2}$, il primo membro della (6) risulta $\leq \frac{L}{\delta}$ e ciò prova l'asserto.

Da quanto precede risulta pure che il teorema del n. 2 vale *a fortiori* se all'ipotesi (2) si sostituisce la

$$\int_0^u \int_0^v |F(x, y, u, v)|\, du\, dv = O(u\,v),$$

insieme con la «condizione L»:

$$\int_0^{2\pi} |f(x, y)|\, dx \leq L \text{ per quasi tutti gli } y \text{ di } 0 \leq y \leq 2\pi,$$

$$\int_0^{2\pi} |f(x, y)|\, dy \leq L \text{ per quasi tutti gli } x \text{ di } 0 \leq x \leq 2\pi.$$

Gli algoritmi svolti e i risultati ottenuti nel presente lavoro si possono estendere senza difficoltà alle funzioni di $\nu > 2$ variabili.