ANNALI DELLA
SCUOLA NORMALE SUPERIORE DI PISA
Classe di Scienze

P. CARTIER

Remarques sur le théorème de Birkhoff-Witt

Annali della Scuola Normale Superiore di Pisa, Classe di Scienze 3^e série, tome 12, n^o 1-2 (1958), p. 1-4

<http://www.numdam.org/item?id=ASNSP_1958_3_12_1-2_1_0>

© Scuola Normale Superiore, Pisa, 1958, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Annali della Scuola Normale Superiore di Pisa, Classe di Scienze » (http://www.sns.it/it/edizioni/riviste/annaliscienze/) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (http://www.numdam.org/conditions). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM
Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
http://www.numdam.org/

REMARQUES SUR LE THÉORÈME DE BIRKHOFF-WITT

par P. CARTIER (Paris)

1. — Soit $\mathfrak{g}$ une algèbre de Lie sur l'anneau commutatif A. On notera $T(\mathfrak{g})$ l'algèbre tensorielle du A-module $\mathfrak{g}$, algèbre graduée par les sous-modules $T_n(\mathfrak{g}) = \mathfrak{g} \otimes \ldots \otimes \mathfrak{g}$ (n facteurs) (cf. Bourbaki, Algèbre ch. III, Hermann, Paris). On posera $J_1(\ ) = (0)$ et, pour $n \geq 2$, on notera $J_n(\mathfrak{g})$ le sous-module de $T(\mathfrak{g})$ engendré par les éléments de la forme :

$$(1) \quad x_1 \otimes \ldots \otimes x_{p-1} \otimes (x_p \otimes x_{p+1} - x_{p+1} \otimes x_p - [x_p, x_{p+1}]) \otimes x_{p+2} \otimes \ldots \otimes x_m$$

pour $1 \leq p < m \leq n$ et $x_1, \ldots, x_m \in \mathfrak{g}$. Enfin, l'on appellera $J(\mathfrak{g})$ la réunion de la suite croissante des sous-modules $J_n(\mathfrak{g})$ de $T(\mathfrak{g})$, idéal bilatère engendré par les éléments $x \otimes y - y \otimes x - [x, y]$.

Ceci étant posé, nous rappellerons le théorème suivant, dû à M. Lazard (Publ. Sci. Univ. Alger, A, I, n° 2, 1954, pp. 281-294) :

THÉORÈME : *Si le module $\mathfrak{g}$ est limite inductive d'une famille de modules $\mathfrak{g}_\alpha$ dont chacun est somme directe de sous-modules monogènes, l'algèbre de Lie $\mathfrak{g}$ a la propriété suivante :*

$$(P) : \qquad J(\mathfrak{g}) \cap (T_1(\mathfrak{g}) + \ldots + T_n(\mathfrak{g})) = J_n(\mathfrak{g}) \qquad \text{pour } n \geq 1$$

COROLLAIRE 1 (Birkhoff-Witt) : *Si le module $\mathfrak{g}$ est libre, l'algèbre de Lie $\mathfrak{g}$ possède la propriété* (P).

COROLLAIRE 2 : *Si l'anneau A est principal, l'algèbre de Lie $\mathfrak{g}$ a la propriété* (P).

Nous nous proposons de montrer que le corollaire 2 est valable sous l'hypothèse plus faible que l'anneau A est un anneau de Dedekind. Pour ce faire, nous aurons besoin de rappeler les propriétés élémentaires des anneaux de fractions.

2. — Soit A un anneau commutatif, que, pour simplifier, nous supposerons sans diviseurs de 0. Pour tout idéal premier $\mathfrak{p}$ de A, on note $A_\mathfrak{p}$ le sous-anneau du corps des fractions de A formé des éléments a/s avec $a \in A$ et $s \in A - \mathfrak{p}$; si M est un A-module quelconque, on notera $M_\mathfrak{p}$ le $A_\mathfrak{p}$-module $A_\mathfrak{p} \otimes_A M$ et ε l'application A-linéaire $x \longrightarrow 1 \otimes x$ de M dans $M_\mathfrak{p}$. Les énoncés suivants sont alors valables :

1) Si A est un anneau de Dedekind et si $\mathfrak{p} \neq (0)$, l'anneau $A_\mathfrak{p}$ est principal.

2) Si le A-homomorphisme $f: M \longrightarrow N$ est injectif (resp. surjectif), il en est de même du $A_\mathfrak{p}$-homomorphisme $1 \otimes f: M_\mathfrak{p} \longrightarrow N_\mathfrak{p}$.

D'après la propriété 2), on peut donc, pour tout sous-module N d'un A-module M, identifier $N_\mathfrak{p}$ à un sous-module de $M_\mathfrak{p}$.

3) Avec l'identification précédente, on a $(N \cap N')_\mathfrak{p} = N_\mathfrak{p} \cap N'_\mathfrak{p}$, quels que soient les sous-modules N et N' de M.

4) Si M, N, N' sont trois A-modules tels que $M \supset N \supset N'$ et si l'on a $N_\mathfrak{p} = N'_\mathfrak{p}$ pour tout idéal *maximal* $\mathfrak{p}$ de A, on a $N = N'$

5) Il existe un isomorphisme unique de $M_\mathfrak{p} \otimes_{A_\mathfrak{p}} N_\mathfrak{p}$, sur $(M \otimes_A N)_\mathfrak{p}$ qui applique $\varepsilon(m) \otimes \varepsilon(n)$ sur $\varepsilon(m \otimes n)$.

3. — Soit de nouveau $\mathfrak{g}$ une algèbre de Lie sur l'*anneau de Dedekind* A. Pour tout idéal premier $\mathfrak{p}$ de A, le $A_\mathfrak{p}$-module $\mathfrak{g}_\mathfrak{p}$ est muni d'une structure d'algèbre de Lie, déduite de celle de $\mathfrak{g}$ par extension des scalaires. D'après 5), on peut identifier les modules $(T_n(\mathfrak{g}))_\mathfrak{p}$ et $T_n(\mathfrak{g}_\mathfrak{p})$ et par suite, les modules $T(\mathfrak{g})_\mathfrak{p}$ et $T(\mathfrak{g}_\mathfrak{p})$; de plus, comme le $A_\mathfrak{p}$-module $\mathfrak{g}_\mathfrak{p}$ est engendré par $\varepsilon(\mathfrak{g})$ et que les éléments de la forme (1) dépendent linéairement de chacun des x_i, dans l'identification précédente, le module $J_n(\mathfrak{g})_\mathfrak{p}$ est identifié à $J_n(\mathfrak{g}_\mathfrak{p})$.

Comme l'anneau $A_\mathfrak{p}$ est principal d'après 1) pour $\mathfrak{p} \neq (0)$, le théorème de Lazard fournit l'égalité suivante :

$$J_n(\mathfrak{g}_\mathfrak{p}) = J(\mathfrak{g}_\mathfrak{p}) \cap \left(\sum_{i=1}^{n} T_i(\mathfrak{g}_\mathfrak{p}) \right) \tag{2}$$

D'après les identifications précédentes et la propriété 3) précédente la formule (2) s'écrit aussi :

$$J_n(\mathfrak{g})_\mathfrak{p} = \left(J(\mathfrak{g}) \cap \left(\sum_{i=1}^{n} T_i(\mathfrak{g}) \right) \right)_\mathfrak{p}. \tag{3}$$

Comme, dans la formule (P), le sous-module $J_n(\mathfrak{g})$ est toujours trivialement

contenu dans le membre de gauche, la formule (3) et la propriété (4) montrent que *l'algèbre de Lie* $\mathfrak{g}$ *sur l'anneau de Dedekind* A *vérifie la propriété* (P) (1).

4. — Pour terminer, nous allons montrer par un contre-exemple que la propriété (P) n'est pas vérifiée pour toute algèbre de Lie (2).

La propriété (P) implique la formule :

$$J(\mathfrak{g}) \cap T_1(\mathfrak{g}) = (0)$$

et par suite, comme $J(\mathfrak{g})$ est l'idéal bilatère de $T(\mathfrak{g})$ engendré par les éléments de la forme $x \otimes y - y \otimes x - [x, y]$, la propriété (P) implique la propriété suivante ;

(P') *Il existe une application linéaire* injective f *de* $\mathfrak{g}$ *dans une algèbre associative* U *vérifiant l'identité :*

$$f([x, y]) = f(x)\,f(y) - f(y)\,f(x) \tag{4}$$

C'est à cette propriété (P') que nous allons donner un contre-exemple.

A = algèbre extérieure à trois générateurs x_i sur le corps à 2 éléments (3).

$\mathfrak{a}$ = algèbre de Lie sur A de base $\{e_i, e_{ij}\}$ $(1 \leq i < j \leq 3)$ avec $[e_i, e_j] = e_{ij}$ pour $i \neq j$, les autres crochets étant nuls, en convenant que $e_{ij} = e_{ji}$ pour $i > j$.

$\mathfrak{h}$ = idéal de $\mathfrak{a}$ engendré par $u = \sum_{i=1}^{3} x_i\, e_i$.

On a $x_i^2 = 0$, mais $x_1\, x_2\, x_3 \neq 0$ dans A. Dans $\mathfrak{a}$, on a $[x, [y, z]] = 0$ donc l'identité de Jacobi est vérifiée ; de plus $\mathfrak{h}$ est, comme module, engendré par u et les $[u, e_i] = x_j\, e_{ki} - x_k\, e_{ij}$ ((ijk) permutation de (123)).

Soit f une application linéaire de $\mathfrak{a}$ dans une algèbre associative U vérifiant l'identité (4) et soit $v = \sum_{i<j} x_i\, x_j\, e_{ij}$. On a :

$$f(v) = \sum_{i<j} x_i\, x_j\, f(e_{ij}) = \sum_{i<j} x_i\, x_j\, (f(e_i)\, f(e_j) + f(e_j)\, f(e_i)) = f(u)^2$$

donc, si f est nulle sur $\mathfrak{h}$, on aura $f(v) = 0$. Cependant v n'appartient

---

(1) La démonstration prouve en fait que l'algèbre de Lie $\mathfrak{g}$ sur l'anneau A a la propriété (P) si cette propriété est possédée par l'algèbre de Lie $\mathfrak{g}_\mathfrak{p}$ sur l'anneau $A_\mathfrak{p}$ pour tout idéal maximal $\mathfrak{p}$ de A.

(2) Un contre-exemple plus compliqué est dû à Chirchov, dont on trouvera la référence dans l'article cité de M. Lazard.

(3) On rappelle qu'en caractéristique 2, une algèbre extérieure est commutative.

pas à $\mathfrak{h}$: soit φ la forme linéaire sur $\mathfrak{a}$ définie par $\varphi(e_i) = 0$ et $\varphi(e_{ij}) = x_k$ ((ijk) permutation de (123)). On aura $\varphi(u) = 0$, $\varphi([u, e_i]) = x_j^2 - x_k^2 = 0$, donc $\varphi(\mathfrak{h}) = (0)$, mais par contre :

$$\varphi(v) = \sum_{i<j} x_i x_j \varphi(e_{ij}) = 3 x_1 x_2 x_3 = x_1 x_2 x_3 \neq 0.$$

On a donc prouvé que *toute application linéaire f' de $\mathfrak{g} = \mathfrak{a}/\mathfrak{h}$ dans U qui vérifie l'identité* (4) *annule l'élément non nul $\bar{v} = v \bmod \mathfrak{h}$ de $\mathfrak{g}$.*