

ANNALI DELLA SCUOLA NORMALE SUPERIORE DI PISA *Classe di Scienze*

ANTONIO CHIFFI

Sugli sviluppi in serie di autosoluzioni

Annali della Scuola Normale Superiore di Pisa, Classe di Scienze 3^e série, tome 11, n° 3-4 (1957), p. 217-223

[<http://www.numdam.org/item?id=ASNSP_1957_3_11_3-4_217_0>](http://www.numdam.org/item?id=ASNSP_1957_3_11_3-4_217_0)

© Scuola Normale Superiore, Pisa, 1957, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Annali della Scuola Normale Superiore di Pisa, Classe di Scienze » (<http://www.sns.it/it/edizioni/riviste/annaliscienze/>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

SUGLI SVILUPPI IN SERIE DI AUTOSOLUZIONI

di ANTONIO CHIFFI (Pisa)

1. — In un dominio limitato D di uno spazio ad m dimensioni, le cui coordinate di punto indichiamo con $x_1, x_2, \dots, x_m$, consideriamo il seguente operatore differenziale:

$$E[\varphi] = \sum_{k=1}^m \frac{\partial}{\partial x_k} \sum_{i=1}^m a_{ik}(P) \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} + c(P) \varphi.$$

Esso sia del tipo ellittico (positivo) e sia dotato di funzione di Green rispetto alla condizione al contorno:

$$L[\varphi] = \alpha(P) \frac{\partial \varphi}{\partial \nu} + \beta(P) \varphi = q(P), \quad P \in \mathcal{F}D,$$

dove con ν si è indicato l'asse conormale. Ciò accade se sono soddisfatte talune ipotesi qualitative per le funzioni che compaiono in $E[\]$ ed in $L[\]$ e per la frontiera di D e quantitative per i coefficienti c, α e β sulle quali non ci soffermiamo. In tali ipotesi e se $\vartheta(P)$ è una funzione positiva in D , il problema omogeneo:

$$(1) \quad E[\varphi] + \lambda \vartheta \varphi = 0 \quad \text{in } D$$

$$(2) \quad L[\varphi] = 0 \quad \text{su } \mathcal{F}D$$

ammette soluzioni ⁽⁴⁾ (autosoluzioni) per una infinità numerabile di valori reali di λ (autovalori). Disponiamo gli autovalori in ordine di modulo crescente e ripetiamo ciascuno di essi tante volte quante sono le corrispondenti autosoluzioni (sempre in numero finito). Si ottiene un sistema di numeri $\{\lambda_n\}$ a ciascuno dei quali corrisponde una autosoluzione φ_n e il sistema $\{\varphi_n\}$ risulta ortogonale con peso ϑ e può considerarsi normale.

⁽⁴⁾ Cfr. M. PICONE, *Appunti di Analisi Superiore*. Rondinella, Napoli, 1940, pag. 821.

Detto s un intero positivo, facciamo le seguenti ulteriori ipotesi: per $m > 1$ la frontiera del dominio D sia suscettibile nell'intorno di ogni suo punto di una rappresentazione parametrica mediante funzioni definite in un dominio limitato E di uno spazio ad $m - 1$ dimensioni, continue con le loro derivate fino a quelle di ordine s (ovvero di ordine 1 per $s = 0$, ovvero di ordine 2 per $s = 1$) e tali da porre una corrispondenza biunivoca tra E e la porzione di superficie rappresentata e da rendere massima la caratteristica della matrice jacobiana della trasformazione; le funzioni a_{ik} , c e ϑ siano continue con le derivate fino a quelle di ordine $s - 1$ (ovvero di ordine 2 per $s = 0$ e $s = 1$).

In queste ipotesi risultano continue in D le derivate delle autosoluzioni fino a quelle di ordine s ⁽²⁾.

2. — Sia data in D una funzione $f(P)$, ivi continua con le sue derivate fino a quelle di ordine s se s è pari; fino a quelle di ordine $s + 1$ se s è dispari. Posto:

$$E^0[f] = f; \quad E^1_\vartheta[f] = \frac{1}{\vartheta} E[f];$$

$$E^k_\vartheta[f] = \frac{1}{\vartheta} E[E^{k-1}_\vartheta[f]] \quad (k \text{ intero} \geq 2),$$

supponiamo che siano verificate le uguaglianze:

$$(3) \quad L[E^i_\vartheta[f]] = 0 \quad \text{per } P \in \mathcal{F}D$$

con $i = 1, \dots, \frac{s-1}{2}$ se s è dispari, mentre se s è pari sia: $i = 2, \dots, \frac{s}{2} - 1$.

Posto:

$$c_r = \int_D \vartheta f \varphi_r dP,$$

vogliamo dimostrare il seguente:

TEOREMA: *Nelle ipotesi in cui ci siamo posti vale, se s è pari, la disuguaglianza:*

$$(4) \quad \sum_{r=1}^n \lambda_r^s c_r^2 \leq M \int_D \sum_{j=0}^s \sum_{i_1+\dots+i_m=j} \left(\frac{\partial^j f}{\partial x_1^{i_1} \dots \partial x_m^{i_m}} \right)^2 dP$$

⁽²⁾ Cfr. C. MIRANDA. *Equazioni alle derivate parziali di tipo ellittico*, Springer, Berlino, Cap. V, n. 36.

essendo M una costante positiva indipendente da n ; se invece s è dispari e, di più, si suppone che sia:

$$(5) \quad c \leq 0; \quad \alpha \beta \geq 0; \quad (\alpha^2 + \beta^2 \neq 0),$$

vale la disuguaglianza:

$$(6) \quad \sum_{r=1}^n \lambda_r^s c_r^2 \leq M \int_D \sum_{j=0}^s \sum_{i_1+\dots+i_m=j} \left(\frac{\partial^j f}{\partial x_1^{i_1} \dots \partial x_m^{i_m}} \right)^2 dP + \\ + N \int_{\mathcal{F}D} \sum_{j=0}^s \sum_{i_1+\dots+i_m=j} \left(\frac{\partial^j f}{\partial x_1^{i_1} \dots \partial x_m^{i_m}} \right)^2 d\sigma,$$

essendo M ed N costanti positive indipendenti da n ⁽³⁾.

Per dimostrare la (4) partiamo dalla disuguaglianza:

$$(7) \quad \int_D \vartheta \left\{ E_\vartheta^{s/2} \left[f - \sum_{r=1}^n c_r \varphi_r \right] \right\}^2 dP \geq 0.$$

Se si tiene conto della formula:

$$(8) \quad E_\vartheta^{s/2} [\varphi_r] = (-1)^{s/2} \lambda_r^{s/2} \varphi_r,$$

la (7) si può così scrivere:

$$(9) \quad \int_D \vartheta \{ E_\vartheta^{s/2} [f] \}^2 dP - 2(-1)^{s/2} \sum_{r=1}^n c_r \lambda_r^{s/2} \int_D \vartheta E_\vartheta^{s/2} [f] \varphi_r dP + \sum_{r=1}^n c_r^2 \lambda_r^s \geq 0.$$

Si ha poi applicando $\frac{s}{2}$ volte la formula di Green:

$$(10) \quad \int_D \vartheta E_\vartheta^{s/2} [f] \varphi_r dP = \int_D \vartheta E_\vartheta^{s/2} [\varphi_r] f dP + \\ + \int_{\mathcal{F}D} a \sum_{j=0}^{s/2-1} \left\{ E_\vartheta^j [\varphi_r] \frac{\partial}{\partial \nu} E_\vartheta^{s/2-j} [f] - E_\vartheta^{s/2-j} [f] \frac{\partial}{\partial \nu} E_\vartheta^j [\varphi_r] \right\} d\sigma,$$

(3) Per $s=0$ la (4) si riduce alla disuguaglianza di Bessel. Per $s=1$, $m=2$, cfr. COURANT-HILBERT, *Methoden der Mathematischen Physik*, Springer, Berlino, 1937, vol. II, cap. VII. Una disuguaglianza formalmente analoga alla (4) per s pari, $m=2$ e 3 $E[\cdot] \equiv \Delta_2$, α e β costanti positive, ha stabilito A. HAMMERSTEIN *Entwicklungen gegebener Funktionen nach Eigenfunktionen*; *Mathematische Zeitschrift*, 27 (1928), pag. 270-311. Qui la funzione f , pur verificando relazioni analoghe alle (3), soddisfa ad ipotesi di regolarità meno restrittive e i coefficienti c_r ed il secondo membro della (4) coincidono con gli analoghi da noi definiti se la f è continua in D con le derivate in questione.

con $\alpha = \{ \sum_k (\sum_i a_{ik} X_i)^2 \}^{1/2}$, essendo X_i i coseni direttori della normale esterna di $\mathcal{FD}$. L'integrale di frontiera che compare nella (10) si annulla perchè $E_{\mathcal{D}}^j [\varphi_r]$ soddisfa alla (2), come pure alla (2) soddisfa $E_{\mathcal{D}}^{s/2-j} [f]$ per l'ipotesi (3). Infatti se le funzioni u e v soddisfano entrambe alla (2), scritta questa per la u e per la v , moltiplicando per v la prima relazione così ottenuta, la seconda per u e sottraendo, si ha:

$$\alpha \left\{ v \frac{\partial u}{\partial \nu} - u \frac{\partial v}{\partial \nu} \right\} = 0.$$

Se una porzione di $\mathcal{FD}$ è $\alpha \neq 0$, ivi è anche:

$$(11) \quad v \frac{\partial u}{\partial \nu} - u \frac{\partial v}{\partial \nu} = 0;$$

sulla parte di $\mathcal{FD}$ dove è $\alpha = 0$ è pure $u = v = 0$ e la (11) è parimenti soddisfatta. Sostituendo la (10) nella (9) e tenendo sempre conto della (8), si ha:

$$(12) \quad \int_D \vartheta \{ E_{\mathcal{D}}^{s/2} [f] \}^2 dP - 2 \sum_{r=1}^n c_r^2 \lambda_r^s + \sum_{r=1}^n c_r^2 \lambda_r^s \geq 0$$

e da questa segue la (4).

Per dimostrare la (6), posto:

$$f_n = \sum_{r=1}^n c_r \varphi_r; \quad M(u) = E_{\mathcal{D}}^{(s-1)/2} [f];$$

$$N[u, v] = \sum_{i,k} a_{ik} \frac{\partial u}{\partial x_i} \frac{\partial v}{\partial x_k}; \quad N[u] = N[u, u],$$

partiamo dalla disuguaglianza:

$$(13) \quad \int_D \{ N[M(f - f_n)] - c[M(f - f_n)]^2 \} dP + \\ + \int_{\mathcal{FD}} a \frac{\alpha \beta}{\alpha^2 + \beta^2} \left\{ [M(f - f_n)]^2 + \left[\frac{\partial}{\partial \nu} M(f - f_n) \right]^2 \right\} d\sigma \geq 0,$$

verificata per le (5). L'espressione $M(f - f_n)$ soddisfa alla (2). Da questa,

moltiplicandola prima per $\alpha \varphi$ e poi per $\beta \frac{\partial \varphi}{\partial \nu}$ e sommando, si ha l'identità:

$$(14) \quad \frac{\alpha \beta}{\alpha^2 + \beta^2} \left[\varphi^2 + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial \nu} \right)^2 \right] = - \varphi \frac{\partial \varphi}{\partial \nu}.$$

La (13) diventa allora:

$$(15) \quad \int_D \{ N [M (f - f_n)] - c [M (f - f_n)]^2 \} dP - \\ - \int_{\mathcal{F}D} a M (f - f_n) \frac{\partial}{\partial \nu} M (f - f_n) d\sigma \geq 0.$$

Anche questa volta teniamo conto che è:

$$M(f_n) = (-1)^{(s-1)/2} \sum_r c_r \lambda_r^{(s-1)/2} \varphi_r;$$

$$N [M (f), M (f_n)] = (-1)^{(s-1)/2} \sum_r c_r \lambda_r^{(s-1)/2} N [M (f), \varphi_r];$$

$$N [M (f_n)] = \sum_{r,p} c_r c_p \lambda_r^{(s-1)/2} \lambda_p^{(s-1)/2} N [\varphi_r, \varphi_p];$$

e riscriviamo così la (15):

$$(16) \quad \int_D \{ N [M (f)] - c [M (f)]^2 \} dP - \int_{\mathcal{F}D} a M (f) \frac{\partial}{\partial \nu} M (f) d\sigma + \\ + (-1)^{(s-1)/2} \sum_r c_r \lambda_r^{(s-1)/2} \left(-2 \int_D \{ N [M (f), \varphi_r] - c M (f) \varphi_r \} dP + \right. \\ \left. + \int_{\mathcal{F}D} a \varphi_r \frac{\partial}{\partial \nu} M (f) d\sigma + \int_{\mathcal{F}D} a M (f) \frac{\partial \varphi_r}{\partial \nu} d\sigma \right) + \\ + \sum_{r,p} c_r c_p \lambda_r^{(s-1)/2} \lambda_p^{(s-1)/2} \left(\int_D \{ N [\varphi_r, \varphi_p] - c \varphi_r \varphi_p \} dP - \int_{\mathcal{F}D} a \varphi_r \frac{\partial \varphi_p}{\partial \nu} d\sigma \right) \geq 0.$$

Eseguiamo una integrazione per parti sul secondo integrale di dominio

che compare nel primo membro della (16):

$$\begin{aligned}
 (17) \quad & -2 \int_D \{ N [M(f), \varphi_r] - c M(f) \varphi_r \} dP = \\
 & = \int_D \varphi_r E [M(f)] dP - \int_{\mathcal{F}D} a \varphi_r \frac{\partial}{\partial \nu} M(f) d\sigma + \\
 & + \int_D M(f) E [\varphi_r] dP - \int_{\mathcal{F}D} a M(f) \frac{\partial \varphi_r}{\partial \nu} d\sigma.
 \end{aligned}$$

Al primo integrale di dominio a secondo membro della (17) applichiamo la formula di Green $\frac{s+1}{2}$ volte con la tecnica già usata per dimostrare la (4) e tenendo ogni volta conto della formula:

$$E [\varphi_r] = -\lambda_r \vartheta \varphi_r:$$

$$(18) \quad \int_D \varphi_r E [M(f)] dP = (-1)^{(s-1)/2+1} \lambda_r^{(s-1)/2+1} c_r.$$

Analogamente si opera sul secondo integrale di dominio a secondo membro della (17):

$$(19) \quad \int_D M(f) E [\varphi_r] dP = (-1)^{(s-1)/2+1} \lambda_r^{(s-1)/2+1} c_r.$$

Si ha pure:

$$(20) \quad \int_D \left\{ N [\varphi_r, \varphi_p] - c \varphi_r \varphi_p \right\} dP = \int_D \varphi_r E [\varphi_p] dP + \int_{\mathcal{F}D} a \varphi_r \frac{\partial \varphi_p}{\partial \nu} d\sigma.$$

Sostituiamo la (17) nella (16), tenendo conto delle (18), (19) e (20); si ottiene:

$$\begin{aligned}
 (21) \quad & \int_D \{ N [M(f)] - c [M(f)]^2 \} dP - \int_{\mathcal{F}D} a M(f) \frac{\partial}{\partial \nu} M(f) d\sigma - \\
 & - 2 \sum_r c_r^2 \lambda_r^s + \sum_r c_r^2 \lambda_r^s \geq 0
 \end{aligned}$$

e da questa la (6).

3. — Nelle ipotesi in cui ci siamo posti nel caso di s dispari gli autovalori sono tutti positivi, come è facile vedere. Da ciò segue che, in entrambi i casi, la serie:

$$(22) \quad \sum_{r=1}^{\infty} \lambda_r^s c_r^2$$

è convergente e la sua somma non supera i secondi membri di (4) e (6) rispettivamente.

Nei casi particolari in cui è noto che le successioni:

$$\left\{ \frac{\partial^j f}{\partial x_1^i \dots \partial x_m^j} \right\} \quad (j = 0, \dots, s)$$

convergono in media verso le corrispondenti derivate di f su D e, per s dispari, anche su $\mathcal{F}D$, si può asserire che i primi membri di (7) e (13) tendono a zero per n tendente all'infinito. La somma della serie (22) eguaglia allora, a seconda dei casi, l'integrale che compare nella (12) o la somma degli integrali che compaiono nella (21).