ANNALI DELLA
SCUOLA NORMALE SUPERIORE DI PISA
Classe di Scienze

CARMELO LONGO

Sul modello minimo degli elementi cuspidali del piano

Annali della Scuola Normale Superiore di Pisa, Classe di Scienze 3e série, tome 9, nº 1-2 (1955), p. 45-63

<http://www.numdam.org/item?id=ASNSP_1955_3_9_1-2_45_0>

SUL MODELLO MINIMO DEGLI ELEMENTI CUSPIDALI DEL PIANO

di Carmelo Longo (Roma)

1. Premessa.

Oggetto della presente Nota è la determinazione e lo studio delle varietà rappresentative degli elementi cuspidali E_6 e E_7, cioè degli enti geometrici definiti dalle curve con una data cuspide ed a due a due intersecantisi rispettivamente in un gruppo G_7, e G_8, di punti coincidenti nell'origine della cuspide (1).

Recentemente E. Bompiani [5] ha dimostrato che la geometria proiettiva degli E_7 cuspidali di un piano aventi lo stesso centro è equivalente alla geometria di una V_3^3 di S_5 rispetto ad un gruppo G_4 di trasformazioni birazionali della V_3^3 in sè intrinsecamente definito dalla varietà stessa. In questa rappresentazione gli E_6 cuspidali sono rappresentati dalle rette di una congruenza appartenente alla V_3^3.

Riprendo qui l'argomento allo scopo di determinare per i detti elementi una varietà rappresentativa per la quale il gruppo delle collineazioni piane, che mutano in sè la totalità degli elementi, si rifletta in un gruppo di collineazioni della varietà in sè.

Il metodo che seguo, dovuto al Bompiani [4], consiste nel determinare le coordinate grassmanniane della totalità delle curve atte a rappresentare un dato elemento. Dalle dette coordinate grassmanniane si risale alla determinazione di coordinate atte ad individuare l'elemento le quali permettono di scrivere le equazioni della varietà rappresentativa degli elementi in esame.

---

(1) Lo studio di tali elementi iniziato da E. Bompiani, è stato oggetto di ricerca da parte di varii Autori.

Si vedano: p. es., i lavori [1], [2], [3], [8], [9], [10], [11] della Bibliografia in fine alla presente Nota.

Con tale metodo pervengo alla rappresentazione degli elementi E_6 del piano proiettivo e degli elementi E_7 con dato centro.

La varietà rappresentativa degli E_6 è una rigata dello stesso tipo di quella trovata da G. GHERARDELLI [7] (2) per gli elementi E_2 del piano proiettivo, rigata congiungente punti corrispondenti di due opportuni modelli degli E_1 del piano.

Nel caso degli E_2 si perviene immediatamente a tale rigata usufruendo del sistema di coordinate introdotte per tali elementi da F. ENGEL [6] e da E. STUDY [15].

Quest'ultima circostanza mi ha indotto a determinare un sistema di coordinate, analogo al precedente, per una ampia classe di elementi. Questi elementi sono definiti dalle curve passanti per un dato punto (*centro* dell'elemento) origine di un unico ramo di ordine ν e di classe μ ed a due a due intersecantisi in un gruppo G_k, con $k = \nu(\nu + \mu) + \delta - 1$ ($\delta = M.C.D.$ (μ, ν)) di punti coincidenti nel centro dell'elemento (per $\nu = 2$, $\mu = 1$ si hanno gli E_6).

Questi elementi, che indicherò con $E^{(\nu,\mu)}$, sono rappresentati su rigate del tipo detto. Lo studio di tali rigate mi ha permesso infine di determinare il modello minimo, nel senso di F. SEVERI [13], degli elementi $E^{(\nu,\mu)}$ cioè la varietà d'ordine minimo tra tutte le varietà rappresentative di tali elementi e tra loro birazionalmente equivalenti senza eccezioni.

2. Elementi cuspidali E_6 del piano con centro assegnato.

Indicate con x, y le coordinate non omogenee di un piano proiettivo, un elemento cuspidale E_6, con centro il punto $O(0, 0)$ e tangente $\varphi_1(x, y) = a_1 x + a_2 y = 0$, è determinato da una curva:

$$2.1 \quad \varphi_1^2 + \varphi_3 + \ldots = (a_1 x + a_2 y)^2 + a_{30} x^3 + 3 a_{21} x^2 y + 3 a_{12} x y^2 + a_{03} y^3 + \ldots$$

insieme a tutte le curve aventi in O una cuspide con la stessa tangente cuspidale ed intersecantisi in un gruppo G_7 di punti raccolti in O. Questo gruppo di punti impone solamente 6 condizioni alle curve che lo contengono le quali si ottengono (tutte) formando fascio tra la curva 2.1 ed il sistema lineare di curve aventi in O un punto triplo con una delle tre tangenti principali coincidenti con la tangente cuspidale.

---

(2) A tale riguardo si veda anche: J. G. SEMPLE [12]. Una ricostruzione organica ed originale dell'argomento trovasi in E. BOMPIANI [4], pp. 101-111.

Tale sistema è pertanto dato da:

2.2 $$\varphi_1^2 + \varphi_3 + \varphi_1 \psi_2 + \psi_4 + \dots + \psi_n = 0$$

con ψ_k forma arbitraria d'ordine k.

Assumiamo ora come parametri i coefficienti delle curve che determinano il sistema lineare 2.2: tale sistema, e quindi l'E_6, individua un S_N, con $N = \binom{n+2}{2} - 7$. Ci si rende facilmente conto che nel calcolo delle coordinate grassmanniane di tale S_N ci si può limitare a considerare il sistema lineare ∞^3 delle cubiche

2.3 $$\varphi_1^2 + \varphi_3 + \varphi_1 \psi_2 = 0 .$$

Le coordinate dello S_3 associato al sistema lineare 2.3 sono date dai minori (indipendenti) del 4° ordine estratti dalla seguente matrice:

$$\begin{pmatrix} a_1^2 & 2\, a_1 a_2 & a_2^2 & a_{30} & 3\, a_{21} & 3\, a_{12} & a_{03} \\ 0 & 0 & 0 & a_1 & a_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & a_1 & a_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & a_1 & a_2 \end{pmatrix} .$$

Tali coordinate sono pertanto date da:

2.4 $$a_1^h a_2^{5-h} \quad , \quad A = \varphi_3 (a_2 , - a_1) \qquad (h = 0 , 1 , \dots , 5) .$$

Le precedenti coordinate pongono in evidenza che un E_6 di centro O è individuato dal gruppo di coordinate

2.5 $$a_1 , a_2 , A$$

ove si ritenga che questo gruppo sia *equivalente* al gruppo

2.5′ $$\sigma a_1 , \sigma a_2 , \sigma^5 A$$

con σ fattore arbitrario non nullo.

Dal precedente sistema di coordinate, o direttamente dalle 2.4, si ha che gli ∞^2 E_6 di un piano, con dato centro, si possono rappresentare nei punti del cono di S_6

2.6 $$\xi^h = a_1^h a_2^{5-1} \quad , \quad \eta = A \qquad (h = 0 , 1 , \dots , 5)$$

Si verifica facilmente che il gruppo G_6 delle collineazioni del piano che lasciano fisso il centro O degli elementi, induce nello S_6, un gruppo G_4 di collineazioni caratterizzato dal mutare in sè il cono e la sua direttrice che si ottiene per $A = 0$.

Si osservi che il gruppo G_6 si riflette in un gruppo G_4 in quanto che il gruppo G_2 delle omologie speciali di centro O, sottogruppo invariante del G_6, trasforma in sè ciascun elemento E_6: il gruppo G_4 è isomorfo al gruppo quoziente G_6 / G_2 (3).

Possiamo quindi affermare che:

Gli ∞^2 elementi cuspidali E_6 di un piano aventi lo stesso centro si rappresentano nei punti di un cono del 5° ordine di S_6.

La geometria proiettiva degli E_6 si riflette nella geometria del cono rispetto al gruppo G_4 delle omografie che mutano in sè il cono ed una sua direttrice C^5.

Rendiamoci ora conto del significato della C^5 e del vertice del cono.

Per questo cominciamo a considerare gli ∞^1 E_6 con data tangente $y = 0$:

$$a_0 y^2 = a x^3 + \dots \tag{2.7}$$

Uno di questi elementi è determinato dal rapporto $a : a_0$ il quale individua un punto della generatrice del cono sulla quale si rappresentano gli ∞^1 elementi 2.7.

Il punto intersezione di tale generatrice con la C^5 si ottiene per $a = 0$: in tal caso la tangente all'elemento E_6 ha contatto quadripunto. Si ha pertanto che i punti della C^5 rappresentano gli E_6 con tangente a contatto quadripunto, ossia di classe $\mu = 2$.

Sulla generatrice considerata il vertice del cono si ottiene per $a_0 = 0$: in corrispondenza a questo valore dalla 2.7 segue che si hanno curve con un punto triplo in O. Possiamo pertanto dire che il vertice del cono rappresenta *elementi eccezionali* corrispondenti a curve con un punto triplo in O.

In particolare, alla configurazione costituita dal vertice e da una generatrice si possono associare le curve con un punto triplo ed aventi una tangente principale coincidente con la tangente corrispondente alla generatrice. In tal modo si ottengono ∞^1 elementi eccezionali.

In questo caso ci si può domandare un modello degli E_6 nel quale gli ∞^1 elementi eccezionali si rappresentino biunivocamente in pnnti di una

(3) Come è già stato osservato da E. BOMPIANI [4] (pp. 88-89) la stessa circostanza si presenta per gli E_2 di un piano aventi lo stesso centro.

curva. Un tale modello è dato dalla rigata R_2^7 di S_8:

2.8 $\xi^h = a_1^h \, a_2^{6-h} \quad , \quad \eta^1 = a_1 A \quad , \quad \eta^2 = a_2 A \quad , \quad (h = 0 , 1 , \ldots 6)$

che si ottiene come prodotto del cono 2.6 con le direzioni tangenti per il centro comune degli elementi.

Gli ∞^1 elementi eccezionali sono rappresentati dai punti della direttrice rettilinea della rigata 2.8.

3. Preliminari sulla rappresentazione degli E_7 con dato centro.

Analogamente a quanto si è fatto per gli E_6, vogliamo ora determinare un modello per gli elementi cuspidali E_7 del piano proiettivo aventi lo stesso centro. In questo numero ci limiteremo a determinare coordinate atte ad individuare un tale elemento ed a richiamare la rappresentazione già data da E. Bompiani [5] per gli E_7 con centro e tangente assegnati.

Un elemento E_7 è determinato da una curva 2.1 insieme a tutte le curve aventi nel centro O una cuspide, con la stessa tangente cuspidale, ed intersecantisi in un gruppo G_8 di punti raccolti in O. Questo gruppo di punti impone solamente 7 condizioni alle curve che lo contengono, le quali si ottengono (tutte) formando fascio tra la curva 2.1 ed il sistema lineare di curve aventi in O un punto triplo con due tangenti principali coincidenti con la tangente cuspidale.

Anche nel caso in esame ci si può limitare a considerare le cubiche passanti per il dato E_7: queste formano il seguente sistema lineare ∞^2:

3.1 $$\varphi_1^2 + \varphi_3 + \varphi_1^2 \, \psi_1 = 0$$

con ψ_1 forma lineare arbitraria.

Analogamente a quanto si è visto nel n. prec., possiamo rappresentare la rete 3.1, o l'elemento E_7 da essa determinato, assumendo come sue coordinate i minori di ordine massimo estratti dalla seguente matrice:

$$\begin{pmatrix} a_1^2 & 2\, a_1 a_2 & a_2^2 & a_{30} & 3\, a_{21} & 3\, a_{12} & a_{03} \\ 0 & 0 & 0 & a_1^2 & 2\, a_1 a_2 & a_2^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & a_1^2 & 2\, a_1 a_2 & a_2^2 \end{pmatrix}$$

I detti minori danno luogo ai due seguenti gruppi di coordinate:

3.2
I° gruppo: $\xi^h = a_1^h \, a_2^{6-h}$

II° gruppo: $\eta^0 = -a_2^2 A_1 \;,\; \eta^1 = a_2 B_1 \;,\; \eta^2 = a_1 B_2 \;,\; \eta^3 = a_1^2 A_2$

ove si è posto:

$$A_i = \frac{\partial A}{\partial a_i} \qquad (A = \varphi_3 (a_2 , - a_1)),$$

$$B_1 = a_{30} a_2^3 - 3 a_{12} a_2 a_1^2 + 2_{03} a_1^3 ,$$

$$B_2 = 2 a_{30} a_2^3 - 3 a_{21} a_2^2 a_1 + a_{03} a_1^3 .$$

Si verifica facilmente che tra le coordinate η^i si hanno le due seguenti relazioni:

3.3
$$a_1^2 \eta^0 - 2 a_1 a_2 \eta^1 + a_2^2 \eta^2 = 0 ,$$
$$a_1^2 \eta^1 - 2 a_1 a_2 \eta^2 + a_2^2 \eta^3 = 0 .$$

Dalle 3.2 segue, che per un elemento E_7, di centro O, si possono assumere come coordinate il gruppo di numeri

3.4
$$a_1 , a_2 \ ; \ A_1 , A_2 , B_1 , B_2$$

con:

3.5
$$a_1 A_1 = 2 B_1 - B_2 \ , \ a_2 A_2 = 2 B_2 - B_1$$

ove si ritenga che il gruppo precedente ed il gruppo

3.4′
$$\sigma a_1 , \sigma a_2 \ ; \ \sigma^4 A_1 , \sigma^4 A_2 , \sigma^5 B_1 , \sigma^5 B_2$$

con σ fattore arbitrario non nullo, rappresentino un medesimo elemento.

In particolare, se si considerano gli ∞^2 elementi E_7 con tangente $y = 0$:

3.6
$$a y^2 + a_{30} x^3 + 3 a_{21} x^2 y + \ldots = 0 ,$$

si ha che si possono assumere come coordinate omogenee di tali elementi i parametri: a , a_{30} , a_{21} , e che tali elementi si rappresentano nei punti di un piano proiettivo.

Considerato il gruppo G_5 di collineazioni che lasciano fissi il centro e la tangente cuspidale, si verifica che tale gruppo si riflette in un gruppo G_3 di collineazioni del piano rappresentativo caratterizzato dal lasciare fisse due rette ($a = 0$, $a_{30} = 0$) ed un punto di una di esse ($a_{30} = a_{21} = 0$) (diverso dal loro punto comune).

Si osservi che, anche in questo caso, considerato il gruppo G_2 delle omologie speciali di centro O, il gruppo G_3 è isomorfo al gruppo quoziente G_5/G_2 .

Pertanto:

La geometria proiettiva degli ∞^2 *elementi cuspidali* E_7 *con centro e tangente assegnati equivale alla geometria di un piano proiettivo rispetto al gruppo* G_3 *delle collineazioni che lasciano invariate due rette ed un punto di una di esse (diverso dal loro punto comune).*

Come già è stato messo in evidenza da E. BOMPIANI [5] le due rette ed il punto di cui all'ultimo enunciato rappresentano elementi E_7 *eccezionali* e precisamente:

1) elementi eccezionali di 1° tipo, $a = 0$, per i quali invece di una cuspide si ha un punto triplo in O;

2) elementi eccezionali di 2° tipo, $a_{30} = 0$, per i quali la tangente cuspidale ha contatto quadripunto in O;

3) elementi eccezionali di 3° tipo, $a = a_{30} = 0$, per i quali si ha un punto triplo con una delle tangenti coincidente con la tangente fissata come cuspidale.

4) elementi eccezionali di 4° tipo, $a_{30} = a_{21} = 0$, per i quali esistono due rami lineari per O a contatto armonico.

Ricordiamo infine che un E_7 determina una retta invariante per il centro O, luogo dei flessi delle ∞^2 C^3 contenenti E_7 (Cfr. [2], pp. 49). Per l'elemento 3.6 tale retta ha equazioni: $a_{30}\,x + a_{21}\,y = 0$; se si considera poi l'elemento 3.1, determinato dalle coordinate 3.4, si trova senza alcuna difficoltà che la relativa retta invariante ha equazione: $A_2\,x - A_1\,y = 0$.

Ne segue un significato geometrico delle coordinate A_i.

4. Rappresentazione degli elementi E_7 con un dato centro.

Le equazioni 3.2 sono le equazioni parametriche di una varietà W rappresentativa degli ∞^3 elementi E_7 di un dato piano e con dato centro O (0,0).

Ci proponiamo ora di studiare e caratterizzare tale varietà. Il primo gruppo di coordinate 3.2 descrive, al variare di $a_1 : a_2$, una C^6 normale appartenente allo S_6^*, $\eta^i = 0$.

Per quanto riguarda il secondo gruppo di coordinate, è subito visto che le 3.3 sono le equazioni della tangente, nel punto $a_1 : a_2$, alla C^3

$$\eta^0 = \overset{3}{a_2}\;,\;\; \overset{1}{\eta} = \overset{2}{a_2}\, a_1\;,\;\; \overset{2}{\eta} = a_2\, \overset{2}{a_1}\;,\;\; \overset{3}{\eta} = \overset{3}{a_1}\,,$$

appartenente allo S_3^*, $\xi^h = 0$, sghembo con lo S_6^*.

Il rapporto $a_1 : a_2$ determina una proiettività tra la C^6 e la C^3, e la varietà W è luogo degli ∞^1 piani che si ottengono congiungendo un punto della C^6 con la tangente a C^3 nel punto ad esso corrispondente.

È subito visto, intersecando p. es. con un iperpiano per lo S_3^*, che la W è una V_3^{10} appartenente allo $S_{10} = S_3^* \cup S_6^*$.

Si consideri ora il gruppo G_6 delle collineazioni piane che lasciano fisso il centro O degli elementi. Questo gruppo si riflette in un gruppo G_4 di collineazioni dello S_{10} che mutano in sè la V_3^{10} e caratterizzato dal mutare in sè oltre alla C^6 e alla C^3, la rigata R_2^9 luogo delle rette congiungenti punti corrispondenti della C^6 e della C^3.

Anche in tal caso la circostanza che il gruppo G_6 si riflette in un G_4 dipende dal fatto che il sottogruppo invariante G_2 delle omologie speciali di centro O, trasforma in sè ciascun elemento E_7.

Riepilogando si ha:

Gli ∞^3 elementi E_7 di uno stesso piano ed aventi lo stesso centro si rappresentano biunivocamente nei punti di una V_3^{10} di S_{10}, definita nel seguente modo:

Si consideri una C^6, normale, ed una cubica gobba C^3 appartenenti a spazi sghembi tra loro, e si ponga una proiettività tra i punti della C^6 ed i punti della C^3. La V_3^{10} è il luogo degli ∞^1 piani congiungenti un punto di C^6 con la tangente a C^3 nel punto ad esso corrispondente.

La geometria proiettiva degli E_7 è equivalente alla geometria della V_3^{10} rispetto al gruppo G_4 di collineazioni che mutano in sè la C^6, la C^3 e la rigata R_2^9 luogo delle rette congiungenti punti corrispondenti delle due curve.

In particolare segue che due E_7 con lo stesso centro ammettono due invarianti proiettivi ([2], pp. 50-51].

Da quanto si è già detto per gli elementi E_7 con lo stesso centro e con la stessa tangente (n. prec.), si ha:

1) la totalità P degli ∞^2 elementi eccezionali di 1° tipo è rappresentata dalla rigata R_2^4 circoscritta alla C^3;

2) la totalità Q degli ∞^2 elementi eccezionali di 2° tipo è rappresentata dalla rigata R_2^9;

3) la totalità p degli ∞^1 elementi eccezionali di 3° tipo è rappresentata dalla cubica C^3;

4) la totalità q degli ∞^1 elementi eccezionali di 4° tipo è rappresentata dalla curva C^6.

Determiniamo ora la varietà R rappresentante gli ∞^2 elementi con una stessa retta invariante r. Se, p. es., questa retta ha equazione $y = 0$, per i corrispondenti elementi si ha $A_2 = 0$, e quindi, per le 3.2, $\eta^3 = 0$. Osservato che nello S_3^*, $\eta^3 = 0$, è l'equazione del piano osculatore alla C^3 nel punto $a_1 = 0$, si ha che la R è una rigata R_2^8 avente per direttrici la C^6 ed una C^2 di R_2^4 (appartenente ad un piano osculatore alla C^3).

Osservazione. Per il modo stesso con il quale siano pervenuti alla V_3^{10} è chiaro che questa varietà è il modello minimo, secondo F. SEVERI, degli elementi E_7, ossia la varietà W d'ordine minimo tra tutti i modelli di tali elementi e tra loro in corrispondenza birazionale senza eccezioni.

Tenuto presente il modello V_3^{10}, possiamo dimostrare quest'ultimo fatto per mezzo della teoria della base, osservando quanto segue.

Indichiamo con T la varietà rappresentativa degli elementi E_7 con data tangente; la T è una varietà lineare e la varietà W è luogo di ∞^1 varietà T. Sulla W, birazionalmente equivalente senza eccezioni alla V_3^{10}, si hanno le seguenti equivalenze lineari:

$$P + 6\,T \equiv Q + T \equiv R + 2\,T\,.$$

Inoltre sulla W la base di dimensione 2 è costituita dalle varietà P e T e, pertanto, indicata con M una V_2 (pura), non composta con le T, si ha:

$$M \equiv \lambda\,P + \mu\,T \equiv \lambda\,Q + (\mu - 5\,\lambda)\,T \equiv \lambda\,R + (\mu - 4\,\lambda)\,T\,, \qquad (\lambda \geq 1)\,.$$

Consideriamo l'immagine proiettiva del sistema lineare $|\,M\,|$: per il suo grado ϱ si ha:

$$\varrho = [M\;M\;M] = \lambda^2\,(3\,\mu - 8\,\lambda)\,.$$

Osservato che sulla detta immagine proiettiva $\mu - 5\,\lambda$ è l'ordine di q e che pertanto si ha $\mu \geq 5\,\lambda + 1$, è subito visto che il minimo valore di ϱ si consegue per $\lambda = 1$, $\mu = 6$: in corrispondenza a questi valori si ha, $\varrho = 10$.

5. Rappresentazione degli E_6 del piano proiettivo.

Ritorniamo ora agli elementi cuspidali E_6 allo scopo di determinare la varietà rappresentativa di tutti gli elementi E_6 di un piano proiettivo.

Indicate con x^i ed u_i rispettivamente le coordinate omogenee di punto e di retta del piano, dobbiamo determinare coordinate atte ad individuare un E_6 di centro x e tangente u (passante per x, ossia tale che $(u\,,x) = u_i\,x^i = 0$).

Per quanto si è già visto per gli elementi di dato centro O $(0\,,0\,,1)$, nel caso in esame un elemento sarà determinato, oltre che dalle coordinate del centro e della tangente, da un'ulteriore coordinata A, che ora dipenderà sia dalle x che dalle u.

Già sappiamo come si altera la A quando si passi dalle u alle $\sigma\,u$: dobbiamo ora determinare come si alteri la A quando si passi dalle x alle $\varrho\,x$.

Anche in questo caso sarà sufficiente calcolare le coordinate grassmanniane del sistema lineare ∞^3 di cubiche che determinano un elemento E_6:

ossia, considerate coordinate non omogenee, del sistema lineare di curve 2.3 con le φ_1, φ_3 e ψ_2 forme nelle variabili $X - x$, $Y - y$.

Si osservi che per raggiungere il nostro scopo ci si può limitare a considerare gli E_6 con centro su una data retta (p. es. $y = 0$) cosa che semplifica notevolmente i relativi calcoli.

Operando nel modo detto si trova che le dette coordinate grassmanniane del sistema lineare di curve che determinano un E_6 si esprimono per mezzo di combinazioni lineari di espressioni del tipo:

5.1 $$(x)^2 (u)^5 \quad , \quad (x)^6 A$$

ove $(x)^m$ (ed analogamente $(u)^n$) indica il prodotto di m fattori x^i.

Le 5.1 pongono in evidenza che un elemento E_6 è determinato dal sistema di coordinate

5.2 $$x , u , A \quad , \quad (u , x) = 0$$

ove si ritenga che il precedente gruppo di coordinate sia *equivalente* al gruppo

5.2′ $$\varrho x , \sigma u , \frac{\sigma^5}{\varrho^4} A \qquad (u , x) = 0$$

con ϱ e σ fattori arbitrari non nulli.

Dalle coordinate 5.2, tenuto conto delle 5.2′, si ha che le coordinate omogenee di una varietà rappresentativa degli E_6 sono date da:

5.3 $$\xi = (x)^m (u)^n \quad , \quad \eta = A (x)^p (u)^q \quad , \quad (u , x) = 0 ,$$

con

5.4 $$n = q + 5 \quad , \quad p = m + 4 .$$

La varietà 5.3 è una rigata luogo delle rette congiungenti coppie di punti corrispondenti di due modelli degli E_1 del piano.

Osservato: 1°) che per $m = q = 1$, $n = p = 4$ la rigata rappresenta il modello minimo degli E_2 del piano (cfr. [7]); 2°) che si può costruire tale modello a partire dalle coordinate introdotte da F. ENGEL [6] e da E. STUDY [15]; cercheremo nel n. seg. di ottenere direttamente il sistema di coordinate 5.2 usufruendo dell'idea con la quale i detti Autori pervengono alle coordinate di un E_2. Nello stesso tempo saremo portati ad introdurre un analogo sistema di coordinate atte ad individuare una più vasta classe di elementi nella quale entrano come casi particolari gli E_2 e gli E_6.

Osserviamo poi che tra i modelli che si ottengono dalle 5.3 quelli in corrispondenza biunivoca senza eccezioni con gli elementi E_6 si ottengono per $m\,q \geq 1$: i minimi valori di m e q che soddisfano questa ultima relazione sono evidentemente $m = q = 1$. In corrispondenza a questi valori si ha il minimo tra tutti i modelli.

Dimostreremo che tale modello minimo è altresì il modello minimo nel senso di Severi.

A questo scopo premetteremo un breve studio delle rigate 5.3.

6. Coordinate di Engel e Study per un elemento $E^{(\nu,\mu)}$.

Incominciamo a ricordare brevemente il metodo seguito da Engel e da Study per introdurre coordinate atte ad individuare un elemento regolare del 2° ordine, E_2.

Supponiamo che le funzioni $x^i = x^i(t)$, definite in un intervallo I, siano le equazioni parametriche di una curva di equazioni tangenziali $u_i = u_i(t)$.

Posto:

$$x^i{}_{/h} = \frac{d^h x^i}{d\,t^h} \quad , \quad u_{i/h} = \frac{d^h u_i}{d\,t^h} \, ,$$

consideriamo le espressioni

$$6.1 \qquad X_{/h} = \frac{|\, z\; x\; x_{/h}\,|}{(z\,u)} \qquad U_{/k} = \frac{|\, w\; u\; u_{/k}\,|}{(w\,x)}$$

ove z e w rappresentano rispettivamente un punto ed una retta arbitraria del piano ed i numeratori sono i determinanti formati con le coordinate degli elementi indicati.

Per un generico valore $t = t_0$ il corrispondente punto della curva è origine di un elemento regolare E_2 di centro $x = x(t_0)$ e tangente $u = u(t_0)$ $((u\,x) = u_i\,x^i = 0)$.

Un tale E_2 è determinato, oltre che dal centro e dalla tangente, dalle coordinate

$$6.2 \qquad X = X_{/1} \quad , \quad U = U_{/1}$$

indipendenti dalla scelta di z e di w (4).

---

(4) Le derivate che compaiono nelle espressioni 6,2 s'intendono calcolate per $t = t_0$.

Tenuto poi conto dei possibili cambiamenti degli elementi arbitrari che intervengono nella rappresentazione della curva, e quindi dell'elemento E_2, si ha che per il cambiamento del parametro t in una sua funzione $\tau(t)$, (regolare per $t = t_0$) e per i cambiamenti dei fattori di proporzionalità ϱ e σ rispettivamente delle x e delle u, si ha:

$$\overline{X} = \frac{\varrho^2}{\sigma}\left(\frac{d\,t}{d\,\tau}\right)_0 X \quad , \quad \overline{U} = \frac{\sigma^2}{\varrho}\left(\frac{d\,t}{d\,\tau}\right)_0 U \,.$$

Ne segue che i due gruppi di coordinate

6.3 $$x\,,u\,,X\,,U\,, \qquad (u\,,x) = 0$$

e

6.3′ $$\varrho\,x\,,\sigma\,u \quad , \quad \lambda\,\varrho^3\,X \quad , \quad \lambda\,\sigma^3\,U\,, \qquad (u\,,x) = 0$$

si debbono ritenere come equivalenti nella rappresentazione di uno stesso E_2.

Supponiamo ora che per $t = t_0$ si abbia:

6.4 $$\begin{aligned} &X_{/1} = X_{/2} = \ldots = X_{/\nu-1} = 0 \quad , \quad X_{/\nu} \neq 0\,, \\ &U_{/1} = U_{/2} = \ldots = U_{/\mu-1} = 0 \qquad U_{/\mu} \neq 0\,. \end{aligned}$$

In tal caso, come è subito visto, il punto $x = x(t_0)$ della curva è origine di un ramo d'ordine ν e di classe μ, e pertanto determina un elemento differenziale ([5]) che indicheremo con $E^{(\nu,\mu)}$.

Come nel caso $\nu = \mu = 1$, si verifica facilmente che anche nelle ipotesi attuali, espresse dalle relazioni 6.4, si ha che le espressioni $X_{/\nu}$ ed $U_{/\mu}$ sono indipendenti dagli elementi arbitrari z e w; inoltre per i cambiamenti prece-

---

([5]) Supposto che $O \equiv (0\,,0\,,1)$ sia il centro dell'elemento e che la retta $y = 0$ ne sia la tangente, posto $\nu = \bar\nu\,\delta\,,\mu = \bar\mu\,\delta$, con $\bar\nu\,,\bar\mu$ primi tra loro, un tale elemento è rappresentato da tutte le curve

$$(y^{\bar\nu} - a\,x^{\bar\nu+\bar\mu})^\delta + \sum a_{rs}\,x^r\,y^s = 0$$

con $r\,\nu + s\,\mu > \nu\,(\nu + \mu) + \delta$ ed a_{rs} arbitrari. Tali curve s'intersecano a due a due in un gruppo G_k di punti raccolti in O, con $k = \nu\,(\nu + \mu) + \delta$. Per questa ragione un tale elemento s'indica anche con E_{k-1}. Per $\delta > 1$ un elemento $E^{(\nu,\mu)}$ degenera in δ elementi $E^{(\bar\nu,\bar\mu)}$ (cfr. A. MAXIA [11], p. 259-265). Tenuto conto di quest'ultima circostanza, nella rappresentazione di tali elementi ci si può limitare al caso $\delta = 1$, ciò che supporremo nel seguito.

dentemente detti, si ha:

$$\overline{X}_{/h} = 0 \quad \text{per } h < \nu , \qquad \overline{X}_{/\nu} = \frac{\varrho^2}{\sigma}\left(\frac{d\,t}{d\,t}\right)_0^{\nu} X_{/\nu}$$

$$\overline{U}_{/k} = 0 \quad \text{»} \ k < \mu , \qquad \overline{U}_{/\mu} = \frac{\sigma^2}{\varrho}\left(\frac{d\,t}{d\,\tau}\right)_0^{\mu} U_{/\mu} .$$

Ne segue che posto

$$X = X^{\mu}_{/\nu} \quad , \quad U = U^{\nu}_{/\mu}$$

un elemento $E^{(\nu,\mu)}$ è determinato dal gruppo di coordinate

6.5 $$x , u , \quad X , U \quad , \quad (u , x) = 0$$

ove questo gruppo si ritenga *equivalente* al gruppo

6.5′ $$\varrho\, x , \sigma\, u \quad , \quad \lambda\, \varrho^{\nu+2\mu} X \quad , \quad \lambda\, \sigma^{2\nu+\mu}\, U \quad , \quad (u , x) = 0$$

con $\varrho , \sigma , \lambda$ fattori arbitrari non nulli.

Osservazioni:

1) per $\nu = 2$, $\mu = 1$ dalle 6.5 e 6.5′ si riottengono le coordinate 5.2 di un elemento $E^{(2,1)} \equiv E_6$.

2) Le coordinate 6.4 pongono in evidenza che nella totalità ∞^4 degli elementi $E^{(\nu,\mu)}$ del piano sono da considerare come eccezionali i seguenti elementi:

a) gli elementi d'ordine $\nu + 1$, rappresentati da $X = 0$;

b) gli elementi di classe $\mu + 1$, rappresentati da $U = 0$.

7. Richiami sulle varietà rappresantative degli E_1 del piano.

Ricordiamo ora alcune proprietà delle varietà rappresentative degli E_1 del piano (6) delle quali avremo bisogno per lo studio delle rigate 5.3.

Una tale varietà ha le equazioni parametriche

7.1 $$\xi = (x)^m\, (u)^n \qquad\qquad (u , x) = 0$$

con $m \,.\, n \geq 1$; il modello minimo si ha per $m = n = 1$.

---

(6) Si veda [4], [7] e [14] (pp. 227-234).

Sulla varietà 7.1 che indicheremo con $V_3^{(m,n)}$, si hanno le seguenti varietà:

1) La varietà P_2 rappresentante gli E_1 con la retta per un punto P.

Supposto, p. es., $P \equiv (0, 0, 1)$ le equazioni della P_2 si ottengono dalle 7.1 ponendo in esse: $u_1 = x^2$, $u_2 = -x^1$, $u_3 = 0$.

Ne segue che P_2 è la superficie rappresentante le curve piane d'ordine $m+n$ con punto n^{plo} in P: pertanto essa appartiene ad un S_k con

7.2 $$k = \frac{1}{2}[(m+n)(m+n+3) - n(n+1)]$$

ed ha ordine

7.3 $$d = m(m+2n);$$

2) La varietà R_2 rappresentante gli E_1 con centro su una retta r. La R_2 è duale della P_2: la dimensione dello spazio di appartenenza e l'ordine si ottengono rispettivamente dalla 7.2 e dalla 7.3 scambiando tra loro m ed n.

3) La varietà $V_1(P)$ rappresentante gli E_1 con dato centro P: tale varietà è una C^n normale.

4) La varierà $V_1(r)$ rappresentante gli E_1 con una stessa retta: tale varietà è una C^m normale.

5) La varietà $V_1(P; r) \equiv (P_2, R_2)$ rappresentante gli E_1 con centri su una retta r e rette per uno stesso punto P (non appartenente ad r): tale varietà è una C^{m+n} normale.

Le varietà P_2 ed R_2 costituiscono una base minima della V_3, mentre $V_1(P)$ e $V_1(r)$ ne costituiscono una base duale.

Per la dimensione $\delta(m, n)$ dello spazio di appartenenza e per l'ordine $N(m, n)$ della V_3 si ha:

7.4 $$\delta(m, n) = \frac{1}{2}(m+1)(n+1)(m+n-2) - 1,$$

7.5 $$N(m, n) = 3mn(m+n).$$

8. Sulle rigate determinate da due V_3.

Come già si è detto ci proponiamo ora di studiare la rigata W determinata da due modelli $V_3^{(m,n)}$ e $V_3^{(p,q)}$ degli E_1 nel piano proiettivo.

Tale W ha le equazioni:

$$\xi^{i_1 \dots i_m;\, j_1 \dots j_n} = \lambda\, x^{i_1} \dots x^{i_m} u_{j_1} \dots u_{j_n}$$
$$\eta^{i_1 \dots i_p;\, j_1 \dots j_q} = \mu\, x^{i_1} \dots x^{i_p} u_{j_1} \dots u_{j_q}$$

o con un simbolo già introdotto

$$\xi = \lambda\,(x)^m\,(u)^n \quad , \quad \xi' = \mu\,(x)^p\,u^q \qquad\qquad (u\,,x) = 0$$

Sulla W si hanno le seguenti varietà:

1) La rigata $V_3(P) \equiv P_3$ luogo delle rette congiungenti punti di una $P_2^{(m,n)}$ con i corrispondenti punti di $P_2^{(p,q)}$;

2) La rigata $V_3(r) \equiv R_3$, duale della precedente.

Una P_3 appartiene ad un $S_{k+k'+1}$ con k (e k') dati dalla 7.3.

Determiniamo l'ordine N_P della P_3.

Per questo consideriamo un iperpiano $S_{k+k'}$ per lo S_k di $P_2^{(m,n)}$ e che intersechi $P_2^{(p,q)}$ in q curve C^p ed in p curve C^{p+q}.

Tale sezione iperpiana si compone: 1) della $P_2^{(m,n)}$; 2) di q rigate determinate dalla C^p e dalla curva corrispondente C^m; 3) da p rigate determinate da una C^{p+q} e dalla curva corrispondente C^{m+n}.

Segue:

$$N_P = m\,(m + 2\,n) + p\,(p + 2\,q) + m\,(p + q) + n\,p$$

Analogamente per l'ordine N_r di R_3 si ha:

$$N_r = n\,(n + 2\,m) + q\,(q + 2\,p) + n\,(p + q) + m\,q\,.$$

La W, concepita come insieme delle ∞^3 generatrici t, è birazionalmente equivalente, senza eccezioni, alla varietà degli E_1 del piano: pertanto per le V_3, composte con le t, una base minima consta delle varietà P_3 ed R_3. Poichè le direttrici $V_3^{(m,n)}$ e $V_3^{(p,q)}$ sono su W linearmente equivalenti a meno di V_3 composte con le t, si ha:

8.1 $$V_3^{(m,n)} \equiv V_3^{(p,q)} + a\,P_3 + b\,R_3\,.$$

Indicata poi con M una sezione iperpiana della W, si ha su W:

8.2 $$M \equiv V_3^{(m,n)} + \alpha\,P_3 + \beta\,R_3 \equiv V_3^{(p,q)} + \alpha'\,P_3 + \beta'\,R_3\,.$$

È subito visto, inoltre, che si ha (cfr. n. prec.):

$$[M\,,\,V_1(P)^{(m,n)}] = \alpha' = n \qquad [M\,,\,V_1(P)^{(p,q)}] = \alpha = q$$

$$[M\,,\,V_1(r)^{(m,n)}] = \beta' = m \qquad [M\,,\,V_1(r)^{(p,q)}] = \beta = p\,.$$

Da queste e dalle 8.1 e 8.2 segue:

8.3 $$a = n - q\,, \qquad b = m - p\,.$$

Per l'ordine $N(m, n; p, q)$ della W si ha, poi:

$$\begin{aligned} N(m, n; p, q) &= 3\, m\, n\, (m+n) + p\, N_r + q\, N_P = \\ &= 3\, p\, q\, (p+q) + m\, N'_r + n\, N'_P = \\ &= 3\, m\, n\, (m+n) + 3\, p\, q\, (p+q) + 2\, m\, p\, (n+q) + \\ &+ 2\, n\, q\, (m+p) + m\, q\, (m+q) + n\, p\, (n+p) . - \end{aligned}$$

L'ordine $N(m, n; p, q)$ è anche dato dal grado del sistema lineare 8.2. Si verifica facilmente che per tale grado si ha:

$$\begin{aligned} N(m, n; p, q) &= [M\, M\, M\, M] = 3\, a\, b\, (a+b) + 4\, b\, (2\, a+b)\, q + \\ &+ 4\, a\, (2\, b+a)\, p + 6\, a\, p^2 + 6\, b\, q^2 + 12\, p\, q\, (a+b+p+q) . - \end{aligned}$$

9. Modello minimo degli elementi $E^{(\nu,\mu)}$ del piano.

Siamo ora in grado di determinare il modello minimo W della varietà degli elementi $E^{(\nu,\mu)}$ del piano.

Indichiamo: 1) con C la varietà degli elementi eccezionali rappresentati da $X = 0$; 2) con F la varietà degli elementi eccezionali rappresentati da $U = 0$; 3) con t la curva razionale rappresentante gli elementi con dato centro e data tangente.

Nel caso $\nu = \mu = 1$ il GHERARDELLI osservato: 1) che la W concepita come insieme delle $\infty^3\, t$, è birazionalmente equivalente, senza eccezioni, alla varietà degli E_1; 2) che le t sono unisecanti la C e la F; ne deduce, indicata con P e R la base su W per le V_3 composte con t, l'equivalenza lineare

9.1 $$C \equiv F + a\, P + b\, R$$

e determina i valori

9.2 $$a = -3 , \qquad b = 3$$

osservando che in tal caso la 9.1 traduce una nota formula di Plücker.

La determinazione dei valori 9.2 nella 9.1 è il punto di partenza per la ricerca del modello minimo W.

Nel caso $\nu\, \mu > 1$ è chiaro che sussiste ancora la relazione 9.1: ma non sembra possibile determinare in questo caso in modo diretto i relativi valori a e b.

Osservato però che in tal caso un modello degli elementi $E^{(\nu,\mu)}$ è dato dalla varietà

9.3 $$\xi = X(x)^m (u)^{2\nu+\mu+n}, \qquad \eta = U(x)^{\nu+2\mu+m} (u)^n, \ (u, x) = 0$$

che per $m\, n \geq 1$ rappresenta senza eccezioni i detti elementi, se ne deduce tenuto conto delle 8.3 l'equivalenza

$$C + (2\nu + \mu) P = F + (\nu + 2\mu) R.$$

Stabilita la precedente relazione basta ormai seguire il procedimento indicato dal GHERARDELLI: indicata cioè con M una V_3 (pura) di W, non composta con le t, e posto $[M, t] = \lambda > 0$, basta calcolare il grado ϱ dell'immagine proiettiva del sistema lineare $|M|$. Si verifica facilmente che il minimo di ϱ si ha se e solo se $\lambda = 1$ e

$$M \equiv C + P + (2\nu + \mu + 1) R \equiv F + (\nu + 2\mu + 1) P + R.$$

Ne segue che il modello minimo è proiettivamente equivalente alla varietà che si ottiene dalle 9.3 per $m = n = 1$.

Tenuto conto dei risultati del n. prec. si ha che tale modello appartiene ad uno spazio di dimensione:

$$\delta(\nu, \mu) = \delta(\mu, \nu) = (2\nu + \mu + 2)(2\nu + \mu + 4) + \\ + (\nu + 2\mu + 2)(\nu + 2\mu + 4) - 1$$

ed ha ordine

$$N(\nu, \mu) = N(\mu, \nu) = (\nu + 2\mu + 2)(7\nu + 8\mu + 5) + \\ + (2\nu + \mu + 2)(8\mu + 7\nu + 5) + \\ + (\nu + 2\mu + 1)(2\nu + \mu + 1)(3\nu + 3\mu + 2) + 2.$$

Per $\nu = 2$, $\mu = 1$ (7) si ha:

$$N(1, 2) = 690, \qquad \delta(1, 2) = 110,$$

ossia:

Il modello minimo degli E_6 del piano (od anche degli E_3 con E_2 di flesso) è una varietà W_4^{690} di S_{110}.

---

(7) Per $\nu = \mu = 1$, si ottiene, come è evidente, la W_4^{330} di S_{69} di GHERARDELLI.

Osservazioni :

1) È evidente che, come nel caso $\nu = \mu = 1$, la varietà $W^{(\nu,\mu)}$ è priva di punti multipli, e che il gruppo delle omografie del piano si riflette in un gruppo G_8 di trasformazioni della varietà in sè, generalmente transitivo e subordinato dalle omografie dello spazio ambiente.

2) Si verifica facilmente che dati un $E^{(\nu,\mu)}$ ed un E_1 in posizione generica vi è una sola curva d'ordine $\nu + \mu$ ed avente nel centro dell'E_1 un ramo d'ordine μ e di classe ν con tangente la tangente dell'E_1 : cioè un $E^{(\nu,\mu)}$ ed un E_1 determina *un* $E^{(\mu,\nu)}$ per l'E_1.

Ne segue che due generici elementi $E^{(\nu,\mu)}$ ed $E^{(\mu,\nu)}$ hanno un invariante proiettivo.

Per $\nu = \mu = 1$ ciò implica, come è stato messo in evidenza dal BOMPIANI ([4] p ; 161) che il gruppo G_8 è intransitivo sulle coppie di punti della $W^{(1,1)}$ (cioè sul prodotto topologico della W per se stessa): analogamente si ha, per $\nu \mu \neq 1$, che il gruppo G_8 è intransitivo sulla varietà prodotto delle varietà $W^{(\nu,\mu)}$ e $W^{(\mu,\nu)}$.

BIBLIOGRAFIA

[1] ANCHOCEA, G. : *Affine und projective Differentialgeometrie der singulären ebenen kurvenelemente,* Abh, Math. Sem. Univ. Hamburg 18 (1952), pp. 1-13.

[2] BOMPIANI, E : *Geometria degli elementi differenziali,* Ist. Mat. Univ. Roma (1942).

[3] BOMPIANI, E : *Elementi differenziali regolari e non regolari del piano e loro applicazioni alle curve algebriche piane,* Rend. di Mat. e sue Appl. (1946) pp. 1-48.

[4] BOMPIANI, E : *Geometria degli elementi differenziali regolari del piano rispetto al gruppo proiettivo,* Ist. Mat. Univ. Roma (1955).

[5] BOMPIANI, E : *Geometria degli elementi cuspidali nel piano,* Rend. Acc. Lincei VII, 7, (1949), pp. 185-191.

[6] ENGEL, F.: *Die höheren Differentialquotient,* Leipz. Ber 54 (1902), p. 17.

[7] GHERARDELLI, G. *Sul modello minimo della varietà degli elementi del 2° ordine del piano proiettivo,* Rend. Acc. d'Italia, VII (1941) pp. 821-828.

[8] KASNER, E. DE CICCO, J : *The general invariant theory of irregular analytic arcs or elements.*

[9] KASNER, E. DE CICCO, J : *Irregular projectiv invariants,* Proc. Acad. U. S. A. 31 (1945) pp, 123-125.

[10] KASNER, E. DE CICCO, J : *Projective differential invariants of a cusp,* Univ. Nac. Tucuman Rev. 5 (1946) pp. 289-299.

[11] MAXIA, A: *Studio proiettivo differenziale di un elemento cuspidale di specie superiore.* Rend. Mat. e sue Appl. (1947) pp. 253-254.

[12] SEMPLE, J. G.: *Some investigations in the geometry of curve and surface elements*, Proc. London Math. Soc. (3), 4, (1954), pp. 24-49.

[13] SEVERI, F.: *Serie, sistemi di equivalenze e corrispondenze algebriche sulle varietà algebriche*, a cura di F. Conforto ed E. Martinelli, Cremonese, Roma (1942).

[14] SEVERI, F.: *I fondamenti della geometria numerativa*, Ann. di Mat. IV, 29 (1940) pp. 154-242.

[15] STUDY, E.: *Die Elemente zweiter Ordnung in der ebenen projectiven Geometrie*, Leipz. Ber., 53, (1901), p. 338.