

ANNALI DELLA SCUOLA NORMALE SUPERIORE DI PISA *Classe di Scienze*

GIOVANNI DANTONI

**Sulle singolarità della jacobiana e su quelle della varietà
delle ipersuperficie con punto doppio di un generico
sistema lineare ∞^r di V_{r-1}^n di S_r**

Annali della Scuola Normale Superiore di Pisa, Classe di Scienze 3^e série, tome 3,
n° 1-4 (1950), p. 1-17

http://www.numdam.org/item?id=ASNSP_1950_3_3_1-4_1_0

© Scuola Normale Superiore, Pisa, 1950, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Annali della Scuola Normale Superiore di Pisa, Classe di Scienze » (<http://www.sns.it/it/edizioni/riviste/annaliscienze/>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

SULLE SINGOLARITÀ DELLA JACOBIANA E SU QUELLE DELLA VARIETÀ DELLE IPERSUPERFICIE CON PUNTO DOPPIO DI UN GENERICO SISTEMA LINEARE ∞^r DI V_{r-1}^n DI S_r .

di GIOVANNI DANTONI (Pisa)

Le singolarità della ipersuperficie jacobiana J di un sistema lineare Σ_r , ∞^r , di V_{r-1}^n dello spazio S_r , sono state studiate da vari autori sia per $r \leq 3$, sia per r qualunque⁽¹⁾.

Nella prima parte del presente lavoro studiamo le singolarità della J nel caso in cui Σ_r sia un sistema lineare ∞^r generico di V_{r-1}^n di S_r .

Nel n. 1 osserviamo che se Σ_r è un sistema lineare ∞^r di V_{r-1}^n , non composto con una involuzione di varietà di dimensione positiva, e se P_0 è un punto di S_r non base per Σ_r e tale che esista una ed una sola ipersuperficie $f_0 = 0$ di Σ_r la quale abbia P_0 come punto multiplo, allora gli iperpiani tangenti in P_0 alle ipersuperficie di Σ_r che passano per P_0 hanno a comune una retta t_0 (per P_0) e non uno spazio di dimensione maggiore. Inoltre, se P_0 è s -uplo per $f_0 = 0$, allora esso è $(s-1)$ uplo per la jacobiana J di Σ_r , e il cono tangente in P_0 alla J è la prima polare di t_0 rispetto al cono tangente in P_0 alla $f_0 = 0$, a meno che la retta t_0 non sia una generatrice s upla di quest'ultimo cono tangente, nel qual caso la detta prima polare risulta indeterminata e P_0 ha in J molteplicità maggiore di $s-1$.

Nei nn. 2, 3 estendiamo l'osservazione precedente al caso in cui ci siano più V_{r-1}^n di Σ_r aventi P_0 come punto multiplo.

Nei successivi nn. 4, 5, 6, dimostriamo che se il sistema lineare Σ_r è generico, allora la sua jacobiana J è irriducibile e, per $r < 4$ è priva di punti multipli, mentre per $r \geq 4$ essa ha una varietà di dimensione $r-4$

⁽¹⁾ Per $r \leq 3$, vedi: GERBALDI, *Sulle singolarità della jacobiana ecc.*, Rend. Circ. Mat. Palermo, T. VIII (1894) e T. X. (1896); A. LEVI, *Sulle singolarità della jacobiana di quattro superficie*. Giornale di Mat., T. X (1896). Per r qualunque: M. VILLA, *Sulle singolarità ecc.*, Memorie Ist. Lombardo, Vol. XXII (1931).

ed ordine $(n-1)^4 \frac{r(r+1)^2(r+2)}{12}$ di punti doppi. Proviamo che i punti multipli della J sono tutti e soli i punti di S_r che sono multipli per almeno ∞^1 ipersuperficie di Σ_r (n. 5) e facciamo vedere che essi sono anche tutti e soli i punti di S_r le cui coordinate abbassano di almeno due unità la caratteristica della matrice jacobiana $\left\| \frac{\partial f_i}{\partial x_j} \right\|$ di Σ_r (n. 6). Osserviamo infine che quest'ultima proprietà non è vera per sistemi lineari ∞^r qualunque. Nella seconda parte del lavoro studiamo la varietà W_{r-1}^δ delle ipersuperficie di Σ_r (sempre generico) che hanno un punto doppio, e cerchiamo i punti multipli di questa varietà W_{r-1}^δ . Precisamente, rappresentiamo le ipersuperficie di Σ_r con i punti di uno spazio lineare $\bar{S}_r$ ⁽²⁾ e consideriamo in $\bar{S}_r$ quei punti che corrispondono a ipersuperficie di Σ_r aventi un punto doppio. Otteniamo così in $\bar{S}_r$ una ipersuperficie W_{r-1}^δ di ordine $\delta = (r+1)(n-1)^r$, la quale è birazionalmente identica alla jacobiana J di Σ_r [la quale è di ordine $d = (r+1)(n-1)$]. Vedremo che ⁽³⁾ i punti doppi della W_{r-1}^δ si distribuiscono in due varietà irriducibili e di dimensione $r-2$: $W_{r-2}^{\delta'}$ e $W_{r-2}^{\delta''}$; la prima, $W_{r-2}^{\delta'}$, è formata dai punti di W_{r-1}^δ che rappresentano ipersuperficie di Σ_r aventi due punti doppi, e la seconda, $W_{r-2}^{\delta''}$, è formata dai punti di W_{r-1}^δ che rappresentano ipersuperficie di Σ_r con un punto doppio a cono tangente dotato di una generatrice doppia. Inoltre il cono tangente in un generico punto Q' di $W_{r-2}^{\delta'}$ è spezzato nei due iperpiani che sono immagini dei due sistemi lineari ∞^{r-1} di ipersuperficie di Σ_r che passano per l'uno o per l'altro dei due punti doppi della V_{r-1}^n di Σ_r rappresentata da Q' . Il cono tangente in un generico punto Q'' di $W_{r-2}^{\delta''}$ è l'iperpiano, contato due volte, immagine del sistema lineare ∞^{r-1} delle ipersuperficie di Σ_r che passano per il punto doppio della V_{r-1}^n rappresentata da Q'' .

Nel n. 14 studiamo la corrispondenza birazionale fra la jacobiana J di Σ_r e la varietà W_{r-1}^δ .

Infine nel n. 15 osserviamo che la W_{r-1}^δ , e quindi anche la jacobiana J , ha irregolarità superficiale nulla (per $r \geq 3$).

Le suddette proprietà della W_{r-1}^δ saranno dedotte da proprietà analoghe della varietà W_{N-1}^δ i cui punti rappresentano le V_{r-1}^n di S_r con un punto doppio, nello spazio S_N [$N = \binom{r+n}{r} - 1$] immagine ⁽⁴⁾ di tutte le ipersu-

⁽²⁾ Cioè alle ipersuperficie del sistema lineare $\lambda_0 f_0 + \lambda_1 f_1 + \dots + \lambda_r f_r = 0$ facciamo corrispondere il punto di coordinate $(\lambda_0, \lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_r)$.

⁽³⁾ Per $r \geq 2$ ed $n \geq 3$.

⁽⁴⁾ Nel senso che alla V_{r-1}^n di equazione $f=0$, facciamo corrispondere in S_N il punto che ha per coordinate i coefficienti di f .

perficie di ordine n di S_i . Per altre proprietà delle varietà J , W_{r-1}^δ e W_N^δ , rimandiamo ai nn. 10, 14.

1. — Indichiamo con J l'ipersuperficie jacobiana di un sistema lineare Σ_r , di dimensione r , di ipersuperficie di ordine n di S_r , non composto con una involuzione di varietà di dimensione positiva (5). La J è il luogo dei punti di S_r che sono multipli per qualche ipersuperficie di Σ_r .

Sia P_0 un punto non base per Σ_r , e tale che esista una ed una sola ipersuperficie ($f_0 = 0$) di Σ_r avente P_0 come punto multiplo. In queste ipotesi le ipersuperficie di Σ_r che passano per P_0 formano un sistema lineare ∞^{r-1} , Σ_{r-1} , e gli iperpiani tangenti ad esse in P_0 formano un sistema lineare ∞^{r-2} ⁽⁶⁾ e quindi hanno a comune una retta t_0 e non uno spazio di dimensione superiore. Possiamo individuare Σ_r mediante la $f_0 = 0$, $r-1$ ipersuperficie $f_1 = 0, f_2 = 0, \dots, f_{r-1} = 0$ di Σ_{r-1} aventi gli iperpiani tangenti in P_0 linearmente indipendenti, e infine una ipersuperficie di Σ_r , $f_r = 0$, non passante per P_0 . Se scegliamo P_0 come vertice $A_0 \equiv (1, 0, \dots, 0)$ della piramide fondamentale, e gli iperpiani tangenti in P_0 alle $f_1 = 0, f_2 = 0, \dots, f_{r-1} = 0$ come iperpiani $x_1 = 0, x_2 = 0, \dots, x_{r-1} = 0$, le equazioni delle nostre $f_i = 0$ assumono la forma

[illegible]

dove $s \geq 2$ è la molteplicità di P_0 per la $f_0 = 0$, e le q_i sono forme di ordine i nelle $x_1, x_2, \dots, x_s$. Si può anche supporre che sia $q_1^{(1)} = 0$, perchè se così non fosse basterebbe operare il cambiamento di riferimento:

$$x_0 = X_0, \quad \frac{1}{n} \Phi_1^{(i)}, x_i = X_i \text{ per } i = 1, 2, \dots, r, \text{ e } \Phi_1^{(i)} = \varphi_1^{(i)}(X_1, X_2, \dots, X_r).$$

(5) Come è noto, se Σ_F è composto con una involuzione di varietà di dimensione positiva la sua jacobiana è indeterminata, e viceversa. Vedi BERTINI, *Introduzione alla geometria proiettiva degli iperspazi*, 2ª edizione, Messina, 1923, pag. 278.

(⁶) BERTINI, *loc. cit.* , pag. 262

Dopo ciò, scrivendo l'equazione $\frac{\partial (f_0, f_1, \dots, f_r)}{\partial (x_0, x_1, \dots, x_r)} = 0$ della jacobiana si vede che il termine di grado più elevato in x_0 è

$$n \frac{\partial \varphi_s^{(0)}}{\partial x_r} x_0^{r(n-1)+n-s}$$

purchè sia $\frac{\partial \varphi_s^{(0)}}{\partial x_r} \neq 0$. Si osservi ora che $\frac{\partial \varphi_s^{(0)}}{\partial x_r}$ è identicamente nulla allora e solo quando la retta $A_0 A_r$ è una generatrice s-upla del cono $\varphi_s^{(0)} = 0$, cioè allora e solo quando risulta indeterminata la prima polare $\left(\frac{\partial \varphi_s^{(0)}}{\partial x_r} = 0 \right)$ della retta $t_0 \equiv A_0 A_r$ rispetto al cono $\varphi_s^{(0)} = 0$ nella stella di centro $A_0 \equiv P_0$. Tenendo presente che l'ordine della jacobiana J di Σ_r è $d = (r+1)(n-1)$, e che $r(n-1) + n - s = d - (s-1)$ si ha che P_0 è $(s-1)$ -uplo per J e il cono tangente in P_0 alla J non è altro che la prima polare $\left(\frac{\partial \varphi_s^{(0)}}{\partial x_r} = 0 \right)$ di t_0 rispetto al cono tangente in P_0 alla $f_0 = 0$, a meno che la suddetta prima polare non risulti indeterminata, nel qual caso P_0 ha in J molteplicità maggiore di $s-1$.

Riassumendo:

Sia dato un sistema lineare Σ_r, ∞^1 , di ipersuperficie di S_r , non composto con una involuzione di varietà di dimensione positiva; sia P_0 un punto non base per Σ_r e tale che esista una ed una sola ipersuperficie, $f_0 = 0$, di Σ_r la quale abbia P_0 come punto multiplo. In queste ipotesi, gli iperpiani tangenti in P_0 alle ipersuperficie di Σ_r che passano per P_0 , hanno a comune una retta t_0 (per P_0) e non uno spazio di dimensione maggiore. Inoltre se P_0 è s -uplo per la $f_0 = 0$, allora esso è $(s-1)$ -uplo per l'ipersuperficie jacobiana J di Σ_r , e il cono tangente in P_0 alla J è la prima polare di t_0 rispetto al cono tangente in P_0 alla $f_0 = 0$, a meno che la retta t_0 non sia una generatrice s-upla di quest'ultimo cono tangente, nel qual caso la detta prima polare risulta indeterminata e P_0 ha in J molteplicità maggiore di $s-1$.

2. — Consideriamo ancora un sistema lineare Σ_r di dimensione r , di ipersuperficie di S_r , non composto con una involuzione di varietà di dimensione positiva. Sia P_0 un punto non base per Σ_r ; indichiamo con:

a) Σ_{r_1} il sistema lineare delle ipersuperficie di Σ_r che passano per P_0 , e sia $s_1 (\geq 1)$ la molteplicità di P_0 in quanto punto base di Σ_{r_1} .

b) Σ_{r_2} il sistema lineare delle ipersuperficie di Σ_r che hanno in P_0 molteplicità maggiore di s_1 ; e sia s_2 la molteplicità di P_0 in quanto punto base di Σ_{r_2} .

della varietà delle ipersuperficie con punto doppio di un generico sistema ecc. 5

c) Σ_{i_3} il sistema lineare delle ipersuperficie di Σ_{i_2} che hanno in P_0 molteplicità maggiore di s_2 ; e sia s_3 la molteplicità di P_0 in quanto punto base di Σ_{i_3} .

d) Σ_{r_h} il sistema lineare delle ipersuperficie di $\Sigma_{i_{h-1}}$ che hanno in P_0 molteplicità maggiore di s_{h-1} ; e sia s_h la molteplicità di P_0 in quanto punto base di Σ_{r_h} . I sistemi lineari $\Sigma_r, \Sigma_{r_1}, \Sigma_{r_2}, \dots, \Sigma_{r_h}$, sono tali che ognuno di essi è contenuto nel precedente: per le loro dimensioni si ha $r_1 = r - 1 > r_2 > r_3 > \dots > r_h \geq 0$. Inoltre Σ_{r_h} è formato dalle ipersuperficie di Σ_{r_1} che hanno in P_0 molteplicità massima.

Scegliamo ora P_0 come vertice $A_0 \equiv (1, 0, 0, \dots, 0)$ della piramide fondamentale e individuiamo Σ_{i_h} mediante $r_h + 1$ sue ipersuperficie linearmente indipendenti $f_0 = 0, f_1 = 0, \dots, f_{r_h} = 0$; $\Sigma_{i_{h-1}}$ mediante queste $r_h + 1$ ed altre $r_{h-1} - r_h$ sue ipersuperficie $f_{r_h+1} = 0, f_{r_h+2} = 0, \dots, f_{r_{h-1}} = 0$, in modo che le $r_{h-1} + 1$ ipersuperficie così ottenute siano linearmente indipendenti; ...; Σ_{i_1} mediante le precedenti $r_2 + 1$ ed altre $r_1 - r_2$ sue ipersuperficie $f_{r_2+1} = 0, f_{r_2+2} = 0, \dots, f_{r_1} = 0$, in modo che le $r_1 + 1 = r$ ipersuperficie così ottenute siano linearmente indipendenti; e infine Σ_r mediante le precedenti r ed una sua ipersuperficie $f_r = 0$ non passante per P_0 .

Dopo ciò, scrivendo l'equazione della jacobiana $\frac{\partial (f_0, f_1, \dots, f_r)}{\partial (x_0, x_1, \dots, x_r)} = 0$ si vede che il termine di grado più elevato in x_0 ha per esponente $(r + 1)(n - 1) - \sum_{i=1}^h (r_i - r_{i+1})(s_i - 1)$ (con $r_{h+1} = -1$) ed ha per coefficiente

$$(1) \quad \frac{\partial (\varphi^{(0)}, \varphi^{(1)}, \dots, \varphi^{(r-1)})}{\partial (x_1, x_2, \dots, x_r)}$$

dove $\varphi^{(0)} = 0, \varphi^{(1)} = 0, \dots, \varphi^{(r-1)} = 0$, sono le equazioni dei coni tangenti in $P_0 \equiv A_0$ alle ipersuperficie $f_0 = 0, f_1 = 0, \dots, f_{r-1} = 0$.

Da quanto sopra segue che, nelle nostre ipotesi, il punto P_0 ha molteplicità ⁽⁷⁾

$$(2) \quad \sigma = \sum_{i=1}^h (r_i - r_{i+1})(s_i - 1) \quad (r_{h+1} = -1)$$

nella jacobiana J di Σ_r , a meno che non sia identicamente nullo il determinante jacobiano (1) nel qual caso P_0 ha molteplicità maggiore di σ .

(7) Il numero σ coincide col numero s di VILLA, calcolato rispetto alle $f_0, f_1, \dots, f_r$ di cui sopra (VILLA, loc. cit., pag. 180)

3. - Si osservi in particolare che se P_0 (non base) è multiplo per almeno due ipersuperficie di Σ_r , allora esso è certamente multiplo per la jacobiana. Ciò vale anche se P_0 è un punto base, e si verifica subito assumendo P_0 come vertice A_0 della piramide fondamentale e scrivendo l'equazione della jacobiana.

Per il seguito importa considerare il caso in cui è $r \geq 4$ e P_0 è doppio per un fascio di ipersuperficie di Σ_r , e non ha molteplicità maggiore di due per nessuna ipersuperficie di Σ_r ; cioè, con le notazioni precedenti, il caso $r \geq 4$, $h = 2$, $r_2 = 1$, $s_2 = 2$. In queste ipotesi P_0 risulta, in generale, doppio per la jacobiana J ($\sigma = 2$); inoltre gli iperpiani tangenti in P_0 alle ipersuperficie $f_2 = 0$, $f_3 = 0$, ..., $f_{r-1} = 0$, sono linearmente indipendenti e quindi si segano in un piano π_0 . Assumendo i detti iperpiani come facce $x_1 = 0$, $x_2 = 0$, ..., $x_{r-2} = 0$, della piramide fondamentale, si ha $\pi_0 \equiv A_0 A_{r-1} A_r$ e l'equazione del cono tangente in $P_0 \equiv A_0$ alla J , diventa per la (1):

$$(3) \quad \begin{vmatrix} \frac{\partial q^{(0)}}{\partial x_{r-1}} & \frac{\partial q^{(0)}}{\partial x_r} \\ \frac{\partial q^{(1)}}{\partial x_{r-1}} & \frac{\partial q^{(1)}}{\partial x_r} \end{vmatrix} = 0.$$

Questa equazione rappresenta la quadrica luogo degli ∞^1 spazi S_{r-2} polari del piano $\pi_0 \equiv A_0 A_{r-1} A_r$ rispetto ai coni del fascio $q^{(0)} + \lambda q^{(1)} = 0$, quadrica che è un cono avente lo spazio S_{r-4}

$$(4) \quad \frac{\partial q^{(0)}}{\partial x_{r-1}} = 0, \quad \frac{\partial q^{(0)}}{\partial x_r} = 0, \quad \frac{\partial q^{(1)}}{\partial x_{r-1}} = 0, \quad \frac{\partial q^{(1)}}{\partial x_r} = 0$$

tutto di punti doppi (8). Concludendo si ha:

Se è $r \geq 4$, e se P_0 (non base) è doppio per un fascio $(9) f_0 + \lambda f_1 = 0$ di ipersuperficie di Σ_r e non ha molteplicità maggiore di due per nessuna ipersuperficie di Σ_r , allora gli iperpiani tangenti in P_0 alle V_{r-1}^n di Σ_r che passano per P_0 , hanno a comune un piano π_0 e non uno spazio di dimensione maggiore. Inoltre P_0 è, in generale, doppio per la jacobiana J di Σ_r ed il cono tangente Γ ad J in P_0 è il luogo degli ∞^1 spazi S_{r-2} polari di π_0 rispetto ai coni tangenti in P_0 alle ipersuperficie del fascio $f_0 + \lambda f_1 = 0$. Infine il cono Γ ha un S_{r-4} di punti doppi.

(8) Perchè le derivate parziali del determinante (3) sono combinazioni lineari dei primi membri delle (4).

(9) E non per un sistema lineare di dimensione > 1 .

Si noti che segnando il cono Γ con un generico S_3 di S_r , si ottiene una quadrica V_2^2 ; questa quadrica ha due schiere di rette che, proiettate dallo spazio S_{r-4} , danno luogo a due schiere ∞^1 di spazi S_{r-2} generatori di Γ , una delle quali è quella considerata sopra. Nel seguito chiameremo *spazi generatori della prima schiera*, gli spazi S_{r-2} di cui al precedente enunciato, cioè gli spazi polari del piano π_0 rispetto ai coni tangenti in P_0 alle ipersuperficie di Σ_r che hanno P_0 come punto doppio.

4. — Supponiamo ora che Σ_r sia un sistema lineare ∞^r generico di ipersuperficie V_{r-1}^n di ordine $n (> 1)$ di S_r .

Dall'ipotesi della genericità segue subito che Σ_r non ha punti base e non è composto con una involuzione di varietà di dimensione positiva.

Inoltre in Σ_r non ci sono ipersuperficie con un punto triplo (o di molteplicità > 3); infatti, nello spazio S_N $\left[N = \binom{n+r}{r} - 1 \right]$ rappresentativo di tutte le V_{r-1}^n di S_r , le V_{r-1}^n con un punto triplo (non assegnato) sono rappresentate dai punti di una varietà di dimensione $N - \binom{r+2}{2} + r$, e questa varietà non ha punti a comune con un S_r generico di S_N , perchè $N - \binom{r+2}{2} + r + r < N$.

Proviamo infine che in Σ_r non ci sono ipersuperficie con un punto doppio P_0 a cono tangente dotato di generatrice doppia t_0 , la quale sia tangente in P_0 a tutte le ipersuperficie di Σ_r che passano per P_0 .

Poichè i sistemi lineari ∞^r di ipersuperficie V_{r-1}^n di S_r sono $\infty^{r+1-N-r}$, basterà provare che il numero dei parametri da cui dipendono i sistemi lineari ∞^r che godono della proprietà suddetta è minore di $(r+1)(N-r)$.

Supponiamo prima che sia $n > 2$ e osserviamo che, in questa ipotesi, le V_{r-1}^n di S_r le quali hanno un punto doppio (non assegnato) a cono tangente dotato di generatrice doppia, sono ∞^{N-2} . Per fissare un generico sistema lineare Σ_r , ∞^r , di V_{r-1}^n di S_r , contenente una qualche ipersuperficie con un punto doppio P_0 (non assegnato) a cono tangente dotato di generatrice doppia tangente in P_0 a tutte le ipersuperficie di Σ_r che passano per P_0 , basterà procedere nel seguente modo

Fissiamo una generica $\bar{V}_{r-1}^n$ entro la totalità ∞^{N-2} delle V_{r-1}^n che hanno un punto doppio a cono tangente dotato di generatrice doppia; la $\bar{V}_{r-1}^n$ ha un solo punto doppio P_0 e il cono tangente ad essa in P_0 ha una sola generatrice doppia t_0 . Dopo ciò, dentro il sistema lineare Σ_{N-2} , di dimensione $N-2$, delle V_{r-1}^n tangenti in P_0 alla retta t_0 , fissiamo un generico sistema lineare $\bar{\Sigma}_{r-1}$, di dimensione $r-1$, contenente la $\bar{V}_{r-1}^n$; questi sistemi lineari ∞^{r-1} dipendono da $(r-1)(N-2) - (r-1)^2$ parametri. Infine, dentro

il sistema lineare ∞^N di tutte le V_{r-1}^n di S_r , fissiamo un generico sistema lineare $\bar{\Sigma}_r$, di dimensione r , contenente $\bar{\Sigma}_{r-1}$; questi sistemi lineari ∞^r dipendono da $N - r$ parametri. In totale i parametri fissati sono

$$N - 2 + (r - 1)(N - 2) - (r - 1)^2 + N - r = (r + 1)(N - r) - 1$$

e quindi i sistemi lineari Σ_r , di dimensione r , i quali godono della proprietà di cui sopra, dipendono da meno di $(r + 1)(N - r)$ parametri. La nostra proposizione è quindi provata per $n > 2$.

Per $n = 2$ le $\bar{V}_{r-1}^n$ sono coni quadrici con una retta di punti doppi, e il ragionamento fatto sopra si può ripetere ancora osservando che i detti coni sono ∞^{N-3} e i sistemi $\bar{\Sigma}_{r-1}$, relativi ad uno generico di questi coni, dipendono da $(r - 1)(N - 2) - (r - 1)^2 + 1$ parametri.

5. — Da quanto sopra, e tenendo presente il risultato del n. 1 e la prima osservazione del n. 3, si ha che:

I punti multipli della jacobiana di un generico sistema lineare Σ_r , di dimensione r , di ipersuperficie V_{r-1}^n di S_1 , sono tutti e soli quei punti di S_r che sono doppi per almeno un fascio di ipersuperficie di Σ_r .

Proviamo ora che di questi punti non ne esistono per $r < 4$, mentre per $r \geq 4$ ne esistono ∞^{r-4} . Infatti, consideriamo un generico sistema lineare ∞^{r+2} di V_{r-1}^n di S_r , e indichiamolo con Σ_{r+2} . Rappresentiamo gli elementi di Σ_{r+2} con i punti di uno spazio lineare S_{r+2} e consideriamo, dentro questo S_{r+2} , l'ipersuperficie W_{r+1} i cui punti rappresentano le V_{r-1}^n di Σ_{r+2} le quali hanno un punto doppio. Poichè per un generico punto di S_r passano ∞^1 (un fascio) di V_{r-1}^n di Σ_{r+2} aventi quel punto come punto doppio, e poichè una generica V_{r-1}^n di Σ_{r+2} dotata di punto doppio, non ha più di un punto doppio (per la genericità di Σ_{r+2}), si ha che la W_{r+1} contiene una involuzione di rette, ciascuna delle quali rappresenta un fascio di V_{r-1}^n con un punto base doppio. Segando la W_{r+1} con un S_{r+1} generico di S_{r+2} , si ottiene una W_r la quale non può contenere più di ∞^{r-2} delle nostre rette, altrimenti la W_r sarebbe composta con l'involuzione di rette con cui è composta la W_{r+1} ; e ciò è assurdo perchè S_{r+1} è generico in S_{r+2} . Inoltre la W_r non può contenere meno di ∞^{r-2} delle suddette rette perchè alle rette di S_{r+2} bisogna imporre due condizioni (e non più) affinchè stiano in un S_{r+1} . Indichiamo ora con W_{r-1} la varietà luogo delle nostre ∞^{r-2} rette; la W_{r-1} sta in S_{r+1} e le dette ∞^{r-2} rette formano una involuzione in essa. Segando la W_{r-1} con un generico S_r^* di S_{r+1} e ragionando come sopra, si vede che delle nostre rette ce ne sono ∞^{r-4} e non più che stanno in S_r^* . Con ciò risulta provato quanto volevasi e si ha quindi che:

La jacobiana di un generico sistema lineare ∞^r di ipersuperficie di S_r , è priva di punti multipli per $r < 4$, mentre per $r \geq 4$ essa ha ∞^{r-4} punti doppi.

Da ciò segue in particolare la irriducibilità della suddetta jacobiana, per $r > 1$ qualunque.

6. — Sempre nell'ipotesi che il sistema lineare Σ_r sia generico, indichiamo con

$$\lambda_0 f_0 + \lambda_1 f_1 + \dots + \lambda_r f_r = 0$$

la sua equazione. È facile provare che i punti multipli della jacobiana J di Σ_r sono tutti e soli quelli in cui la matrice $\left\| \frac{\partial f_i}{\partial x_j} \right\|$ ha la caratteristica minore di r .

Infatti, sia P_0 un punto in cui la caratteristica della detta matrice sia minore di r . Poichè le derivate parziali prime del determinante $\left\| \frac{\partial f_i}{\partial x_j} \right\|$ si esprimono come combinazioni lineari (a coefficienti polinomiali) dei minori di ordine r , si ha che esse sono tutte nulle in P_0 e quindi P_0 è un punto multiplo di J .

Viceversa, se P_0 è un punto multiplo di J allora esso è multiplo per almeno un fascio di ipersuperficie di Σ_r (n. 4), e quindi il sistema lineare

$$\lambda_0 \frac{\partial f_0}{\partial x_j} + \lambda_1 \frac{\partial f_1}{\partial x_j} + \dots + \lambda_r \frac{\partial f_r}{\partial x_j} = 0 \quad (j = 0, 1, \dots, r)$$

ammette, per $P \equiv P_0$, almeno due soluzioni indipendenti nelle λ ; da ciò segue che la matrice $\left\| \frac{\partial f_i}{\partial x_j} \right\|$ ha caratteristica minore di r in P_0 .

Poichè per quanto abbiamo visto al n. 5 la dimensione della varietà M dei punti multipli di J è $r - 4$, dalla proprietà dimostrata ora e tenuto presente un risultato di C. SEGREG (10), segue che l'ordine di M è

$$(n-1)^4 \frac{r(r+1)^2(r+2)}{12}.$$

OSSERVAZIONE. — Se il sistema lineare Σ_r non è generico, allora un punto P_0 in cui la caratteristica della matrice $\left\| \frac{\partial f_i}{\partial x_j} \right\|$ (supposta non identicamente nulla) è $r + 1 - k$, ha molteplicità $\sigma \geq k$ nella ipersuperficie jacobiana

(10) C. SEGREG, *Gli ordini delle varietà che annullano i determinanti dei diversi gradi estratti da una data matrice*, Rend. Acc. Lincei, Serie 5a, Vol. IX (1900).

J ; ciò perchè le derivate parziali di ordine $k-1$ del determinante $\left| \frac{\partial f_i}{\partial x_j} \right|$ si esprimono come combinazioni lineari (a coefficienti polinomiali) dei minori di ordine $r-k+2$.

Può effettivamente accadere che sia $\sigma > k$. Per esempio se P_0 non è un punto base ed è multiplo per una sola ipersuperficie, $f_0 = 0$, di Σ_r , allora si ha $k=1$ qualunque sia la molteplicità $s \geq 2$ di P_0 in f_0 ; mentre la molteplicità di P_0 in J è $\sigma \geq s-1$ (n. 1).

*
* *

7. — Nei nn. 3, 4, 5 abbiamo considerato l'ipersuperficie jacobiana J di un generico sistema lineare Σ_r, ∞^r , di ipersuperficie V_{r-1}^n di S_r ; cioè abbiamo considerato la totalità dei punti di S_r i quali sono doppi per qualche ipersuperficie di Σ_r . Abbiamo visto che per $r \leq 4$ la J non ha punti multipli, mentre per $r \geq 4$ la J ha ∞^{r-4} punti doppi, i quali sono tutti e soli quei punti di S_r che sono multipli per almeno ∞^1 ipersuperficie di Σ_r .

Consideriamo ora la varietà W_{r-1} delle ipersuperficie di Σ_r che hanno un punto doppio (non assegnato) e cerchiamo i punti multipli di questa varietà. Precisamente, rappresentiamo le ipersuperficie di Σ_r con i punti di uno spazio lineare $\bar{S}_r$ e consideriamo in $\bar{S}_r$ quei punti che corrispondono a ipersuperficie di Σ_r aventi un punto doppio; questi punti riempiono una ipersuperficie W_{r-1} , la quale è birazionalmente identica alla jacobiana J di Σ_r . Vedremo che i punti doppi della W_{r-1} , per $r \geq 2$, ed $n \geq 3$, si distribuiscono in due varietà irriducibili, ∞^{r-2} , di cui una è formata da quei punti che rappresentano le ipersuperficie di Σ_r che hanno due punti doppi, e l'altra è formata dai punti che rappresentano le ipersuperficie di Σ_r che hanno un punto doppio a cono tangente dotato di una generatrice doppia.

Per provare queste ed altre proprietà della W_{r-1} conviene premettere alcune osservazioni sulla varietà delle V_{r-1}^n di S_r che hanno un punto doppio.

8. — Rappresentiamo le ipersuperficie V_{r-1}^n di S_r con i punti di uno spazio $S_N \left[N = \binom{n+r}{r} - 1 \right]$, assumendo come coordinate omogenee di un punto di S_N i coefficienti dell'equazione della V_{r-1}^n . Le V_{r-1}^n con un punto doppio (non assegnato) sono rappresentate dai punti di una varietà W_{N-1}^δ di ordine δ e dimensione $N-1$. La W_{N-1}^δ è luogo di ∞^r spazi S_{N-r-1} , ciascuno dei quali rappresenta le V_{r-1}^n di S_r con un assegnato punto doppio. Questi S_{N-r-1} sono in corrispondenza biunivoca senza eccezioni con i punti di S_r perchè le V_{r-1}^n con un dato punto doppio P non hanno, in generale, altri punti doppi. Per un punto Q generico di W_{N-1}^δ passa uno ed uno solo

di questi S_{N-r-1} , perchè Q è immagine di una V_{r-1}'' con un punto doppio. Ne segue che i detti spazi S_{N-r-1} formano una involuzione razionale in W_{N-1}^δ e quindi questa varietà è razionale⁽¹¹⁾. Infine notiamo che l'ordine della W_{N-1}^δ è $\delta = (r+1)(n-1)^r$; infatti l'ordine δ della W_{N-1}^δ è il numero delle ipersuperficie di un fascio generico di V_{r-1}'' che hanno un punto doppio, ed è anche, per la genericità del fascio, l'ordine della jacobiana di detto fascio, ordine che, come è noto⁽¹²⁾ è uguale a $(r+1)(n-1)^r$. Concludendo: la W_{N-1}^δ è irriducibile, razionale, e di ordine $\delta = (r+1)(n-1)^r$; inoltre essa è composta con una involuzione razionale $\{S_{N-r-1}\}$ di spazi S_{N-r-1} , ciascuno dei quali rappresenta le V_{r-1}'' con un dato punto doppio⁽¹³⁾.

9. — Le V_{r-1}'' con due punti doppi (non assegnati) sono rappresentate in S_N dai punti di una varietà $W_{N-2}^{\delta'}$, di dimensione $N-2$, purchè sia $r \geq 2$ ed $n \geq 3$. Infatti, fissiamo in S_r due punti A, B e consideriamo il sistema lineare Σ' delle V_{r-1}'' che passano doppiamente per A e B . Questo sistema lineare Σ' ha la dimensione $N-2r-2$ ⁽¹⁴⁾. Inoltre una generica V_{r-1}'' di Σ' non ha punti multipli oltre A e B , perchè Σ' non ha punti base oltre A e B in quanto fra queste V_{r-1}'' ci sono quelle spezzate in una quadrica generica per A e B , in un iperpiano generico per A e B , e (se $n > 3$) in una V_{r-1}'' generica di S_r . Infine A e B sono effettivamente doppi (e non di molteplicità maggiore) per la generica V_{r-1}'' di Σ' , e in ciascuno di essi il cono tangente non ha generatrici multiple; ciò si verifica subito assumendo A e B come vertici della piramide fondamentale. Ne segue che alle

⁽¹¹⁾ Fissato in S_N uno spazio S_r^* generico, si vede subito che la W_{N-1}^δ è in corrispondenza biunivoca con le coppie formate da un S_{r+1} per S_r^* e un S_{N-r-1} dell'involuzione $\{S_{N-r-1}\}$ con cui è composta la W_{N-1}^δ .

⁽¹²⁾ BERTINI *loc. cit.*, pag. 271.

Dal fatto che la W_{N-1}^δ è irriducibile e di ordine $\delta = (r+1)(n-1)^r$ segue che il risultante delle $r+1$ forme $\frac{\partial f}{\partial x_0}, \frac{\partial f}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial f}{\partial x_r}$ (dove f è una forma di grado n in $x_0, x_1, \dots, x_r$, a coefficienti indeterminati) è irriducibile. Infatti il risultante di $r+1$ forme $\varphi_0, \varphi_1, \dots, \varphi_r$, di grado $n-1$ in $x_0, x_1, \dots, x_r$, è un polinomio R omogeneo e di grado $(r+1)(n-1)^r$ nei coefficienti delle φ_i ; per $\varphi_i \equiv \frac{\partial f}{\partial x_i}$ l'equazione $R=0$ non è altro che l'equazione della W_{N-1}^δ e poichè questa è irriducibile e di ordine $(r+1)(n-1)^r$, segue che, per $\varphi_i \equiv \frac{\partial f}{\partial x_i}$, R è irriducibile.

⁽¹³⁾ Per $r=2$ l'irriducibilità e la razionalità della W_{N-1}^δ sono state provate da SEVERI (*Vorlesungen über algebraische Geometrie*, Berlino, 1921, pag. 313). Le considerazioni fatte in questo numero sono l'immediata estensione di quelle di SEVERI.

⁽¹⁴⁾ BERTINI, *loc. cit.*, pag. 288.

∞^{2r} coppie di punti di S_r corrispondono, biunivocamente, in $S_N \infty^{2r}$ spazi S_{N-2r-2} i quali riempiono una varietà $W_{N-2}^{\delta'}$ di dimensione $N-2$, immersa in W_{N-1}^{δ} . Questi S_{N-2r-2} formano una involuzione razionale $\{S_{N-2r-2}\}$ in $W_{N-2}^{\delta'}$; questa varietà è quindi irriducibile e razionale. Un punto generico di $W_{N-2}^{\delta'}$ rappresenta una V_{r-1}^n con due punti doppi distinti in cui i coni tangenti non hanno generatrici multiple.

Notiamo infine che un S_{N-2r-2} generico dell'involuzione $\{S_{N-2r-2}\}$ è l'intersezione di due ben determinati S_{N-r-1} dell'involuzione $\{S_{N-r-1}\}$ con cui è composta la W_{N-1}^{δ} ; viceversa due spazi di quest'ultima involuzione si segano in uno spazio dell'involuzione $\{S_{N-2r-2}\}$.

10. — Le V_{r-1}^n che hanno un punto doppio (non assegnato) in cui il cono tangente ha una generatrice doppia, sono rappresentate in S_N dai punti di una varietà $W_{N-2}^{\delta''}$, di dimensione $N-2$ (sempre per $r \geq 2$ ed $n \geq 3$), immersa in W_{N-1}^{δ} . La $W_{N-2}^{\delta''}$ è irriducibile, è razionale, ed è composta con una involuzione razionale $\{S_{N-2r-1}\}$ di spazi S_{N-2r-1} , ciascuno dei quali rappresenta le V_{r-1}^n con un dato punto doppio in cui il cono tangente ha una data generatrice doppia. Il generico punto di $W_{N-2}^{\delta''}$ rappresenta una V_{r-1}^n con un solo punto doppio (e non di molteplicità maggiore) in cui il cono tangente ha una sola generatrice doppia. Tutto ciò si prova con considerazioni analoghe a quelle fatte nel n. 9 per la $W_{N-2}^{\delta'}$.

Osserviamo che uno spazio S'_{N-2r-1} dell'involuzione con cui è composta la $W_{N-2}^{\delta''}$ è l'intersezione di un ben determinato spazio S'_{N-r-1} dell'involuzione $\{S_{N-r-1}\}$ con cui è composta la W_{N-1}^{δ} , con uno degli ∞^{r-1} spazi S_{N-r-1} infinitamente vicini a S'_{N-r-1} nella detta involuzione $\{S_{N-r-1}\}$.

Infatti, lo spazio S'_{N-r-1} è l'immagine delle V_{r-1}^n che hanno un certo punto doppio P_0 in cui il cono tangente ha una certa generatrice doppia t_0 . Assumiamo P_0 come vertice $A_0 \equiv (1, 0, 0, \dots, 0)$ della piramide fondamentale e t_0 come spigolo $A_0 A_1$. Posto $y_i = \frac{x_i}{x_0}$ per $i = 1, 2, \dots, r$, l'equazione di una qualunque delle dette V_{r-1}^n è del tipo:

$$(5) \quad \varphi_2 + \varphi_3 + \dots + \varphi_n = 0$$

con φ_n forma di grado h in $y_1, y_2, \dots, y_r$, a coefficienti arbitrari e $\frac{\partial \varphi_2}{\partial y_1} \equiv 0$.

La stessa equazione (3), senza la condizione $\frac{\partial \varphi_2}{\partial y_1} \equiv 0$, rappresenta, al variare dei coefficienti, le V_{r-1}^n che hanno $P_0 \equiv A_0$ come punto doppio; a queste V_{r-1}^n corrisponde in S_N uno spazio S'_{N-r-1} . Consideriamo ora le V_{r-1}^n

che hanno il punto $y_1 = -\varepsilon$, $y_2 = 0, \dots, y_r = 0$, come punto doppio; la loro equazione è del tipo

$$\psi_2 + \psi_3 + \dots + \psi_n = 0 \quad \text{con} \quad \psi_h \equiv \varphi_h(y_1 + \varepsilon, y_2, \dots, y_r)$$

e questa equazione (sviluppando rispetto ad ε) si può scrivere nella forma

$$(6) \quad \varphi_2 + \varphi_3 + \dots + \varphi_n + \varepsilon \left(\frac{\partial \varphi_2}{\partial y_1} + \frac{\partial \varphi_3}{\partial y_1} + \dots + \frac{\partial \varphi_n}{\partial y_1} \right) + [2] = 0$$

dove con $[2]$ abbiamo indicato i termini che contengono a fattore ε^2 . Dalla (6), trascurando i termini di grado ≥ 2 in ε , risulta che, affinché $P_0 \equiv A_0$ sia doppio per le nostre ipersuperficie occorre e basta che sia $\frac{\partial \varphi_2}{\partial y_1} \equiv 0$; si trova cioè la condizione che esprime che le (5) abbiano la retta $t_0 \equiv A_0 A_1$ come generatrice doppia del cono tangente in $P_0 \equiv A_0$.

11. — Un punto Q di W_{N-1}^δ che non appartenga nè a $W_{N-2}^{\delta'}$ nè a $W_{N-2}^{\delta''}$ è semplice per W_{N-1}^δ , e l'iperpiano tangente in esso rappresenta le V_{r-1}^n che passano per il punto doppio P della $\bar{V}_{r-1}^n$ che ha per immagine Q .

Infatti una retta generica per Q è l'immagine di un fascio generico contenente $\bar{V}_{r-1}''$. Il punto P non è punto base in questo fascio, è l'unico punto doppio della $\bar{V}_{r-1}^n$, ed il cono tangente in P alla $\bar{V}_{r-1}^n$ non ha generatrici multiple. Ne segue che la $\bar{V}_{r-1}^n$ conta per una sola unità agli effetti del calcolo dell'invariante di ZEUTHEN-SEGREG di S_r , mediante il detto fascio; cioè una retta generica per Q ha una intersezione semplice in Q con la W_{N-1}^δ , e quindi Q è un punto semplice per la W_{N-1}^δ .

Consideriamo ora il fascio che congiunge $\bar{V}_{r-1}^n$ con una generica V_{r-1}^n per P . Il punto P appartiene alla varietà base $\bar{V}_{r-2}$ di questo fascio, ed è punto doppio ordinario per essa. Calcolando l'invariante di ZEUTHEN-SEGREG⁽¹⁵⁾, $I(S_r)$, di S_r mediante un fascio generico contenente $\bar{V}_{r-1}^n$, si ha:

$$I(S_r) = \delta - 2 I(V_{r-1}^n) - I(V_{r-2})$$

e calcolando $I(S_r)$ mediante un fascio congiungente $\bar{V}_{r-1}^n$ con una V_{r-1}^n generica per P , si ha

$$I(S_r) = \bar{\delta} - 2 I(V_{r-1}^n) - I(\bar{V}_{r-2}).$$

⁽¹⁵⁾ C. SEGREG, *Intorno ad un carattere ecc.*, Atti della R. Accademia delle Scienze di Torino, Vol. XXXI (1896)

È poichè $I(\bar{V}_{r-2}) = I(V_{r-2}) - 1$ ⁽¹⁶⁾, si ha $\bar{\delta} = \delta - 1$, e quindi la $\bar{V}_{r-1}^n$ conta per due unità nel calcolo di $I(S_r)$ mediante un fascio dell'ultimo tipo.

Un punto generico Q' di $W_{N-2}^{\delta'}$ è doppio per W_{N-1}^{δ} , e il cono tangente in esso è spezzato nei due iperpiani che rappresentano le V_{r-1}^n passanti per l'uno o per l'altro dei due punti doppi P_1 e P_2 della $\bar{V}_{r-1}^n$ che ha per immagine Q' ⁽¹⁷⁾.

Infatti, la $\bar{V}_{r-1}^n$ conta per due unità nel calcolo dell'invariante di ZEUTHEN-SEGRE $I(S_r)$ di S_r mediante un fascio generico contenente $\bar{V}_{r-1}^n$; ne segue che Q' è un punto doppio di W_{N-1}^{δ} . Inoltre, ragionando come per Q , si vede che la $\bar{V}_{r-1}^n$ conta per tre unità nel calcolo di $I(S_r)$ mediante un fascio che congiunge $\bar{V}_{r-1}^n$ con una generica V_{r-1}^n passante per P_1 o per P_2 ; ne segue che il cono tangente in Q' è spezzato nei due iperpiani che rappresentano le V_{r-1}^n per P_1 o per P_2 .

12. — *Un punto generico Q'' di $W_{N-2}^{\delta''}$ è doppio ⁽¹⁸⁾ per W_{N-1}^{δ} , e il cono tangente in esso è l'iperpiano, contato due volte, che rappresenta le V_{r-1}^n passanti per il punto doppio P della $\bar{V}_{r-1}^n$ che ha per immagine Q'' .*

Indichiamo con H un generico fascio contenente la nostra $\bar{V}_{r-1}^n$, con K un generico fascio di iperpiani di S_r e con T la curva di contatto di questi due fasci. Poichè il punto P , come è noto, abbassa di tre unità la classe di una V_{r-1}^n ⁽¹⁹⁾, si ha che la sezione della $\bar{V}_{r-1}^n$ con l'iperpiano di K passante per P , conta per due unità nel numero delle sezioni di $\bar{V}_{r-1}^n$ (con gli iperpiani di K) le quali hanno un punto doppio. Ne segue che P conta per due unità nel numero dei punti doppi della g_m^1 segata da H su T e quindi, tenendo presente il classico ragionamento di C. SEGRE ⁽²⁰⁾, segue che la $\bar{V}_{r-1}^n$ conta per due unità nel calcolo dell'invariante $I(S_r)$ mediante il fascio H .

Con ragionamento analogo a quello fatto nel n. 11 si prova che la $\bar{V}_{r-1}^n$ conta per tre unità nel calcolo di $I(S_r)$ mediante un fascio che congiunge $\bar{V}_{r-1}^n$ con una generica V_{r-1}^n passante per P .

⁽¹⁶⁾ Perchè la varietà base $\bar{V}_{r-2}$ ha il punto doppio (ordinario) P .

⁽¹⁷⁾ Le due proprietà di questo numero si trovano dimostrate, per $r=2$ e con considerazioni diverse dalle nostre, in SEVERI, *loc. cit.*, pp. 313, 314, 315. Per $r \geq 2$, vedi: B. SEGRE, *Dei sistemi lineari tangenti ad un qualunque sistema di forme*, Rend. Acc. Lincei, V. XXXIII (1924), p. 182. Vedi anche P. LORENZOLA, *Sul luogo dei punti di contatto ecc.*, Giornale di Mat., vol. XLIII (1905), pag. 213; V. E. GALAFASSI, *Criteri di equivalenza ecc.* Rend. Ist. Lombardo, Vol. LXXIX (1945), pag. 345.

⁽¹⁸⁾ GALAFASSI, *loc. cit.*, pag. 354.

⁽¹⁹⁾ In quanto P è un punto doppio di $\bar{V}_{r-1}^n$ a cono tangente dotato di generatrice doppia. E si noti che per la genericità di Q'' la $\bar{V}_{r-1}^n$ non ha altri punti multipli o altre particolarità tangenziali in P .

⁽²⁰⁾ C. SEGRE, *loc. cit.*, n. 8.

OSSERVAZIONE. — La proprietà che il generico punto Q' di $W_{N-2}^{\delta'}$ è doppio per W_{N-1}^{δ} , si può anche dedurre dal fatto che per Q' passano due ben determinati S_{N-r-1} dell'involuzione $\{S_{N-r-1}\}$ con cui è composta W_{N-1}^{δ} (n. 9). Analogamente si può dire per il generico punto Q'' di $W_{N-2}^{\delta''}$ il quale appartiene all'intersezione di un ben determinato S_{N-r-1} con uno spazio infinitamente vicino della suddetta involuzione (n. 10).

13. Consideriamo ora in S_N un generico spazio ad r dimensioni, ed indichiamolo con $\bar{S}_r$; sia Σ_r il sistema lineare di V_{r-1}^n che ha per immagine $\bar{S}_r$. Indichiamo con J_{r-1}^d l'ipersuperficie jacobiana di Σ_r , e con W_{r-1}^{δ} la sezione di W_{N-1}^{δ} con $\bar{S}_r$.

Ricordiamo che l'ordine della J_{r-1}^d è $d = (r+1)(n-1)$, mentre l'ordine della W_{r-1}^{δ} è $\delta = (r-1)(n-1)$. La J_{r-1}^d non ha punti doppi per $r < 4$, ed ha ∞^{r-4} punti doppi per $r \geq 4$ (n. 5). Invece la W_{r-1}^{δ} ha due varietà irriducibili $W_{r-2}^{\delta'}$ e $W_{r-2}^{\delta''}$, di dimensione $r-2$, di punti doppi; esse sono le sezioni con S_r delle due varietà $W_{N-2}^{\delta'}$ e $W_{N-2}^{\delta''}$. La $W_{r-2}^{\delta'}$ è formata dai punti che rappresentano ipersuperficie di Σ_r le quali hanno due punti doppi; la $W_{r-2}^{\delta''}$ è formata dalle ipersuperficie di Σ_r le quali hanno un punto doppio a cono tangente dotato di generatrice doppia. In un generico punto Q' della $W_{r-2}^{\delta'}$ il cono tangente è spezzato nei due S_{r-1} che sono immagini dei due sistemi lineari ∞^{r-1} di ipersuperficie di Σ_r passanti per l'uno o per l'altro dei due punti doppi della V_{r-1}^n rappresentata da Q' ; in un generico punto Q'' della $W_{r-2}^{\delta''}$ il cono tangente è l' S_{r-1} , contato due volte, immagine del sistema lineare ∞^{r-1} di ipersuperficie di Σ_r passanti per il punto doppio della V_{r-1}^n rappresentata da Q'' .

Le due varietà J_{r-1}^d e W_{r-1}^{δ} sono birazionalmente identiche. Infatti un generico punto di W_{r-1}^{δ} rappresenta una V_{r-1}^n con un punto doppio, e quindi ad un punto di W_{r-1}^{δ} corrisponde un punto di J_{r-1}^d ; viceversa, un generico punto di J_{r-1}^d individua una V_{r-1}^n di Σ_r che ha quel punto come punto doppio, e quindi ad un punto di J_{r-1}^d corrisponde un punto di W_{r-1}^{δ} .

14. — La W_{r-1}^{δ} è l'immagine proiettiva del sistema lineare $|J_{r-2}|$, ∞^1 , delle jacobiane dei sistemi lineari Σ_{r-1} , di dimensione $r-1$, contenuti in Σ_1 ; infatti, alla sezione di W_{r-1}^{δ} con un generico $\bar{S}_{r-1}$ di $\bar{S}_r$ corrisponde in J_{r-1}^d la jacobiana J_{r-2} del sistema lineare Σ_{r-1} che ha per immagine $\bar{S}_{r-1}$.

Un generico punto doppio Q della W_{r-1}^{δ} , se appartiene alla $W_{r-1}^{\delta'}$, proviene da due punti (semplici) di J_{r-1}^d in quanto esso è l'immagine di una $\bar{V}_{r-1}^n$ con due punti doppi; mentre se Q appartiene alla $W_{r-1}^{\delta''}$, esso proviene da un punto (semplice) della J_{r-1}^d e dal punto infinitamente vicino in una certa direzione, in quanto Q è l'immagine di una $\bar{V}_{r-1}^n$ con un punto doppio P a

cono tangente dotato di una generatrice doppia τ la quale è tangente in P alla J_{r-1}^d (n. 1) ed a tutte le J_{r-2} del sistema lineare $|J_{r-2}|$, che passano per P ⁽²⁴⁾.

I punti base del sistema lineare $|J_{r-2}|$ sono tutti e soli i punti multipli di J_{r-1} . Infatti un punto multiplo P di J_{r-1}^d è doppio per almeno ∞^1 ipersuperficie di Σ_r (n. 5) e quindi in ogni sistema lineare ∞^{r-1} contenuto in Σ_r c'è almeno una ipersuperficie che ha il punto P come punto doppio; cioè P appartiene ad ogni J_{r-2} di $|J_{r-2}|$. Viceversa, se P è un punto comune a tutte le J_{r-2} di $|J_{r-2}|$, allora ogni sistema lineare ∞^{r-1} contenuto in Σ_r contiene almeno una ipersuperficie la quale ha P come punto doppio; ne segue che P è doppio per almeno ∞^1 V_{r-1}^n di Σ_r e quindi (n. 5) esso è multiplo per J_{r-1}^d . Per quanto sopra e per quanto si è detto nel n. 5, il sistema lineare $|J_{r-2}|$ non ha punti base se è $r < 4$, ed ha ∞^{r-4} punti base, se è $r \geq 4$.

Un generico punto base P_0 di $|J_{r-2}|$ è doppio per la jacobiana J_{r-1}^d di Σ_r , ed ha per corrispondente in W_{r-1}^d una retta $\bar{S}_1$, perchè P_0 è doppio per un fascio di V_{r-1}^n di Σ_r .

Consideriamo un generico punto Q di $\bar{S}_1$. Indichiamo con $\bar{V}_{r-1}^n$ l'ipersuperficie di Σ_r che ha per immagine Q , con π_0 il piano tangente in P_0 a tutte le $\bar{V}_{r-1}^n$ di Σ_r che passano per P_0 (n. 3), e con S_{r-2} lo spazio polare di π_0 rispetto al cono tangente in P_0 alla $\bar{V}_{r-1}^n$; questo spazio S_{r-2} sta nel cono tangente Γ_{r-1}^2 alla J_{r-1}^d in P_0 (n. 3), anzi è uno degli ∞^1 spazi generatori della prima schiera del cono Γ_{r-1}^2 . Indichiamo infine con $\bar{S}_{r-1}$ un generico iperpiano di $\bar{S}_r$, passante per Q e con Σ_{r-1} il sistema lineare che ha per immagine $\bar{S}_{r-1}$; Σ_{r-1} è un generico sistema lineare, ∞^{r-1} , contenuto in Σ_r e che contiene la $\bar{V}_{r-1}^n$.

Da quanto abbiamo detto nei nn. 1, 3, segue facilmente che lo spazio S_{r-2} è tangente alla jacobiana J_{r-2} del sistema lineare Σ_{r-1} . Infatti, consideriamo un generico sistema lineare Σ'_r , ∞^r , contenente Σ_{r-1} ; e sia J'_{r-1} la sua jacobiana. Il punto P_0 è semplice per J'_{r-1} e l'iperpiano tangente in P_0 alla J'_{r-1} non è altro che l' S_{r-1} polare della retta t_0 tangente in P_0 a tutte le ipersuperficie di Σ'_r che passano per P_0 , rispetto al cono tangente in P_0 alla $\bar{V}_{r-1}^n$. La retta t_0 sta nel piano π_0 e quindi l'iperpiano polare di t_0 contiene l' S_{r-2} polare di π_0 ; ne segue che questo S_{r-2} è tangente in P_0 alla J'_{r-1} e quindi, per la genericità di Σ'_r , esso è tangente in P_0 alla J_{r-2} .

(24) Una J_{r-2} per P è la jacobiana di un sistema lineare Σ_{r-1} contenente la $\bar{V}_{r-1}^n$ e contenuto in Σ_r ; il sistema lineare Σ'_r congiungente Σ_{r-1} con una generica V_{r-1}^n di S_r ha una jacobiana J'_{r-1} che contiene J_{r-2} ed è tangente in P alla retta τ (n. 1). Segue che τ è tangente in P alla J_{r-2} .

Le jacobiane J_{r-2} dei sistemi lineari Σ_{r-1} contenuti in Σ_r e che contengono la $\bar{V}_{r-1}^n$, sono dunque tangenti allo spazio S_{r-2} e quindi ai punti della retta $\bar{S}_1$ corrispondono univocamente gli spazi S_{r-2} generatori, della prima schiera, del cono tangente Γ_{r-1}^2 alla J_{r-1}^d in P_0 . E poichè i punti di $\bar{S}_1$ e le ipersuperficie $\bar{V}_{r-1}^n$ di Σ_r che hanno per immagine $\bar{S}_1$ si corrispondono proiettivamente, e queste $\bar{V}_{r-1}^n$ sono in corrispondenza proiettiva con gli S_{r-2} polari di π_0 , si ha che la corrispondenza fra i punti di $\bar{S}_1$ e gli spazi S_{r-2} generatori della prima schiera di Γ_{r-1}^2 è proiettiva. Concludendo:

Alle ∞^{r-2} direzioni tangenti in un generico punto doppio P_0 della jacobiana J_{r-1}^d di Σ_r , corrispondono in W_{r-1}^δ i punti di una retta $\bar{S}_1$; alle direzioni che stanno in uno stesso S_{r-2} generatore della prima schiera del cono tangente Γ_{r-1}^2 in P_0 alla J_{r-1}^d , corrisponde lo stesso punto di $\bar{S}_1$; e la corrispondenza fra gli spazi S_{r-2} generatori della prima schiera di Γ_{r-1}^2 e i punti di $\bar{S}_1$ è proiettiva.

15. — Osserviamo infine che:

La jacobiana J_{r-1}^d di Σ_r è superficialmente regolare (per $r \geq 3$). Infatti la J_{r-1}^d è birazionalmente identica alla W_{r-1}^δ che è la sezione dell'ipersuperficie razionale W_{N-1}^δ con un $\bar{S}_r$ generico di S_N . Per un noto teorema⁽²²⁾, una tale sezione è superficialmente regolare, e quindi è anche tale la J_{r-1}^d .

L'ipotesi che il sistema lineare Σ_r sia generico, è essenziale. Particolari sistemi lineari ∞^r possono avere la jacobiana irriducibile e superficialmente irregolare; per esempio, se si considerano tre generiche reciprocità fra due spazi a tre dimensioni, si definisce una corrispondenza cremoniana $T_{3,3}$ e il sistema omaloidico relativo ha per jacobiana una rigata irriducibile di genere tre.

(22) SEVERI, *Osservazioni varie ecc.*, Atti del R. Istituto Veneto, T. LXV (1906).

CASSELNUOVO-ENRIQUES, *Sur les intégrales simples ecc.*, Annales Sc. de l'Ecole Normale Sup., T. XXII (1906).

[Pervenuto alla Redazione il 31 Dicembre 1949]