

ANNALI DELLA SCUOLA NORMALE SUPERIORE DI PISA *Classe di Scienze*

GIO PENNACCHIETTI

Sugl'integrali comuni a più problemi di dinamica

Annali della Scuola Normale Superiore di Pisa, Classe di Scienze 1^{re} série, tome 2
(1879), p. 121-178

http://www.numdam.org/item?id=ASNSP_1879_1_2__121_0

© Scuola Normale Superiore, Pisa, 1879, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Annali della Scuola Normale Superiore di Pisa, Classe di Scienze » (<http://www.sns.it/it/edizioni/riviste/annaliscienze/>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

SUGL' INTEGRALI

COMUNI

A PIÙ PROBLEMI DI DINAMICA

T E S I

DEL

DOTT. GIO. PENNACCHIETTI

È noto che nella Dinamica si presentano delle classi di problemi per i quali si possono immediatamente assegnare degl' integrali pel solo fatto che le forze applicate ai vari punti del sistema soddisfano ad alcune condizioni analitiche. Gl' integrali comuni a tutti i problemi che appartengono ad una data classe possono o contenere la espressione analitica delle forze (come l' integrale delle forze vive) oppure essere da questa indipendenti (come gl' integrali delle aree). Il Bertrand ha risoluto il problema (4): Determinare gl' integrali indipendenti dalla espressione analitica delle forze che possono essere comuni a più problemi relativi al

(4) Sur les intégrales communes à plusieurs problèmes de Mécanique (Liouville t. XVII, 1852) — Il metodo del Bertrand è stato applicato anche dal Rouché nella sua Memoria « Sur les intégrales communes à plusieurs problèmes de Mécanique relatifs au mouvement d' un point sur une surface » (Liouville, 2.^a serie, t. III, 1858) — Si può ancora vedere la Memoria del Bertrand « Sur quelques-unes des formes les plus simples. que puissent présenter les intégrales des équations différentielles du mouvement d' un point matériel » (Liouville, 2.^a serie, t. II, 1857).

moto d'un punto, quando le forze sono funzioni soltanto delle coordinate, e stabilire le condizioni cui debbono soddisfare le forze stesse, affinchè i corrispondenti problemi ammettano quegli integrali.

Il metodo tenuto dal Bertrand nella risoluzione di questo problema consiste essenzialmente in ciò, che, potendosi, stante la arbitrarietà dei valori iniziali delle coordinate e delle velocità, dedurre da una equazione che effettivamente sia un integrale del moto, quattro equazioni (una delle quali però necessariamente conseguenza delle altre) fra le tre componenti della forza, si può in generale, dato che sia un integrale di un movimento, dedurre da esso le espressioni delle forze che generano quel moto. Può per altro accadere che quelle quattro equazioni si riducano anzichè a tre indipendenti a due od anche ad una, ed allora quella equazione integrale proposta potrà appartenere a tutti quei problemi nei quali le componenti delle forze soddisfano alle due relazioni od alla relazione cui le quattro equazioni si riducono.

Il Korkine ⁽¹⁾ ha ripreso il problema del Bertrand togliendo la restrizione che le forze sianno funzioni soltanto delle coordinate ed ammettendo invece che esse possano essere funzioni anche delle componenti della velocità, ma si è limitato a ricercare i sistemi di due integrali comuni a più problemi del moto di un punto sopra una superficie. Se non che in tal caso il metodo del Bertrand non conduce più ad equazioni finite fra X, Y, Z , ma ad equazioni che oltre a queste quantità contengono le loro derivate rapporto ad x', y', z' ; talchè il Korkine ha dovuto tenere una via diversa, fondandosi sul noto teorema del Clebsch: Un sistema iacobiano o completo di μ equazioni a derivate parziali

(1) Sur les intégrales des équations d'un point matériel. (Mathem. Annalen Leipzig 1870).

del primo ordine lineari ed omogenee con n variabili ammette $n-\mu$ soluzioni.

Seguendo la via tenuta dal Korkine determino da prima (§. I.) la forma che debbono avere quattro equazioni indipendenti dal tempo, affinchè possano essere integrali comuni a più problemi relativi al moto di un punto nello spazio, quando le forze dipendono dalle coordinate e dalle componenti della velocità del punto; dopo, studiando il movimento di un punto soggetto a forze funzioni soltanto delle coordinate, trovo dei risultati in parte non contenuti nella memoria del Bertrand.

I.

Sistemi di quattro integrali comuni indipendenti dal tempo.

Se un integrale:

$$\alpha = F(x, y, z, x', y', z', t)$$

delle equazioni differenziali del moto:

$$\frac{d^2x}{dt^2} = X, \quad \frac{d^2y}{dt^2} = Y, \quad \frac{d^2z}{dt^2} = Z$$

è comune ai due problemi (X, Y, Z) e (X_1, Y_1, Z_1) , dovranno essere verificate le due equazioni che se ne deducono derivando la equazione integrale rapporto al tempo, e sostituendovi per $\frac{d^2x}{dt^2}$, $\frac{d^2y}{dt^2}$, $\frac{d^2z}{dt^2}$ una volta X, Y, Z ed un'altra X_1, Y_1, Z_1 , cioè le due equazioni:

$$\frac{dF}{dx}x' + \frac{dF}{dy}y' + \frac{dF}{dz}z' + \frac{dF}{dx}X + \frac{dF}{dy}Y + \frac{dF}{dz}Z + \frac{dF}{dt} = 0,$$

$$\frac{dF}{dx}x' + \frac{dF}{dy}y' + \frac{dF}{dz}z' + \frac{dF}{dx}X_1 + \frac{dF}{dy}Y_1 + \frac{dF}{dz}Z_1 + \frac{dF}{dt} = 0.$$

Ora delle componenti $X, Y, Z : X_1, Y_1, Z_1$ almeno due corrispondenti possono suporsi diverse fra loro; siano queste X, X_1 . Ponendo:

$$\left. \begin{aligned} k &= \frac{Y-Y_1}{X-X_1}, \quad k' = \frac{Z-Z_1}{X-X_1} \dots\dots\dots \\ l &= Y-kX = Y_1-kX_1 = \frac{Y_1X-X_1Y}{X-X_1} \dots\dots \\ l' &= Z-k'X = Z_1-k'X_1 = \frac{Z_1X-X_1Z}{X-X_1} \dots\dots \end{aligned} \right\} \dots\dots (1)$$

le due ultime equazioni prenderanno la forma:

$$A(F) = \frac{dF}{dx} + \frac{dF}{dy}k + \frac{dF}{dz}k' = 0 \dots\dots\dots (2)$$

$$B(F) = \frac{dF}{dx}x' + \frac{dF}{dy}y' + \frac{dF}{dz}z' + \frac{dF}{dy}l + \frac{dF}{dz}l' + \frac{dF}{dt} = 0, \quad (3)$$

e la equazione ottenuta da queste coll'uguagliare a zero la funzione alternata $B(A(F)) - A(B(F))$ sarà:

$$\begin{aligned} (B,A) &= \frac{dF}{dx} + \frac{dF}{dy}k + \frac{dF}{dz}k' + \frac{dF}{dy} \{A(l) - B(k)\} + \\ &+ \frac{dF}{dz} \{A(l') - B(k')\} = 0 \dots\dots\dots (4). \end{aligned}$$

Perchè il sistema (2), (3) ammetta cinque soluzioni, è necessario pel citato teorema del Clebsch che la (4) o sia identicamente soddisfatta od una combinazione lineare delle (2), (3); non può essere identicamente soddisfatta evidentemente, perchè il coefficiente di $\frac{dF}{dx}$ è l'unità,

non può essere conseguenza delle (2), (3), perchè manca $\frac{dF}{dt}$, e non può evidentemente essere conseguenza della sola (2). D'altra parte nemmeno se si suppone che F non contenga esplicitamente t , le soluzioni possono essere cinque, perchè allora il numero delle soluzioni sarebbe maggiore della differenza fra il numero delle variabili e il numero delle equazioni. Non possiamo avere dunque al più che quattro soluzioni. Supponiamo che le (2), (3) abbiano quattro soluzioni comuni indipendenti dal tempo: dovrà la (4) essere una combinazione lineare delle (2), (3), e poichè non contiene $\frac{dF}{dx'}$, dovrà ridursi semplicemente alla (3) moltiplicata per un fattore, sicchè dovranno i coefficienti della (4) essere proporzionali a quelli della (3), e si avrà quindi:

$$k = \frac{y'}{x'}, \quad k' = \frac{z'}{x'}$$

$$\frac{1}{x'} = \frac{A(l) - B(k)}{l} = \frac{A(l') - B(k')}{l'} \dots \dots (5).$$

Supponendo, come faremo sempre in seguito, che X, Y, Z non contengano esplicitamente il tempo, questo non comparirà esplicitamente per le posizioni (1) nemmeno in k, k', l, l' , onde le (5) sviluppate divengono:

$$\frac{dl}{dx}x' + \frac{dl}{dy}y' + \frac{dl}{dz}z' = 2l, \quad \frac{dl'}{dx}x' + \frac{dl'}{dy}y' + \frac{dl'}{dz}z' = 2l'.$$

Queste mostrano che l, l' sono funzioni omogenee di secondo grado di x', y', z' ; quindi potremo porre:

$$l = x'^2 \varphi(x, y, z, \frac{y'}{x'}, \frac{z'}{x'}), \quad l' = x'^2 \psi(x, y, z, \frac{y'}{x'}, \frac{z'}{x'})$$

Per le (1) si hanno ora le condizioni:

$$\left. \begin{aligned} Yx' - Xy' &= x'^3 \varphi(x, y, z, \frac{y'}{x'}, \frac{z'}{x'}) \\ Zx' - Xz' &= x'^3 \psi(x, y, z, \frac{y'}{x'}, \frac{z'}{x'}) \end{aligned} \right\} (6)$$

Prendendo per k, k', l, l' le espressioni trovate, il sistema (2), (3) è completo, ed osservando che $\frac{y'}{x'}, \frac{z'}{x'}$ sono ora soluzioni della (2), e introducendo queste come variabili nella (3) in luogo di due delle variabili proposte, per es. y', z' , le soluzioni della equazione che se ne dedurrà, saranno soluzioni anche della (2); ponendo

$$\eta = \frac{y'}{x'}, \quad \zeta = \frac{z'}{x'},$$

l'equazione alle soluzioni comuni delle (2), (3) sarà:

$$\frac{dF}{dx} + \frac{dF}{dy}\eta + \frac{dF}{dz}\zeta + \frac{dF}{d\eta}\varphi(x, y, z, \eta, \zeta) + \frac{dF}{d\zeta}\psi(x, y, z, \eta, \zeta) = 0.$$

Dunque: *La condizione necessaria e sufficiente, affinchè più problemi ammettano quattro integrali comuni indipendenti dal tempo, è che le forze soddisfino alle (6). Se*

$$\frac{d^2\eta}{dt^2} = \varphi(t, \eta, \zeta, \frac{d\eta}{dt}, \frac{d\zeta}{dt}), \quad \frac{d^2\zeta}{dt^2} = \psi(t, \eta, \zeta, \frac{d\eta}{dt}, \frac{d\zeta}{dt})$$

sono le equazioni differenziali del moto d'un punto nel piano sotto l'azione di forze funzioni esplicite del tem-

po, delle coordinate e delle derivate, e se ne' suoi quattro integrali che sono della forma:

$$\alpha = f\left(t, \eta, \zeta, \frac{d\eta}{dt}, \frac{d\zeta}{dt}\right)$$

si sostituiscono $x, y, z, \frac{y'}{x'}$, $\frac{z'}{x'}$ rispettivamente a $t, \eta, \zeta, \frac{d\eta}{dt}, \frac{d\zeta}{dt}$, i quattro integrali così ricavati saranno, senza ulteriore determinazione, i quattro integrali comuni a tutti i problemi del moto di un punto libero nello spazio sotto l'azione di forze funzioni esplicite delle coordinate, delle derivate e non del tempo, pei quali tra le forze sussistono le condizioni (6).

Similmente il risultato del Korkine può formularsi così:

Se

$$\frac{d^2\eta}{dt^2} = \varphi\left(t, \eta, \frac{d\eta}{dt}\right)$$

è l'equazione differenziale del movimento a una dimensione, sostituendo ne' suoi due integrali $x, y, \frac{y'}{x'}$ in luogo di $t, \eta, \frac{d\eta}{dt}$, questi due integrali così trasformati converranno a tutti quei problemi a due dimensioni, nei quali sia soddisfatta la condizione:

$$x'Y - y'X = x'^3\varphi\left(x, y, \frac{y'}{x'}\right).$$

II.

Le due forme degl'integrali comuni nell'ipotesi delle forze funzioni soltanto delle coordinate.

D'ora innanzi suppongo le forze funzioni delle sole coordinate; per le (1) altrettanto sarà di k, k', l, l' , onde l'integrale generale della (2) è:

$$\alpha = F(x, y, z, y' - kx', z' - k'x', t) \dots (7)$$

Ponendo:

$$y' - kx' = u, \quad z' - k'x' = v$$

la (3) diviene:

$$\begin{aligned} & \frac{dF}{dt} + \frac{dF}{dy}u + \frac{dF}{dz}v + \frac{dF}{du}l + \frac{dF}{dv}l' \\ & + x' \left[\frac{dF}{dx} + k \frac{dF}{dy} + k' \frac{dF}{dz} - \frac{dF}{du} \left(u \frac{dk}{dy} + v \frac{dk}{dz} \right) - \frac{dF}{dv} \left(u \frac{dk'}{dy} + v \frac{dk'}{dz} \right) \right] \\ & - x'^2 \left[\frac{dF}{du} \left(\frac{dk}{dx} + k \frac{dk}{dy} + k' \frac{dk}{dz} \right) + \frac{dF}{dv} \left(\frac{dk'}{dx} + k \frac{dk'}{dy} + k' \frac{dk'}{dz} \right) \right] = 0. \end{aligned}$$

Ora noi possiamo considerare x, y, z, t, u, v, x' come sette variabili indipendenti, e non essendo F, k, k', l, l' in tale ipotesi funzioni di x' , quest'equazione si scinde nelle seguenti:

$$\frac{dl'}{dt} + \frac{dF}{dy}u + \frac{dF}{dz}v + \frac{dF}{du}l + \frac{dF}{dv}l' = 0 \quad \dots \dots \dots (8)$$

$$l\frac{dF}{dx} + k\frac{dF}{dy} + k'\frac{dF}{dz} - \frac{dF}{du}\left(\frac{dk}{dy}u + \frac{dk}{dz}v\right) - \frac{dF}{dv}\left(\frac{dk'}{dy}u + \frac{dk'}{dz}v\right) = 0 \quad (9)$$

$$\frac{dF}{du}\left(\frac{dk}{dx} + k\frac{dk}{dy} + k'\frac{dk}{dz}\right) + \frac{dF}{dv}\left(\frac{dk'}{dx} + k\frac{dk'}{dy} + k'\frac{dk'}{dz}\right) = 0 \dots (10).$$

Se non si ha identicamente:

$$\frac{dk}{dx} + k\frac{dk}{dy} + k'\frac{dk}{dz} = 0, \quad \frac{dk'}{dx} + k\frac{dk'}{dy} + k'\frac{dk'}{dz} = 0 \quad \dots \dots (11)$$

la (10) integrata dà, indicando con M , N , P delle funzioni di x, y, z :

$$\alpha = F(Mx' + Ny' + Pz', x, y, z, t) \quad \dots \dots \dots (12)$$

e questa è la prima e più semplice forma d'integrali comuni a più problemi. Se invece si hanno identicamente le (11), si ha una seconda forma che studieremo nei §§. IX. e seg. Il Bertrand nota che le equazioni $k = \text{cost.}$, $k' = \text{cost.}$ rappresentano una serie di rette, e che quando k e k' siano l'una funzione dell'altra, l'equazione $k = \text{cost.}$ rappresenta una superficie sviluppabile: io non avrò bisogno di queste osservazioni.

Pel moto di un punto nel piano si hanno tutte le equazioni precedenti in cui mancano i termini che contengono z, v, k', l' : in tal caso si ha una sola forma d'integrali, e le (8) e (9) non ammettono evidentemente più di due soluzioni: esprimendo poi le condizioni, perchè da esse possa derivarsi un sistema completo di due o di tre equazioni,

si hanno soltanto gl' integrali:

$$\alpha = \left[(y+c)z' - (z+c_1)y' \right]^2 + \varphi \left(\frac{y+c}{z+c_1} \right) \dots \dots (13)$$

$$\alpha = (y+c)z' - (z+c_1)y' - Ct. \dots \dots \dots (14)$$

e il sistema:

$$\alpha = (ay' + bz')^2 + f(ay + bz) \dots \dots \dots (15)$$

$$\beta + t = \int \frac{d(ay + bz)}{\sqrt{x - 2ff'(ay + bz)d(ay + bz)}} \dots \dots \dots (16)$$

che convengono a tre rispettive classi di problemi, e che sono i soli integrali comuni a più problemi nel piano. Le (13) e (14) sono ottenute dal Bertrand, le (15) e (16) dal Korkine. Il Bertrand dà le (13) e (14) colle costanti $c=c_1=0$, il che non toglie evidentemente nulla alla generalità.

La (8), come osserva il Bertrand, dimostra il seguente teorema:

Tutti gl' integrali comuni a più problemi del moto di un punto nello spazio nell' ipotesi delle forze funzioni delle coordinate si possono ricavare dagl' integrali dei problemi del moto di un punto nel piano, rappresentando con y, z le coordinate correnti di quest' ultimo punto, sostituendo in quest' integrali $y' - kx'$, $z' - k'x'$ alle derivate $\frac{dy}{dt}$, $\frac{dz}{dt}$, introducendovi poi x come parametro costante, e facendo infine le opportune determinazioni⁽¹⁾.

(¹) Cfr. Bertr, Mem. cit. Art. XVIII, XIX, XX.

Analoga corrispondenza esiste fra gl' integrali dei problemi a una dimensione e gl' integrali comuni a più problemi a due dimensioni.

III.

Prima forma. Sistema di due integrali.

Se una funzione F non contiene alcuna delle variabili x' , y' , z' , l'equazione $F = \text{cost.}$ non può essere integrale comune a più problemi: infatti allora si avrebbe identicamente:

$$\frac{dF}{dt} + \frac{dF}{dx}x' + \frac{dF}{dy}y' + \frac{dF}{dz}z' = 0,$$

da cui si dedurrebbe, derivando rapporto a x' , y' , z' che F non potrebbe essere funzione di t , x , y , z . Per studiare quindi gl' integrali della prima forma (II, 12) potremo supporre una delle tre funzioni M , N , P uguale all'unità e dare all'integrale la forma:

$$\alpha = F(x, y, z, x' - ay' - bz', t) \dots (1)$$

essendo a e b funzioni soltanto di x , y , z .

Pongo:

$$u = x' - ay' - bz' \dots (2)$$

$$L = aY + bZ - X \dots (3)$$

Derivando la (1) rapporto a t si avrà:

$$\begin{aligned} \frac{dF}{dt} + \frac{dF}{dx}(u + ay' + bz') + \frac{dF}{dy}y' + \frac{dF}{dz}z' - \frac{dF}{du} \left\{ \left(\frac{da}{dx}y' + \frac{db}{dx}z' \right) (u + ay' + bz') \right. \\ \left. + \left(\frac{da}{dy}y' + \frac{db}{dy}z' \right) y' + \left(\frac{da}{dz}y' + \frac{db}{dz}z' \right) z' + L \right\} = 0, \end{aligned}$$

in cui, non essendo F, a, b, X, Y, Z funzioni di y', z' devono potersi annullare separatamente i coefficienti di $y'^2, z'^2, y'z', y', z'$ e i termini indipendenti da y', z' , con che si hanno le sei equazioni:

$$\frac{da}{dx}a + \frac{da}{dy} = 0 \dots (4), \quad \frac{db}{dx}b + \frac{db}{dz} = 0 \dots (5)$$

$$\frac{da}{dx}b + \frac{da}{dz} + \frac{db}{dx}a + \frac{db}{dy} = 0 \dots \dots \dots (6)$$

$$A(F) = \frac{dF}{dx}a + \frac{dF}{dy} - \frac{da}{dx} \frac{dF}{du} u = 0 \dots \dots (7)$$

$$B(F) = \frac{dF}{dx}b + \frac{dF}{dz} - \frac{db}{dx} \frac{dF}{du} u = 0 \dots \dots (8)$$

$$C(F) = \frac{dF}{dt} + \frac{dF}{dx}u - \frac{dF}{du}L = 0 \dots \dots \dots (9)$$

Si formino le equazioni:

$$(A, B) = 2 \left(\frac{da}{dx}b + \frac{da}{dz} \right) \frac{dF}{dx} + u \left(\frac{d^2b}{dx^2}a - \frac{d^2a}{dx^2}b + \frac{d^2b}{dxdy} - \frac{d^2a}{dx dz} \right) \frac{dF}{du} = 0 \dots (10)$$

$$(A, C) = 2 \frac{da}{dx}u \frac{dF}{dx} + \left(A(L) + L \frac{da}{dx} - u^2 \frac{d^2a}{dx^2} \right) \frac{dF}{du} = 0 \dots \dots \dots (11)$$

$$(B, C) = 2 \frac{db}{dx}u \frac{dF}{dx} + \left(B(L) + L \frac{db}{dx} - u^2 \frac{d^2b}{dx^2} \right) \frac{dF}{du} = 0 \dots \dots \dots (12)$$

È chiaro che le (7), (8), (9) non possono ammettere più di due soluzioni comuni, ma esse non possono formare un sistema completo, perchè le (10), (11), (12) non si possono formare linearmente coi primi membri di quelle, poichè

ciascuno di essi contiene una derivata che non apparisce nelle (10), (11), (12). Dunque, se le (7), (8), (9) hanno due soluzioni comuni esse devono formare un sistema iacobiano, e le (10), (11), (12) devono esser verificate identicamente, onde si deve avere $\frac{da}{dx} = \frac{db}{dx} = \frac{da}{dz} = 0$, le quali unite alle (4), (5), (6) mostrano che a e b sono costanti. Di più si avrà:

$$\frac{dL}{dx}a + \frac{dL}{dy} = 0, \quad \frac{dL}{dx}b + \frac{dL}{dz} = 0.$$

Indicando con a , b , c tre costanti qualunque si può porre dunque:

$$L = \pi(ax + by + cz).$$

La condizione per le forze è

$$aX + bY + cZ = \pi(ax + by + cz) \dots \dots (13)$$

Dal sistema (7), (8), (9) ovvero sostituendo in quest'ultima equazione $\frac{d^2x}{dt^2}$, $\frac{d^2y}{dt^2}$, $\frac{d^2z}{dt^2}$ in luogo di X , Y , Z e poi integrando, si trovano i due integrali:

$$\alpha = (ax' + by' + cz')^2 - 2 \int \pi(ax + by + cz) d(ax + by + cz) \dots (14)$$

$$\beta + t = \int \frac{d(ax + by + cz)}{\sqrt{\alpha + 2 \int \pi(ax + by + cz) d(ax + by + cz)}} \dots \dots (15)$$

analoghi agl' integrali (II, 15, 16).

IV.

Casi semplici.

Consideriamo alcuni casi semplici di un integrale comune della prima forma. Se F è funzione di u , t soltanto le (III, 7, 8, 9) danno; indicando con C una costante;

$$\frac{da}{dx} = \frac{db}{dx} = 0, \quad L = -C,$$

ove C è una costante: da queste per le (III, 4, 5, 6), essendo m , n , p costanti:

$$a = -mx - n, \quad b = my - p.$$

L'integrale e la condizione per le forze sono:

$$\begin{aligned} \alpha &= m(zy' - yz') + x' + ny' + pz - Ct \quad \dots (16) \\ C &= m(zY - yZ) + X + nY + pZ. \end{aligned}$$

Supponendo F funzione di u soltanto, si otterrebbero ancora queste equazioni con $C=0$. Supponiamo F funzione di x , y , u ; essendo ora il numero delle variabili uguale al numero delle equazioni, il sistema (III, 7, 8, 9) non può ammettere alcuna soluzione, a meno che qualcheduna di quelle equazioni non sia identicamente soddisfatta o combinazione lineare delle altre: il che non può accadere che se

$$b=0 \quad \dots \dots (17)$$

Ora $\frac{dF}{dt}=0$, ed il sistema riducendosi alle due sole equa-

zioni (III, 7, 9), non sarà possibile più di una soluzione, e questa esisterà quando si abbia:

$$\frac{2da}{dx} = \frac{A(L) + L \frac{da}{dx} - u^2 \frac{d^2a}{dx^2}}{L}$$

che si scinde nelle due:

$$\frac{d^2a}{dx^2} = 0, \quad A(L) + 3L \frac{da}{dx} = 0,$$

onde per la (17) e per le (III, 4, 6), indicando con c e c_1 due costanti e con f una funzione arbitraria si ha:

$$a = \frac{x+c_1}{y+c}, \quad L = \frac{1}{(x+c_1)^3} f\left(\frac{y+c}{x+c_1}\right).$$

Potendosi supporre $c=c_1=0$, e scrivendo, $f\left(\frac{y}{x}\right)$ invece di $\frac{y}{x} f\left(\frac{y}{x}\right)$ la condizione per le forze e l'integrale sono:

$$xY - yX = \frac{1}{x^2} f\left(\frac{y}{x}\right) \dots \dots \dots (18)$$

$$\alpha = (x'y - xy')^2 + \int f\left(\frac{y}{x}\right) d\frac{y}{x} \dots \dots (19)$$

come si è trovato per il piano (II, 13).

In ultimo sia F funzione di y , z , u . Allora (III, 9) è $L=0$, e le equazioni $(A,C)=0$, $(B,C)=0$, dovendo essere verificate identicamente, daranno:

$$\frac{d^2a}{dx^2} = 0, \quad \frac{d^2b}{dx^2} = 0, \quad \dots \dots \dots (20)$$

La equazione $(A, B) = 0$ pure deve divenire una identità, poichè non si può dedurre dalle due $A = 0$, $B = 0$; si avrà dunque:

$$\frac{da}{dx}b + \frac{da}{dz} = 0, \quad \frac{d^2a}{dx dz} = \frac{d^2b}{dx dy} \quad \dots (21)$$

La (III, 6) diviene allora

$$\frac{db}{dx}a + \frac{db}{dz} = 0 \quad \dots \dots (22)$$

Le (20) e le (III, 4, 5) mostrano che si ha:

$$a = \frac{x + \pi_1(z)}{y + \pi(z)} \quad , \quad b = \frac{x + \chi_1(y)}{x + \chi(y)}.$$

Dalla seconda delle (21) si rileverà che dev'essere:

$$\frac{\pi'}{(y + \pi)^2} = \frac{\chi'}{(x + \chi)^2}.$$

Contemporaneamente la prima delle (21) e la (22) danno:

$$\frac{x + \chi_1}{(y + \pi)(x + \chi)} + \frac{\pi'_1}{y + \pi} - \frac{\pi'(x + \pi_1)}{(y + \pi)^2} = 0$$

$$\frac{x + \pi_1}{(y + \pi)(x + \chi)} + \frac{\chi'_1}{x + \chi} - \frac{\chi'(x + \chi_1)}{(x + \chi)^2} = 0,$$

ossia

$$[x + \chi_1 + (z + \chi)\pi'_1](y + \pi) - (z + \chi)(x + \pi_1)\pi' = 0$$

$$[x + \pi_1 + (z + \chi)\chi'_1](z + \chi) - (y + \pi)(x + \chi_1)\chi' = 0$$

le quali, dovendo essere verificate qualunque sia x , danno

$$y + \pi = (z + \chi)\pi' \quad ; \quad z + \chi = (y + \pi)\chi',$$

donde $\pi'\chi' = 1$, quindi π' e χ' dovranno essere costanti, e si dovrà avere, indicando con m , n due costanti:

$$\pi = mz + n, \quad \chi = \frac{y - n}{m}.$$

Introducendo nelle precedenti equazioni queste espressioni per π e χ , esse daranno:

$$\pi'_1 = -m\chi'_1,$$

e per conseguenza π'_1 e χ'_1 sono costanti, onde si può porre:

$$\pi_1 = pz + q, \quad \chi_1 = -\frac{py - r}{m}.$$

L' integrale e la condizione per le forze sono adunque:

$$a = xy' - yx' + p(zy' - yz') + m(xz' - zx') + nx' + qy' + rz' \dots (23)$$

$$0 = xY - yX + p(zY - yZ) + m(xZ - zX) + nX + qY + rZ.$$

Dalla discussione del Bertrand (Art. XVIII, XIX, XX Mem. cit.) risulta che un integrale della prima forma comune a più problemi si riduce sempre alla (16) con $n = p = 0$ e con C differente o no da zero, e alla (19); passando dai casi semplici al caso generale, come pure rifacendo i detti Articoli della memoria del Bertrand, noi vedremo come si possa giungere immediatamente alle forme più generali.

V.

Un integrale indipendente dal tempo.

Sia $\frac{dF}{dt}=0$, ed il sistema (III, 7, 8, 9) abbia una soluzione. Allora le (10), (11), (12) o saranno identicamente soddisfatte ovvero conseguenza della (9); in questo secondo caso la proporzionalità dei coefficienti darà:

$$\begin{aligned} 2 \frac{\frac{da}{dx}b + \frac{da}{dz}}{u} &= - \frac{\frac{d^2b}{dx^2}a - \frac{d^2a}{dx^2}b + \frac{d^2b}{dxdy} - \frac{d^2a}{dxdz}}{L} \\ 2 \frac{da}{dx} &= - \frac{A(L) + L \frac{da}{dx} - u^2 \frac{d^2a}{dx^2}}{L}, \\ 2 \frac{db}{dx} &= - \frac{B(L) + L \frac{db}{dx} - u^2 \frac{d^2b}{dx^2}}{L}. \end{aligned}$$

Da queste equazioni che devono essere verificate qualunque sia u , si ricavano anzitutto di nuovo le (IV, 20, 21) già integrate, e dalle quali abbiamo dedotto:

$$a = \frac{x+q+pz}{y+n+mz}, \quad b = \frac{m(x+q)-p(y+n)}{y+n+mz}$$

e inoltre:

$$A(L) + 3L \frac{da}{dx} = 0, \quad B(L) + 3L \frac{db}{dx} = 0.$$

Queste sviluppate divengono:

$$(x+q+pz)\frac{dL}{dx}+(y+n+mz)\frac{dL}{dy}+3L=0,$$

$$\left\{m(x+q)-p(y+n)\right\}\frac{dL}{dx}+(y+n+mz)\frac{dL}{dz}+3mL=0,$$

combinandole:

$$p\frac{dL}{dx}+m\frac{dL}{dy}-\frac{dL}{dz}=0,$$

il cui integrale generale è $L=\psi(x+pz+c, y+mz+c_1)$:
quindi la prima delle precedenti ci mostra che si ha:

$$L=\frac{1}{(y+n+mz)^3} \varphi\left(\frac{x+q+pz}{y+n+mz}\right).$$

Essendo permesso di porre $n=q=0$, la condizione per le forze e l'integrale sono:

$$\begin{aligned} xY-yX+m(xZ-zX)+p(zY-yZ) &= \frac{1}{(y+mz)^2} \varphi\left(\frac{x+pz}{y+mz}\right), \\ \alpha &= \left[xy'-yx'+m(xz'-zx')+p(zy'-yz')\right]^2 + \\ &+ 2 \int \varphi\left(\frac{x+pz}{y+mz}\right) d\left(\frac{x+pz}{y+mz}\right) \dots\dots (24) \end{aligned}$$

alla qual forma il Bertrand giunge con $m=p=0$.

Il caso in cui le (10), (11), (12) sono verificate identicamente è stato trattato alla fine del §. III.

VI.

Sistemi di due integrali con altro metodo.

Da quanto abbiamo detto nel §. II risulta che gl'integrali comuni a più problemi a tre dimensioni si possono anche dedurre dagl'integrali dei problemi a due dimensioni della forma:

$$\alpha = F[y, z, \varphi(y, z)y' + \psi(y, z)z', t],$$

la quale può rappresentare le (II, 13-16). La (II, 15) dà luogo ad integrali compresi nella forma:

$$\alpha = F\left\{[\varphi(x)(y' - kx') + \psi(x)(z' - k'x')]^2 + f[\varphi(x)y + \psi(x)z], x\right\}.$$

Per brevità poniamo:

$$U = k\varphi(x) + k'\psi(x) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (1)$$

$$H = -UX + \varphi(x)Y + \psi(x)Z \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (2)$$

$$\rho = \varphi(x)y + \psi(x)z \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (3)$$

$$u = (-Ux' + \varphi(x)y' + \psi(x)z')^2 + f(\rho, x). \quad (4)$$

allora derivando l'ultima equazione integrale si ottiene:

$$\begin{aligned} & \frac{dF}{du} \left\{ 2 \left[-Ux' + \varphi(x)y' + \psi(x)z' \right] \right. \\ & \left[-\frac{dU}{dx}x'^2 + \left(\varphi'(x) - \frac{dU}{dy} \right) x'y' + \left(\psi'(x) - \frac{dU}{dz} \right) x'z' + H \right] \\ & \left. + \frac{df}{d\rho} \left[\varphi'(x)y + \psi'(x)z \right] x' + \varphi(x)y' + \psi(x)z' \right] + \frac{df}{dx}x' \left\} + \frac{dF}{dx}x' = 0. \end{aligned}$$

Sostituendo per y' il suo valore tratto dalla (4) si ha:

$$\begin{aligned} \frac{dF}{du} \left\{ 2\sqrt{u-f} \left[\left(-\frac{dU}{dx} + \left(\varphi'(x) - \frac{dU}{dy} \right) \frac{U}{\varphi(x)} \right) x'^2 + \right. \right. \\ \left. \left. + \left(\left(\frac{dU}{dy} - \varphi'(x) \right) \frac{\psi'(x)}{\varphi(x)} + \psi'(x) - \frac{dU}{dz} \right) x' z' + \right. \right. \\ \left. \left. + \left(\varphi'(x) - \frac{dU}{dy} \right) \frac{\sqrt{u-f}}{\varphi(x)} x' + H \right] + \frac{df}{d\rho} \left((U + \varphi'(x)y + \psi'(x)z) x' + \right. \right. \\ \left. \left. + \sqrt{u-f} \right) + \frac{df}{dx} x' \right\} + \frac{dF}{dx} x' = 0, \end{aligned}$$

in cui potendosi considerare x, y, z, u, z' come variabili indipendenti si possono mandare a zero i coefficienti delle diverse potenze di x' e z' ; i termini in x' danno:

$$\begin{aligned} \frac{dF}{du} \left\{ \frac{2(u-f)}{\varphi(x)} \left(\varphi'(x) - \frac{dU}{dy} \right) + \frac{df}{d\rho} \left(U + \varphi'(x)y + \psi'(x)z \right) + \frac{df}{dx} \right\} + \\ + \frac{dF}{dx} x' = 0, \end{aligned}$$

equazione della forma:

$$\frac{dF}{du} (A + Bu) + \frac{dF}{dx} = 0 \quad . \quad . \quad . \quad (5)$$

dove A e B non dipendono dalla variabile u . Affinchè la (5) possa essere verificata, come è stato supposto da una funzione F che dipenda soltanto da x e da u , è necessario che i suoi coefficienti non contengano altre variabili, quindi A e B dovranno contenere soltanto x . Per integrare la (5) si ricorra alla equazione:

$$\frac{du}{dx} = Bu + A,$$

che dà:

$$u=e^{\int B dx} \left(\int A e^{-\int B dx} dx + C \right),$$

per cui l'integral generale della (5) è:

$$\alpha = F(\psi_1(x)u + \psi_2(x)),$$

talchè possiamo anche prendere per integrale:

$$\alpha = \psi_1(x)u + \psi_2(x). \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (6)$$

che, sostituendo per u il suo valor (4), è della forma:

$$\alpha = [-Ux' + \varphi(x)y' + \psi(x)z']^2 F(x) + f(\rho, x) \quad . \quad . \quad . \quad (7).$$

Derivando questa si ha:

$$\begin{aligned} & 2 \left(-Ux' + \varphi(x)y' + \psi(x)z' \right) \left[-\frac{dU}{dx} x'^2 + \left(\varphi'(x) - \frac{dU}{dy} \right) x'y' \right. \\ & + \left(\psi'(x) - \frac{dU}{dz} \right) x'z' + H \left. \right] F(x) + F'(x)x' \left(-Ux' + \varphi(x)y' + \psi(x)z' \right)^2 \\ & + \frac{df}{d\rho} \left[\left(\varphi'(x)y + \psi'(x)z \right) x' + \varphi(x)y' + \psi(x)z' \right] + \frac{df}{dx} x' = 0, \end{aligned}$$

che, dovendo essere verificata per qualsiasi valore di $x', y',$
si scomporrà nelle seguenti:

$$\begin{aligned} & 2 \frac{dU}{dx} F(x) + F'(x)U = 0, \quad \frac{d}{dx} \left(\varphi(x)UF(x) \right) = F(x) \frac{dU}{dy}, \quad \frac{d}{dx} \left(\psi(x)UF(x) \right) = F(x) \frac{dU}{dz}, \\ & 2 \left(\varphi'(x) - \frac{dU}{dy} \right) F(x) + F'(x)\varphi(x) = 0, \quad 2 \left(\psi'(x) - \frac{dU}{dz} \right) F(x) + F'(x)\psi(x) = 0 \\ & -2UF(x)H + \frac{df}{d\rho} \left(\varphi'(x)y + \psi'(x)z \right) + \frac{df}{dz} = 0, \quad 2F(x)H + \frac{df}{d\rho} = 0 \quad . \quad . \quad . \quad (8) \end{aligned}$$

La quarta e quinta derivate rapporto a y e a z mostrano che si ha:

$$U = \pi_1(x)y + \pi_2(x)z + \pi_3(x).$$

Sostituendo questo valore di U nella prima, se ne ricava che si deve avere la forma più particolare:

$$U = \frac{my + nz + a}{\sqrt{F(x)}}.$$

Dalla seconda e dalla terza si vede che la forma più generale che può assegnarsi ad U è:

$$U = \frac{a}{\sqrt{F(x)}} \dots \dots \dots (9)$$

e che si ha:

$$\varphi(x) = \frac{b}{\sqrt{F(x)}}, \quad \psi(x) = \frac{c}{\sqrt{F(x)}} \dots (10), \quad \rho = \frac{by + cz}{\sqrt{F(x)}} \dots (11)$$

Combinando la sesta e settima si ha perciò:

$$\frac{df}{d\rho} \left(2a\sqrt{F(x)} + \rho F'(x) \right) - 2F(x) \frac{df}{dx} = 0,$$

da cui integrando e riponendo per ρ il suo valore (11):

$$f = f(ax + by + cz) \dots \dots \dots (12)$$

Sostituendo le espressioni (9-12) nella (7) e nell'ultima delle (8), queste divengono della stessa forma delle (III, 14), ed è chiaro che in tal caso esiste anche l'integrale (III, 15).

VII.

Un integrale indipendente dal tempo con altro metodo.

Nel dedurre dalle (II, 13, 14) gl'integrali comuni a più problemi a tre dimensioni è di manifesto interesse il non supporvi $c=c_1=0$, come fa il Bertrand, il quale (Art. XX e XXI Mem. cit.), dovendo poi introdurre x come parametro costante ottiene risultati sotto forma meno generale di quelli ai quali, seguendo lo stesso metodo, giungiamo in questo e nel seguente paragrafo, e che si ottengono eziandio coll'altro metodo. La (II, 13) dà luogo ad integrali della seguente forma:

$$\alpha = F \left\{ \left[(y + \varphi(x))(z' - kx') - (z + \psi(x))(y' - k'x') \right]^2 + \pi \left(\frac{y + \varphi(x)}{z + \psi(x)}, x \right), x \right\}.$$

Posto:

$$U = k'(z + \psi(x)) - k(y + \varphi(x)) \quad (1)$$

$$H = UX - (z + \psi(x))Y + (y + \varphi(x))Z \quad (2)$$

$$K = (z + \psi(x))\varphi'(x) - (y + \varphi(x))\psi'(x) \quad (3)$$

$$r = \frac{y + \varphi(x)}{z + \psi(x)} \quad (4),$$

$$u = [Ux' - (z + \psi(x))y' + (y + \varphi(x))z']^2 + \pi(r, x) \dots (5)$$

derivando si ottiene:

$$\begin{aligned} \frac{dF}{du} \Big\{ & 2 \Big(Ux' - (z + \psi(x))y' + (y + \varphi(x))z' \Big) \cdot \\ & \cdot \left[\frac{dU}{dx} x'^2 + \left(\frac{dU}{dy} - \psi'(x) \right) x'y' + \left(\frac{dU}{dz} + \varphi'(x) \right) x'z' + H \right] \\ & + \frac{d\pi}{dr} \frac{1}{(z + \psi(x))^2} \left[Kx' + (z + \psi(x))y' - (y + \varphi(x))z' \right] \\ & + \frac{d\pi}{dx} x' \Big\} + \frac{dF}{dx} x' = 0. \end{aligned}$$

Sostituendo per y' il suo valore tratto dalla (5), e indi uguagliando a zero il coefficiente di x' , si ha:

$$\frac{dF}{dx} + \frac{dF}{du} \left\{ \frac{2(u-\pi)}{z + \psi(x)} \left(\psi'(x) - \frac{dU}{dy} \right) + \frac{d\pi}{dr} \frac{K+U}{(z + \psi(x))^2} + \frac{d\pi}{dx} \right\} = 0,$$

che ha la forma (VI, 5); e quindi l'integrale ha la forma (VI, 6), ossia sostituendo per u il suo valore (5):

$$\alpha = [Ux' - (z + \psi(x))y' + (y + \varphi(x))z']^2 f(x) + F(r, x) \dots (6)$$

Derivando questa si ha:

$$\begin{aligned} & 2 \left[Ux' - (z + \psi(x))y' + (y + \varphi(x))z' \right] \cdot \\ & \cdot \left[\frac{dU}{dx} x'^2 + \left(\frac{dU}{dy} - \psi'(x) \right) x'y' + \left(\frac{dU}{dz} + \varphi'(x) \right) x'z' + H \right] f(x) \\ & + f'(x) x' \left[Ux' - (z + \psi(x))y' + (y + \varphi(x))z' \right]^2 + \\ & + \frac{dF}{dr} \frac{Kx' + (z + \psi(x))y' - (y + \varphi(x))z'}{(z + \psi(x))^2} + \frac{dF}{dx} x' = 0 \end{aligned}$$

che dà luogo alle seguenti:

$$\begin{aligned} 2\frac{dU}{dx}f(x)+f'(x)U=0, \quad \frac{d}{dx}\left(U(z+\psi(x))f(x)\right) &= U\frac{dU}{dy}, \\ \frac{d}{dx}\left(U(y+\varphi(x))f(x)\right) &= -U\frac{dU}{dz}, \\ 2\left(\psi'(x)-\frac{dU}{dy}\right)f(x)+(z+\psi(x))f'(x) &= 0, \\ 2\left(\frac{dU}{dz}+\varphi'(x)\right)f(x)+(y+\varphi(x))f'(x) &= 0, \\ 2HUf(x)+\frac{dF}{dr}\frac{K}{(z+\varphi(x))^2}+\frac{dF}{dx} &= 0, \quad 2Hf(x)(z+\psi(x))^2=\frac{dF}{dr} \dots (7) \end{aligned}$$

Dalle prime cinque si deduce facilmente:

$$U=ay+bz+c, \quad \varphi(x)=-bx+b', \quad \psi(x)=xx+a', \quad f(x)=1.$$

Combinando la sesta e settima si ha:

$$\left[z+\psi(x)\right]^2\frac{dF(r,x)}{dx}+(U+K)\frac{dF(r,x)}{dr}=0,$$

ossia

$$\left(\frac{y-bx+b'}{r}\right)^2\frac{dF(r,x)}{dx}+(c-ab'-a'b)\frac{dF(r,x)}{dr}=0,$$

dove si possono considerare x, y, r come tre variabili indipendenti, e quindi questa non può essere identicamente soddisfatta a meno che non si abbia:

$$\frac{dF}{dx}=0,$$

e inoltre

$$\frac{dF}{dr}=0 \quad \text{ovvero} \quad c=ab'+a'b.$$

All'una e all'altra ipotesi corrispondono rispettivamente gl'integrali:

$$\alpha=a(yx'-xy')+b(zx'-xz')+(yz'-zy')+cx'-a'y'+b'z'. \quad (8)$$

$$\alpha=[a((y+b')x'-xy') + b((z+a')x'-xz') + (y+b')z' - (z+a')y']^2 \\ [+F\left(\frac{y+b'-bx}{z+a'+ax}\right) \dots \dots \dots (9)$$

le quali forme, potendosi in quest'ultima senza togliere nulla alla generalità supporre $a'=b'=0$, si riducono alle (IV, 23) e (V, 24) trovate coll'altro metodo. L'ultima delle (7) dà le relative condizioni delle forze, che si ottengono anche derivando le (8) e (9) e sostituendo poi X, Y, Z in luogo di $\frac{d^2x}{dt^2}$, $\frac{d^2y}{dt^2}$, $\frac{d^2z}{dt^2}$.

VIII.

Un integrale dipendente dal tempo.

La (II, 14) dà luogo ad integrali della forma:

$$\alpha=F\left\{(y+\varphi(x))z'-(z+\psi(x))y'-f(x)t, x\right\} \dots (1)$$

Pongo:

$$U=k(z+\psi(x))-k'(y+\varphi(x)). \dots \dots \dots (2)$$

$$K=UX-(z+\psi(x))Y+(y+\varphi(x))Z-f'(x) \dots \dots (3)$$

$$u=Ux'-(z+\psi(x))y'+(y+\varphi(x))(z'-f'(x)t). \dots (4)$$

e derivando la (1) trovo:

$$\frac{dF}{du} \left\{ \frac{dU}{dx} x'^2 + \left(\frac{dU}{dy} - \psi'(x) \right) x' y' + \left(\frac{dU}{dz} + \varphi'(x) \right) x' z' \right. \\ \left. + \frac{f'(x)}{f(x)} \left[ux' - Ux'^2 + (z + \psi(x)) x' y' - (y + \varphi(x)) x' z' \right] + K \right\} + \frac{dF}{dx} x' = 0.$$

Sostituisco per t il suo valore tratto dalla (4), e col porre uguale a zero il coefficiente di x' , trovo:

$$\frac{dF}{dx} + \frac{dF}{du} \frac{f'(x)}{f(x)} u = 0.$$

Essendo l'integrale generale di questa $c = \lambda \left(\frac{u}{f(x)} \right)$, si vede che la (1) deve ridursi alla forma:

$$\alpha = \frac{u}{f(x)}$$

ossia, riponendo per u la sua espressione, alla forma:

$$\alpha = \frac{Ux' - (z + \psi(x))y' + (y + \varphi(x))z'}{f'(x)} - t \dots (5)$$

Se si pone:

$$K' = UX - (z + \psi(x))Y + (y + \varphi(x))Z. \dots (6)$$

la (5) derivata, dà:

$$\left[\frac{dU}{dx} x'^2 + \left(\frac{dU}{dy} - \psi'(x) \right) x' y' + \left(\frac{dU}{dz} + \varphi'(x) \right) x' z' + K' \right] f(x) + \\ - f'(x) x' [Ux' - (z + \psi(x))y' + (y + \varphi(x))z'] - [f(x)]^2 = 0,$$

che si scinde nelle seguenti:

$$f(x)\frac{dU}{dx}-f'(x)U=0, \quad f(x)\left(\frac{dU}{dy}-\psi'(x)\right)+f'(x)\left(z+\psi(x)\right)=0,$$

$$f(x)\left(\frac{dU}{dz}+\varphi'(x)\right)-f'(x)(y+\varphi(x))=0, \quad K'=f(x),$$

dalle quali si deduce facilmente indicando con a, b, c, a', b', m delle costanti:

$$U=ay+bz+c, \quad \varphi(x)=-bx+b', \quad \psi(x)=ax+a', \quad K'=\frac{1}{m} \dots (7)$$

La (6) ove si ponga per K' il suo valore dà la condizione cui debbono soddisfare le componenti delle forze; l'integrale (5), indicando con a, b, c, f, g, h, C sette costanti qualunque, prende la forma seguente:

$$\alpha=a(xy'-x'y)+b(yz'-y'z)+c(zx'-z'x)+fx'+gy'+hz'-Ct \dots (8)$$

La (VII, 8) è della stessa forma di quest'ultima ove si supponga $C=0$. Tralasciamo di dedurre questa classe di problemi dalle condizioni necessarie e sufficienti, perchè le (III, 7, 8, 9,) diano luogo ad un sistema completo di quattro equazioni. Se nella (8) si pone $b=c=f=g=0$, si ha il risultato (IV), cui giunge il Bertrand, da cui per mezzo d'una trasformazione lineare e precisamente ponendo $f+gz-ay, g+ax-bz, z$ rispettivamente al luogo di $ay, -ax, z$ si giunge alla forma (8) stessa. È così esaurito lo studio degl'integrali della prima forma.

IX.

Seconda forma. Sistemi di quattro integrali dipendenti dal tempo.

Nello studio degl' integrali della seconda forma (II, 7),
pei quali abbiain visto aver luogo le equazioni (II, 11), il
Bertrand si occupa esclusivamente del caso, in cui le rette
 $k=cost.$, $k'=cost.$ siano normali ad una serie di superfì-
cie, nella quale ipotesi mostra che, prendendo un certo siste-
ma di coordinate curvilinee, la (II, 7) assume la forma:

$$\alpha=F(q_1, q_2, q_3, q'_1, q'_2, t).$$

Indi, fatto vedere che i soli casi nuovi da tentarsi sono
quelli, in cui le superficie $q_3=cost.$ sono sfere o superficie
canali, potendo allora il sistema suddetto di coordinate
corrispondere alle coordinate polari e passando poi alle
coordinate rettilinee, trasforma l' integral pracedente in
questo:

$$\alpha=F(xz'-zx', xy'-yx', \frac{y}{x}, \frac{z}{x}, t) \dots \dots \dots (1)$$

da cui, nel caso di $\frac{dF}{dt}=0$, si deduce che: *Se in un inte-
grale indipendente dal tempo di un problema del
movimento di un punto nel piano sotto l' azione di
forze $\varphi(\eta, \zeta)$, $\psi(\eta, \zeta)$, funzioni delle coordinate η, ζ , si
sostituiscono $\frac{y}{x}$, $\frac{z}{x}$, $xy'-yx'$, $xz'-zx'$ in luogo di
 η, ζ , η', ζ' , si ha un integrale comune a tutti i problemi*

a tre dimensioni, in cui le forze soddisfano alle due condizioni :

$$x^2(xY-yX)=\varphi\left(\frac{y}{x}, \frac{z}{x}\right), \quad x^2(xZ-zX)=\psi\left(\frac{y}{x}, \frac{z}{x}\right) \quad . \quad . \quad (2)$$

Indipendentemente da questi risultati del Bertrand (*) io mi propongo ora di trovare tutti i possibili sistemi di quattro e tre integrali indipendenti o no dal tempo.

Pongasi:

$$n=-\left(\frac{dk}{dy}u+\frac{dk}{dz}v\right), \quad n'=-\left(\frac{dk'}{dy}u+\frac{dk'}{dz}v\right) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (3)$$

$$\left. \begin{aligned} \alpha &= \frac{dl}{dx} + k \frac{dl}{dy} + k' \frac{dl}{dz} + l \frac{dk}{dy} + l' \frac{dk}{dz} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \\ \alpha' &= \frac{dl'}{dx} + k \frac{dl'}{dy} + k' \frac{dl'}{dz} + l \frac{dk'}{dy} + l' \frac{dk'}{dz} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

le (II, 8, 9) diverranno:

$$A(F) = \frac{dF}{dx} + k \frac{dF}{dy} + k' \frac{dF}{dz} + n \frac{dF}{du} + n' \frac{dF}{dv} = 0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (5)$$

$$B(F) = \frac{dF}{dt} + u \frac{dF}{dy} + v \frac{dF}{dz} + l \frac{dF}{du} + l' \frac{dF}{dv} = 0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (6)$$

Formando l'espressione $A(B(F)) - B(A(F))$ ed ugualandola a zero, si ha:

$$\begin{aligned} (B,A) &= 2n \frac{dF}{dy} + 2n' \frac{dF}{dz} + \left(\frac{d^2k}{dy^2} u^2 + \frac{d^2k}{dz^2} v^2 + 2 \frac{d^2k}{dy dz} uv + \alpha \right) \frac{dF}{du} \\ &+ \left(\frac{d^2k'}{dy^2} u^2 + \frac{d^2k'}{dz^2} v^2 + 2 \frac{d^2k'}{dy dz} uv + \alpha' \right) \frac{dF}{dv} = 0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (7) \end{aligned}$$

(*) Cfr. Bertr. Mem. cit. Art. XXI-XXVII.

Il sistema (5), (6) ammette quattro soluzioni, se è completo o iacobano; ma la (7) non può essere evidentemente una conseguenza delle (5), (6), quindi essa dev'essere identicamente verificata, cioè si deve avere:

$$n=n'=0, \quad \frac{d^2 k}{dy^2} u^2 + \frac{d^2 k}{dz^2} v^2 + 2 \frac{d^2 k}{dy dz} uv + \alpha = 0,$$

$$\frac{d^2 k'}{dy^2} u^2 + \frac{d^2 k'}{dz^2} v^2 + 2 \frac{d^2 k'}{dy dz} uv + \alpha' = 0,$$

le quali non possono essere identicamente soddisfatte che se si ha:

$$\frac{dk}{dy} = \frac{dk}{dz} = \frac{dk'}{dy} = \frac{dk'}{dz} = \alpha = \alpha' = 0.$$

Da queste, dalle (4) e dalle (II, 11) si trae, indicando con a, b, c tre costanti:

$$k = -\frac{a}{b}, \quad k' = -\frac{a}{c}$$

$$\frac{dl}{dx} - \frac{a}{b} \frac{dl}{dy} - \frac{a}{c} \frac{dl}{dz} = 0, \quad \frac{dl'}{dx} - \frac{a}{b} \frac{dl'}{dy} - \frac{a}{c} \frac{dl'}{dz} = 0,$$

onde:

$$l = \varphi(ax + by, ax + cz), \quad l' = \psi(ax + by, ax + cz).$$

Le condizioni per le forze sono allora:

$$aX + bY = \varphi(ax + by, ax + cz), \quad aX + cZ = \psi(ax + by, ax + cz), \quad (8)$$

e le (5), (6) formano il sistema iacobiano

$$\frac{dF}{dx} - \frac{a}{b} \frac{dF}{dy} - \frac{a}{c} \frac{dF}{dz} = 0$$

$$\frac{dF}{dt} + u \frac{dF}{dy} + v \frac{dF}{dz} + \varphi \frac{dF}{du} + \psi \frac{dF}{dv} = 0,$$

Ora $ax+by$, $ax+cz$ sono soluzioni della prima equazione: ponendo quindi

$$ax+by=n, \quad ax+cz=\zeta, \quad \frac{dn}{dt}=n', \quad \frac{d\zeta}{dt}=\zeta',$$

e introducendo nella seconda n e ζ in luogo delle variabili y e z , si ottiene l'equazione:

$$\frac{dF}{dt} + \frac{dF}{dn}n' + \frac{dF}{d\zeta}\zeta' + \frac{dF}{du}\varphi(n, \zeta) + \frac{dF}{dv}\psi(n, \zeta) = 0,$$

che avrà per soluzioni le quattro soluzioni cercate.

Dunque: *Qualunque sistema di quattro integrali funzioni anche del tempo, comuni a più problemi relativi al moto di un punto nello spazio sotto l'azione di forze, funzioni delle sole coordinate, può dedursi immediatamente dai quattro integrali delle equazioni del moto di un punto nel piano sotto l'azione di forze pure funzioni delle sole coordinate. Basta sostituire alle coordinate n, ζ del punto nel piano e alle derivate rapporto al tempo n', ζ' rispettivamente le quantità $ax+by$, $ax+cz$, $ax'+by'$, $ax'+cz'$. Se $\varphi(n, \zeta)$, $\psi(n, \zeta)$ erano le componenti delle forze acceleratrici secondo gli assi n, ζ del piano, gl'integrali così ottenuti converranno senza ulteriore determinazione a tutti i problemi del moto di un punto nello spazio, sollecitato da forze le cui componenti secondo gli assi x, y, z soddisfino alle equazioni (8).*

Le (II, 16, 17) danno un teorema analogo: *Ogni sistema di due integrali dipendenti dal tempo comuni a più problemi a due dimensioni si ricava dai due integrali dei problemi a una dimensione. Se*

$$\frac{d^2\eta}{dt^2} = \varphi(\eta) \quad (9)$$

era l'equazione differenziale del moto di quest' ultimo punto, sostituendo ne' suoi due integrali per η e $\frac{d\eta}{dt}$ rispettivamente $ax+by$, $ax'+by'$, si ottengono due integrali comuni a tutti i problemi a due dimensioni, in cui le forze soddisfano alla equazione di condizione:

$$aX+bY=\varphi(ax+by).$$

Nell'ipotesi attuale delle forze è chiaro che non possono esistere sistemi di quattro integrali comuni, che non contengano il tempo, pel moto d'un punto nello spazio, come pure non possono esistere due integrali indipendenti dal tempo, se il punto si muove nel piano (Cfr. §. I.).

X.

Sistemi di tre integrali indipendenti dal tempo.

Per questa ricerca dovremo supporre che nel sistema (X, 5, 6) manchi il termine $\frac{dF}{dt}$: e la (7) dovrà o essere identicamente soddisfatta oppure una conseguenza della (5); assumendo questa seconda ipotesi più generale,

si ha :

$$nv = n'u, \quad 2nl = u \left(\frac{d^2 k}{dy^2} u^2 + \frac{d^2 k}{dz^2} v^2 + 2 \frac{d^2 k}{dy dz} uv + \alpha \right),$$

$$2n'l' = v \left(\frac{d^2 k'}{dy^2} u^2 + \frac{d^2 k'}{dz^2} v^2 + 2 \frac{d^2 k'}{dy dz} uv + \alpha' \right),$$

le quali sono identicamente soddisfatte, se si ha:

$$\frac{dk}{dy} = \frac{dk'}{dz}, \quad \frac{dk'}{dy} = \frac{dk}{dz} = \frac{d^2 k}{dy^2} = \frac{d^2 k'}{dz^2} = 0,$$

$$2l \frac{dk}{dy} + \alpha = 2l' \frac{dk'}{dz} + \alpha' = 0.$$

Da queste e dalle (II, 11) e (IX, 4) si ha integrando:

$$k = \frac{y + c_1}{x + c}, \quad k' = \frac{z + c_2}{x + c},$$

$$l = \frac{1}{(c+x)^3} \varphi \left(\frac{y+c_1}{x+c}, \frac{z+c_2}{x+c} \right), \quad l' = \frac{1}{(x+c)^3} \psi \left(\frac{y+c_1}{x+c}, \frac{z+c_2}{x+c} \right).$$

Supponendo, il che non toglie la generalità ai risultati, le costanti $c = c_1 = c_2 = 0$, le condizioni per le forze divengono precisamente le (IX, 2), date pure dal Bertrand, e le equazioni che danno i tre integrali comuni assumono ora la forma:

$$x \frac{dF}{dx} + y \frac{dF}{dy} + z \frac{dF}{dz} - u \frac{dF}{du} - v \frac{dF}{dv} = 0,$$

$$u \frac{dF}{dy} + v \frac{dF}{dz} + \frac{1}{x^3} \varphi \left(\frac{y}{x}, \frac{z}{x} \right) \frac{dF}{du} + \frac{1}{x^3} \psi \left(\frac{y}{x}, \frac{z}{x} \right) \frac{dF}{dv} = 0.$$

Se osserviamo che $\frac{y}{x}$, $\frac{z}{x}$, ux , vx sono soluzioni della prima, ponendo:

$$\frac{y}{x} = \eta, \quad \frac{z}{x} = \zeta, \quad ux = u_1, \quad vx = v_1,$$

ed introducendo nella seconda η , ζ , u_1 , v_1 come nuove variabili in luogo di y , z , u , v , si ha l'equazione:

$$\frac{dF}{d\eta} u_1 + \frac{dF}{d\zeta} v_1 + \frac{dF}{du_1} \varphi(\eta, \zeta) + \frac{dF}{dv_1} \psi(\eta, \zeta) = 0,$$

le cui soluzioni sono soluzioni comuni alle due precedenti, e quindi sono gli integrali cercati.

Il teorema del Bertrand può dunque enunciarsi così:
Tutti i sistemi di tre integrali indipendenti dal tempo comuni a più problemi relativi al moto di un punto nello spazio sotto l'azione di forze, funzioni soltanto delle coordinate, si deducono dai sistemi dei tre integrali indipendenti dal tempo relativi al moto di un punto nel piano sotto l'azione di forze pure funzioni delle sole coordinate. Basta sostituire in questi tre ultimi integrali in luogo delle coordinate η , ζ e delle loro derivate rapporto al tempo rispettivamente le quantità $\frac{y}{x}$, $\frac{z}{x}$, $xy' - x'y$, $xz' - x'z$. Se $\varphi(\eta, \zeta)$, $\psi(\eta, \zeta)$ erano le componenti secondo gli assi η , ζ delle forze che agivano sul punto nel piano, gl'integrali così ricavati converranno senza ulteriore determinazione a tutti i problemi del moto di un punto nello spazio, nei quali le componenti X , Y , Z delle forze acceleratrici secondo gli assi x , y , z soddisfano alle due equazioni (IX, 2).

La (II, 14) dà luogo ad un teorema analogo: *Se la (IX, 9) è l'equazione differenziale del moto di un punto per un problema a una dimensione, e se si sostituiscono nel suo integrale indipendente dal tempo in luogo di x , x' rispettivamente le quantità $\frac{y}{x}$, $xy' - x'y$, l'integrale così ottenuto converrà a tutti i problemi a due dimensioni, nei quali le forze soddisfano alla equazione di condizione:*

$$x^2(xy' - yx') = \varphi\left(\frac{y}{x}\right).$$

Questi due teoremi comprendono come caso particolare il principio delle aree.

XI.

Metodo per la ricerca dei sistemi di tre integrali comuni dipendenti dal tempo.

Se le (IX, 5, 6) non costituiscono un sistema completo esse avranno tre soluzioni comuni, nel caso che le tre equazioni (IX, 5, 6, 7) formino un sistema completo. Poniamo:

$$\left. \begin{aligned} p &= \frac{d^2 k}{dy^2} u^2 + \frac{d^2 k}{dz^2} v^2 + 2 \frac{d^2 k}{dy dz} uv + \alpha, \\ p' &= \frac{d^2 k'}{dy^2} u^2 + \frac{d^2 k'}{dz^2} v^2 + 2 \frac{d^2 k'}{dy dz} uv + \alpha' \end{aligned} \right\} \dots (1)$$

la (IX, 7) prenderà la forma:

$$C(F) = (B, A) = 2n \frac{dF}{dy} + 2n' \frac{dF}{dz} + p \frac{dF}{du} + p' \frac{dF}{dv} = 0 \dots (2)$$

Uguagliando a zero le espressioni $A(C(F)) - C(A(F))$,
 $B(C(F)) - C(B(F))$ si ha:

$$(A, C) = \frac{dF}{dy} \left\{ C(k) - 2A(n) \right\} + \frac{dF}{dz} \left\{ C(k') - 2A(n') \right\} \\ + \frac{dF}{du} \left\{ C(n) - A(p) \right\} + \frac{dF}{dv} \left\{ C(n') - A(p') \right\} = 0 \dots (3)$$

$$(B, C) = \frac{dF}{dy} \left\{ C(u) - 2B(n) \right\} + \frac{dF}{dz} \left\{ C(v) - 2B(n') \right\} \\ + \frac{dF}{du} \left\{ C(l) - B(p) \right\} + \frac{dF}{dv} \left\{ C(l') - B(p') \right\} = 0 \dots (4)$$

Ma si ha tenendo conto delle (II, 11):

$$C(k) - 2A(n) = -6 \left[u \left\{ \left(\frac{dk}{dy} \right)^2 + \frac{dk' dk}{dy dz} \right\} + v \left\{ \frac{dk dk}{dy dz} + \frac{dk' dk}{dz dz} \right\} \right], \\ C(k') - 2A(n') = -6 \left[u \left\{ \frac{dk dk'}{dy dy} + \frac{dk' dk'}{dy dz} \right\} + v \left\{ \frac{dk dk'}{dz dy} + \left(\frac{dk'}{dz} \right)^2 \right\} \right]$$

ovvero anche:

$$C(k) - 2A(n) = 6 \left[u \left\{ \frac{d^2 k}{dx dy} + k \frac{d^2 k}{dy^2} + k' \frac{d^2 k}{dy dz} \right\} \right. \\ \left. + v \left\{ \frac{d^2 k}{dx dz} + k \frac{d^2 k}{dy dz} + k' \frac{d^2 k}{dz^2} \right\} \right] \\ C(k') - 2A(n') = 6 \left[u \left\{ \frac{d^2 k'}{dx dy} + k \frac{d^2 k'}{dy^2} + k' \frac{d^2 k'}{dy dz} \right\} \right. \\ \left. + v \left\{ \frac{d^2 k'}{dx dz} + k \frac{d^2 k'}{dy dz} + k' \frac{d^2 k'}{dz^2} \right\} \right].$$

Negli sviluppi di $C(n) - A(p)$, $C(n') - A(p')$ sostituendo

alle somme dei termini che contengono derivate terze di k e k' , somme di termini che contengono soltanto derivate seconde mediante le (II, 11), si ha:

$$\begin{aligned} C(n) - A(p) = & 6 \left\{ \left(\frac{dk}{dy} \frac{d^2 k}{dy^2} + \frac{dk'}{dy} \frac{d^2 k}{dy dz} \right) u^2 + \left(\frac{dk}{dz} \frac{d^2 k}{dy dz} + \frac{dk'}{dz} \frac{d^2 k}{dz^2} \right) v^2 \right. \\ & + \left(\frac{dk}{dy} \frac{d^2 k}{dy dz} + \frac{dk'}{dy} \frac{d^2 k}{dz^2} + \frac{dk}{dz} \frac{d^2 k}{dy^2} + \frac{dk'}{dz} \frac{d^2 k}{dy dz} \right) uv \Big\} - \\ & - \left(\frac{d\alpha}{dy} + k \frac{d\alpha}{dy} + k' \frac{d\alpha}{dz} + \alpha \frac{dk}{dy} + \alpha' \frac{dk}{dz} \right), \\ C(n') - A(p') = & 6 \left\{ \left(\frac{dk}{dy} \frac{d^2 k'}{dy^2} + \frac{dk'}{dy} \frac{d^2 k'}{dy dz} \right) u^2 + \left(\frac{dk}{dz} \frac{d^2 k'}{dy dz} + \frac{dk'}{dz} \frac{d^2 k'}{dz^2} \right) v^2 \right. \\ & + \left(\frac{dk}{dy} \frac{d^2 k'}{dy dz} + \frac{dk'}{dy} \frac{d^2 k'}{dz^2} + \frac{dk}{dz} \frac{d^2 k'}{dy^2} + \frac{dk'}{dz} \frac{d^2 k'}{dy dz} \right) uv \Big\} - \\ & - \left(\frac{d\alpha'}{dz} + k \frac{d\alpha'}{dy} + k' \frac{d\alpha'}{dz} + \alpha \frac{dk}{dy} + \alpha' \frac{dk}{dz} \right). \end{aligned}$$

Ponendo:

$$\begin{aligned} \beta &= \frac{dk}{dy} l + \frac{dk}{dz} l', \quad \beta' = \frac{dk'}{dy} l + \frac{dk'}{dz} l', \quad (5) \\ \gamma_1 &= \frac{d\alpha}{dy} + 2 \frac{d^2 k}{dy^2} l + 2 \frac{d^2 k}{dy dz} l' + 2 \left(\frac{dk}{dy} \frac{dl}{dy} + \frac{dk'}{dy} \frac{dl}{dz} \right), \\ \gamma_2 &= \frac{d\alpha}{dz} + 2 \frac{d^2 k}{dy dz} l + 2 \frac{d^2 k}{dz^2} l' + 2 \left(\frac{dk}{dz} \frac{dl}{dy} + \frac{dk'}{dz} \frac{dl}{dz} \right), \\ \gamma_1' &= \frac{d\alpha'}{dy} + 2 \frac{d^2 k'}{dy^2} l + 2 \frac{d^2 k'}{dz^2} l' + 2 \left(\frac{dk}{dy} \frac{dl'}{dy} + \frac{dk'}{dy} \frac{dl'}{dz} \right), \\ \gamma_2' &= \frac{d\alpha'}{dz} + 2 \frac{d^2 k'}{dy dz} l + 2 \frac{d^2 k'}{dz^2} l' + 2 \left(\frac{dk}{dz} \frac{dl'}{dy} + \frac{dk'}{dz} \frac{dl'}{dz} \right), \end{aligned}$$

si ha:

$$C(u) - 2B(n) = 3 \left(\frac{d^2 k}{dy^2} u^2 + \frac{d^2 k}{dz^2} v^2 + 2 \frac{d^2 k}{dy dz} uv \right) + \alpha + 2\beta,$$

$$C(v) - 2B(n') = 3 \left(\frac{d^2 k'}{dy^2} u^2 + \frac{d^2 k'}{dz^2} v^2 + 2 \frac{d^2 k'}{dy dz} uv \right) + \alpha' + 2\beta',$$

$$C(l) - B(p) = - \left\{ \frac{d^3 k}{dy^3} u^3 + \frac{d^3 k}{dz^3} v^3 + 3 \frac{d^3 k}{dy^2 dz} u^2 v + 3 \frac{d^3 k}{dy dz^2} uv^2 + \gamma_1 u + \gamma_2 v \right\},$$

$$C(l') - B(p') = - \left\{ \frac{d^3 k'}{dy^3} u^3 + \frac{d^3 k'}{dz^3} v^3 + 3 \frac{d^3 k'}{dy^2 dz} u^2 v + 3 \frac{d^3 k'}{dy dz^2} uv^2 + \gamma'_1 u + \gamma'_2 v \right\}.$$

Affinchè esistano tre soluzioni occorre che le (3), (4) o siano identicamente soddisfatte, oppure una identicamente soddisfatta e l'altra conseguenza della (2) e delle (5), (6) del §. IX, oppure tutte e due conseguenze di queste.

Considereremo separatamente i quattro casi che si presentano.

XII.

Primo sistema.

Supponiamo le (XI, 3, 4) identicamente soddisfatte. Si ha allora:

$$\frac{d^2 k}{dy^2} = \frac{d^2 k}{dz^2} = \frac{d^2 k}{dy dz} = \frac{d^2 k'}{dy^2} = \frac{d^2 k'}{dz^2} = \frac{d^2 k'}{dy dz} = 0,$$

$$\left(\frac{dk}{dy} \right)^2 + \frac{dk'}{dy} \frac{dk}{dz} = \frac{dk}{dz} \frac{dk}{dy} + \frac{dk'}{dz} \frac{dk}{dz} = 0,$$

$$\frac{dk dk'}{dy dy} + \frac{dk' dk}{dy dz} = \frac{dk dk'}{dz dz} + \left(\frac{dk'}{dz} \right)^2 = 0, \quad \dots \quad (1)$$

$$\left. \begin{aligned} \alpha + 2\beta &= \alpha' + 2\beta' = 0 \dots\dots\dots \\ \frac{d\alpha}{dy} + 2\left(\frac{dk}{dy}\frac{dl}{dy} + \frac{dk'}{dy}\frac{dl}{dz}\right) &= \frac{d\alpha}{dz} + 2\left(\frac{dk}{dz}\frac{dl}{dy} + \frac{dk'}{dz}\frac{dl}{dz}\right) = 0 \\ \frac{d\alpha'}{dy} + 2\left(\frac{dk}{dy}\frac{dl'}{dy} + \frac{dk'}{dy}\frac{dl'}{dz}\right) &= \frac{d\alpha'}{dz} + 2\left(\frac{dk}{dz}\frac{dl'}{dy} + \frac{dk'}{dz}\frac{dl'}{dz}\right) = 0. \end{aligned} \right\} (2)$$

Dalle (1) e dalle (II, 11) si deduce facilmente:

$$k = ax + by + cz + d, \quad k' = -\frac{a+bk}{c} \dots\dots\dots (3)$$

Queste riducono le (2) a quattro sole equazioni distinte, le quali ponendo:

$$bl + cl' = L, \text{ ossia (I, 1): } aX + bY + cZ = L$$

prendono la forma:

$$\frac{dl}{dx} + k\frac{dl}{dy} + k'\frac{dl}{dz} + 3L = 0, \quad c^2\frac{dl'}{dy} + b^2\frac{dl'}{dz} = 0 \dots (4)$$

$$\frac{1}{a}\frac{dL}{dx} = \frac{1}{b}\frac{dL}{dy} = \frac{1}{c}\frac{dL}{dz} \dots\dots\dots (5)$$

Posto:

$$\omega = ax + by + cz,$$

si ha dunque per le (5), indicando con π una funzione arbitraria:

$$bl + cl' = \pi(\omega) \dots\dots\dots (6)$$

La prima delle (4) prendendovi per variabili ω, y, z

diviene:

$$\frac{dl}{dy}(\omega+d) - \frac{1}{c} \left\{ a + b(\omega+d) \right\} \frac{dl}{dz} + 3\pi(\omega) = 0 ;$$

integrando e indicando con φ una funzione arbitraria:

$$l = \frac{-3\pi(\omega)y + \varphi(\rho, \omega)}{\omega+d} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (7)$$

dove:

$$\rho = \frac{ay + (\omega+d)(by + cz)}{c} .$$

Dalle (6) si ha dunque:

$$l' = \frac{(\omega+d+3by)\pi(\omega) - b\varphi(\rho, \omega)}{c(\omega+d)} .$$

L'ultima delle (4) è identicamente soddisfatta dagli attuali valori di l , l' , purchè φ abbia la forma:

$$\varphi(\rho, \omega) = \frac{c}{a} \left\{ 3\pi(\omega) + (\omega+d)\pi'(\omega) \right\} \rho + \frac{\omega+d}{a} f(\omega) , \quad (8)$$

essendo $f(\omega)$ una funzione arbitraria di ω .

La condizione per le forze che si ha dalla (6), ed i due integrali sono quelli trovati nel §. III. eq: (13, 14, 15).

La (7), tenendo conto della (8), dà una seconda condizione per le forze:

$$a \left(Y - (\omega+d)X \right) = f(\omega) + 3(by + cz)\pi(\omega) + \pi'(\omega) \left\{ ay + (by + cz)(\omega+d) \right\} \quad (9)$$

Ma pei valori ora trovati per α , α' , k , k' ecc. la (XI, 2) diviene:

$$(bu + cv) \left(c \frac{dF}{dy} - b \frac{dF}{dz} \right) + \pi(\omega) \left(c \frac{dF}{du} - b \frac{dF}{dv} \right) = 0,$$

e se per brevità poniamo:

$$by + cz = \mu, \quad bu + cv = \nu \quad . \quad . \quad . \quad (10)$$

introducendovi le variabili μ, ν in luogo di z e v , questa prende la forma:

$$\nu \frac{dF}{dy} + \pi(\omega) \frac{dF}{du} = 0,$$

per cui se si pone:

$$\lambda = \nu u - \pi(\omega) y,$$

l'integrale generale prenderà la forma:

$$\lambda = F(\mu, \nu, \omega, t),$$

ove F è simbolo di funzione arbitraria.

La (IX, 5) si trasforma ora nella seguente:

$$a \frac{dF}{d\mu} + \left\{ (\omega + d) \pi(\omega) + \nu^2 \right\} \frac{dF}{d\lambda} = 0,$$

onde posto:

$$a \lambda - \left\{ (\omega + d) \pi(\omega) + \nu^2 \right\} \mu = \sigma,$$

l'integrale generale di quella equazione avrà la forma:

$$\sigma = F(\nu, \omega, t),$$

per cui ogni integrale della (IX, 5) è ora integrale anche della (XI, 2).

La (IX, 6) si trasforma allora nella seguente:

$$\frac{dF}{dt} + \nu \frac{dF}{d\omega} + \pi(\omega) \frac{dF}{d\nu} + \nu \left[f(\omega) - (\omega + d) \pi(\omega) - \nu^2 \right] \frac{dF}{d\sigma} = 0$$

che è soddisfatta, oltre che dai due integrali già ottenuti, anche dall'integrale della equazione:

$$\frac{d\sigma}{d\omega} = f(\omega) - (\omega + d) \pi(\omega) - \nu^2,$$

cioè, a causa della (III, 14), dall'integrale della equazione:

$$\frac{d\sigma}{d\omega} = f(\omega) - (\omega + d) \pi(\omega) - (\alpha + 2 \int \pi(\omega) d\omega).$$

Indicando con γ una costante, il terzo integrale comune è adunque:

$$\sigma + \alpha \omega - \int \left\{ f(\omega) - (\omega + d) \pi(\omega) - 2 \int \pi(\omega) d\omega \right\} d\omega = \gamma,$$

ossia ritornando alle variabili primitive:

$$\begin{aligned}
 & a \left\{ \left(y' - (\omega + d) x' \right) (ax' + by' + cz') - \pi(\omega) y \right\} \\
 & - (by + cz) \left\{ (\omega + d) \pi(\omega) + (ax' + by' + cz')^2 \right\} + \alpha \omega \\
 & - \int \left\{ f(\omega) - (\omega + d) \pi(\omega) - 2 \int \pi(\omega) d\omega \right\} d\omega = \gamma \quad . \quad . \quad (11)
 \end{aligned}$$

XIII.

Secondo sistema.

Supponiamo ora che una delle (XI, 3, 4) sia identicamente soddisfatta e l'altra sia conseguenza delle primitive; è facile vedere che le (5), (6) del §. (IX.) contengono ciascuna una derivata che non apparisce nelle (XI, 3, 4): una qualunque di queste potrà dunque essere conseguenza delle primitive soltanto quando i suoi coefficienti siano proporzionali ai coefficienti della (XI, 2). Ciò posto, sia la (XI, 3) identicamente soddisfatta e l'altra conseguenza delle primitive. Sviluppando l'equazione:

$$\frac{C(u) - 2B(n)}{n} = \frac{C(v) - 2B(n')}{n'},$$

se ne deduce, affinchè questa sia identicamente soddisfatta, che debbono aver luogo le equazioni:

$$\frac{dk}{dy} = \frac{dk}{dz} = \frac{d^2k}{dy^2} = \frac{d^2k}{dz^2} = \frac{d^2k}{dydz} = \frac{\alpha + 2\beta}{\alpha' + 2\beta'}.$$

Da queste, dalle (II, 11) e dalle posizioni (IX, 4), (XI, 5) si trae, indicando con a , b , c tre costanti:

$$k' = -\frac{a+bk}{c} \dots (1), \quad \alpha' = -\frac{b}{c} \alpha \dots (2), \quad \beta' = -\frac{b}{c} \beta, \quad p' = -\frac{b}{c} p \dots (3)$$

Quindi la (XI, 3) diviene:

$$\left(c \frac{dk}{dy} - b \frac{dk}{dz} \right) \left(\frac{dk}{dy} u + \frac{dk}{dz} v \right) \left(c \frac{dF}{dy} - b \frac{dF}{dz} \right) - \left\{ A_1 \frac{dk}{dy} u^2 + A_2 \frac{dk}{dz} v^2 + \left(A_2 \frac{dk}{dy} + A_1 \frac{dk}{dz} \right) uv \right\} \left(c \frac{dF}{du} - b \frac{dF}{dv} \right) = 0 \dots (4)$$

dove:

$$A_1 = \frac{d}{dy} \left(c \frac{dk}{dy} - b \frac{dk}{dz} \right), \quad A_2 = \frac{d}{dz} \left(c \frac{dk}{dy} - b \frac{dk}{dz} \right).$$

Ora questa deve essere identicamente soddisfatta, e ciò si otterrà col porre:

$$c \frac{dk}{dy} - b \frac{dk}{dz} = 0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (5)$$

e questa insieme alla (1) riduce la prima delle (II, 11) alla relazione:

$$c \frac{dk}{dx} - a \frac{dk}{dz} = 0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (6).$$

I termini in u^4 , v^4 , u^3v , u , v e i termini indipendenti da u , v del primo membro dell'equazione:

$$\frac{C(u) - 2B(n)}{2n} - \frac{C(l) - B(p)}{p} = 0 \quad . \quad . \quad (7)$$

uguagliati a zero danno:

$$3\left(\frac{d^2k}{dy^2}\right)^2 = 2\frac{dk}{dy}\frac{d^3k}{dy^3} \dots (8); \quad 3\left(\frac{d^2k}{dz^2}\right)^2 = 2\frac{dk}{dz}\frac{d^3k}{dz^3} \dots (9);$$

$$6\frac{d^2k}{dy^2}\frac{d^2k}{dydz} = 3\frac{d^3k}{dy^2dz}\frac{dk}{dz} + \frac{d^3k}{dy^3}\frac{dk}{dz} \dots (10);$$

$$(2\alpha + \beta)\frac{d^2k}{dy^2} = \frac{dk}{dy}\gamma_1; \quad (2\alpha + \beta)\frac{d^2k}{dz^2} = \frac{dk}{dz}\gamma_2 \dots (11); \quad \alpha = 0 \dots (12).$$

Le (9) e (10) sono conseguenza delle (5), (8); le due equazioni (11) a causa della (5) e della (12) sono fra loro equivalenti. L' integrale generale della (8) è

$$k = \frac{1}{\varphi(x, z)y + \psi(x, z)} + \chi(x, z)$$

Sostituendo questa espressione di k nelle (5), (6) si trovano due equazioni, ciascuna delle quali non è identicamente soddisfatta qualunque sia y a meno che non si scinda in due altre, le quali permettono di determinare le tre funzioni arbitrarie φ , ψ , χ . Si trova allora, se a , b , c , d , f , g sono sei costanti, che l'espressione più generale di k è:

$$k = \frac{f}{ax + by + cz + d} + g \dots (13)$$

Per le (1), (2), (3) l'equazione:

$$\frac{C(l) - B(p)}{p} = \frac{C(l') - B(p')}{p'} \dots (14)$$

è identicamente soddisfatta, se si ha:

$$\frac{1}{b} \cdot \frac{dL}{dy} = \frac{1}{c} \cdot \frac{dL}{dz} \dots\dots\dots (15)$$

dove L ha lo stesso significato che nel §. XII. Dalle equazioni $\alpha=0$, $\alpha'=0$ conseguenze della (12) e della (2) si ricava, ponendo mente alla (1):

$$\frac{dL}{dx} + k \frac{dL}{dy} + k' \frac{dL}{dz} = 0$$

e quindi per la (15):

$$\frac{1}{a} \cdot \frac{dL}{dx} = \frac{1}{c} \cdot \frac{dL}{dz} \dots\dots\dots (16)$$

onde, come nel §. precedente e dando ad ω lo stesso significato che aveva allora:

$$L = \pi(\omega) \dots\dots\dots (17)$$

Sviluppando la (2) e prendendo ω , y , z per variabili indipendenti si ha:

$$k \frac{dl}{dy} + k' \frac{dl}{dz} = \frac{f \pi(\omega)}{(\omega + d)^2},$$

la quale integrata dà:

$$l = \frac{\varphi(\rho, \omega) + f\pi(\omega)y}{\left\{ f + g(\omega + d) \right\} (\omega + d)} \dots\dots\dots (18)$$

dove si è posto:

$$\rho = (by + cz) \left(f + g(\omega + d) \right) + (\omega + d)ay .$$

La prima delle (11), osservando che si ha: $\beta = -f \frac{L}{(\omega + d)^2}$,

diviene:

$$2bf \frac{\pi(\omega)}{(\omega + d)^3} - \gamma_1 = 0 \dots \dots \dots (19)$$

Ma per le posizioni del §. XI e per i valori attuali di k, k' , considerando ω, ρ, y come variabili indipendenti in luogo di x, y, z , si ha:

$$\gamma_1 = \frac{4bf\pi(\omega)}{(\omega + d)^3} - \frac{2bf}{(\omega + d)^2} \left(\frac{dl}{dy} + a(\omega + d) \frac{dl}{d\rho} \right) .$$

Sostituendo in questa per $\frac{dl}{dy}$ e $\frac{dl}{d\rho}$ i loro valori tratti dalla (18), e quindi sostituendo questo valore di γ_1 nella (19), questa diviene:

$$\frac{d\varphi}{d\rho} = \frac{g}{a} \pi(\omega) .$$

Quindi si può porre:

$$\varphi = \frac{g}{a} \pi(\omega) \rho + \frac{1}{a} \psi(\omega) ,$$

e la (18) diviene:

$$l = \frac{\psi(\omega) + \pi(\omega) \left(f + g(\omega + d) \right) \left(ay + g(by + cz) \right)}{a(\omega + d) \left(f + g(\omega + d) \right)}.$$

Per le (15), (16) si hanno ancora la condizione e gl' integrali (III, 13, 14, 15). La seconda condizione per le forze è:

$$\begin{aligned} & a \left\{ f + g(\omega + d) \right\} \left\{ (\omega + d) Y - \left(f + g(\omega + d) \right) X \right\} \\ &= \psi(\omega) + \pi(\omega) \left(f + g(\omega + d) \right) \left(ay + g(by + cz) \right). \end{aligned}$$

Le (IX, 5, 6), (XI, 2) formano ora un sistema completo. La terza diviene, introducendovi come variabile ω in luogo di x :

$$(\omega + d) \left(c \frac{dF}{dy} - b \frac{dF}{dz} \right) + (bu + cv) \left(c \frac{dF}{du} - b \frac{dF}{dv} \right) = 0,$$

onde, oltre le (XII, 10), ponendo:

$$(\omega + d) u - v y = \lambda,$$

l'integrale generale avrà la forma:

$$\lambda = F(\mu, \nu, \omega, t).$$

La (IX, 5), sostituendovi alle variabili x, y, z, u, v le variabili $\mu, \nu, \lambda, \omega$, diviene:

$$a \frac{dF}{d\mu} + g \nu \frac{dF}{d\lambda} = 0,$$

la quale ha per integral generale:

$$\sigma = F(\omega, \nu, t)$$

dove si è posto:

$$a\lambda - g\mu\nu = \sigma.$$

La (IX, 6) diviene allora:

$$\frac{dV}{dt} + \frac{dF}{d\omega}\nu + \frac{dF}{d\nu}\pi(\omega) + \frac{dF}{d\sigma}\left(\frac{\psi(\omega)}{f+g(\omega+d)} - g\nu^2\right) = 0,$$

onde il terzo integrale comune è:

$$+ \int \left\{ g \sqrt{\alpha + 2 \int \pi(\omega) d\omega} - \frac{\psi(\omega)}{(f+g(\omega+d)) \sqrt{\alpha + 2 \int \pi(\omega) d\omega}} \right\} d\omega = \gamma \dots (20)$$

dove per le precedenti posizioni si ha:

$$\gamma = a \left\{ (\omega+d)y' - (f+g(\omega+d))x' \right\} - (ax' + by' + cz') (ay + g(by + cz))$$

XIV.

Terzo sistema.

Sia la (XI, 4) identicamente soddisfatta, e i coefficienti delle derivate parziali di F nelle (XI, 2, 3) siano fra loro

proporzionali. Dalla prima identità si deduce che le derivate seconde di k e k' rapporto a y e z sono nulle, e inoltre:

$$\alpha + 2\beta = \alpha' + 2\beta' = 0 \dots (1) ; \quad \gamma_1 = \gamma_2 = \gamma'_1 = \gamma'_2 = 0 \dots (2),$$

Intanto si può porre:

$$k = \varphi(x)y + \psi(x)z + \pi(x) \dots (3) ; \quad k' = \varphi_1(x)y + \psi_1(x)z + \pi_1(x) \dots (4).$$

La proporzionalità dei coefficienti delle (XI, 2, 3) dà anzitutto:

$$\frac{C(k) - 2A(n)}{n} = \frac{C(k') - 2A(n')}{n'} ,$$

da cui si trae:

$$\begin{aligned} \frac{d^2k}{dx dy} \frac{dk'}{dy} &= \frac{d^2k'}{dx dy} \frac{dk}{dy} ; \quad \frac{d^2k}{dx dz} \frac{dk'}{dz} = \frac{d^2k'}{dx dz} \frac{dk}{dz} ; \\ \frac{d^2k}{dx dy} \frac{dk'}{dz} + \frac{d^2k}{dx dz} \frac{dk'}{dy} &= \frac{d^2k'}{dx dy} \frac{dk}{dz} + \frac{d^2k'}{dx dz} \frac{dk}{dy} . \end{aligned}$$

Sostituendo le espressioni di k e k' nella prima e nella seconda, se ne deduce:

$$\varphi_1(x) = c \varphi(x) , \quad \psi_1(x) = c_1 \psi(x) \dots \dots \dots (5).$$

Quindi la terza diviene:

$$(c - c_1) \left(\varphi'(x) \psi(x) - \varphi(x) \psi'(x) \right) = 0 \dots \dots \dots (6).$$

Quindi o $c = c_1$ oppure $\varphi = c_2 \psi$; consideriamo da prima

il primo caso; allora si ha dalle (II, 11): $\frac{d(ck-k')}{dx}=0$,
quindi $k'=kc+c_3$: ponendo uguali a zero i coefficienti
di y e z ed il termine indipendente da queste variabili
dell'una o dell'altra delle (II, 11), si ha facilmente colla
integrazione:

$$k=\frac{ax+(b+1)y+cz+d}{m+x}, \quad k'=-\frac{1}{c}(a+bk) \dots (7)$$

Nel caso in cui si abbia $\varphi=c_2\psi$ dalle (II, 11) si
rileva, ponendo uguali a zero i coefficienti di y , z ed il
termine noto, che deve essere $c=c_1$; infatti i coefficienti
di y e z nella prima danno resp.

$$\varphi' + \varphi^2 + \frac{c}{c_2}\varphi^2 = 0, \quad \varphi' + \varphi^2 + \frac{c_1}{c_2}\varphi^2 = 0;$$

quindi si vede che questo caso rientra nel precedente.

Le (1), (2) avuto riguardo alle (7) danno luogo, alle
(XII, 5, 6), ed anche alle seguenti:

$$\frac{dl}{dx} + k\frac{dl}{dy} + k'\frac{dl}{dz} + 3\left(\frac{dk}{dy}l + \frac{dk'}{dz}l'\right) = 0 \dots (8)$$

$$c^2\frac{dl'}{dy} + b(b+1)\frac{dl}{dz} = 0 \dots \dots \dots (9)$$

La (8) prendendovi per variabili ω , y , z diviene:

$$(\omega+y+d)\frac{dl}{dy} - \frac{1}{c}\left\{(b+1)\omega - cz + am + bd\right\}\frac{dl}{dz} = -3(\pi(\omega)+l).$$

*

Quindi:

$$l = -\pi(\omega) + \frac{\varphi(\rho, \omega)}{(\omega + y + d)^3} \dots \dots \dots (10)$$

dove è

$$\rho = \frac{(b+1)\omega - cz + am + bd}{\omega + y + d} \dots \dots \dots (11).$$

E sostituendo nella (XII, 6):

$$l' = \frac{b+1}{c} \pi(\omega) - \frac{\varphi(\rho, \omega)}{(\omega + y + d)^3} \dots \dots \dots (12).$$

È facile vedere che i valori (10), (12) non possono soddisfare alla (9) a meno che φ non sia una costante C.

Le espressioni così trovate per k , k' , l , l' riducono completo il sistema (IX, 5, 6; XI, 2), prendendo per μ , ν le espressioni date nel §. XII (10), ponendo

$$2\nu u + u^2 + \frac{C}{(\omega + y + d)^2} = \lambda, \quad (\mu - \omega - am)^2 (\lambda + \nu^2) = \sigma,$$

ed operando come alla fine dei §§. XII. e XIII. avremo oltre le (III, 13, 14, 15), per terzo integrale:

$$\sigma = \gamma,$$

ossia:

$$C \left(\frac{x+m}{\omega+y+d} \right)^2 + \left[(ax' + (b+1)y' + cz')(x+m) - (\omega+y+d)x' \right]^2 = \gamma \dots (14)$$

e la seconda condizione per le forze sarà:

$$Y - \frac{\omega + y + d}{m + x} X = -\pi(\omega) + \frac{C}{(\omega + y + d)^3} \dots (15)$$

XV.

Quarto Sistema.

Siano infine i coefficienti delle derivate parziali di F nelle (XI, 2, 3, 4) proporzionali fra loro. La proporzionalità dei detti coefficienti nelle (XI, 2, 4), supposta anche nel § XIII, dà luogo alle equazioni (XIII, 1-3, 7-12, 14-17). La proporzionalità dei coefficienti nelle (XI, 3, 4) dà ora luogo alla unica equazione:

$$\begin{aligned} & \left(c \frac{dk}{dy} - b \frac{dk}{dz} \right) \left(\frac{d^2 k}{dy^2} u^2 + \frac{d^2 k}{dz^2} v^2 + 2 \frac{d^2 k}{dy dz} uv \right) = \\ & = 2 \left\{ A_1 \frac{dk}{dy} u^2 + A_2 \frac{dk}{dz} v^2 + \left(\frac{dk}{dy} A_2 + \frac{dk}{dz} A_1 \right) uv \right\} \dots (1) \end{aligned}$$

avendo A_1 e A_2 lo stesso significato che nel § XIII.

Uguagliando fra loro i coefficienti di u^2 e v^2 nella (1) si ha:

$$\frac{\frac{d^2 k}{dy^2}}{\frac{dk}{dy}} = \frac{2 \frac{d}{dy} \left(c \frac{dk}{dy} - b \frac{dk}{dz} \right)}{c \frac{dk}{dy} - b \frac{dk}{dz}} ; \quad \frac{\frac{d^2 k}{dz^2}}{\frac{dk}{dz}} = \frac{2 \frac{d}{dz} \left(c \frac{dk}{dy} - b \frac{dk}{dz} \right)}{c \frac{dk}{dy} - b \frac{dk}{dz}}.$$

Integrando, e indicando con φ_2 e φ_3 funzioni arbitrarie:

$$\frac{dk}{dy} = \varphi_2(x, z) \left(c \frac{dk}{dy} - b \frac{dk}{dz} \right)^2 ; \quad \frac{dk}{dz} = \varphi_3(x, y) \left(c \frac{dk}{dy} - b \frac{dk}{dz} \right)^2 ,$$

donde :

$$\frac{dk}{dy} = \frac{\varphi_2(x, z)}{\Delta^2} \quad , \quad \frac{dk}{dz} = \frac{\varphi_3(x, y)}{\Delta^2} \quad (2)$$

dove:

$$\Delta = c \varphi_2(x, z) - b \varphi_3(x, y).$$

Sostituendo questi valori nelle (XIII, 8, 9), si deduce:

$$\frac{d^2 \Delta}{dy^2} = \frac{d^2 \Delta}{dz^2} = 0 ,$$

onde:

$$\varphi_2(x, z) = \psi(x)z + \psi_1(x) \quad , \quad \varphi_3(x, z) = \pi(x)y + \pi_1(x),$$

dove sarà pure:

$$\pi(x) = \psi(x) = 0 ,$$

affinchè i secondi membri delle (2) possano essere derivate d'una stessa funzione, ed affinchè la (XIII, 10) sia identicamente soddisfatta.

In ultimo per soddisfare alle (II, 11) se a, b, c, d sono costanti, è, come nel § XIV:

$$k = \frac{ax + (b+1)y + cz + d}{x + m}.$$

Per le (XIII, 11) si ha dunque:

$$\gamma_1 = \gamma_2 = 0$$

da cui e dalla (XIII, 12) si ottiene:

$$c \frac{dl}{dy} = b \frac{dl}{dz} \dots \dots \dots (5)$$

onde la (XIII, 12) diviene:

$$\frac{dl}{dx} - \frac{a}{c} \frac{dl}{dz} + \frac{(b+1)l + cl'}{x+m} = 0 \dots (6)$$

ossia per la (XIII, 17), prendendovi per variabili indipendenti ω, y, z in luogo di x, y, z :

$$\frac{dl}{dz} - \frac{c}{\omega - by - cz + am} l = \frac{c \pi(\omega)}{\omega - by - cz + am}.$$

Integrando, e indicando con φ una funzione arbitraria si ha:

$$l = \frac{c \pi(\omega) z + \varphi(\omega, y)}{\omega - by - cz + am},$$

o più particolarmente per soddisfare alla (5):

$$l = \frac{\pi(\omega)(by + cz) + f(\omega)}{\omega - by - cz + am}.$$

Una condizione per le forze e due integrali sono le (III, 13, 14, 15). La seconda condizione è:

$$\eta \left\{ (x+m)Y - \left(ax + (b+1)y + cz + d \right) X \right\} = \pi(\omega)(by + cz) + f(\omega).$$

Il sistema (IX, 5, 6; XI, 2) si verifica ora completo,

ed ha le tre soluzioni della equazione:

$$\frac{dF}{dt} + \nu \frac{dF}{d\omega} + \pi(\omega) \frac{dF}{d\nu} - \left\{ \omega \pi(\omega) + f(\omega) \right\} \frac{dF}{d\lambda} = 0,$$

avendo posto, oltre le (XII, 10) anche:

$$(\mu - \omega - am)(u + v) = \lambda.$$

Il terzo integrale è adunque:

$$\int \frac{\pi(\omega)\omega + f(\omega)}{V_{\alpha + 2\int \pi(\omega)d\omega}} d\omega - a(x+m).$$

$$\left[\left(a - \frac{ax + (b+1)y + cz + d}{x+m} \right) x' + (b+1)y' + cz' \right] = \gamma.$$

Dott. GIOVANNI PENNACCHIETTI.