Ann. Scient. Éc. Norm. Sup.,
4e série, t. 34, 2001, p. 685 à 739.

DIFFÉRENTIELLES NON COMMUTATIVES ET THÉORIE DE GALOIS DIFFÉRENTIELLE OU AUX DIFFÉRENCES

PAR YVES ANDRÉ

RÉSUMÉ. – Nous montrons comment la théorie de Galois–Picard–Vessiot des équations différentielles et des équations aux différences, et la théorie des groupes d'holonomie en géométrie différentielle, sont des aspects d'une même théorie galoisienne. Cette théorie générale est basée sur la construction et l'étude du produit tensoriel de connexions non commutatives sur une base commutative (situation semi-classique), sans hypothèse de courbure. Elle fournit par exemple un cadre algébrique d'étude de la confluence des équations aux différences vers une équation différentielle lorsque l'incrément tend vers 0.

ABSTRACT. – We show how the Galois–Picard–Vessiot theory of differential equations and difference equations, and the theory of holonomy groups in differential geometry, are different aspects of a unique Galois theory. The latter is based upon the construction and study of the tensor product of non commutative connections over a commutative base (semi-classical situation), without any curvature assumption. This theory provides for instance an algebraic frame for the study of the confluence arising when the increment of a difference equation tends to 0.

Introduction

La théorie de Galois différentielle connaît un nouvel essor, devenant source d'inspiration et d'applications dans des domaines de plus en plus variés : nombres transcendants, mécanique céleste, calcul formel, rigidité de revêtements, sommes exponentielles... Par ailleurs, la théorie des groupes quantiques, la q-combinatoire et le développement de l'analyse des équations aux différences suscitent un renouveau d'intérêt pour la théorie de Galois aux (q-)différences. En amont, ce foisonnement d'ouvertures fait naître un besoin de rénovation des fondements de la théorie, comme l'illustre le problème concret suivant.

Considérons la série q-hypergéométrique de Heine

$$\sum_{n\geqslant 0} \frac{(q^{\alpha_1};q)_n\cdots(q^{\alpha_r};q)_n}{(q^{\beta_1};q)_n\cdots(q^{\beta_{r-1}};q)_n\cdot(q;q)_n} z^n.$$

Elle satisfait une équation aux q-différences d'ordre r. Lorsque q tend vers 1, cette équation « conflue » vers l'équation différentielle ordinaire satisfaite par la série hypergéométrique de Gauss–Barnes

$${}_rF_{r-1}\begin{pmatrix}\alpha_1 & \cdots & \alpha_r \\ \beta_1 & \cdots & \beta_{r-1}\end{pmatrix}; z\biggr).$$

On peut se poser les questions suivantes :

(i) comment comprendre la confluence du point de vue galoisien ?

(ii) À cette déformation d'équation différentielle correspond-il de manière naturelle des groupes quantiques comme q-déformation du groupe de Galois différentiel hypergéométrique ?

Aborder ce type de questions requiert clairement une description uniforme des équations aux (q-)différences et des équations différentielles.

Notre point de vue sera celui des connexions. Rappelons qu'en algèbre, une connexion sur un A-module est une application additive $\nabla : M \to \Omega^1 \otimes_A M$ vérifiant la règle de Leibniz $\nabla(am) = da \otimes m + a\nabla(m)$, où $d : A \to \Omega^1$ est une dérivation convenable. La recette pour traduire équations différentielles linéaires en termes de connexions est bien connue. Il s'avère tout aussi possible d'interpréter équations aux différences linéaires en termes de connexions, en considérant des A-A-bimodules de différentielles Ω^1 non commutatifs, i.e. où l'action de A n'est pas la même à gauche et à droite. Cela fournit un cadre commode pour étudier des problèmes mixtes différentiels-aux différences comme ci-dessus. Il y a donc lieu de se placer d'emblée dans le cadre du calcul différentiel non commutatif, même si nos applications se limitent au cas « semi-classique » où l'anneau de fonctions A est commutatif.

Un autre avantage du point de vue des connexions est de faire le lien avec la géométrie différentielle, et de prendre en compte certaines analogies frappantes entre la théorie de l'holonomie et la théorie de Picard–Vessiot. En particulier, la possibilité de considérer des connexions à courbure quelconque suggère la question :

(iii) peut-on considérer un groupe d'holonomie comme groupe de Galois différentiel ?

Pour bâtir une théorie du groupe de Galois différentiel suffisamment souple, nous aurons recours à la théorie tannakienne sur les anneaux (et à un usage massif de la notion de platitude).

La première tâche est de définir le produit tensoriel de deux connexions, l'anneau de base A étant supposé commutatif. Lorsque le bimodule Ω^1 est commutatif, la règle est bien connue : $\nabla(m_1 \otimes m_2) = \nabla(m_1) \otimes m_2 + m_1 \otimes \nabla(m_2)$, où l'on permute tacitement Ω^1 et M_1 dans le second terme. Pour étendre cette règle au cas d'un bimodule Ω^1 non commutatif, on a donc besoin d'une application « volte » $M_1 \otimes \Omega^1 \to \Omega^1 \otimes M_1$. Notre point de départ est l'existence d'une telle *volte bilinéaire canonique* (§ 2.4.1.1). Elle permet de munir la catégorie des connexions d'une structure monoïdale. En outre, l'échange des facteurs $M_1 \otimes M_2 \to M_2 \otimes M_1$ est une contrainte de commutativité symétrique. Cela donne une réponse négative à la question (ii) ci-dessus (si, en modifiant la contrainte de commutativité, on trouvait un groupe quantique, il y aurait lieu d'après [11] de le considérer comme classique puisque sa catégorie de représentations le serait).

On peut alors donner des critères généraux qui garantissent que cette catégorie est tannakienne (§§ 2.5.3.2, 3.2.1.3). Un des corollaires est que *si X est une variété algébrique lisse sur un corps de caractéristique nulle ou une variété analytique lisse* (*réelle, complexe ou p-adique rigide*), *alors tout $\mathcal{O}_X$-module cohérent muni d'une connexion* – non nécessairement intégrable – *est localement libre* (§ 2.5.2.2). On donne aussi une réponse essentiellement positive à la question (iii).

Dans une situation à paramètres comme ci-dessus (paramètre q), le groupe de Galois différentiel obtenu est un schéma en groupes affine plat sur l'anneau des constantes, qui commute au passage aux fibres (mais généralement pas de type fini). Ceci fournit une réponse, dans un cadre général, à la question (i). On peut alors déduire de la connaissance des groupes de Galois différentiels hypergéométriques des informations sur les groupes de Galois aux q-différences hypergéométriques pour q générique (§ 3.3.3).

On développe ensuite la « théorie de Picard–Vessiot » sans aucune hypothèse d'intégrabilité (i.e. d'annulation de courbure). Elle montre, en termes figurés, qu'on peut toujours intégrer *symboliquement* un système différentiel ou aux différences linéaire, même non intégrable.

Passons en revue les différentes parties de ce travail.

Le premier chapitre expose cinq situations concrètes qui ont motivé la théorie, et l'illustrent. Les seuls résultats originaux se trouvent en § 1.4. On y explique comment interpréter un endomorphisme semi-linéaire comme connexion non commutative, et comment la recherche de solutions d'équations aux différences se ramène à celle de sections horizontales de telles connexions. Cette interprétation a été suggérée par un aspect du calcul différentiel quantique d'A. Connes esquissé en § 1.5.

Dans § 1.1, on rappelle quelques points de géométrie différentielle classique : théorème de Frobenius, connexions sur des fibrés principaux ou vectoriels et groupes d'holonomie, en insistant sur l'algèbre du calcul différentiel extérieur. Outre le rôle d'exemples pour les groupes de Galois différentiels définis ultérieurement, ces groupes d'holonomie fourniront une interprétation géométrique suggestive des constructions algébriques abstraites de la théorie (§ 3.4.2.2). En § 1.2, on traite dans le même esprit la situation algébrique en caractéristique non nulle : théorème de Cartier–Ekedahl, calcul différentiel à puissances divisées . . . .

Le paragraphe 1.3 rappelle brièvement la théorie de Picard–Vessiot–Kolchin et sa reformulation tannakienne.

Le second chapitre traite du calcul différentiel non commutatif et des connexions, et résout le problème du produit tensoriel. L'algèbre différentielle extérieure est remplacée par une algèbre différentielle graduée Ω^* arbitraire. En tronquant en degré $\leqslant 1$, on obtient une dérivation d de $A = \Omega^0$ à valeurs dans le A-A-bimodule Ω^1. Ceci fournit une vaste généralisation de la notion classique d'anneau différentiel, et un cadre commun aux situations de § 1. On définit dans ce contexte les notions d'idéal différentiel, d'extension différentielle, d'anneau différentiel simple . . . . En § 2.2, on traite des connexions non commutatives. On y examine particulièrement le cas où le module sous-jacent M est un A-A-bimodule et où la connexion ∇ vérifie la règle de Leibniz à gauche. Motivé par les travaux de J. Mourad [38], M. Dubois-Violette et T. Masson [21] en géométrie non commutative, on s'intéresse au cas où le défaut de sujétion à la règle de Leibniz à droite est donné par un homomorphisme de bimodule $\phi(\nabla) : M \otimes \Omega^1 \to \Omega^1 \otimes M$. On dira dans ce cas que ∇ est une biconnexion, de volte $\phi(\nabla)$. On calcule cette volte dans le cas particulier non trivial des équations aux différences.

En § 2.3, on définit le produit tensoriel de deux biconnexions : $\nabla = \nabla_1 \otimes \mathrm{id}_2 + (\phi(\nabla_1) \otimes \mathrm{id}_2) \circ (\mathrm{id}_1 \otimes \nabla_2)$. On obtient ainsi une structure monoïdale sur la catégorie des biconnexions, et on discute la dualité. Dans ce contexte général, on peut s'attendre à ce que certaines sous-catégories soient $\otimes$-équivalentes à des catégories de représentations de groupes quantiques non classiques.

À partir de § 2.4, on se place dans la situation « semi-classique » où A est commutatif mais où le bimodule Ω^1 n'est pas nécessairement commutatif. On prouve qu'alors toute connexion est une biconnexion, et que l'échange naïf des facteurs est une contrainte de commutativité (symétrique). Le paragraphe le plus substantiel de ce chapitre est § 2.5 : on y donne un critère sur (A, d) (dont l'hypothèse principale est la simplicité) pour que la catégorie des modules à connexion de type fini sur A à volte inversible soit tannakienne sur le corps des constantes.

Le troisième chapitre traite des aspects galoisiens dans la situation semi-classique. Il commence par une étude détaillée de la notion de solubilité d'une connexion dans une extension différentielle, nourrie de nombreux exemples. On y montre en particulier que solubilité et intégrabilité (i.e. nullité de la courbure) sont des notions indépendantes.

En § 2.2, on considère, pour un module à connexion $\mathcal{M} = (M, \nabla)$ projectif de type fini sur A à volte inversible, la catégorie abélienne monoïdale $\langle \mathcal{M} \rangle^{\otimes}$ formée des sous-quotients des sommes de tenseurs mixtes sur $\mathcal{M}$; puis on introduit de manière semi-axiomatique le groupe de Galois différentiel $\mathrm{Gal}(\mathcal{M},\omega)$ de $\mathcal{M}$ attaché à un « foncteur fibre » ω. C'est un schéma en groupes affine et plat sur l'anneau des constantes k, de type fini si k est un corps, mais pas en général. L'exemple principal est celui où ω est le foncteur solution dans une extension différentielle convenable d'anneau de constantes k. On introduit aussi le torseur des solutions, et le groupe de Galois différentiel intrinsèque (correspondant au foncteur oubli de la connexion), qu'on décrit en caractéristique p lorsque Ω^1 est commutatif. On établit ensuite diverses fonctorialités des groupes de Galois différentiels ; on en déduit, en § 2.3, le théorème de spécialisation, qui éclaire les phénomènes de confluence, en particulier la confluence d'équations aux (q-)différences vers une équation différentielle.

Les deux derniers paragraphes généralisent la théorie de Picard–Vessiot. Une extension différentielle (A', d') de (A, d) est dite de Picard–Vessiot pour $\mathcal{M}$ si A' est fidèlement plate sur A, (A', d') est simple de corps de constantes k, $\mathcal{M}$ est soluble dans (A', d'), et A' est engendrée comme A-algèbre par $\langle M, (\check{M} \otimes A')^{\nabla}\rangle$ et $\langle \check{M}, (M \otimes A')^{\nabla}\rangle$. Le théorème 3.4.2.3 établit une équivalence entre extensions de Picard–Vessiot et foncteurs fibres sur $\langle\mathcal{M}\rangle^{\otimes}$. On donne ensuite des critères d'existence et d'unicité pour les extensions de Picard–Vessiot (elles apparaissent comme algèbres de fonctions des torseurs de solutions).

Étant donné une extension de Picard–Vessiot $(A', \mathrm{d}')/(A, \mathrm{d})$ pour $\mathcal{M}$, on identifie en § 3.5.1 le groupe des automorphismes de $(A', \mathrm{d}')/(A, \mathrm{d})$ au groupe de Galois différentiel de $\mathcal{M}$ attaché au foncteur solution dans (A', d').

Pour formuler la correspondance galoisienne, il y a lieu de supposer A semi-simple (i.e. produit fini de corps) et d'introduire la notion voisine et « birationnelle » d'extension de Picard–Vessiot fractionnaire ; il s'agit essentiellement de l'anneau total des fractions d'une extension de Picard–Vessiot lorsque cet anneau est semi-simple. Si le corps des constantes est algébriquement clos de caractéristique nulle, la correspondance galoisienne pour les extensions de Picard–Vessiot fractionnaires a lieu sans surprise (§ 3.5.2). Elle unifie la correspondance de Picard–Vessiot différentielle classique et son analogue aux différences, et englobe le cas de systèmes mixtes à plusieurs variables, éventuellement non intégrables.

1. Calcul différentiel, connexions et groupes de Galois. Cinq situations concrètes

1.1. En géométrie différentielle classique

1.1.1. Calcul différentiel extérieur de Cartan–de Rham–Kähler et théorème de Frobenius

Soient X une variété différentiable C^∞ de dimension m, $\mathrm{T}(X)$ son fibré tangent, $\Lambda^*(X)$ l'algèbre extérieure sur le fibré cotangent $\mathrm{T}^\vee(X)$. L'existence du crochet de Lie $[\ ,\ ]$ sur $\mathrm{T}(X)$ permet de définir la différentiation extérieure $d : \Lambda^p(X) \to \Lambda^{p+1}(X)$ par la formule bien connue :

$$d\omega(D_1, \ldots, D_{p+1}) = \sum_1^{p+1} (-)^i D_i\big(\omega(\ldots, \widehat{D_i}, \ldots)\big) \\ + \sum_{i<j} (-)^{i+j} \omega\big([D_i, D_j], \ldots, \widehat{D_i}, \ldots, \widehat{D_j}, \ldots, D_{p+1}\big).$$

Grâce à l'identité de Jacobi satisfaite par $[\ ,\ ]$, on a $d^2 = 0$, ce qui fait de $\Lambda^*(X)$ un fibré en algèbres différentielles graduées (commutatives au sens gradué). Le lemme de Poincaré dit qu'au niveau des faisceaux de sections, le complexe obtenu est acyclique en degré > 0.

Un champ de p-plans Σ sur X est dit *involutif* si chaque fibre Σ_x est stable sous $[\ ,\ ]$. Sous cette condition, le théorème de Frobenius affirme que Σ est le fibré tangent d'un feuilletage :

par tout point $x \in X$ passe une (unique) variété intégrale connexe maximale $X_{\Sigma,x}$ pour Σ (de dimension égale à p).

Traduction en calcul différentiel extérieur : l'application qui associe à Σ son orthogonal $\Sigma^\perp$ dans $\Lambda^*(X)$ est une bijection entre champs de p-plans et idéaux de $\Lambda^*(X)$ localement engendrés par $m-p$ 1-formes indépendantes. De plus, $\Sigma^\perp$ est stable sous d si et seulement si Σ est involutif (*cf.* [49], p. 73). La condition que $X_{\Sigma,x}$ est une variété intégrale se traduit par $(\Sigma^\perp)_{|X_{\Sigma,x}} = 0$.

1.1.2. Connexions et holonomie

Soient G un groupe de Lie et $\pi : P \to X$ un fibré principal à droite sous G. On note t_g la translation par $g \in G$ sur P. Pour tout $p \in P$, on note $\mathrm{V}_p(P)$ l'espace (« vertical ») des vecteurs tangents à la fibre en p, c'est-à-dire $\mathrm{Ker}\pi_{*p}$. Rappelons qu'une connexion $\aleph$ sur P est la donnée pour tout $p \in P$, d'un supplémentaire (« horizontal ») $\mathrm{H}_p(P)$ de $\mathrm{V}_p(P)$ dans $\mathrm{T}_p(P)$, variant de manière C^∞ avec p, tel que $\mathrm{t}_{g_*}(\mathrm{H}_p(P)) = \mathrm{H}_{pg}(P)$. Elle induit un isomorphisme $\mathrm{H}_p(P) \cong \mathrm{T}_{\pi(p)}(X)$. Si C est une courbe C^∞ par morceaux sur X, et x un point de cette courbe, la connexion permet de relever C en une courbe « horizontale » $\widetilde{C}_p$ sur P passant par un point $p \in P$ fixé au-dessus de x : tout vecteur tangent à $\widetilde{C}_p$ est horizontal (on dit aussi « parallèle »). On a $\widetilde{C}_{pg} = \mathrm{t}_g(\widetilde{C}_p)$.

Si C est un *lacet* basé en $x = \pi(p)$, l'extrémité de $\widetilde{C}_p$ est un point de la fibre $\pi^{-1}(x)$; c'est donc le translaté $\mathrm{t}_{g(C)}(p)$ de p par un élément bien défini $g(C)$ de G. Lorsque C varie, les $g(C)$ forment un sous-groupe de Lie $\mathrm{Hol}_p(\aleph)$ de G, le groupe d'*holonomie* pointé en p. Sa composante neutre $\mathrm{Hol}_p^0(\aleph)$ est formée des $g(C)$ avec C contractile. Lorsque p varie, les $\mathrm{Hol}_p(\aleph)$ sont conjugués dans G, si X est connexe. On montre que le fibré principal $\pi : P \to X$ provient en fait d'un fibré principal $\pi' : P' \to X$ de groupe $\mathrm{Hol}_p(\aleph)$ (*cf.* [36], [32]).

Soit $\mathfrak{g}$ l'algèbre de Lie de G. Pour tout $a \in \mathfrak{g}$, notons D_a le champ de vecteurs de P générateur infinitésimal du groupe à un paramètre $s \mapsto \mathrm{t}_{\exp sa}$. C'est un champ de vecteurs vertical, et lorsque a varie, $(D_a)_p$ engendre $\mathrm{V}_p(P)$. On définit une 1-forme ω à valeurs dans $\mathfrak{g}$ par : pour tout $a \in \mathfrak{g}$, $\omega_p((D_a)_p) = a$; $\omega_p(\mathrm{H}_p(P)) = 0$.

Elle vérifie $\mathrm{t}_g^*(\omega) = \mathrm{ad}(g^{-1})\omega$. Dans tout ouvert U trivialisant P ($P_{|U} \cong U \times G$), elle s'écrit sous la forme $\omega_{|U} = g^{-1}\,\mathrm{d}g - \mathrm{ad}(g^{-1})\pi^*\theta_U$, où θ_U est une 1-forme à valeurs dans $\mathfrak{g}$ sur U. Il est clair que la donnée de ω équivaut à celle de $\aleph$.

La 2-forme de *courbure* Ω (à valeurs dans $\mathfrak{g}$) est caractérisée par :

$$\Omega(D, D') = 0 \quad \text{si } D \text{ ou } D' \text{est vertical,}$$
$$\Omega(D, D') = \omega([D, D']) \quad \text{si } D \text{ et } D' \text{ sont horizontaux.}$$

On voit donc que la courbure est identiquement nulle si et seulement si pour tout p, $\mathrm{H}_p(P)$ est un champ de m-plans involutif sur P, ou encore, d'après le théorème de Frobenius, si et seulement si $\aleph$ est *plate*, i.e. $(P, \aleph)$ est localement du type produit $(X \times G, \mathrm{pr}_1^*\mathrm{T}(X))$. Ceci équivaut aussi à la trivialité de $\mathrm{Hol}_p^0(\aleph)$.

Plus généralement, le théorème d'Ambrose–Singer affirme que $\mathrm{Lie}\,\mathrm{Hol}_p^0(\aleph)$ est le sous-espace de $\mathfrak{g}$ engendré par les $\Omega_q(D, D')$, où q décrit tous les points de P qu'on peut joindre à p par une courbe horizontale (*loc. cit.*).

1.1.3. Connexions sur un fibré vectoriel

Lorsque $G = \mathrm{GL}_n$, une connexion sur P induit une « connexion » sur le fibré vectoriel standard E sur X associé à P, c'est-à-dire un opérateur additif

$$\nabla : \Gamma(E) \to \Gamma\big(\mathrm{T}^\vee(X) \otimes E\big)$$

vérifiant la règle de Leibniz. Dans tout ouvert U trivialisant P (donc aussi E), il est donné par $\nabla(e_{|U}) = de_{|U} - \theta_U \otimes e_{|U}$. On peut voir ∇ comme une règle associant à tout champ de vecteurs D sur X un endomorphisme ∇_D de E. Il est clair que la donnée de ∇ équivaut à celle de $\aleph$.

Le *principe d'holonomie* affirme qu'un champ d'objets parallèles définit en chaque point un objet invariant par le groupe d'holonomie et réciproquement. Par exemple, si X possède une métrique riemannienne g, et $E = \mathrm{T}(X)$ muni de la connexion de Levi-Civita, $\mathrm{Hol}_p(\aleph)$ est un sous-groupe du groupe orthogonal $\mathrm{O}(\mathrm{T}_{\pi(p)}(X), g)$ ($\mathrm{Hol}_p^0(\aleph)$ est un sous-groupe compact de $\mathrm{SO}(\mathrm{T}_{\pi(p)}(X), g)$) (*cf.* [12] pour un récent survol).

La *courbure* de ∇ est la 2-forme sur X à valeurs dans $\mathrm{End}\, E$ définie par $R_\nabla(D, D') = [\nabla_D, \nabla_{D'}] - \nabla_{[D,D']}$. Elle s'annule si et seulement si $\aleph$ est plate ; on dit alors que ∇ est *plate* ou *intégrable*. Il revient au même de demander que l'action de $\mathrm{Hol}_p(\nabla)$ sur E_x se factorise à travers $\pi_1(X, x)$ (représentation de *monodromie* en $x = \pi(p)$).

1.2. En caractéristique p

1.2.1. Calcul différentiel extérieur, puissance p-ième, et variantes du théorème de Frobenius

Soient X une variété affine lisse de dimension m sur un corps k parfait de caractéristique $p > 0$, $\mathrm{T}(X)$ l'algèbre de Lie des champs de vecteurs, $\Omega^*(X)$ l'algèbre extérieure sur $\mathrm{T}^\vee(X)$ (formes de Kähler). $\mathrm{T}(X)$ est munie d'une p-structure (l'application puissance p-ième). Cette structure supplémentaire se reflète en calcul différentiel extérieur par l'existence de l' *opération de Cartier* : un isomorphisme d'anneaux gradués $C : \mathrm{H}^*_{\mathrm{dR}}(X) := \mathrm{H}^*(\Omega^*(X)) \to \Omega^*(X)$, d'inverse défini par $C^{-1}(f) = [f^p]$, $C^{-1}(\mathrm{d}f) = [f^{p-1}\,\mathrm{d}f]$.

L'analogue du théorème de Frobenius en caractéristique p est problématique (les feuilletages ne sont pas déterminés par leur partie d'ordre un ...). On peut toutefois obtenir un énoncé net en faisant intervenir la p-structure ([24], 2.4) :

1.2.1.1. PROPOSITION. – *Il y a une correspondance bijective entre sous-fibrés involutifs Σ de $\mathrm{T}(X)$ stables par puissance p-ième, et morphismes finis plats $h : X \to X'$ de hauteur 1, donnée par $\Sigma = \mathrm{T}(X/X')$ (fibré tangent relatif).*

Soit E un fibré vectoriel sur X muni d'une connexion algébrique ∇. Outre la courbure R_∇, il y a une autre obstruction à l'existence de sections horizontales : la *p-courbure* $R_{\nabla,p}$, définie par $R_{\nabla,p}(D) = (\nabla_D)^p - \nabla_{(D^p)}$. Ce sont les seules obstructions, d'après le résultat suivant de Cartier :

1.2.1.2. PROPOSITION. – *Soit $F : X \to X' = X \times_{k, x \mapsto x^p} k$ le Frobenius relatif (élévation des coordonnées de X à la puissance p-ième). Il y a une équivalence de catégories entre fibrés E sur X munis d'une connexion intégrable ∇ à p-courbure nulle, et fibrés E' sur X', donnée par $(E, \nabla) \mapsto E' = F_*(E^\nabla)$, $E = F^*(E')$.*

Voir [30], 5.1.1. Le lien avec la proposition 1.2.1.1 est le suivant : soient P' un fibré principal sous GL_n associé à E', P son image inverse sur X via F, et $h : P \to P'$ le morphisme fini plat induit par F. La connexion ∇ provient d'un sous-fibré de $\mathrm{T}(P)$, involutif et stable par puissance p-ième.

1.2.2. Puissances divisées et lemme de Poincaré

Pour disposer d'un analogue du lemme de Poincaré formel en caractéristique p, on est conduit à introduire des anneaux de séries de puissances divisées (*cf.* [9], IV 5, [5], app.). Soient x un point k-rationnel de X, et $t_1, \ldots, t_m$ des coordonnées locales en x. Le complété formel $\widehat{\mathcal{O}}_x$ de l'anneau local en x s'identifie à $k[[t_1, \ldots, t_m]] \cong S(\mathrm{T}_x(X))^\wedge$, où S désigne l'algèbre symétrique. Le complété à puissances divisées $\mathcal{O}_x^{\mathrm{pd}}$ de $\mathcal{O}_x$ est l'algèbre topologique $(S(\mathrm{T}_x(X)^\vee))^\vee$.

On lui associe un complexe de de Rham

$$\mathcal{O}_x^{\mathrm{pd}} \xrightarrow{\mathrm{d}} (\Omega^1)_x^{\mathrm{pd}} \xrightarrow{\mathrm{d}} (\Omega^2)_x^{\mathrm{pd}} \xrightarrow{\mathrm{d}} \cdots$$

qui est acyclique en degré > 0. L'homomorphisme naturel $\mathcal{O}_x \to \mathcal{O}_x^{\mathrm{pd}}$ a pour noyau l'idéal engendré par les t_i^p. On note $\overline{\mathcal{O}}_x \hookrightarrow \mathcal{O}_x^{\mathrm{pd}}$ l'anneau quotient de $\mathcal{O}_x$, et $\overline{X}_x = \mathrm{Spec}\overline{\mathcal{O}}_x$. Bien que $\overline{X}_x$ soit non réduit, le calcul différentiel extérieur se comporte bien : $\Omega^*(\overline{X}_x) \cong \overline{\mathcal{O}}_x \otimes_k \Lambda^*(\mathrm{T}_x^\vee(X))$, $\mathrm{H}^*_{\mathrm{dR}}(\overline{X}_x) \cong \Lambda^*(\bigoplus k \cdot t_i^{p-1}\,\mathrm{d}t_i)$, et $\Omega^{\mathrm{pair}}(\overline{X}_x)$ admet des puissances divisées.

L'espace $\mathrm{T}(\overline{X}_x)$ est une p-algèbre de Lie simple sur k non classique (analogue en caractéristique p de l'algèbre des champs de vecteurs sur un tore) ; la sous-algèbre de Lie formée des champs de vecteurs qui respectent l'idéal maximal s'identifie à $\mathrm{Lie}\,\mathrm{Aut}(\overline{X}_x)$ (*cf.* [37]).

1.2.2.1. PROPOSITION. – *Toute connexion intégrable ∇ sur $\overline{X}_x$ est soluble dans $\mathcal{O}_x^{\mathrm{pd}}$. Elle est soluble dans $\overline{\mathcal{O}}_x$ si et seulement si sa p-courbure est nulle.*

Ceci se démontre par le « télescopage » habituel : pour toute section e de E,

$$\sum_{(n_1,\ldots,n_m)} \prod (-t_i)^{[n_i]} \prod \Big(\nabla\Big(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t_i}\Big)\Big)^{n_i}(e)$$

est une section horizontale de $E \otimes \mathcal{O}_x^{\mathrm{pd}}$ ($^{[n]}$ désigne une puissance divisée) ; pour la seconde assertion, on note que $R_{\nabla,p} = 0$ si et seulement si tous les $(\nabla(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t_i}))^p$ s'annulent.

1.3. Théorie de Picard–Vessiot

1.3.1. Résumé

Soit K un corps différentiel de caractéristique 0, muni d'une dérivation ∂. On suppose le corps des constantes $k := K^\partial$ algébriquement clos (e.g. $K = \mathbf{C}(z)$, $\partial = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}$). On considère une équation différentielle linéaire

$$(*) \qquad \partial^\mu y + a_1 \partial^{\mu-1} y + \cdots + a_\mu y = 0$$

à coefficients a_i dans K.

Une extension différentielle (L,∂) de (K,∂) est dite de *Picard–Vessiot* si

(i) $k = L^\partial$,

(ii) L est engendré par μ solutions k-indépendantes de $(*)$ et leurs dérivées.

D'après Kolchin, il existe une extension de Picard–Vessiot, unique à isomorphisme près. Le *groupe de Galois différentiel* $\mathrm{Gal}(*) := \mathrm{Aut}_\partial(L/K)$ est un sous-groupe algébrique du groupe des automorphismes du k-espace $\mathrm{Sol}(*)$ des solutions de $(*)$ dans L. On a une correspondance galoisienne entre sous-groupes fermés de $\mathrm{Gal}(*)$ et extensions différentielles intermédiaires $K \subset F \subset L$. (*Voir* [35] pour un exposé concis et décanté de la théorie.)

1.3.2. Point de vue tannakien

Considérons l'anneau de polynômes tordu $K[\partial]$, et posons $\Omega^1 = (K\partial)^\vee$. L'équation différentielle $(*)$ donne lieu à un $K[\partial]$-module :

$$\mathrm{Hom}_k\big(K[\partial]/K[\partial](\partial^\mu + a_1\partial^{\mu-1} + \cdots + a_\mu), K\big).$$

On note M le K-espace de dimension μ sous-jacent. L'action de ∂ sur M se décrit encore comme connexion : application additive $\nabla : M \to \Omega \otimes_k M$ vérifiant la règle de Leibniz.

L'espace des solutions de $(*)$ dans toute extension différentielle F de K s'identifie à l'espace $(M \otimes F)^\nabla$ des sections horizontales de $M \otimes F$.

Le produit tensoriel d'espaces vectoriels à connexion est défini par la règle habituelle

$$\nabla(m_1 \otimes m_2) = \big(\nabla(m_1)\big) \otimes m_2 + m_1 \otimes \big(\nabla(m_2)\big).$$

Le foncteur « solutions dans L » établit alors une équivalence de catégories tensorielles entre la catégorie tensorielle engendrée par (M, ∇) et la catégorie des représentations de dimension finie de $\mathrm{Gal}(*)$ sur k (*cf.* [19], 9, [2]). Nous renvoyons à [43] pour une introduction élémentaire à la dualité de Tannaka algébrique, et à [6] pour un exposé de techniques de calcul du groupe de Galois différentiel.

1.4. Calcul aux différences

1.4.1. Différences finies et polynômes tordus d'Ore

Le calcul aux différences au sens large fait intervenir un endomorphisme σ d'un anneau de fonctions A, et s'intéresse à l'opérateur de différence

$$\delta_\sigma : a \longmapsto \gamma(a^\sigma - a),$$

où γ est un élement convenable de A. La propriété fondamentale d'un tel opérateur est d'être une *σ-dérivation*, i.e. d'être additif et de vérifier la règle

$$\delta_\sigma(ab) = \delta_\sigma(a)b + a^\sigma \delta_\sigma(b).$$

Exemples de σ-dérivations. –
– $\sigma =$ translation de pas h, $(\delta_\sigma(f))(z) = \frac{f(z+h)-f(z)}{h}$,
– $\sigma =$ dilatation de module q, $(\delta_\sigma(f))(z) = \frac{f(qz)-f(z)}{(q-1)z}$,
– $\sigma =$ identité, $\delta_\sigma(f) = \frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}z}$ (correspondant au passage à la limite $h \to 0$ ou $q \to 1$).

La théorie des σ-dérivations a été développée dans cette optique par Ore et d'autres (*cf.* [14]; citons aussi le calcul différentiel galoisien [27] qui s'y rattache). Dans cette approche, on considère l'anneau de polynômes tordu $A[X]_{\sigma,\delta}$ (avec la loi de commutation $Xa = a^\sigma X + \delta(a)$, où δ est une σ-dérivation). On associe alors à tout système linéaire aux différences attaché à σ un A-module (de type fini) M muni d'endomorphisme θ pseudo-linéaire (i.e. vérifiant la règle $\theta(am) = \delta(a)m + a^\sigma\theta(m)$), qu'on interprète comme un $(A[X]_{\sigma,\delta})$-module ; on tire alors parti, lorsque A est un corps, du fait que $A[X]_{\sigma,\delta}$ est *euclidien*, et que tout $(A[X]_{\sigma,\delta})$*-module de type fini est somme directe de sous-modules cycliques* [13]. C'est ainsi, par exemple, que Praagman établit, en prouvant un lemme de Hensel pour les polynômes tordus, la classification formelle des systèmes linéaires aux différences [40] (*voir* aussi [23]).

C'est un point de vue dual, en un certain sens, que nous adopterons : dans le cas $\sigma =$ identité, il s'agirait du calcul différentiel extérieur de Cartan–Kähler–Koszul ; dans le cas général, il s'agira de ses généralisations non commutatives. L'idée de base est d'interpréter les σ-dérivations comme de vraies dérivations à valeurs dans des bimodules non commutatifs.

1.4.2. σ-dérivations et sesquimodules

Soient k un anneau commutatif unitaire et A une k-algèbre commutative unitaire munie d'un k-endomorphisme σ. Rappelons qu'une k-dérivation δ de A à valeurs dans un A-A-bimodule U

est une application k-linéaire vérifiant la règle de Leibniz

$$\delta(ab) = \delta(a)b + a\delta(b).$$

Comme A est supposé commutatif, ces applications forment un A-A-bimodule noté $\mathrm{Der}_k(A,U)$. Soit T un A-module à droite. Considérons-le comme un A-A-bimodule avec la règle

$$a.t = t.a^\sigma \quad \text{pour tout } a \in A \text{ et tout } t \in T.$$

Nous appellerons *sesquimodule* un tel bimodule. Les homomorphismes de sesquimodules coïncident bien entendu avec les homomorphismes de A-modules à droite sous-jacents, et forment eux-mêmes des sesquimodules.

En particulier, soit A_{sesq} le sesquimodule provenant du A-module à droite A. Alors $\mathrm{Der}_k(A, A_{\mathrm{sesq}})$ n'est autre que le sesquimodule des σ-dérivations k-linéaires de A.

1.4.2.1. PROPOSITION. – *Il existe un sesquimodule Ω^1_σ et une dérivation $d \in \mathrm{Der}_k(A, \Omega^1_\sigma)$ tels que pour tout sesquimodule T, l'application*

$$\mathrm{Hom}(\Omega^1_\sigma, T) \to \mathrm{Der}_k(A,T) : h \mapsto h \circ d$$

est un isomorphisme (*de sesquimodules*). *En particulier, les σ-dérivations k-linéaires de A s'identifient aux formes A-linéaires* (*à droite*) *sur Ω^1_σ.*

Démonstration. – Soit $I = \mathrm{Ker}(A \otimes_k A \to A)$ le noyau de la multiplication. On sait que l'application $d : x \mapsto 1 \otimes x - x \otimes 1$ est une k-dérivation de A dans I, et que $I = A \cdot \mathrm{d}A$; de plus, $f \mapsto f \circ d$ définit un isomorphisme $\mathrm{Hom}_{(A,A)}(I,T) \cong \mathrm{Der}_k(A,T)$ (*cf.* [9], III, 10, p. 132). Comme A est commutatif, I est un idéal de $A \otimes_k A$. Utilisons maintenant le fait que T est un sesquimodule. Soit J l'idéal de $A \otimes_k A$ engendré par les éléments $1 \otimes x^\sigma - x \otimes 1$. Modulo l'identification entre A-A-bimodules et $A \otimes_k A$-modules, on a donc $JT = 0$. Compte tenu de l'identification de $I \otimes_k (A \otimes_k A/J)$ et de I/JI, on obtient $\mathrm{Hom}(I/JI, T) \cong \mathrm{Der}_k(A,T)$, et on voit que $\Omega^1_\sigma = I/IJ$ convient.

1.4.2.2. *Exemples.* – (i) $A = k[z]$, $k(z)$, $k[[z]]$ ou $k((z))$. Si $z^\sigma \neq z$, A est stable par $f \mapsto \delta_\sigma(f) = \frac{f^\sigma - f}{z^\sigma - z}$; δ_σ est une base du A-module des σ-dérivations k-linéaires de A (à remplacer par $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}$ si $z^\sigma = z$). Ω^1_σ est le A-module libre de rang un $\mathrm{d}z.A$, et la dérivation $d : A \to \mathrm{d}z.A$ est donnée par $d(f(z)) = \mathrm{d}z \cdot \delta_\sigma(f)$.

(ii) k est un corps, $A = k[z_1, z_2]$, $z_i^\sigma = q_i z_i$, avec $q_i \in k$. En développant l'égalité $d(z_1 z_2) = d(z_2 z_1)$, on trouve la relation $\mathrm{d}z_2(q_1 - 1)z_1 = \mathrm{d}z_1(q_2 - 1)z_2$.

Il y a lieu de distinguer trois cas :

a) $q_1 = q_2 = 1 : \Omega^1_\sigma = \mathrm{d}z_1 A \oplus \mathrm{d}z_2 A$;

b) $q_1 \neq 1$, $q_2 = 1 : \Omega^1_\sigma = \mathrm{d}z_1 A$;

c) $q_1 \neq 1$, $q_2 \neq 1 : \Omega^1_\sigma$ est libre de rang un sur A. Une base δ_σ du A-module des σ-dérivations k-linéaires de A est donnée par $\delta_\sigma(z_1) = (q_1 - 1)z_1$, $\delta_\sigma(z_2) = (q_2 - 1)z_2$.

1.4.3. Systèmes linéaires aux différences et connexions

1.4.3.1. Dans la situation de l'exemple 1.4.2.2 (i), considérons un système linéaire aux différences

$$(**) \qquad \sigma(Y) = \mathcal{A}Y$$

où $\mathcal{A} \in \mathrm{GL}_\mu(A)$.

Pour une présentation plus intrinsèque, [48] introduit l'anneau de polynômes de Laurent tordu $A[X,X^{-1}]_\sigma : Xa = a^\sigma X$ (anneau des opérateurs aux σ-différences), et associe à $(**)$ le $A[X,X^{-1}]_\sigma$-module $M = A^\mu$, où X agit via un endomorphisme σ-linéaire Φ représenté par $\mathcal{A}^{-1}$ dans la base canonique $(m_1,\ldots,m_\mu)$. Le système $(**)$ équivaut à dire que les $\sum_i Y_{ij}m_i$ constituent une base formée de points fixes de Φ.

Supposons que $\frac{\mathcal{A}-1}{z^\sigma - z}$ soit à coefficients dans A. Le système $(**)$ s'écrit encore sous la forme :

$$\delta_\sigma(Y) = -\frac{\mathcal{A}^{-1}-1}{z^\sigma - z}Y^\sigma.$$

En termes plus intrinsèques, on munit M de la connexion $\nabla : M \to \Omega^1_\sigma \otimes_A M$ définie par :

$$\nabla(m) = \mathrm{d}z \otimes \frac{\Phi - \mathrm{id}}{z^\sigma - z}(m).$$

En vertu de la structure de sesquimodule de Ω^1_σ, elle vérifie la règle de Leibniz

$$\nabla(am) = a\nabla(m) + da \otimes m.$$

Réciproquement, la donnée de ∇ permet de retrouver Φ ; le noyau de ∇ est constitué des points fixes de Φ.

Ce formalisme des connexions fournit non seulement un cadre algébrique unifié pour l'étude des équations différentielles et des équations aux différences, mais encore un cadre algébrique commode pour étudier la « confluence » des équations aux q-différences vers une équation différentielle lorsque q tend vers 1 : prendre par exemple $k = \mathbf{C}[[q-1]]$, $A = k[[z]][\frac{1}{z}]$.

1.4.3.2. Dans un cadre plus général, soient A une k-algèbre commutative unitaire munie d'un k-endomorphisme σ, γ un élément de A, $\delta_{\sigma,\gamma}$ la σ-dérivation $a \mapsto \gamma(a^\sigma - a)$, vue comme un dérivation $A \to A_{\mathrm{sesq}}$.

Soit M un A-module muni d'un endomorphisme σ-linéaire Φ. On lui associe la connexion $\nabla : M \to A_{\mathrm{sesq}} \otimes_A M$ définie par :

$$\nabla(m) = 1 \otimes \gamma(\Phi - \mathrm{id})(m).$$

Elle vérifie la règle de Leibniz

$$\nabla(am) = a\nabla(m) + \delta_{\sigma,\gamma}(a) \otimes m.$$

1.4.3.3. *Exemple : F-isocristaux.* – Soient k_0 un corps parfait de caractéristique p, A le corps des fractions de l'anneau des vecteurs de Witt de k_0, σ l'endomorphisme de Frobenius de A. Un F-isocristal sur k_0 est un A-espace vectoriel de dimension finie M muni d'un automorphisme σ-linéaire Φ. Ils forment une catégorie tannakienne sur $\mathbf{Q}_p$. On peut les interpréter comme connexions non commutatives, et considérer les résultats de [41], VI, 3.2, 3.4, comme des calculs de groupes de Galois différentiels.

1.4.4. Équations linéaires mixtes (différentielles-aux différences)

1.4.4.1. On considère une k-algèbre A (commutative unitaire), munie d'endomorphismes $\sigma_1,\ldots,\sigma_m$. Pour tout $i \in \{1,\ldots,m\}$, on se donne un A-A-bimodule quotient de $\Omega^1_{\sigma_i}$. On a donc un homomorphisme canonique de A-A-bimodules

$$I = \mathrm{Ker}(A \otimes_k A \to A) \longrightarrow \bigoplus \Omega^1_{\sigma_i}$$

dont on notera simplement Ω^1 l'image, et une dérivation canonique

$$d : A \longrightarrow \Omega^1$$

telle que $\Omega^1 = \mathrm{d}A \cdot A$ $(= A \cdot \mathrm{d}A)$.

Cette situation correspond à la situation étudiée par Bialynicki-Birula [8], qui se limite au cas où A est un corps de caractéristique 0 (outre des endomorphismes de A, cet auteur se donne aussi une famille de dérivations ; elles sont prises en compte ici dans Ω^1_{id}). Elle recouvre, semble-t-il, toutes celles où interviennent des systèmes linéaires mixtes différentiels-aux différences, qu'on interprétera en termes de connexions $\nabla : M \to \Omega^1 \otimes_A M$ en généralisant la construction ci-dessus. On a donc codé une famille d'endomorphismes ou dérivations de A en une seule dérivation d (mais à valeurs dans un bimodule qui n'est pas forcément A).

1.4.4.2. *Exemples.* – (i) $A = k[z_1, z_2, \ldots, z_m]$ (ou un localisé/complété convenable), $\sigma_i(z_j) = z_j$ si $i \neq j$, $\sigma_i(z_i)$ est fonction de la variable z_i seule. Alors les $\delta_i : f \mapsto \frac{f^{\sigma_i} - f}{z^{\sigma_i} - z}$ (resp. $\frac{\partial f}{\partial z_i}$ si $\sigma_i = \mathrm{id}$) commutent deux à deux. On prend $\Omega^1 = \bigoplus \Omega^1_{\sigma_i} \cong \bigoplus \mathrm{d}z_i.A$, et d est donnée par $\mathrm{d}f = \sum \mathrm{d}z_i.\delta_i(f)$.

Comme cas particulier de cet exemple, en choisissant $A = \mathbf{Q}(a, b, c, z)$, $\sigma_1 : a \mapsto a + 1$, $\sigma_2 : b \mapsto b + 1$, $\sigma_3 : c \mapsto c + 1$, $\sigma_4 = \mathrm{id}$, $\delta_i = \sigma_i - \mathrm{id}$ ($i \leqslant 3$), $\delta_4 = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}$, on traitera de manière uniforme les relations de contiguïté et l'équation différentielle pour la fonction hypergéométrique de Gauss ${}_2F_1(a, b; c; z)$.

(ii) Généralisant § 1.4.3.2, les F-isocristaux sur une base affine lisse, ou (dans un langage différent mais à peu près équivalent) les équations différentielles linéaires p-adiques munies d'une structure de Frobenius forte, s'interprètent comme des exemples de telles connexions « mixtes ».

1.5. Aperçu sur le calcul différentiel quantique d'A. Connes

1.5.1. L'idée générale ([16], IV) est de « quantifier » le calcul différentiel en remplaçant la différentielle classique $\mathrm{d}f$ par une différentielle opératorielle $\mathrm{d}f = i\,[F, f]$. Ici, f est un élément arbitraire d'une $\mathbf{C}$-algèbre involutive $(A, *)$ d'opérateurs d'un espace de Hilbert $\mathfrak{H}$, et F est un opérateur auto-adjoint de carré nul de $\mathfrak{H}$. On impose aux $\mathrm{d}f$ d'être compacts (ou seulement, suivant la situation, p-sommables). Variante $\mathbf{Z}/2$-graduée : $\mathfrak{H} = \mathfrak{H}^{\pm}$, F est impair et $[\ ,\ ]$ est un supercommutateur.

L'algèbre différentielle graduée Ω^* du calcul différentiel quantique s'obtient en posant $\Omega^n = \left\{ \sum a^0\, \mathrm{d}a^1 \cdots \mathrm{d}a^n,\ a^i \in A \right\}$. La trace (régularisée) des opérateurs remplace l'intégration des formes.

L'exemple de base est celui où $A = \mathrm{C}^\infty(X)$ est l'algèbre des fonctions sur une variété spinorielle X, $\mathfrak{H}$ est l'espace $\mathrm{L}^2(X, \mathcal{S})$ des sections de carré intégrable du fibré des spineurs sur X, et F est le signe $D|D|^{-1}$ de l'opérateur de Dirac D (auto-adjoint et non borné). On rappelle que la distance géodésique riemannienne sur X s'obtient par la formule $d(x, x') = \sup\{|x(f) - x'(f)|,\, f \in A,\, \|[D, f]\| \leqslant 1\}$, x et x' étant vus comme caractères de A.

1.5.2. Dans cet ordre d'idées, Connes a donné une présentation géométrique du modèle de Weinberg–Salam des interactions électro-faibles ([15], V). L'espace X choisi est somme disjointe de deux copies M et M' d'une variété spinorielle compacte de dimension 4, placées à très courte distance ℓ. L'opérateur de Dirac est modifié en sorte que

$$i\,[D, (a, a')] = \begin{pmatrix} d(a, a') & i(a' - a)/\ell \\ i(a - a')/\ell & d(a, a') \end{pmatrix};$$

ainsi, la condition $\|[D,(a,a')]\| \leqslant 1$ équivaut, à une constante près, à $|a(x)-a(x')| \leqslant d(x,x')$, $|a'(x)-a'(x')| \leqslant d(x,x')$, $|a(x)-a'(x)| \leqslant \ell$ pour tous x, $x' \in M$.

Nous avons là une situation « semi-classique » où $A = \mathrm{C}^\infty(X) = \mathrm{C}^\infty(M)^2$ est commutative, mais où le bimodule Ω^1 ne l'est pas ; l'apparition de différentielles discrètes $i(a'-a)/\ell$ a inspiré l'interprétation des différences finies proposée ci-dessus (§ 1.4) comme différentielles non commutatives.

Dans *loc. cit.*, les objets géométriques primordiaux sont le fibré $\mathcal{E}$ non trivial de fibre $\mathbf{C}$ sur M et $\mathbf{C}^2$ sur M', l'espace des connexions unitaires sur $\mathcal{E}$ de « trace » nulle sur M' (le groupe $\mathrm{U}(1) \times \mathrm{SU}(2)$ de Weinberg–Salam apparaît alors comme groupe de symétrie de ces connexions), et une fonctionnelle d'action sur ces connexions construite à partir de leur courbure. En collaboration avec Lott ([16], VI), Connes est ensuite parvenu à une présentation géométrique du modèle standard (groupe de symétrie $\mathrm{U}(1) \times \mathrm{SU}(2) \times \mathrm{SU}(3)$), où l'algèbre A n'est toutefois plus commutative.

2. Calcul différentiel non commutatif et connexions

2.1. Algèbres différentielles graduées et anneaux différentiels généralisés

2.1.1. A.d.g. Le calcul différentiel non commutatif s'est beaucoup développé récemment à partir de trois sources : topologie algébrique [28], [29], géométrie non commutative [15], [16] – en particulier à propos du modèle de Connes–Lott du modèle standard (Dubois–Violette [22], Kastler, Kerner, Madore, Masson, Michor, Mourad [38], Testard ...) – et groupes quantiques (Cartier, Klimyk, Maltsiniotis, Schmüdgen ...).

Le cadre général est celui des algèbres différentielles graduées (a.d.g.). On part d'une k-algèbre associative unitaire A, non nécessairement commutative, et on considère une a.d.g. $\Omega^* = \bigoplus_{n\geqslant 0} \Omega^n$, avec $\Omega^0 = A$. Il est sous-entendu que la différentielle d est de degré 1 (et bien entendu $d(k.1) = 0$, $d^2 = 0$ et $d(\omega.\omega') = d\omega.\omega' + (-1)^{\deg\omega}\omega.d\omega'$). Le noyau C de d dans A est une sous-k-algèbre, l'algèbre des *constantes*.

2.1.1.1. *Exemples. –* (i) Il existe une a.d.g. *universelle* $\Omega^*_{\mathrm{univ}} = \Omega^*_{\mathrm{univ}}(A/C)$ avec $\Omega^0 = A$, $\mathrm{Ker}_{\Omega^0}(d) = C$: c'est l'algèbre tensorielle sur le A-A-bimodule $\Omega^1_{\mathrm{univ}} = I = \mathrm{Ker}(A \otimes_C A \to A)$ noyau de la multiplication (avec $d : x \in A \mapsto 1 \otimes x - x \otimes 1$). Comme A-module à gauche, Ω^n_{univ} s'identifie à $A \otimes_C (A/C) \otimes_C \cdots \otimes_C (A/C)$ par l'application $a_0 da_1 \cdots da_n \mapsto a_0 \otimes (a_1 \bmod C) \otimes \cdots \otimes (a_n \bmod C)$ (*cf.* [28], I).

Par exemple, si A est l'anneau des fonctions sur une k-variété algébrique affine X, et $C = k$, alors les éléments de Ω^1_{univ} s'identifient aux fonctions $f(x,x')$ sur $X \times X$ qui s'annulent sur la diagonale : $\sum adb$ correspond à la fonction $f(x,x') = \sum a(x)(b(x') - b(x))$; on peut ainsi voir Ω^*_{univ} comme un « calcul aux différences universel ».

(ii) Si A est commutative, il existe une a.d.g. *commutative* (au sens gradué) universelle avec $\Omega^0 = A$, $\mathrm{Ker}_{\Omega^0}(d) = C$: c'est le quotient de Ω^*_{univ} par l'idéal bilatère différentiel engendré par $I^2 \subset I$, qui n'est autre que l'algèbre antisymétrique sur le module des différentielles de Kähler $\Omega^1_{A/C} = I/I^2$ (au niveau de $\Omega^1_{A/C}$, l'antisymétrie résulte de l'application de d à la formule $a.db = db.a$). En caractéristique $\neq 2$, c'est donc l'a.d.g. de de Rham $\Omega^*_{\mathrm{dR}}(A/C) = \Lambda^*\Omega^1_{A/C}$.

(iii) Dans la situation de § 1.4.2, il est naturel d'introduire l'a.d.g. Ω^*_σ quotient de Ω^*_{univ} par l'idéal bilatère différentiel engendré par JI ; son terme de degré 1 est le sesquimodule Ω^1_σ considéré dans la proposition 1.4.2.1. Remarquons que Ω^n_σ est un sesquimodule relativement à l'endomorphisme σ^n de A (point de vue proche de celui des ε-différentielles de [34] ; *voir* aussi [44]).

Dans le cas « à une variable », exemple 1.4.2.2 (i), le calcul $\mathrm{d}z.\mathrm{d}z = \mathrm{d}(z.\mathrm{d}z) = \mathrm{d}(\mathrm{d}z.z^\sigma) = -\mathrm{d}z.\mathrm{d}z.\delta_\sigma(z^\sigma)$ montre qu'en caractéristique $\neq 2$, *et si* $\sigma(z) \neq -z$, alors $\Omega^{>1} = 0$.

(iv) De même, dans le cas « à plusieurs variables », exemple 1.4.4.2, on prend pour Ω^* le quotient de Ω^*_{univ} par l'idéal bilatère différentiel engendré par $\mathrm{Ker}(\Omega^1_{\mathrm{univ}} \to \bigoplus \Omega^1_{\sigma_i})$. Dans Ω^2, on observe alors que $\mathrm{d}z_i.\mathrm{d}z_j = \mathrm{d}(z_i.\mathrm{d}z_j) = \mathrm{d}(\mathrm{d}z_j.z_i^{\sigma_j}) = -\mathrm{d}z_j.\mathrm{d}z_i$ si $i \neq j$, et $2\,\mathrm{d}z_i.\mathrm{d}z_i = 0$ si $\sigma_i(z_i) \neq -z_i$; on en tire alors aisément, en caractéristique $\neq 2$, que si $\sigma_i(z_i) \neq -z_i$ pour tout i, $\Omega^2 \cong \bigoplus_{i<j} \mathrm{d}z_i.\mathrm{d}z_j.A$ (comme A-module à droite).

2.1.1.2. On dit qu'une a.d.g. Ω^* est *réduite* ou engendrée par Ω^0 si c'est la plus petite sous-a.d.g. de cran 0 égal à Ω^0. Il revient au même de dire que Ω^* est quotient de Ω^*_{univ}.

2.1.2. Anneaux différentiels (généralisés)

2.1.2.1. La recherche d'un cadre unifié où inscrire les exemples de § 1 incite à généraliser la notion d'anneau différentiel. Nous appellerons *anneau différentiel* (généralisé) la donnée d'une dérivation

$$d : A \longrightarrow \Omega^1$$

d'une k-algèbre associative unitaire A à valeurs dans un A-A-bimodule Ω^1 (il est sous-entendu que le k-k-bimodule sous-jacent à Ω^1 est commutatif ; autrement dit, Ω^1 est un $A \otimes_k A^{\mathrm{op}}$-module à gauche). La notion usuelle d'anneau différentiel correspond au cas $\Omega^1 = A$.

Par abréviation abusive, nous parlerons quelquefois de l'anneau différentiel (A, d), ou même A. Nous noterons couramment C la k-algèbre des constantes $\mathrm{Ker}(d)$.

2.1.2.2. On dit que l'anneau différentiel $(A \xrightarrow{\mathrm{d}} \Omega^1)$ est *réduit* si l'image de d engendre Ω^1 comme A-module à droite. Par la règle de Leibniz $d(ab) = d(a)b + ad(b)$, on voit qu'elle engendre aussi Ω^1 comme A-module à gauche, i.e.

$$\Omega^1 = \mathrm{d}A.A = A.\mathrm{d}A = A.\mathrm{d}A.A.$$

2.1.2.3. Un *morphisme* d'anneaux différentiels $(A \xrightarrow{\mathrm{d}} \Omega^1) \to (A' \xrightarrow{d'} \Omega'^1)$ est un couple $u = (u^0, u^1)$ formé d'un morphisme de k-algèbres unitaires $A \xrightarrow{u^0} A'$ et d'une application $\Omega^1 \xrightarrow{u^1} \Omega'^1$ vérifiant

$$u^1 \circ d = d' \circ u^0, \quad u^1(a\omega b) = u^0(a)u^1(\omega)u^0(b)$$

pour tous a, $b \in A$, $\omega \in \Omega^1$.

L'un des objets de la théorie de Galois différentielle (généralisée) est l'étude des automorphismes de certains anneaux différentiels, *cf.* infra 3.3.2.

Toute a.d.g. fournit, par restriction à ses termes de degré 0 et 1, un anneau différentiel au sens ci-dessus. Ceci définit un foncteur « d'oubli ».

2.1.2.4. LEMME. – *Le foncteur d'oubli* $\{$*a.d.g. réduites*$\} \to \{$*anneaux différentiels réduits*$\}$ *admet un adjoint à gauche « a.d.g. », qui associe à l'anneau différentiel* $A \xrightarrow{\mathrm{d}} \Omega^1$ *l'algèbre différentielle graduée* $\Omega^* =$ *« a.d.g. »*$(A \xrightarrow{\mathrm{d}} \Omega^1)$ *quotient de* $\Omega^*_{\mathrm{univ}}(A/k)$ *par l'idéal bilatère différentiel engendré par* $\mathrm{Ker}(\Omega^1_{\mathrm{univ}} \to \Omega^1)$.

En effet, pour toute a.d.g. Ω'^*, la surjectivité de

$$\mathrm{Hom}_{\mathrm{a.d.g.}}\big(\text{« a.d.g. »}\big(A \xrightarrow{\mathrm{d}} \Omega^1\big), \Omega'^*\big) \longrightarrow \mathrm{Mor}\big(A \xrightarrow{\mathrm{d}} \Omega^1,\ A' \xrightarrow{d'} \Omega'^1\big)$$

résulte aisément de la propriété universelle de $\Omega^*_{\text{univ}}(A/k)$, et l'injectivité de ce qu'un morphisme « a.d.g. »$(A \xrightarrow{\mathrm{d}} \Omega^1) \to \Omega'^*$ est déterminé par sa valeur sur $\Omega^0 = A$ et sur $\Omega^1 = A.\,\mathrm{d}A.A$. Noter qu'on aurait pu remplacer $\Omega^*_{\text{univ}}(A/k)$ par $\Omega^*_{\text{univ}}(A/C)$.

2.1.2.5. Une *extension différentielle* est un morphisme d'anneaux différentiels $u = (u^0, u^1)$ avec u^0 injectif, et où $\Omega'^1 \cong \Omega^1 \otimes_A A'$ comme A'-module à droite (la dissymétrie est liée à notre choix de privilégier, ultérieurement, les connexions à gauche).

2.1.3. Idéaux différentiels

2.1.3.1. Le lemme précédent suggère de définir la notion d'*idéal différentiel généralisé* de $(A \xrightarrow{\mathrm{d}} \Omega^1)$ comme trace en degré $\leqslant 1$ d'un idéal différentiel (bilatère) de

$$\big(\text{« a.d.g. »}(A \xrightarrow{\mathrm{d}} \Omega^1), \Omega'^*\big),$$

ou ce qui revient au même, comme noyau d'un morphisme d'anneaux différentiels $(A \xrightarrow{\mathrm{d}} \Omega^1) \to (A' \xrightarrow{d'} \Omega'^1)$. Explicitement, c'est donc la donnée d'un idéal bilatère I de A et d'un sous-A-A-bimodule I^1 de Ω^1 tel que $dI \subset I^1$.

2.1.3.2. Cette notion naturelle du point de vue catégorique semble peu utile en pratique. Aussi réserverons-nous le nom d'*idéal différentiel* (au sens strict) aux idéaux différentiels généralisés $(I \xrightarrow{\mathrm{d}} I^1)$ qui vérifient $I^1 = \Omega^1.I$, l'image de $\Omega^1 \otimes I$ dans Ω^1 (noter la dissymétrie droite-gauche). C'est donc le noyau d'un morphisme d'anneaux différentiels $u = (u^0, u^1)$ avec $u^1 \otimes 1 : \Omega^1 \otimes A' \to \Omega'^1$ bijectif. Comme l'idéal différentiel est alors déterminé par I, nous dirons aussi, par abus, que I est un idéal différentiel de A.

Considérons le cas particulier où le A-module à droite Ω^1 est projectif de type fini (c'est le cas dans tous les exemples intéressants). Il admet donc un « dual à gauche » ${}^\vee\Omega^1$, qui est un A-A-bimodule. On dispose des homomorphismes de A-A-bimodules habituels (*cf.* [11], 1)

$$\varepsilon : {}^\vee\Omega^1 \otimes_A \Omega^1 \to A \quad \text{(évaluation, notée aussi } \langle\ ,\ \rangle)$$
$$\eta : A \to \Omega^1 \otimes_A {}^\vee\Omega^1 \quad \text{(coévaluation)}$$

vérifiant

$$(\mathrm{id} \otimes \varepsilon)(\eta \otimes \mathrm{id}) = \mathrm{id}_{\Omega^1}, \qquad (\varepsilon \otimes \mathrm{id})(\mathrm{id} \otimes \eta) = \mathrm{id}_{({}^\vee\Omega^1)}.$$

2.1.3.3. LEMME. – *Supposons Ω^1 fidèle et projectif de type fini à droite sur A. Un idéal bilatère I de A est un idéal différentiel si et seulement si $\langle {}^\vee\Omega^1, dI\rangle \subset I$, ou encore si et seulement si $\langle {}^\vee\Omega^1, dI.A\rangle = I$.*

Il suffit de prouver la seconde assertion. Remarquons que $J = \langle {}^\vee\Omega^1, dI.A\rangle = \varepsilon({}^\vee\Omega^1 \otimes A.dI.A)$ est un idéal bilatère de A. On a $AdI.A = (\varepsilon \otimes \mathrm{id})(\mathrm{id} \otimes \eta)(AdI.A) \subset \Omega^1 \otimes J \cong \Omega^1 J$. Il reste à démontrer que J contient I. Puisque Ω^1 est fidèle et projectif de type fini à droite sur A, il suffit de faire voir que $\Omega^1 \otimes I \subset \Omega^1 \otimes J$. Or pour tous $a, b \in A$, $i \in I$, $adb.i = ad(bi) - ab.di \in \Omega^1 \otimes J$.

Dans le cas classique où A et Ω^1 sont commutatifs, les éléments de ${}^\vee\Omega^1$ s'interprètent comme des dérivations de A, et on retrouve une notion familière d'idéal différentiel : idéal stable sous ${}^\vee\Omega^1 \subset \mathrm{Der}(A)$.

2.1.3.4. Un anneau différentiel (A, d) est dit *simple* si ses seuls idéaux différentiels sont 0 et A.

Exemples. – Les anneaux différentiels de fonctions analytiques sur une variété analytique lisse (réelle ou complexe, voire p-adique rigide) sont simples, mais pas les anneaux différentiels de fonctions C^∞ (les fonctions infiniment plates en un point forment un idéal différentiel).

– De même, les anneaux locaux d'une variété algébrique X sur un corps k de caractéristique nulle sont différentiellement simples (Ω^1 étant pris égal au module des différentielles de Kähler) si X est lisse, mais pas en général.

– Les anneaux différentiels (de caractéristique p) $\overline{\mathcal{O}}_x$ et $\mathcal{O}_x^{\mathrm{pd}}$ considérés en § 1.2.2 sont simples.

– Dans la situation d'un anneau aux différences (A,σ) (1.4.2), on prendra garde que la simplicité de $A\to\Omega^1_\sigma$ n'équivaut pas à ce que les seuls idéaux de A stables par σ sont 0 et A. Par exemple, cet anneau différentiel est simple dans le cas de $A=k[z]$ muni de la dilatation $\sigma z=qz$, bien que zA soit un idéal stable sous σ.

– Si (A',d') est extension d'un anneau différentiel simple (A,d) (*cf.* 2.1.2.5), tout idéal différentiel de (A',d') distinct de A' évite A privé de 0 ; en particulier (A',d') est simple si A' est une localisation de A.

– Soit $k=\mathbf{C}[[x,y]]$, $A=k[z_1,z_2]/(xz_1+yz_2-1)$, $\Omega^1=\Omega^1_{A/k}$. Alors $C=k$ et l'idéal maximal $\mathfrak{p}$ de k vérifie $\mathfrak{p}\,A=A$. On a toutefois le résultat suivant :

2.1.3.5. LEMME. – *Supposons que A est commutatif.*

(i) *Si (A,d) est simple, alors C est un corps.*

(ii) *Soit $Q(A)$ l'anneau total des fractions de A (i.e. le localisé de A par le monoïde de tous ses éléments non-diviseurs de 0). Alors d admet un unique prolongement en une dérivation $d\colon Q(A)\to Q(A)\otimes\Omega^1\otimes Q(A)$. Supposons en outre que Ω^1 soit un A-module à droite sans torsion, que $\Omega^1\otimes_A Q(A)\to Q(A)\otimes_A\Omega^1\otimes_A Q(A)$ soit surjectif, et que (A,d) soit simple. Alors $(Q(A),d)$ est simple, et son corps de constantes est C.*

Démonstration. – (i) Si c est un élément non nul de C, la simplicité de (A,d) entraîne que $cA=A$, donc c a un inverse, qui est nécessairement une constante.

(ii) On peut voir A comme sous-k-algèbre de $Q(A)$. L'existence et l'unicité du prolongement de d à $Q(A)$ sont claires : pour a inversible, on a la formule $d(a^{-1})=-a^{-1}\otimes da\otimes a^{-1}$. Sous les hypothèses que Ω^1 soit un A-module à droite sans torsion et que $\Omega^1\otimes_A Q(A)\to Q(A)\otimes_A\Omega^1\otimes_A Q(A)$ soit surjectif, on a $d\colon Q(A)\to\Omega^1\otimes_A Q(A)$, et $\Omega^1\hookrightarrow\Omega^1\otimes_A Q(A)$. On voit alors que l'intersection de tout idéal différentiel de $Q(A)$ avec A est un idéal différentiel de A. Si (A,d) est simple, on en déduit qu'il en est de même de $(Q(A),d)$. Par ailleurs, soit c une constante non nulle de $Q(A)$. Alors $cA\cap A$ est un idéal différentiel non nul de A, donc égal à A ; on en déduit $1/c\in A$, d'où $1/c\in C$ et $c\in C$.

2.1.3.6. Pour traiter du cas où A est commutatif mais où C n'est pas un corps (c'est-à-dire, en pratique, du cas de familles d'équations différentielles ou aux différences), il y a lieu de remplacer la notion d'anneau différentiel simple par celle d'anneau différentiel « simple par couches ». Pour tout idéal premier $\mathfrak{p}$ de C, notons $\kappa(\mathfrak{p})$ le corps de fractions de $C/\mathfrak{p}$.

Nous dirons que (A,d) est *simple par couches* si A est fidèlement plat sur C, et si pour tout idéal premier $\mathfrak{p}$ de C, l'anneau différentiel $\kappa(\mathfrak{p})\otimes_C A\to\kappa(\mathfrak{p})\otimes_C A.\mathrm{d}A$ induit est simple, et l'anneau des constantes de $\kappa(\mathfrak{p})\otimes_C A$ est $\kappa(\mathfrak{p})$.

Exemples. – Tout anneau différentiel simple est simple par couches.

– Si (A,d) est simple par couches, il en est de même de l'anneau différentiel $(A,\mathrm{d})\otimes C'$ obtenu par changement d'anneau de constantes $C\to C'$, dès lors que C' est une localisation ou un quotient de C ; en effet, tout idéal premier de C' provient alors d'un idéal premier de C.

– Soit $A=(\mathbf{C}[[q-1]])[z]$ (ou un localisé), $\sigma=$ dilatation de module q, $\Omega^1=\Omega^1_\sigma$ (*cf.* exemple 1.4.2.2 (i), 2.4.3 ; situation correspondant à la confluence des équations aux q-différences vers une équation différentielle). C'est un anneau différentiel simple par couches : le point est que $\delta_\sigma(z^n) = n_q.z^{n-1}$ et $n_q = 1 + q + \cdots + q^{n-1}$ est une unité dans $\mathbf{C}[[q-1]]$).

– Les anneaux différentiels dont l'anneau des constantes est de caractéristique mixte ne sont généralement pas simples par couches, e.g. $\mathbf{Z}[z] \xrightarrow{\mathrm{d}} \mathbf{Z}[z]\,\mathrm{d}z$ (l'anneau des constantes de $(\mathbf{Z}/p\mathbf{Z})[z]$ est $(\mathbf{Z}/p\mathbf{Z})[z^p]$).

2.1.3.7. *Remarque*. – Toutes ces notions se faisceautisent sans difficulté. En fait, la plupart des constructions qui suivent gardent un sens dans tout topos.

2.2. Connexions

2.2.1. Définition

Soient $A \xrightarrow{\mathrm{d}} \Omega^1$ un anneau différentiel (généralisé), C son anneau de constantes. Soit M un A-module à gauche. Une *connexion* sur M est une application k-linéaire

$$\nabla : M \longrightarrow \Omega^1 \otimes_A M$$

vérifiant la règle de Leibniz

$$\nabla(am) = a\nabla(m) + da \otimes m.$$

On peut aussi, selon Atiyah, définir une connexion en introduisant le module $\mathcal{P}^1(M)$ des *jets à gauche d'ordre un* [28], 1.8 : comme C-module, $\mathcal{P}^1(M)$ n'est autre que $M \oplus (\Omega^1 \otimes_A M)$; on le munit d'une structure de A-module à gauche en posant

$$a(m, \omega \otimes n) = (am, da \otimes m + a\omega \otimes n).$$

La donnée d'une connexion ∇ équivaut alors à celle d'un scindage $D = (\mathrm{id}, \nabla)$ de la suite naturelle de A-modules

$$0 \longrightarrow \Omega^1 \otimes_A M \longrightarrow \mathcal{P}^1(M) \xrightarrow{\mathrm{pr}_1} M \longrightarrow 0.$$

Un morphisme de A-modules à connexion est un homomorphisme de A-modules *horizontal*, i.e. compatible aux connexions. Les A-modules à connexion forment une catégorie abélienne k-linéaire (et même C-linéaire à gauche).

2.2.1.1. *Exemples*. – $A \xrightarrow{\mathrm{d}} \Omega^1$ définit une connexion sur A, appelée connexion triviale. Plus généralement, on qualifie de *triviale* toute connexion isomorphe à une connexion de la forme $d \otimes \mathrm{id}_N$ sur $A \otimes_C N$, où N est un C-module à gauche quelconque.

Pour tout A-module à connexion (M, ∇), on peut identifier $\mathrm{Mor}((A, \mathrm{d}), (M, \nabla))$ au C-module $M^\nabla := \mathrm{Ker}\nabla$. Les éléments de M^∇ sont dits *horizontaux* (en souvenir de la situation géométrique rappelée en 1.1.2).

– Si Ω^1 est projectif de type fini à droite, alors les idéaux différentiels de $A \xrightarrow{\mathrm{d}} \Omega^1$, § 2.1.3.2, correspondent exactement aux sous-modules à connexion de la connexion triviale (A, d).

– Si $\Omega^1 = A$, la notion de connexion se spécialise en la notion usuelle de module différentiel : un endomorphisme k-linéaire ∇ de M vérifiant $\nabla(am) = da.m + a\nabla(m)$.

2.2.1.2. *Remarque*. – Lorsque Ω^1 est projectif de type fini à droite (de dual à gauche ${}^\vee\Omega^1$), la donnée d'une connexion ∇ équivaut à celle d'une application k-linéaire ${}^\vee\Omega^1 \to \mathrm{End}_k M$, $D \mapsto \nabla_D$ vérifiant

$$\nabla_D(am) = \nabla_{D.a}(m) + \langle D, da\rangle.m \quad \big(\text{en posant } \nabla_D(m) = \langle D, \nabla(m)\rangle \in M\big).$$

En général les opérateurs ∇_D ne vérifient pas la règle de Leibniz, d'où la supériorité de la formulation en termes de connexions.

Rappelons, pour mémoire des signes, le lemme bien connu suivant :

2.2.1.3. LEMME. – *Pour toute a.d.g.* Ω^* *« prolongeant »* $A \xrightarrow{\mathrm{d}} \Omega^1$*,* ∇ *s'étend en une unique application* C*-linéaire* $\Omega^* \otimes_A M \to \Omega^{*+1} \otimes_A M$*, encore notée* ∇*, vérifiant pour tout* $\omega, \omega' \in \Omega^*$*, et tout* $m \in M$ *l'identité*

$$\nabla\big(\omega.(\omega' \otimes m)\big) = d\omega.(\omega' \otimes m) + (-1)^{\deg \omega}\omega.\nabla(\omega' \otimes m).$$

L'existence se déduit facilement du calcul

$$\begin{aligned}\nabla\big(\omega.(\omega' \otimes m)\big) &= \nabla\big((\omega.\omega') \otimes m\big) = d(\omega.\omega') \otimes m + (-1)^{\deg \omega + \deg \omega'}\omega.\omega'\nabla(m)\\ &= d\omega.\omega' \otimes m + (-1)^{\deg \omega} d\omega' \otimes m + (-1)^{\deg \omega + \deg \omega'}\omega.\omega'\nabla(m)\\ &= d\omega.(\omega' \otimes m) + (-1)^{\deg \omega}\omega.\nabla(\omega' \otimes m).\end{aligned}$$

2.2.1.4. *Remarque*. – Dans le cas des connexions sur les modules à droite ([28], 1.10, [39], 2), la règle des signes définissant l'extension $M \otimes_A \Omega^* \to M \otimes_A \Omega^{*+1}$ est

$$\nabla\big((m \otimes \omega).\omega'\big) = \nabla(m \otimes \omega).\omega' + (-1)^{\deg \omega}(m \otimes \omega).d\omega'.$$

Il y a donc lieu de prendre garde, même dans le cas classique où Ω^* est graduée commutative, aux changements de signe lorsqu'on écrit les connexions comme applications à valeurs dans $\Omega^1 \otimes M$ ou dans $M \otimes \Omega^1$.

2.2.2. Fonctorialité

Considérons un morphisme d'anneaux différentiels

$$u = \big(u^0, u^1\big) : \big(A \xrightarrow{\mathrm{d}} \Omega^1\big) \longrightarrow \big(A' \xrightarrow{d'} \Omega'^1\big)$$

(*cf.* 2.1.2.2). À tout A-module à connexion (M, ∇), on associe un A'-module à connexion $u^*(M, \nabla) = (A' \otimes_A M, \nabla')$, où ∇' est définie par

$$\nabla'(a' \otimes m) = a'.\big(u^1 \otimes \mathrm{id}_M\big)\big(\nabla(m)\big) + da' \otimes m.$$

On le note aussi $(M_{A'}, \nabla_{A'})$.

Le scindage correspondant (id, ∇') de la suite naturelle de A-modules

$$0 \longrightarrow \Omega'^1 \otimes_A M \longrightarrow \mathcal{P}^1(A' \otimes_A M) \xrightarrow{\mathrm{pr}_1} A' \otimes_A M \longrightarrow 0$$

n'est autre que le prolongement A'-linéaire de l'application A-linéaire composée

$$M \xrightarrow{(\mathrm{id}, \nabla)} \mathcal{P}^1(M) \longrightarrow \mathcal{P}^1(A' \otimes_A M).$$

2.2.3. Courbure, intégrabilité, descente

Le lemme suivant ([28], 1.13, [39], 2.5) est bien connu, surtout dans le cas commutatif

2.2.3.1. LEMME. – *La composition* ∇^2 *de* ∇ *par elle-même*

$$\Omega^* \otimes_A M \longrightarrow \Omega^{*+2} \otimes_A M$$

est un homomorphisme de Ω^*-module à gauche, uniquement déterminé par sa restriction $M \to \Omega^2 \otimes_A M$.

Lorsque Ω^* est l'a.d.g. canonique attachée à $A \xrightarrow{\mathrm{d}} \Omega^1$, 2.1.2.3, on appelle cet homomorphisme $M \to \Omega^2 \otimes_A M$ (la *courbure* de ∇).

Le lemme suivant est immédiat :

2.2.3.2. LEMME. – *Soit $u = (u^0, u^1) : (A \xrightarrow{\mathrm{d}} \Omega^1) \to (A' \xrightarrow{d'} \Omega'^1)$ un morphisme d'anneaux différentiels. La courbure de $u^*(M, \nabla)$ est l'homomorphisme composé de $\mathrm{id}_{A'} \otimes \nabla^2 : A' \otimes M \to A' \otimes \Omega^2 \otimes_A M$ et de l'homomorphisme naturel $A' \otimes \Omega^2 \otimes_A M \to \Omega'^2 \otimes_A M$.*

On dit que ∇ est *plate* ou *intégrable* si sa courbure est nulle.

2.2.3.3. *Exemples.* – Une connexion *triviale*, i.e. de la forme $d \otimes \mathrm{id}_N$ sur $A \otimes_C N$, où N est un C-module à gauche quelconque, est toujours intégrable.

– Si A est commutatif de caractéristique $\neq 2$ (*cf.* 2.1.1, et si Ω^1 est un bimodule commutatif projectif de type fini, l'intégrabilité d'une connexion ∇ équivaut à ce que l'application k-linéaire ${}^\vee\Omega^1 \to \mathrm{End}_k M$, $D \mapsto \nabla_D$ commute au crochet de Lie.

Examinons la situation de 2.1.1.1 (iv) : calcul aux différences à plusieurs variables, en caractéristique $\neq 2$, avec $\sigma_i(z_i) \neq \pm z_i$, de sorte que $\Omega^2 \cong \bigoplus_{i<j} \mathrm{d}z_i.\, \mathrm{d}z_j.A$. Considérons un système linéaire aux différences

$$(***) \qquad \sigma_i(Y) = \mathcal{A}_{(i)}.Y,$$

où $\mathcal{A}_{(i)} \in \mathrm{GL}_\mu(A)$. Suivant 2.4.3, 2.4.4, associons-lui le module libre $M = \bigoplus_{k=1}^{k=\mu} A.m_k$ muni de la connexion suivante (*cf.* 1.4.3) :

$$\nabla(m_k) = \bigoplus_{i,l} \mathrm{d}z_i \otimes \frac{\mathcal{A}^{-1}_{(i)lk} - \delta_{lk}}{z_i^{\sigma_i} - z_i} m_l.$$

Un calcul direct montre que sa courbure est donnée par

$$\nabla^2(m_k) = \bigoplus_{i<j,\, l} \mathrm{d}z_i.\, \mathrm{d}z_j \otimes \frac{\mathcal{R}_{(ij)lk}}{(z_i^{\sigma_i} - z_i)(z_j^{\sigma_j} - z_j)} m_l,$$

où $\mathcal{R}_{(ij)} = \mathcal{A}^{-1}_{(i)} \mathcal{A}^{-1\,\sigma_i}_{(j)} - \mathcal{A}^{-1}_{(j)} \mathcal{A}^{-1\,\sigma_j}_{(i)}$, $i < j$. La connexion est donc intégrable si et seulement si $\mathcal{A}^{\sigma_i}_{(j)} \mathcal{A}_{(i)} = \mathcal{A}^{\sigma_j}_{(i)} \mathcal{A}_{(j)}$, pour tous i, j.

2.2.3.4. Dans le cas intégrable, on dispose d'un complexe de C-modules $\Omega^* \otimes_A M$, appelé *complexe de de Rham non commutatif de* (M, ∇). Sa cohomologie apparaît par exemple dans les travaux d'Aomoto sur les systèmes hypergéométriques ou q-hypergéométriques, *cf.* e.g. [4] (*voir* aussi [46]).

2.2.3.5. Dans [39], 3.12, on trouve un dictionnaire entre données de recollement pour un A-module M relativement à A/C, et connexions ∇ sur M (avec $\Omega^1 = \Omega^1_{\mathrm{univ}}(A/C)$). La condition de cocycle pour la donnée de recollement correspond à l'intégrabilité de ∇ ; on obtient alors une donnée de descente effective : M provient d'un C-module.

2.2.4. Biconnexions et voltes

Supposons maintenant que M soit un A-A-bimodule, tel que le k-k-bimodule sous-jacent soit commutatif. Rappelons qu'un *opérateur d'ordre un* de M vers un autre A-A-bimodule N

est une application k-linéaire $D: M \to N$ telle que pour tout $a \in A$, $m \mapsto D(am) - aD(m)$ est un homomorphisme de A-modules à droite ; il revient au même de dire que pour tout $b \in A$, $m \mapsto D(mb) - D(m)b$ est un homomorphisme de A-modules à gauche ([21], Lemma 1 ; le point est qu'une translation à droite arbitraire $\mid b$ commute à toute translation à gauche $a \mid$, de sorte que $[[D, a\,|], |\,b] = [[D, |\,b], a\,|]$). Le résultat suivant est un cas particulier de [21], Theorem 1 :

2.2.4.1. PROPOSITION. – *Il existe un unique homomorphisme de bimodules* $\varphi_s(D): \Omega^1_{\mathrm{univ}} \otimes_A M \to N$ (*resp.* $\varphi_d(D): M \otimes_A \Omega^1_{\mathrm{univ}} \to N$) *tel que l'on ait*

$$D(amb) = aD(m)b + \varphi_s(D)(d_{\mathrm{univ}}a \otimes m)b + a\varphi_d(D)(m \otimes d_{\mathrm{univ}}b).$$

Par exemple, $\varphi_d(D)$ est induit par l'homomorphisme de bimodules $M \otimes_k \Omega^1_{\mathrm{univ}} \to N$ défini par $m \otimes db.a \mapsto D(mb)a - D(m)ba$.

Il est clair que toute connexion (à gauche) sur M est un opérateur d'ordre 1 de M vers $N = \Omega^1 \otimes_A M$, avec $\varphi_s(\nabla) = \pi \otimes \mathrm{id}_M$, où π est l'homomorphisme canonique $\Omega^1_{\mathrm{univ}} \to \Omega^1$.

Démonstration de la proposition 2.2.4.1. – Abrégeons provisoirement l'expression $D(am) - aD(m)$ (resp. $D(mb) - D(m)b$) en $a \mid m$ (resp. $m \mid b$). Puisque D est un opérateur d'ordre un, on a

$$D(amb) - D(am)b - aD(mb) + aD(m)b = 0,$$

c'est-à-dire

$$D(amb) = D(am)b + (a \mid m)b + a(m \mid b).$$

Rappelons que $\Omega^1_{\mathrm{univ}} \cong A/k \otimes_k A$ comme A-module à droite. Puisque l'application $m \mapsto (m \mid b)$ est A-linéaire à gauche et nulle pour $b \in k$, on peut définir un homomorphisme de bimodules $\psi_d(D): M \otimes_k \Omega^1_{\mathrm{univ}} \to N$ en posant $\psi_d(D)(m \otimes d_{\mathrm{univ}}b \otimes c) = (m \mid b)c$. Pour tout $a \in A$, on a

$$\begin{aligned}\psi_d(D)(m \otimes a d_{\mathrm{univ}}b \otimes c) &= \psi_d(D)(m \otimes d_{\mathrm{univ}}(ab) \otimes c - d_{\mathrm{univ}}a \otimes bc)\\ &= (m \mid ab)c - (m \mid a)bc = (ma \mid b)c = \psi_d(D)(ma \otimes d_{\mathrm{univ}}b \otimes c).\end{aligned}$$

Donc $\psi_d(D)$ définit bien un homomorphisme de bimodules $\varphi_d(D): M \otimes_A \Omega^1_{\mathrm{univ}} \to N$. On procède de même de l'autre côté pour définir $\varphi_s(D)$, et on a bien $D(amb) = D(am)b + \varphi_s(D)(d_{\mathrm{univ}}a \otimes m)b + a\varphi_d(D)(m \otimes d_{\mathrm{univ}}b)$. L'unicité de $\varphi_s(D)$ (resp. $\varphi_d(D)$) se voit en posant $b = 1$ (resp. $a = 1$) dans cette formule).

À la suite du travail de J. Mourad [38] sur l'adaptation en géométrie non commutative du concept de connexion linéaire en géométrie différentielle (connexion sur le fibré tangent), M. Dubois-Violette et T. Masson [21] ont dégagé la notion de « bimodule Ω-connection ». Nous reprendrons cette notion dans une tout autre perspective, en la rebaptisant simplement biconnexion :

2.2.4.2. DEFINITION. – On suppose que l'anneau différentiel $(A \xrightarrow{\mathrm{d}} \Omega^1)$ est réduit, i.e. $\Omega^1 = \mathrm{d}A.A$ (ainsi π est surjective). Une *biconnexion* (à gauche) est une connexion ∇ pour laquelle $\varphi_d(\nabla)$ *se factorise à travers* $\mathrm{id}_M \otimes \pi$. Il donne alors lieu à un homomorphisme canonique de bimodules

$$\phi(\nabla) = \phi_D(\nabla): M \otimes_A \Omega^1 \longrightarrow \Omega^1 \otimes_A M$$

que nous appellerons la *volte* (droite-gauche) de la biconnexion ∇.

2.2.4.3. *Exemples.* – (i) La connexion triviale $d : A \to \Omega^1$: la volte est l'unique prolongement bilinéaire de l'application $1_A \otimes \omega \to \omega \otimes 1_A$ (en particulier, c'est un isomorphisme).

(ii) Le cas classique où Ω^* est graduée commutative, et M est un bimodule commutatif ; la volte est alors l'isomorphisme naïf d'échange des facteurs $M \otimes_A \Omega^1 \to \Omega^1 \otimes_A M$.

(iii) Si (A', d') est une extension différentielle de (A, d) (*cf.* 2.1.2.5), on peut considérer (A', d') comme un A-A-bimodule à biconnexion ; sa volte est l'unique prolongement bilinéaire de l'application $1_{A'} \otimes \omega \to \omega \otimes 1_{A'}$.

(iv) *Systèmes aux différences* (1.4.3) : $A = k(z)$, $\sigma =$ endomorphisme de A avec $z^\sigma \neq z$. On peut écrire toute connexion sous la forme $\nabla(m) = \mathrm{d}z \otimes \frac{\Phi - \mathrm{id}}{z^\sigma - z}(m)$, où $\Phi : M \to M$ est σ-linéaire. C'est toujours une biconnexion, dont la volte s'écrit

$$\phi(\nabla)(m \otimes da) = da \otimes \Phi(m).$$

Dans le cas trivial $M = A, \Phi = \sigma$, on observe que c'est bien un isomorphisme, même si σ n'est pas injectif.

Revenons au cas général.

2.2.4.4. LEMME. – *Soit $f : (M_1, \nabla_1) \to (M_2, \nabla_2)$ un morphisme de biconnexions* (*i.e. homomorphisme de A-A-bimodules horizontal, ∇_1 et ∇_2 étant des biconnexions*). *On a $\phi(\nabla_2)(f \otimes \mathrm{id}_{\Omega^1}) = (\mathrm{id}_{\Omega^1} \otimes f)\phi(\nabla_1)$.*

Cela résulte immédiatement de la définition $\varphi_d(\nabla)(m \otimes db.a) = D(mb)a - D(m)ba$.

2.2.4.5. LEMME. – *Soit $(M', \nabla') \xrightarrow{f} (M, \nabla) \xrightarrow{g} (M'', \nabla'')$ une suite exacte de A-A-bimodules à connexion. On suppose que ∇ est une biconnexion. Alors* :

(i) *si g est surjective, ∇'' est une biconnexion. De plus, si ∇' est une biconnexion, et si les voltes de ∇ et ∇' sont inversibles, il en est de même de ∇''* ;

(ii) *si f est injective, et fait du bimodule M' un facteur direct de M, alors ∇' est une biconnexion. De plus, si ∇'' est une biconnexion, et si les voltes de ∇ et ∇'' sont inversibles, il en est de même de ∇'* ;

(iii) *si Ω^1 est plat à droite sur A, les A-A-bimodules à biconnexion forment une catégorie abélienne k-linéaire* ;

(iv) *si Ω^1 est plat aussi à gauche, alors la sous-catégorie pleine formée des biconnexions à volte inversible est stable par sous-quotients.*

Démonstration. – Via φ_d, on obtient un morphisme de suites exactes de bimodules

$$\begin{tikzcd} M' \otimes \Omega^1_{\mathrm{univ}} \arrow[r] \arrow[d] & M \otimes \Omega^1_{\mathrm{univ}} \arrow[r] \arrow[d] & M'' \otimes \Omega^1_{\mathrm{univ}} \arrow[d] \\ \Omega^1 \otimes M' \arrow[r] & \Omega^1 \otimes M \arrow[r] & \Omega^1 \otimes M'' \end{tikzcd}$$

Si g est surjective, il se complète en

$$\begin{tikzcd} M' \otimes \Omega^1_{\mathrm{univ}} \arrow[r] \arrow[d] & M \otimes \Omega^1_{\mathrm{univ}} \arrow[r] \arrow[d] & M'' \otimes \Omega^1_{\mathrm{univ}} \arrow[r] \arrow[d] & 0 \arrow[d] \\ \Omega^1 \otimes M' \arrow[r] & \Omega^1 \otimes M \arrow[r] & \Omega^1 \otimes M'' \arrow[r] & 0 \end{tikzcd}$$

Comme ∇ est une biconnexion, ce morphisme se factorise par $M' \otimes \Omega^1_{\mathrm{univ}} \to M \otimes \Omega^1 \to M'' \otimes \Omega^1 \to 0$ (resp. par $M' \otimes \Omega^1 \to M \otimes \Omega^1 \to M'' \otimes \Omega^1 \to 0$ si Ω^1 est plat à droite et f est injective, puisqu'alors $0 \to \Omega^1 \otimes M' \to \Omega^1 \otimes M \to \Omega^1 \otimes M'' \to 0$ est exacte). Une chasse au diagramme aisée prouve alors (i) et (iii).

Si f est injective, et si f fait du bimodule M' un facteur direct de M (ou si Ω^1 est plat à droite et à gauche), on a un morphisme de suites exactes

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] \arrow[d] & M' \otimes \Omega^1_{\mathrm{univ}} \arrow[r] \arrow[d] & M \otimes \Omega^1_{\mathrm{univ}} \arrow[r] \arrow[d] & M'' \otimes \Omega^1_{\mathrm{univ}} \arrow[d] \\
0 \arrow[r] & \Omega^1 \otimes M' \arrow[r] & \Omega^1 \otimes M \arrow[r] & \Omega^1 \otimes M''
\end{tikzcd}$$

Comme ∇ est une biconnexion, on voit immédiatement qu'il en est de même de ∇', et que si ∇'' est une biconnexion, le morphisme de suites exactes précédent se factorise par $0 \to M' \otimes \Omega^1 \to M \otimes \Omega^1 \to M'' \otimes \Omega^1$. Une chasse au diagramme aisée prouve alors (ii) et (iv).

2.2.4.6. *Remarque*. – Voici un léger raffinement, utile plus bas (2.4.5). Supposons que ∇, ∇', ∇'' sont des biconnexions. Supposons Ω^1 plat à droite sur A, f injective, g surjective. On alors un morphisme de suites exactes

$$\begin{tikzcd}
 & M' \otimes \Omega^1 \arrow[r] \arrow[d] & M \otimes \Omega^1 \arrow[r] \arrow[d] & M'' \otimes \Omega^1 \arrow[r] \arrow[d] & 0 \arrow[d] \\
0 \arrow[r] & \Omega^1 \otimes M' \arrow[r] & \Omega^1 \otimes M \arrow[r] & \Omega^1 \otimes M'' \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

Supposons $\phi(\nabla)$ inversible. Alors pour que $\phi(\nabla'')$ soit inversible, il faut et il suffit que l'homomorphisme $\mathrm{Im}(M' \otimes \Omega^1 \to M \otimes \Omega^1) \to \Omega^1 \otimes M'$ induit par $\phi(\nabla')$ soit inversible.

2.3. Produit tensoriel

2.3.1. Définition

Dans le cas classique commutatif, la connexion canonique sur le produit tensoriel de deux modules à connexion est donnée par la règle bien connue $\nabla_1 \otimes \mathrm{id} + \mathrm{id} \otimes \nabla_2$, l'isomorphisme naïf d'échange $M_1 \otimes_A \Omega^1 \to \Omega^1 \otimes_A M_1$ étant sous-entendu dans le second terme $\mathrm{id} \otimes \nabla_2$.

Dans le cas où Ω^1 est un bimodule non commutatif, il n'y a plus d'isomorphisme d'échange et la formule perd son sens. On peut toutefois la « sauver », dans le cas des biconnexions, en remplaçant l'isomorphisme naïf d'échange par $\phi(\nabla_1)$.

Soient donc (M_1, ∇_1) et (M_2, ∇_2) deux A-A-bimodules à biconnexion.

2.3.1.1. LEMME. – *Il existe une* (*unique*) *connexion* (*à gauche*) ∇ *sur* $M_1 \otimes_A M_2$ *telle que* $\nabla(m_1 \otimes m_2) = \nabla_1(m_1) \otimes m_2 + (\phi(\nabla_1) \otimes \mathrm{id}_2)(m_1 \otimes \nabla_2(m_2))$ (*en d'autres termes,* $\nabla = \nabla_1 \otimes \mathrm{id}_2 + (\phi(\nabla_1) \otimes \mathrm{id}_2) \circ (\mathrm{id}_1 \otimes \nabla_2)$).

C'est une biconnexion, dont la volte est $\phi(\nabla) = (\phi(\nabla_1) \otimes \mathrm{id}_2) \circ (\mathrm{id}_1 \otimes \phi(\nabla_2))$.

Démonstration. – Pour prouver la première assertion, il est commode d'utiliser la définition des connexions en termes de jets : considérons les homomorphismes de A-modules à gauche

$$D_1 = (\mathrm{id}, \nabla_1) : M_1 \to \mathcal{P}^1(M_1) \quad \text{et} \quad \mathcal{P}^1(M_1) \otimes M_2 \overset{\cong}{\to} \mathcal{P}^1(M_1 \otimes M_2).$$

Alors $D = (\mathrm{id}, \nabla)$ n'est autre que la composition

$$M_1 \otimes M_2 \xrightarrow{(D_1,\nabla_2)} \big(\mathcal{P}^1(M_1)\otimes M_2\big) \oplus \big(M_1 \otimes \Omega^1 \otimes M_2\big) \xrightarrow{(\mathrm{id},\phi(\nabla_1)\otimes \mathrm{id}_2)}$$
$$\longrightarrow \big(\mathcal{P}^1(M_1)\otimes M_2\big) \oplus \big(\Omega^1 \otimes M_1 \otimes M_2\big) \xrightarrow{+} \mathcal{P}^1(M_1)\otimes M_2 \xrightarrow{\cong} \mathcal{P}^1(M_1\otimes M_2)$$

qui est clairement une section A-linéaire de $\mathcal{P}^1(M_1\otimes M_2) \to M_1\otimes M_2$. On obtient donc une connexion bien définie ∇. La seconde assertion résulte du calcul

$$\nabla\big((m_1\otimes m_2)a\big) - \nabla(m_1\otimes m_2).a = \nabla_1(m_1)\otimes m_2a + \big(\phi(\nabla_1)\otimes \mathrm{id}_2\big)\big(m_1\otimes \nabla_2(m_2a)\big)$$
$$- \nabla_1(m_1)\otimes m_2a - \big(\phi(\nabla_1)\otimes \mathrm{id}_2\big)\big(m_1\otimes \nabla_2(m_2)a\big),$$

où deux termes se compensent.

2.3.1.2. LEMME. – *Le produit tensoriel ainsi défini est un bifoncteur sur les A-A-bimodules à biconnexion.*

Cela résulte immédiatement de la définition du produit tensoriel et du lemme 2.2.4.4.

2.3.1.3. *Exemples.* – Dans la situation de 2.2.4.3 (iii), et si (M,∇) est un A-A-bimodule à biconnexion, l'image inverse $u^*(M,\nabla)$ peut être vue comme produit tensoriel de biconnexions $(A',\mathrm{d}')\otimes(M,\nabla)$.

– Systèmes aux différences (1.4.3) : si ∇_1 et ∇_2 sont deux connexions correspondant aux endomorphismes σ-linéaires Φ_1 et Φ_2 respectivement, leur produit tensoriel est la connexion correspondant à $\Phi_1\otimes\Phi_2$.

J'ignore si, en général, le produit tensoriel de deux (bi)connexions intégrables est intégrable.

2.3.2. Contraintes d'unité et d'associativité

Ce sont celles induites par celles des A-A-bimodules.

– L'unité est la connexion triviale $\mathbf{1} = (A,\mathrm{d})$. On a $\operatorname{End}\mathbf{1} = C\cap Z(A) \supset k$, où $Z(A)$ désigne le centre de A.

Le $\operatorname{End}\mathbf{1}$-$\operatorname{End}\mathbf{1}$-bimodule sous-jacent à Ω^1 est commutatif, en vertu du calcul $c.da = d(ca) = d(ac) = da.c$, $c\in C\cap Z(A)$.

– Pour l'associativité, on remarque que

$$\nabla_1\otimes \mathrm{id}_{23} + \big(\phi(\nabla_1)\otimes\mathrm{id}_{23}\big)\big(\mathrm{id}_1\otimes\big(\nabla_2\otimes\mathrm{id}_3 + \big(\phi(\nabla_2)\otimes\mathrm{id}_3\big)\big)(\mathrm{id}_2\otimes\nabla_3)\big)$$
$$= \nabla_1\otimes\mathrm{id}_{23} + \big(\phi(\nabla_1)\otimes\mathrm{id}_2\big)\big((\mathrm{id}_1\otimes\nabla_2)\otimes\mathrm{id}_3\big) + \big(\phi(\nabla_{12})\otimes\mathrm{id}_3\big)(\mathrm{id}_{12}\otimes\nabla_3),$$

compte tenu de $\phi(\nabla_{12}) = (\phi(\nabla_1)\otimes\mathrm{id}_2)\circ(\mathrm{id}_1\otimes\phi(\nabla_2))$.

On résume ces résultats comme suit :

2.3.2.1. PROPOSITION. – *Les A-A-bimodules à biconnexion* (*à gauche*) *forment une catégorie k-linéaire monoïdale.*

2.3.3. Dualité

Ce point est un peu plus délicat. Il y a lieu de distinguer entre duaux à gauche et à droite (*cf.* [11] pour une discussion générale des duaux).

2.3.3.1. Préduaux. Soit (M_d,∇_d) un A-module à connexion *à droite* avec M projectif de type fini. Le A-module à gauche ${}^*M_s = \operatorname{Hom}_A(M_d,A)$ est muni d'une connexion (à gauche) ${}^*\nabla_s$ de la manière suivante. Identifiant les A-modules à gauche $\Omega^1\otimes^* M_s$ et $\operatorname{Hom}^A(M_d,\Omega^1_d)$ (homomorphismes de A-modules à droite), on définit ${}^*\nabla_s({}^*m)\in\Omega^1\otimes^* M_s$ par

$$\big\langle {}^*\nabla_s({}^*m), m\big\rangle = d\langle {}^*m, m\rangle - \big\langle {}^*m, \nabla_d(m)\big\rangle \in \Omega^1.$$

Plus précisément, $(\mathrm{id}_{\Omega^1} \otimes \varepsilon)({}^*\nabla_s({}^*m) \otimes m) = d(\varepsilon({}^*m \otimes m)) - (\varepsilon \otimes \mathrm{id}_{\Omega^1})({}^*m \otimes \nabla_d(m))$, où ε est l'homomorphisme d'évaluation.

On vérifie immédiatement que c'est une connexion à gauche ; $({}^*M_s, {}^*\nabla_s)$ est le prédual de (M_d, ∇_d).

De plus, si M_d est sous-jacent à un A-A-bimodule et si ∇_d est une biconnexion, alors ${}^*\nabla_s$ est une biconnexion à gauche, dont la volte vérifie $\langle \phi_d({}^*\nabla_s)({}^*m \otimes da), m\rangle = \langle {}^*m, \phi_s(\nabla_d)(da \otimes m)\rangle$.

Partant d'un A-module à connexion à gauche (M_s, ∇_s), on définit de même son prédual (M_d^*, ∇_d^*) ; ∇_d^* est une connexion sur le A-module à droite $M_d^* = \mathrm{Hom}_A(M_s, A)$.

2.3.3.2. Des biconnexions à gauche aux biconnexions à droite. Considérons à présent un bimodule à biconnexion (à gauche) (M, ∇_s) dont la volte $\phi_d(\nabla_s)$ est *inversible*. On peut alors munir M d'une connexion à droite ∇_d définie par

$$\nabla_d = \big(\phi_d(\nabla_s)\big)^{-1} \circ \nabla_s.$$

C'est bien une connexion (à droite) :

$$\nabla_d(ma) - \nabla_d(m)a = \big(\phi_d(\nabla_s)\big)^{-1}\big(\nabla_s(ma) - \nabla_s(m)a\big) = m \otimes da,$$

et même une biconnexion (à droite), de volte $\phi_s(\nabla_d) = (\phi_d(\nabla_s))^{-1}$.

Partant d'un bimodule à biconnexion à droite (M, ∇_d) dont la volte $\phi_s(\nabla_d)$ est *inversible*, on construit de même une biconnexion à gauche ∇_s sur M.

2.3.3.3. Duaux. Soit (M, ∇) un A-A-bimodule à biconnexion *à gauche*. On suppose que le A-module *à droite* M_d sous-jacent à M est *projectif de type fini*. Soit ${}^\vee M$ son dual ; c'est un A-A-bimodule, projectif de type fini à gauche.

Une connexion à gauche ${}^\vee\nabla = {}^\vee\nabla_s$ sur ${}^\vee M$ est dite *duale à gauche* de ∇ si c'est une biconnexion, et si les homomorphismes d'évaluation

$$\varepsilon : {}^\vee M \otimes_A M \longrightarrow A$$

et de coévaluation

$$\eta : A \longrightarrow M \otimes_A {}^\vee M$$

sont horizontaux, i.e. induisent des morphismes de connexion.

2.3.3.4. LEMME. – *Une connexion duale à gauche ${}^\vee\nabla$ existe si et seulement si la volte $\phi(\nabla)$ est inversible. Elle est donnée par la formule ${}^\vee\nabla = {}^*\nabla_s$, où ${}^*\nabla_s$ est la préduale de la biconnexion à droite ∇_d sur M attachée à la biconnexion à gauche ∇. On a donc*

$$\big\langle {}^\vee\nabla(\check m), m\big\rangle = d\langle \check m, m\rangle - \big\langle \check m, \phi(\nabla)^{-1}\nabla(m)\big\rangle \in \Omega^1.$$

Sa volte vérifie

$$\big\langle \phi\big({}^\vee\nabla\big)(\check m \otimes da), m\big\rangle = \big\langle \check m, \phi(\nabla)^{-1}(da \otimes m)\big\rangle.$$

Démonstration. – Supposons d'abord $\phi(\nabla)$ inversible, et définissons ${}^\vee\nabla$ par la formule ci-dessus. Un calcul direct montre que c'est une biconnexion, de volte donnée par la formule indiquée. Il s'agit de faire voir que ε et η sont horizontaux. Posons $\nabla(m) = \sum \omega_j \otimes m_j$. On a :

$$
\begin{aligned}
&(\mathrm{id}\otimes\varepsilon)\big(\nabla_{{}^\vee M\otimes M}(\check m\otimes m)\big)\\
&\quad=(\mathrm{id}\otimes\varepsilon)\big({}^\vee\nabla(\check m)\otimes m\big)+(\mathrm{id}\otimes\varepsilon)\big(\big(\phi\big({}^\vee\nabla\big)\otimes\mathrm{id}_M\big)\big(\check m\otimes\nabla(m)\big)\big)\\
&\quad=d\langle\check m,m\rangle-\Big\langle\check m,(\phi(\nabla))^{-1}\Big(\sum\omega_j\otimes m_j\Big)\Big\rangle+\Big\langle\Big(\sum\phi\big({}^\vee\nabla\big)(\check m\otimes\omega_j)\Big),m_j\Big\rangle\\
&\quad=d\langle\check m,m\rangle.
\end{aligned}
$$

Il s'agit d'autre part de faire voir que $\eta(1)=\sum m_i\otimes\check m_i$ est horizontal. Or,

$$
\nabla_{M\otimes{}^\vee M}\Big(\sum m_i\otimes\check m_i\Big)=\sum\nabla(m_i)\otimes\check m_i+(\phi(\nabla)\otimes\mathrm{id})\Big(\sum m_i\otimes{}^\vee\nabla(\check m_i)\Big).
$$

En « évaluant » contre un élément quelconque $m\in M$, on trouve

$$
\begin{aligned}
&\sum\nabla(m_i)\langle\check m_i,m\rangle+\phi(\nabla)\Big(\sum m_i\otimes d\langle\check m_i,m\rangle\Big)-\phi(\nabla)\Big(\sum m_i\otimes\big\langle\check m_i,\phi(\nabla)^{-1}\nabla(m)\big\rangle\Big)\\
&\quad=\sum\nabla(m_i)\langle\check m_i,m\rangle+\sum\nabla\big(m_i.\langle\check m_i,m\rangle\big)-\sum\nabla(m_i).\langle\check m_i,m\rangle-\nabla(m)=0.
\end{aligned}
$$

On conclut que la connexion ${}^\vee\nabla$ est bien duale à gauche de ∇.

Réciproquement, supposons que la biconnexion duale à gauche ${}^\vee\nabla$ existe. Soit $\sum n_i\otimes\omega_i$ un élément de $M\otimes\Omega^1$ tel que $\phi(\nabla)(\sum n_i\otimes\omega_i)=0$, et soit $\check m$ un élément quelconque de ${}^\vee M$. On a

$$
\sum\langle\check m,n_i\rangle\omega_i=(\mathrm{id}_{\Omega^1}\otimes\varepsilon)\circ\big((\phi({}^\vee\nabla)\otimes\mathrm{id}_M)\circ(\mathrm{id}_{{}^\vee M}\otimes\phi(\nabla))\big)\Big(\sum\check m\otimes n_i\otimes\omega_i\Big)=0;
$$

on en tire que $\sum n_i\otimes\omega_i=0$, et l'injectivité de $\phi(\nabla)$.

D'autre part, en écrivant comme ci-dessus $\eta(1)=\sum m_i\otimes\check m_i$, on a pour tout $m\in M$,

$$
\begin{aligned}
\omega\otimes m&=\sum\langle\omega\otimes m_i\otimes\check m_i,m\rangle=\big\langle(\mathrm{id}_{\Omega^1}\otimes\eta)(\omega),m\big\rangle=\big\langle(\mathrm{id}_{\Omega^1}\otimes\eta)(\omega),m\big\rangle\\
&=\big\langle\big(\phi(\nabla)\otimes\mathrm{id}_{{}^\vee M}\big)\circ\big(\mathrm{id}_M\otimes\phi({}^\vee\nabla)\big)\big(\eta(1)\otimes\omega\big),m\big\rangle\in\phi(\nabla)\big(M\otimes\Omega^1\big),
\end{aligned}
$$

ce qui montre la surjectivité de $\phi(\nabla)$. Ainsi $\phi(\nabla)$ est inversible. Or, la biconnexion duale à gauche ${}^\vee\nabla$ est unique, elle est donc donnée par la formule du lemme.

Une construction symétrique associe à tout bimodule à biconnexion à gauche (M,∇) tel que M soit projectif de type fini comme A-module *à gauche* et tel que la volte du prédual ∇^* soit inversible, une biconnexion à gauche duale à droite $\nabla^\vee$ sur le dual à droite $M^\vee=\mathrm{Hom}(M_s,A)$.

2.3.3.5. *Exemple*. – *Systèmes aux différences* (1.4.3) : supposons pour simplifier que σ soit un *automorphisme* de A. Un module à connexion (M,∇) admet un dual si et seulement si l'endomorphisme σ-linéaire Φ de M correspondant est inversible. Dans ce cas, ${}^\vee\nabla=\nabla^\vee$ correspond à ${}^t\Phi^{-1}$.

2.4. La situation semi-classique

2.4.1. Nous appellerons *situation semi-classique* celle où l'on considère un anneau différentiel réduit $A\to\Omega^1=\mathrm{d}A.A$ avec A *commutatif*, et où les A-modules à gauche munis d'une connexion sont toujours considérés comme A-A-bimodules commutatifs ; le A-A-bimodule Ω^1 n'est toutefois pas supposé commutatif. En termes imagés, on a un espace de base classique, la « quantification » ne portant que sur l'espace cotangent.

2.4.1.1. PROPOSITION. – *Dans la situation semi-classique, toute connexion est une biconnexion.*

Démonstration. – Par définition de $\phi(\nabla)$, il s'agit de montrer que si $\sum_i m_i \otimes da_i = 0$, alors $\sum_i \nabla(m_i.a_i) = \nabla(m_i).a_i$. Tout A-module à connexion étant quotient d'un A-module *libre* à connexion, on peut, d'après le lemme 2.2.4.5, se limiter au cas où M est libre. On peut alors remplacer la condition $\sum_i m_i \otimes da_i = 0$ par $\sum_i b_i.da_i = 0$, avec $b_i \in A$, et il s'agit de montrer que pour tout $m \in M$, $\sum_i \nabla(m.b_i.a_i) = \sum_i \nabla(m.b_i).a_i$. Or $\sum_i b_i.da_i = 0$ entraîne que, pour tout $c \in A$, $\sum_i b_i a_i dc = \sum_i b_i d(a_i c) = \sum_i b_i d(c a_i) = \sum_i b_i dc.a_i$, d'où $\sum_i b_i a_i \omega = \sum_i b_i \omega a_i$ pour tout $\omega \in \Omega^1$, et en particulier $\sum_i b_i a_i \nabla(m) = \sum_i b_i \nabla(m) a_i$.

En combinant ceci aux égalités

$$\sum_i \nabla(m.b_i.a_i) = \sum_i \nabla(b_i.a_i.m) = \sum_i db_i.a_i.m + \sum_i b_i.a_i \nabla(m)$$

et

$$\sum_i \nabla(m.b_i).a_i = \sum_i \nabla(b_i.m).a_i = \sum_i db_i.a_i.m + \sum_i b_i \nabla(m).a_i,$$

on obtient le résultat voulu.

2.4.2. Contrainte de commutativité

C'est celle induite par *l'échange des facteurs*. Pour vérifier la cohérence, écrivons

$$\nabla_1(m_1) = \sum_i da_i \otimes m_1^i, \qquad \nabla_2(m_2) = \sum_j db_j \otimes m_2^j;$$

alors

$$\begin{aligned}\nabla(m_1 \otimes m_2) &= \sum_i da_i \otimes m_1^i \otimes \left(m_2 - \sum_j b_j m_2^j\right) + \sum_{ij} b_j da_i \otimes m_1^i \otimes m_2^j \\ &\quad + \sum_j db_j \otimes m_1 \otimes m_2^j \\ &= \sum_{ij} [b_j, da_i] \otimes m_1^i \otimes m_2^j + \sum_i da_i \otimes m_1^i \otimes m_2 + \sum_j db_j \otimes m_1 \otimes m_2^j.\end{aligned}$$

La symétrie voulue résulte de la formule $[b_j, da_i] = [a_i, db_j]$ (qu'on obtient en développant $d(a_i b_j) = d(b_j a_i)$).

Notons d'autre part que $\operatorname{End} \mathbf{1} = C$.

Du fait de la contrainte de commutativité, les duaux à gauche sont aussi des duaux à droite (lorsqu'ils existent). Plus précisément, l'isomorphisme canonique de A-modules ${}^\vee M \cong M^\vee$ est horizontal. Compte tenu de cette identification, nous noterons $(\check{M}, \check{\nabla})$ plutôt que $({}^\vee M, {}^\vee \nabla)$ ou $(M^\vee, \nabla^\vee)$, et nous l'appellerons alors simplement « dual » de (M, ∇) (lorsqu'il existe, *cf.* 2.3.3.3).

Un objet est dit *rigide* s'il admet un dual [1]. Il découle alors de 3.3.4 que

2.4.2.1. LEMME. – *Un A-module à connexion (M, ∇) est rigide si et seulement si M est projectif de type fini et la volte $\phi(\nabla)$ est inversible.*

[1] il s'agit de la notion usuelle d'objet rigide dans une catégorie monoïdale symétrique. Cette notion n'a bien entendu rien à voir une notion homonyme classique en théorie des équations différentielles linéaires, liée à l'absence de « paramètre accessoire ».

Rappelons que la volte est automatiquement inversible si Ω^1 est un bimodule commutatif (*cf.* 2.2.4.3 (ii)).

Le théorème suivant résume nos résultats :

2.4.2.2. THÉORÈME. – *Dans la situation semi-classique, les A-modules à connexion forment une catégorie abélienne C-linéaire monoïdale symétrique* (C*-tensorielle, dans la terminologie de* [11], 50). *La sous-catégorie formée des objets rigides est autonome.*

2.4.3. Puissances symétriques et alternées

Compte tenu de la contrainte de commutativité, elles s'obtiennent à partir du produit tensoriel par les constructions quotients standard. Dans le cas d'un système aux différences décrit par une matrice σ-linéaire Φ inversible (*cf.* 1.4.3), elles correspondent aux puissances symétriques et alternées de Φ.

Examinons le cas particulier de la puissance alternée μ-ième d'une connexion ∇ sur A^μ correspondant à une équation aux différences

$$\sigma^\mu y + a_{\mu-1}\sigma^{\mu-1}y + \cdots + a_0 y = 0, \quad a_i \in A,$$

mise sous forme de système

$$(**) \qquad \sigma(Y) = \mathcal{A}Y, \qquad \mathcal{A} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & & \cdots & \\ 0 & 0 & 1 & & \\ & & \ddots & & \\ -a_0 & -a_1 & & \cdots & -a_\mu \end{pmatrix}.$$

Soit $\vec{y} = (y_1, \ldots, y_\mu)$ la première ligne de $\mathcal{Y}$. Le déterminant de Casorati de $\vec{y}$ est

$$\mathrm{Cas}\,(\vec{y}) = \det Y = \begin{pmatrix} y_1 & y_2 & \cdots & y_\mu \\ y_1^\sigma & y_2^\sigma & \cdots & y_\mu^\sigma \\ & & \ddots & \\ y_1^{\sigma^{\mu-1}} & y_2^{\sigma^{\mu-1}} & \cdots & y_\mu^{\sigma^{\mu-1}} \end{pmatrix}.$$

Si k est l'anneau des constantes (supposé intègre), $\mathrm{Cas}(\vec{y})$ s'annule si et seulement si les y_i sont linéairement dépendants sur k. Il vérifie l'équation aux différences d'ordre un

$$\sigma\big(\mathrm{Cas}(\vec{y})\big) = (-1)^\mu a_0.\mathrm{Cas}(\vec{y})$$

qui correspond à $\Lambda^\mu\nabla$.

2.4.4. Hom interne

Soient $\mathcal{M}' = (M', \nabla')$ et $\mathcal{M}'' = (M'', \nabla'')$ deux A-modules à connexion. On suppose que Ω^1 est plat sur A à droite, que M' est de présentation finie, et que la volte de ∇' est inversible. On peut alors identifier les A-A-bimodules $\Omega^1 \otimes \mathrm{Hom}_A(M', M'')$ et $\mathrm{Hom}_A(M', \Omega^1 \otimes M'')$ (*cf.* [10], I.2.9).

On définit une connexion sur $\mathrm{Hom}_A(M', M'')$ en posant, pour tout $f \in \mathrm{Hom}_A(M', M'')$ et tout $m \in M'$:

$$\nabla(f)(m) = \nabla''\big(f(m)\big) - \phi(\nabla'')(f \otimes 1_{\Omega^1})\phi(\nabla')^{-1}\big(\nabla'(m)\big).$$

Vérifions la règle de Leibniz :

$$\begin{aligned}\nabla(af)(m) &= \nabla''\big(af(m)\big) - \phi(\nabla'')(af\otimes 1_{\Omega^1})\phi(\nabla')^{-1}\big(\nabla'(m)\big)\\ &= a\nabla''\big(f(m)\big) + da\otimes f(m) - a\phi(\nabla'')(f\otimes 1_{\Omega^1})\phi(\nabla')^{-1}\big(\nabla'(m)\big)\\ &= a\nabla(f)(m) + da\otimes f(m).\end{aligned}$$

On note ce module à connexion $\mathcal{I}hom(\mathcal{M}',\mathcal{M}'')$. Lorsque $\mathcal{M}''=(A,\mathrm{d})$, on le note aussi par abus $\check{\mathcal{M}}'=(\check{M}',\check{\nabla}')$ (même si M' n'est pas projectif de type fini). Dans le cas où M' est projectif de type fini, l'isomorphisme canonique de A-modules $\mathrm{Hom}_A(M',M'')\to M''\otimes\check{M}'$ est horizontal, i.e. induit un isomorphisme $\mathcal{I}hom(\mathcal{M}',\mathcal{M}'')\cong\mathcal{M}''\otimes\check{\mathcal{M}}'$.

Il découle de 2.2.4.4 que tout homomorphisme horizontal $\mathcal{M}'\to\mathcal{M}''$ définit un élément de $\mathcal{I}hom(\mathcal{M}',\mathcal{M}'')^{\nabla}$.

2.4.5. Changement d'anneau différentiel

Considérons un morphisme d'anneaux différentiels réduits

$$u=\big(u^0,u^1\big):\big(A\xrightarrow{\mathrm{d}}\Omega^1\big)\to\big(A'\xrightarrow{d'}\Omega'^1\big),$$

A et A' étant supposés commutatifs.

2.4.5.1. LEMME. – $\{A$*-modules à connexion*$\}\xrightarrow{u^*}\{A'$*-modules à connexion*$\}$ *est un foncteur monoïdal.*

En effet, soient (M_1,∇_1) et (M_2,∇_2) deux A-modules à connexion. Soient $a_1'\otimes m_1\in u^*M_1$, $a_2'\otimes m_2\in u^*M_2$. Notons ∇ (resp. ∇'') la connexion produit tensoriel de ∇_1 et ∇_2 (resp. de $\nabla_1'=u^*(\nabla_1)$ et $\nabla_2'=u^*(\nabla_2)$), et posons $\nabla'=u^*(\nabla)$. Comparons ∇' et ∇'' sous les identifications

$$\Omega'^1\otimes_{A'}u^*(M_i)=\big(u^1\otimes\mathrm{id}_i\big)\big(\Omega^1\otimes_A M_i\big)\quad\text{et}\quad u^*(M_1)\otimes_{A'}u^*(M_2)=u^*(M_1\otimes_A M_2).$$

On a :

$$\begin{aligned}&\nabla''\big((a_1'\otimes m_1)\otimes_{A'}(a_2'\otimes m_2)\big)\\ &\quad=\nabla''(\nabla)\big((a_1'a_2'\otimes m_1)\otimes(1\otimes m_2)\big)\\ &\quad=\nabla_1'(a_1'a_2'\otimes m_1)\otimes m_2+a_1'a_2'(u^1\otimes\mathrm{id}_{12})\big(\phi(\nabla_1')\otimes\mathrm{id}_2\big)\big(m_1\otimes\nabla_2'(1\otimes m_2)\big)\\ &\quad=a_1'a_2'(u^1\otimes\mathrm{id}_{12})\nabla_1(m_1)\otimes m_2+d'(a_1'a_2')\otimes(m_1\otimes m_2)\\ &\qquad+a_1'a_2'(u^1\otimes\mathrm{id}_{12})\big(\phi(\nabla_1)\otimes\mathrm{id}_2\big)\big(m_1\otimes\nabla_2(m_2)\big)\\ &\quad=a_1'a_2'.(u^1\otimes\mathrm{id}_{12})\big(\nabla(m_1\otimes m_2)\big)+d(a_1'a_2')\otimes(m_1\otimes m_2)\\ &\quad=\nabla'\big((a_1'\otimes m_1)\otimes_{A'}(a_2'\otimes m_2)\big).\end{aligned}$$

Par ailleurs, il est clair que u^* est compatible aux contraintes d'unité, d'associativité et de commutativité.

Il découle du lemme que u^* transforme A-modules à connexion rigides en A'-modules à connexion rigides. Si l'application $(A'\otimes\Omega^1\otimes A')\to\Omega'^1$ induite par u^1 est surjective (ce qui est le cas lorsque Ω^1 est un bimodule commutatif, ou, plus généralement, un sesquimodule), il est facile de calculer la volte de $u^*(\nabla)$ en fonction de la volte de ∇, et de voir que $\phi(u^*(\nabla))$ est inversible si $\phi(\nabla)$ l'est ; en particulier, u^* commute à la formation de $\mathcal{I}hom$.

2.5. Localisation et rigidité

2.5.1. Passage à l'anneau total de fractions

Soit (A, d) un anneau différentiel, A étant commutatif. On note $Q(A)$ comme en 2.1.3.5 l'anneau total de fractions de A.

2.5.1.1. PROPOSITION. – *On suppose que* :

(i) *l'anneau différentiel* (A, d) *est simple* ;

(ii) $\Omega^1 = \mathrm{d}A.A$ *est fidèle et projectif de type fini à droite* ;

(iii) $d(Q(A)) \subset \mathrm{d}A.Q(A)$.

Soit $\mathcal{M}' = (M', \nabla')$ *un* A*-module de présentation finie muni d'une connexion de volte* $\phi(\nabla')$ *inversible. Alors pour tout* A*-module à connexion* $\mathcal{M}'' = (M'', \nabla'')$*, l'application naturelle* $\mathrm{Mor}(\mathcal{M}', \mathcal{M}'') \to \mathrm{Mor}(\mathcal{M}'_{Q(A)}, \mathcal{M}''_{Q(A)})$ *est un isomorphisme.*

Démonstration. – Commençons par quelques remarques. L'hypothèse (ii) entraîne que Ω^1 est sans torsion à droite. L'hypothèse $d(Q(A)) \subset \mathrm{d}A.Q(A)$ équivaut à dire que l'homomorphisme naturel de A-A-bimodules $\Omega^1 \otimes_A Q(A) \to Q(A) \otimes_A \Omega^1 \otimes_A Q(A)$ est surjectif (elle est trivialement satisfaite si Ω^1 est un bimodule commutatif, ou, plus généralement, un sesquimodule). Comme Ω^1 est sans torsion à droite, on a finalement $d(Q(A)).Q(A) \cong \Omega^1 \otimes_A Q(A)$, i.e. $(Q(A), d)$ est une extension différentielle de (A, d).

Prouvons l'injectivité de $\mathrm{Mor}(\mathcal{M}', \mathcal{M}'') \to \mathrm{Mor}(\mathcal{M}'_{Q(A)}, \mathcal{M}''_{Q(A)})$. Considérons pour cela le A-module à connexion $\mathcal{I}hom(\mathcal{M}', \mathcal{M}'')$. On a $\mathrm{Mor}(\mathcal{M}', \mathcal{M}'') \subset \mathcal{I}hom(\mathcal{M}', \mathcal{M}'')^{\nabla}$. D'autre part, comme M' est de présentation finie, l'application naturelle

$$Q(A) \otimes_A \mathrm{Hom}_A(M', M'') \to \mathrm{Hom}_{Q(A)}(M'_{Q(A)}, M''_{Q(A)})$$

est bijective. Il suffit donc de faire voir que l'application

$$\mathcal{I}hom(\mathcal{M}', \mathcal{M}'')^{\nabla} \to Q(A) \otimes_A \mathcal{I}hom(\mathcal{M}', \mathcal{M}'')$$

est injective, c'est-à-dire que l'annulateur $I \subset A$ de tout élément $f \in \mathcal{I}hom(\mathcal{M}', \mathcal{M}'')^{\nabla} \subset \mathcal{I}hom(\mathcal{M}', \mathcal{M}'')$ est 0 ou A. Soient $D \in {}^{\vee}\Omega^1$ et $i \in I$. On a $0 = \nabla_D(if) = \langle D, di\rangle f + \nabla_{D.i}(f) = \langle D, di\rangle f$, ce qui montre que I est un idéal différentiel (2.1.3.3). On conclut par la simplicité de (A, d).

Passons à la surjectivité. Soit $f \in \mathrm{Mor}(\mathcal{M}'_{Q(A)}, \mathcal{M}''_{Q(A)})$. Soit $1 \otimes \mathcal{M}'$ l'image de $\mathcal{M}'$ dans $\mathcal{M}'_{Q(A)}$. Alors $f(1 \otimes \mathcal{M}')$ est un sous-A-module à connexion de $\mathcal{M}''_{Q(A)}$ (vu comme $(Q(A), d) \otimes \mathcal{M}''$), de même que l'image $1 \otimes \mathcal{M}''$ de $\mathcal{M}''$, et f induit un morphisme de A-modules à connexion

$$\overline{f} : \mathcal{M}' \longrightarrow \mathcal{N} := f(1 \otimes \mathcal{M}') / \big(f(1 \otimes \mathcal{M}') \cap (1 \otimes \mathcal{M}'')\big).$$

Or, $\mathcal{N}_{Q(A)} = 0$, donc l'image de $\overline{f}$ dans $\mathrm{Mor}(\mathcal{M}'_{Q(A)}, \mathcal{N}_{Q(A)})$ est nulle. D'après ce qui précède, ceci entraîne que $\overline{f} = 0$, donc que $f \in \mathrm{Mor}(\mathcal{M}', \mathcal{M}'')$.

2.5.1.2. COROLLAIRE. – *Sous les hypothèses de* 2.5.1.1, *le foncteur de localisation*

$$\{A\text{-}\textit{modules à connexion rigides}\} \longrightarrow \{Q(A)\text{-}\textit{modules à connexion rigides}\}$$

est pleinement fidèle.

Le foncteur est bien défini compte tenu de la remarque suivant 2.4.5.1. L'assertion est une conséquence immédiate de 2.5.1.1, puisque tout A-module projectif de type fini est de présentation finie.

2.5.2. Le théorème de rigidité

2.5.2.1. THÉORÈME. – *Ajoutons aux hypothèses de* 2.5.1.1 *que* $Q(A)$ *est semi-simple* (*i.e. produit fini de corps*). *Soit* (M,∇) *un* A*-module de présentation finie muni d'une connexion de volte inversible. Alors* M *est projectif* (*et* (M,∇) *est donc rigide*).

Démonstration. – Soit $\check{\mathcal{M}}$ le dual de $\mathcal{M}=(M,\nabla)$ au sens de 2.4.4. On dispose du morphisme d'évaluation $\varepsilon:\check{\mathcal{M}}\otimes\mathcal{M}\to(A,\mathrm{d})$.

D'autre part, comme $Q(A)$ est supposé semi-simple, tout $Q(A)$-module est projectif. D'après la remarque suivant 2.4.5.1, la volte de $\mathcal{M}_{Q(A)}$ est inversible. On en conclut que $\mathcal{M}_{Q(A)}$ est rigide et que $(\check{\mathcal{M}})_{Q(A)}=\check{\mathcal{M}_{Q(A)}}$. En particulier, on dispose de la coévaluation $\eta_{Q(A)}:(Q(A),d)\to\mathcal{M}_{Q(A)}\otimes\check{\mathcal{M}}_{Q(A)}$ vérifiant $(\mathrm{id}\otimes\varepsilon_{Q(A)})(\eta_{Q(A)}\otimes\mathrm{id})=\mathrm{id}_{M_{Q(A)}}$. Selon 2.5.1.1, $\eta_{Q(A)}$ provient d'un homomorphisme $\eta:(A,\mathrm{d})\to\mathcal{M}\otimes\check{\mathcal{M}}$ vérifiant $(\mathrm{id}\otimes\varepsilon)(\eta\otimes\mathrm{id})=\mathrm{id}_M$. D'après le lemme classique de la base duale, ceci entraîne que M est projectif.

Considérer des anneaux A avec $Q(A)$ semi-simple plutôt que des anneaux intègres n'est pas un luxe : de tels anneaux (différentiels) sont inévitables dans la théorie de Picard–Vessiot pour les équations aux différences (*cf.* [48], 1).

2.5.2.2. COROLLAIRE. – *Soit* X *une variété algébrique lisse sur un corps* k *de caractéristique nulle ou une variété analytique lisse* (*réelle ou complexe, voire* p*-adique rigide*). *Tout* $\mathcal{O}_X$*-module cohérent muni d'une connexion* (*non nécessairement intégrable*) *est localement libre.*

Il est bien connu que, réciproquement, tout $\mathcal{O}_X$-module localement libre de type fini peut être muni d'une connexion.

2.5.3. Le théorème tannakien

2.5.3.1. PROPOSITION. – *Ajoutons aux hypothèses de* 2.5.2.1 *que* $\Omega^1\otimes Q(A)\cong Q(A)\otimes\Omega^1$. *Soit* $\mathcal{M}=(M,\nabla)$ *un* A*-module à connexion rigide et* $\mathcal{M}'=(M',\nabla')$ *un sous-objet. Soit* $\mathcal{M}''=(M'',\nabla'')$ *le sous-objet de* $\mathcal{M}$ *défini par* $M''=M\cap M'_{Q(A)}\subset M_{Q(A)}$, *et supposons* M'' *de présentation finie. Alors* $M'=M''$, *et* $\mathcal{M}'$ *est rigide.*

Démonstration. – Écrivons $Q(A)=\prod_1^r K_i$ comme produit fini de corps. La donnée d'un $Q(A)$-module de type fini équivaut à celle d'une famille d'espaces vectoriels V_i de dimension finie (un sur chaque K_i). On peut donc définir sa dimension comme le r-uplet des dimensions des V_i.

L'hypothèse que $\Omega^1\otimes_A Q(A)\cong Q(A)\otimes_A\Omega^1$ est plus forte que $d(Q(A))\subset\mathrm{d}A.Q(A)$ (elle est trivialement satisfaite si Ω^1 est un sesquimodule relatif à un automorphisme σ) ; elle implique que pour tout A-module de type fini N, $\Omega^1\otimes_A(Q(A)\otimes_A N)$ et $(Q(A)\otimes_A N)\otimes_A\Omega^1$ sont des $Q(A)$-modules à droite de même dimension (finie).

Par ailleurs, on a $M'\subset M''$ et $\mathcal{M}'_{Q(A)}=\mathcal{M}''_{Q(A)}$. Puisque $\phi(\nabla)$ est inversible, il en est de même de $\phi(\nabla_{Q(A)})$, donc $\phi(\nabla''_{Q(A)})$ est injective. Comme application entre $Q(A)$-modules à droite de même dimension, elle est donc inversible. Puisque Ω^1 est plat à droite, on a $\Omega^1\otimes M''\cong(\Omega^1\otimes M)\cap(\Omega^1\otimes M''_{Q(A)})$; puisque M est fidèle et projectif, $M\otimes\Omega^1\subset M_{Q(A)}\otimes\Omega^1$, et $\mathrm{Im}(M''\otimes\Omega^1\to M\otimes\Omega^1)\cong(M\otimes\Omega^1)\cap(M''_{Q(A)}\otimes\Omega^1)$. On déduit alors de ce qui précède que $\phi(\nabla'')$ se factorise à travers un isomorphisme $\phi'':\mathrm{Im}(M''\otimes\Omega^1\to M\otimes\Omega^1)\to\Omega^1\otimes M''$. D'après 2.2.4.6, ceci entraîne que la volte de $\mathcal{M}/\mathcal{M}''$ est inversible. Comme M est projectif de type fini et M'' de type fini, M/M'' est de présentation finie, et on conclut de 2.5.2.1 que

$\mathcal{M}''$ est rigide. En particulier, M'' est facteur direct de M, et 2.2.4.5 (ii) entraîne que $\phi(\nabla'')$ est inversible. Comme M'' est supposé de présentation finie, 2.5.2.1 implique derechef que $\mathcal{M}''$ est rigide. En appliquant 2.5.1.1 à l'isomorphisme $\mathcal{M}''_{Q(A)} \to \mathcal{M}'_{Q(A)}$, on conclut que $\mathcal{M}'' = \mathcal{M}'$.

2.5.3.2. THÉORÈME. – *On suppose que* :

(i) *l'anneau commutatif A est noethérien, d'anneau total de fractions $Q(A)$ semi-simple* ;
(ii) $\Omega^1 = \mathrm{d}A.A$ *est fidèle et projectif de type fini à droite, et* $\Omega^1 \otimes_A Q(A) \cong Q(A) \otimes_A \Omega^1$;
(iii) *l'anneau différentiel (A, d) est simple.*

Alors tout sous-quotient d'un A-module à connexion rigide est rigide. La catégorie des A-modules à connexion rigides est tannakienne sur le corps des constantes C.

Démonstration. – Pour la première assertion, le point est, en vertu de 2.5.2.1, de faire voir que tout sous-quotient d'un objet rigide est à volte inversible ; 2.2.4.5 (i) ramène la question au cas d'un sous-objet. L'assertion résulte alors de la proposition précédente. De ceci et de 2.4.2.2, il découle que la catégorie des A-modules à connexion rigides est tensorielle sur C et autonome. Pour montrer qu'elle est tannakienne, il suffit d'exhiber un foncteur fibre (i.e. un foncteur monoïdal C-linéaire exact et fidèle) à valeurs dans les B-modules projectifs de type fini, pour une C-algèbre B fidèle convenable ([19]). Le foncteur d'oubli de la connexion convient avec $B = A$, d'après 2.5.2.1.

3. Groupes de Galois différentiels et extensions de Picard–Vessiot en situation semi-classique

Dans tout le reste de l'article, nous nous plaçons dans la situation semi-classique : on travaille avec un anneau différentiel $(A \xrightarrow{\mathrm{d}} \Omega^1)$ où A est un anneau commutatif, mais où le bimodule des 1-formes différentielles $\Omega^1 = A.\,\mathrm{d}A.A$ n'est pas nécessairement commutatif.

3.1. Solubilité

3.1.1. Connexions triviales

Rappelons qu'un A-module à connexion (M, ∇) est dit trivial (2.2.3.3) s'il est isomorphe à un module à connexion de la forme $(A \otimes_C N, d \otimes \mathrm{id}_N)$, où N est un module à gauche quelconque sur l'anneau des constantes C. Remarquons que sa volte est alors induite par l'application $1_N \otimes \omega \to \omega \otimes 1_N$ (compte tenu de ce que le C-C-bimodule sous-jacent à Ω^1 est commutatif, *cf.* 2.3.2) ; c'est donc un isomorphisme.

La notion de connexion triviale est toutefois plus subtile qu'il ne paraît :

– la flèche naturelle $N \to M \cong A \otimes_C N$ se factorise à travers $M^\nabla := \mathrm{Ker}_M(\nabla)$, mais $N \to M^\nabla$ n'est ni injective ni surjective en général.

Elle est injective si A est fidèlement plat sur C (ce qui équivaut à dire que $\mathrm{d}A$ est un C-module plat, *cf.* [10], 1.3.5). Elle est surjective si N est plat sur C (si A est fidèlement plat sur C, ceci équivaut à dire que M est un A-module plat). L'exemple $A = \Omega^1 = \mathbf{Z}[z]$ muni de $\mathrm{d}/\mathrm{d}z$, $N = \mathbf{Z}/p\mathbf{Z}$ ($(A \otimes_C N)^\nabla = \mathbf{Z}/p\mathbf{Z}[z^p]$) montre qu'on n'a pas toujours surjectivité. Plus précisément, la chasse au diagramme de suite exactes

$$\begin{tikzcd} & N \arrow[r] \arrow[d] & A \otimes_C N \arrow[r] \arrow[d, "\cong"] & \mathrm{d}A \otimes_C N \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\ 0 \arrow[r] & M^\nabla \arrow[r] & M \arrow[r] & \Omega^1 \otimes_A M \cong \Omega^1 \otimes_C N & \end{tikzcd}$$

montre que $N \to M^\nabla$ est surjective si et seulement si $\mathrm{d}A \otimes_C N \to \Omega^1 \otimes_A M$ est injective.

– Des exemples de même farine montrent que

$$\mathrm{Hom}\big((A\otimes_C N, d\otimes \mathrm{id}_N),(A\otimes_C N', d\otimes \mathrm{id}_{N'})\big)$$

n'est en général égal ni à $\mathrm{Hom}_C(N,N')$, ni à $\mathrm{Hom}_C((A\otimes_C N)^\nabla,(A\otimes_C N')^{\nabla'})$.

– Le conoyau d'un morphisme de connexions triviales n'est pas nécessairement une connexion triviale : dans l'exemple précédent, considérer le morphisme $\mathbf{Z}[z]\to\mathbf{Z}/p\mathbf{Z}[z]$ donné par $1\mapsto z^p$.

– Pour toute connexion triviale (M,∇), l'homomorphisme naturel de A-modules (à connexion, si l'on veut)

$$A\otimes_C M^\nabla \longrightarrow M$$

est surjectif (en fait, si A est fidèlement plat sur C, M est même un rétracte de $A\otimes_C M^\nabla$), mais pas nécessairement injectif.

Tous ces problèmes disparaissent lorsque C est un corps. Toutefois, l'exemple de $A=\Omega^1=k[z]$, $\mathrm{d}=z\,\mathrm{d}/\mathrm{d}z$ et de l'idéal différentiel zA montre que même si C est un corps, une sous-connexion d'une connexion triviale n'est pas nécessairement triviale.

3.1.1.1. LEMME. – (i) *La catégorie des A-modules à connexion triviaux est stable par $\oplus$, $\otimes$.*

(ii) *Supposons A fidèlement plat sur C, et M plat sur A. Alors (M,∇) est trivial si et seulement si $A\otimes_C M^\nabla\cong M$. Dans ce cas, (M,∇) est rigide si et seulement si M^∇ est projectif de type fini sur C, et alors $(\check{M})^{\check\nabla}$ est le C-dual de M^∇.*

Démonstration. – On a

$$(A\otimes_C N_1, d\otimes \mathrm{id}_{N_1})\oplus(A\otimes_C N_2, d\otimes \mathrm{id}_{N_2})=\big(A\otimes_C (N_1\oplus N_2), d\otimes \mathrm{id}_{N_1\oplus N_2}\big),$$
$$(A\otimes_C N_1, d\otimes \mathrm{id}_{N_1})\otimes(A\otimes_C N_2, d\otimes \mathrm{id}_{N_2})=\big(A\otimes_C (N_1\otimes_C N_2), d\otimes \mathrm{id}_{N_1\otimes N_2}\big).$$

Supposons (M,∇) trivial, $\cong (A\otimes_C N, d\otimes\mathrm{id}_N)$. Sous les hypothèses de (ii), N est plat sur C, donc $N\cong M^\nabla$, et $A\otimes_C M^\nabla\cong M$. Le reste est aisé $(({}^\vee(A\otimes_C N),{}^\vee(d\otimes\mathrm{id}_N))=(A\otimes\check N, d\otimes\mathrm{id}_{\check N}))$.

3.1.1.2. *Remarque*. – Supposons A plat sur C. Alors $\mathrm{Hom}_C(N_1,N_2)$ s'envoie injectivement vers $\mathrm{Mor}((A\otimes_C N_1, d\otimes\mathrm{id}_{N_1}),(A\otimes_C N_2, d\otimes\mathrm{id}_{N_2}))$. Appelons *admissibles* les morphismes de connexions triviales qui se trouvent dans l'image. Si on ne considère que les morphismes admissibles, la catégorie des connexions triviales qu'on obtient est abélienne.

3.1.2. Critères d'injectivité de $A\otimes_C M^\nabla\to M$

3.1.2.1. PROPOSITION. – *Supposons (A,d) simple, et Ω^1 fidèle et projectif de type fini à droite sur A. Alors pour tout module à connexion (M,∇), l'homomorphisme naturel $A\otimes_C M^\nabla\to M$ est injectif.*

Démonstration. – On a vu (2.1.3.4) que sous l'hypothèse de simplicité, C est un corps. Soit $\{m_1,\dots,m_i,\dots\}$ une famille finie d'éléments de M^∇ linéairement indépendants sur C. Supposons qu'il existe une combinaison A-linéaire $\sum\alpha_i.m_i$ nulle dans M, avec $\alpha_1\neq 0$. Quitte à omettre certains m_i, on peut supposer cette combinaison linéaire de longueur minimale, avec $\alpha_i\neq 0$ pour tout i. Considérons alors toutes les combinaisons A-linéaires $\sum a_i.m_i$ nulles. L'ensemble des coefficients a_1 intervenant dans une telle combinaison forment un idéal non nul $I\subset A$. Si $I\neq A$, alors d'après 2.1.3.3 et puisque (A,d) est simple, il existe $D\in{}^\vee\Omega^1$ et $a_1\in I$ tels que $\langle D,da_1\rangle\notin I$. On a $\nabla_D(\sum a_i.m_i)=\sum\langle D,da_i\rangle.m_i=0$ (*cf.* 2.2.1.2), d'où $\langle D,da_i\rangle\in I$: contradiction. Si $I=A$, on peut choisir $a_1=1$, et $\nabla_D(\sum a_i.m_i)=\sum_{i>1}\langle D,da_i\rangle.m_i=0$ contredit la minimalité de la combinaison originale $\sum\alpha_i.m_i=0$. On conclut qu'une telle combinaison $\sum\alpha_i.m_i=0$ n'existe pas.

3.1.2.2. PROPOSITION. – *Supposons* (A, d) *simple par couches* (cf. 2.1.3.6), Ω^1 *fidèle et projectif de type fini à droite sur* A, *et* C *noethérien. Alors, pour tout module à connexion* (M,∇) *noethérien* (*en tant que module à connexion*), *l'homomorphisme naturel* $A\otimes_C M^\nabla \to M$ *est injectif.*

Démonstration. – On peut supposer M non nul. Par récurrence, on construit une filtration croissante $F_n(M,\nabla)$ comme suit :
- $F_0 = 0$;
- $F_{n-1}(M,\nabla)$ étant supposé construit, on choisit un idéal $\mathfrak{p}_n$ de C maximal parmi les annulateurs de sous-objets non nuls de $(M,\nabla)/F_{n-1}(M,\nabla)$ (un tel idéal existe puisque C est noethérien) ;
- on pose alors $F_n(M) = \{m \in M,\ \mathfrak{p}_n.m \subset F_{n-1}(M)\}$; il est clair que ce module est sous-jacent à un sous-objet $F_n(M,\nabla)$ de (M,∇). Comme ce dernier est noethérien, la filtration $F_.$ est finie et exhaustive.

Les idéaux $\mathfrak{p}_n$ sont premiers. En effet, soit (N,∇) un sous-objet non nul de $(M,\nabla)/F_{n-1}(M,\nabla)$ d'annulateur $\mathfrak{p}_n$. Soient $c_1, c_2 \in C$ tels que $c_1.c_2 \in \mathfrak{p}_n$ mais $c_2 \notin \mathfrak{p}_n$ (s'il en est). On a $c_2.N \neq 0$, l'annulateur de $c_2.(N,\nabla)$ contient $\mathfrak{p}_n$, donc coïncide avec $\mathfrak{p}_n$ par maximalité. Puisque $c_1.c_2.(N,\nabla) = 0$, on voit que $c_1 \in \mathfrak{p}_n$, ce qui montre que $\mathfrak{p}_n$ est premier (c'est l'argument assassin familier). En outre, du fait de la maximalité des $\mathfrak{p}_n$, les gradués associés $\mathrm{Gr}_n(M)$ sont des $C/\mathfrak{p}_n$ sans torsion.

Tirons alors parti de ce que (A, d) est simple par couches, et notons (comme en 2.1.3.6) $\kappa(\mathfrak{p}_n)$ le corps de fractions de $C/\mathfrak{p}_n$. Il découle alors de la proposition précédente appliquée à $\kappa(\mathfrak{p}_n)\otimes \mathrm{Gr}_n(M)$ que l'homomorphisme

$$\big(\kappa(\mathfrak{p}_n)\otimes A\big)\otimes_{C/\mathfrak{p}_n}\big(\mathrm{Gr}_n(M)\big)^\nabla \hookrightarrow \kappa(\mathfrak{p}_n)\otimes \mathrm{Gr}_n(M)$$

est injectif. D'où l'injectivité de

$$(A/\mathfrak{p}_n A)\otimes_{C/\mathfrak{p}_n}\big(\mathrm{Gr}_n(M)\big)^\nabla \hookrightarrow \mathrm{Gr}_n(M).$$

On a d'autre part un diagramme de suites exactes

$$\begin{tikzcd}
 & (A/\mathfrak{p}_nA)\otimes_{C/\mathfrak{p}_n}(\mathrm{Gr}_n(M))^\nabla \arrow[d, "\cong"] & & \\
0 \arrow[r] & A\otimes(\mathrm{Gr}_n(M))^\nabla \arrow[r] \arrow[d] & A\otimes(M/F_{n-1}(M))^\nabla \arrow[r] \arrow[d, "\iota_{n-1}"] & A\otimes(M/F_n(M))^\nabla \arrow[d, "\iota_n"] & \\
0 \arrow[r] & \mathrm{Gr}_n(M) \arrow[r] & M/F_{n-1}(M) \arrow[r] & M/F_n(M) \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

Une chasse élémentaire permet de conclure, par récurrence descendante, que $\iota_0 : A\otimes_C M^\nabla \to M$ est injectif.

3.1.2.3. COROLLAIRE. – *Sous les hypothèses de* 3.1.2.1 (*resp.* 3.1.2.2), *tout sous-quotient d'un module à connexion trivial* (*resp. et de type fini sur* A) *est trivial. Sur la catégorie de ces connexions, le foncteur* C*-linéaire* $(M,\nabla)\mapsto M^\nabla$ *est fidèle et exact.*

Démonstration. – Sous les hypothèses de 3.1.2.1 ou 3.1.2.2, A est fidèlement plat sur C noethérien ; donc le A-module M est noethérien si et seulement si M^∇ est de type fini sur C.

Considérons une suite exacte

$$0 \longrightarrow (M', \nabla') \longrightarrow (M, \nabla) \longrightarrow (M'', \nabla'') \longrightarrow 0.$$

On en déduit un diagramme de suites exactes

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & A \otimes_C M'^{\nabla'} \arrow[r] \arrow[d] & A \otimes_C M^{\nabla} \arrow[r] \arrow[d] & A \otimes_C M''^{\nabla''} \arrow[d] & \\
0 \arrow[r] & M' \arrow[r] & M \arrow[r] & M'' \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

D'après les propositions précédentes, les flèches verticales sont injectives. Si (M, ∇) est trivial, celle du milieu est alors bijective, et on déduit du lemme des cinq qu'elles sont toutes trois bijectives. La seconde assertion en découle.

3.1.3. Connexions solubles dans une extension différentielle

Soit $(A \xrightarrow{\mathrm{d}} \Omega^1) \xrightarrow{u} (A' \xrightarrow{d'} \Omega'^1)$ une extension différentielle (2.1.2.5); rappelons que $\Omega'^1 \cong \Omega^1 \otimes A'$ comme A'-module à droite. Soit $\mathcal{M} = (M, \nabla)$ un A-module à connexion.

3.1.3.1. DEFINITION. – On dit que $\mathcal{M}$ est soluble dans l'extension différentielle (A', d') (ou simplement : dans A') si $u^*\mathcal{M} = (M_{A'}, \nabla_{A'})$ est trivial.

3.1.3.2. PROPOSITION. – *Supposons que A' soit fidèlement plat sur A et sur C', et que Ω^1 soit fidèle et projectif de type fini à droite sur A. Alors* :

(i) *si $\mathcal{M}$ est soluble dans A', sa volte est inversible* ;

(ii) *si* (A', d') *est simple* (*resp. simple par couches, avec C' noethérien*), *alors pour tout module à connexion $\mathcal{M}$ soluble dans A'* (*resp. et noethérien*), *on a $A' \otimes_{C'} M_{A'}^{\nabla_{A'}} \xrightarrow{\simeq} M_{A'}$. Tout sous-quotient de $\mathcal{M}$ est soluble dans A'* (*resp. et noethérien*). *La catégorie des modules à connexions solubles dans A'* (*resp. et noethériens*) *est abélienne monoïdale, et le foncteur « solutions dans A' » $\omega_{A'} : \mathcal{M} \mapsto M_{A'}^{\nabla_{A'}}$ est fidèle et exact.*

(iii) *Si* (A', d') *est simple, tout A-module M de type fini muni d'une connexion soluble dans A' est projectif.*

(iv) *Si* (A', d') *est simple par couches, alors pour tout idéal premier $\mathfrak{p}$ de C' et tout module à connexion soluble dans A' et noethérien $\mathcal{M}$, on a $M_{A'}^{\nabla_{A'}} \otimes \kappa(\mathfrak{p}) \cong (M_{A' \otimes \kappa(\mathfrak{p})})^{\nabla_{A' \otimes \kappa(\mathfrak{p})}}$.*

(v) *Supposons que C' est régulier de dimension $\leqslant 1$* (*par exemple un corps*). *Soit $(M', \nabla') \hookrightarrow (M, \nabla)$ un monomorphisme d'objets solubles. Alors si M est plat sur A* (*resp. rigide, i.e. projectif de type fini d'après* (i)), *il en est de même de M'.*

Démonstration. – (i) résulte par descente fidèlement plate de A' à A du fait que la volte de $\nabla_{A'}$, qui est inversible, est l'unique prolongement A'-linéaire à droite de la volte de ∇.

(ii) suit de 3.1.1.1 et 3.1.2.3.

(iii) : si $\mathcal{M}$ est soluble dans (A', d') simple, C' est un corps et $A' \otimes_{C'} M_{A'}^{\nabla_{A'}}$; si M est de type fini sur A, $M_{A'}^{\nabla_{A'}}$ est donc un espace vectoriel de dimension finie sur C'. Donc $M_{A'}$ est libre de type fini sur A' et on conclut par descente fidèlement plate.

(iv) : comme $(A', \mathrm{d}') \otimes \kappa(\mathfrak{p})$ est simple par hypothèse, on a

$$A' \otimes_{C'} (M_{A' \otimes \kappa(\mathfrak{p})})^{\nabla_{A' \otimes \kappa(\mathfrak{p})}} \hookrightarrow M_{A' \otimes \kappa(\mathfrak{p})}.$$

Par ailleurs, $A' \otimes_{C'} M_{A'}^{\nabla_{A'}} \xrightarrow{\simeq} M_{A'}$. Par conséquent, le composé

$$A' \otimes_{C'} M_{A'}^{\nabla_{A'}} \otimes \kappa(\mathfrak{p}) \longrightarrow A' \otimes_{C'} (M_{A' \otimes \kappa(\mathfrak{p})})^{\nabla_{A' \otimes \kappa(\mathfrak{p})}} \longrightarrow (M_{A' \otimes \kappa(\mathfrak{p})})$$

est un isomorphisme, et il en est donc de même de $M_{A'}^{\nabla_{A'}} \otimes \kappa(\mathfrak{p}) \to (M_{A' \otimes \kappa(\mathfrak{p})})^{\nabla_{A' \otimes \kappa(\mathfrak{p})}}$.

(v) : M est A-plat (resp. projectif de type fini) si et seulement si $M_{A'}$ est A'-plat. Pour (M, ∇) soluble dans A', cela revient à dire que $(M_{A'})^{\nabla_{A'}}$ est C'-plat (resp. projectif de type fini). Or, si C' est régulier de dimension $\leqslant 1$ (i.e. produit fini d'anneaux de Dedekind et de corps), un C'-module N quelconque est plat (resp. projectif de type fini) si et seulement si pour tout idéal premier $\mathfrak{p}$ de C', le $C'_{\mathfrak{p}}$-module $N_{\mathfrak{p}}$ est sans torsion (resp. et de type fini) ; ceci se propage donc à tout C'-sous-module. D'où le résultat. (De même, on observe que les hypothèses C' régulier de dimension $\leqslant 1$ et Ω'^1 fidèle et projectif sur A' entraînent que $\mathrm{d}A'$ est C'-plat, donc que A' est fidèlement plat sur C'.)

3.1.3.3. *Solubilité et intégrabilité. –* Une connexion *soluble dans une extension différentielle n'est pas nécessairement intégrable*, même dans la situation classique où Ω^1 est un bimodule commutatif (en dépit de 2.2.3.2 et de l'intégrabilité des connexions triviales).

Soit par exemple $A = k[z_1, z_2]$ considéré comme anneau différentiel généralisé via les dérivations $\mathrm{d}/\mathrm{d}z_1,\ \mathrm{d}/\mathrm{d}z_2$; nous prenons donc $\Omega^1 = \Omega^1_{A/k} = \mathrm{d}z_1.A \oplus \mathrm{d}z_2.A$, le module de Kähler usuel.

Considérons le module à connexion (A, ∇) correspondant au système différentiel

$$\nabla(\mathrm{d}/\mathrm{d}z_1)y = 0, \qquad \nabla(\mathrm{d}/\mathrm{d}z_2)y = z_1 y.$$

Ce système n'est pas intégrable.

Considérons d'autre part l'anneau $A' = k[z_1, z_2, z_3, \frac{1}{z_3}]$ comme anneau différentiel via les dérivations $\mathrm{d}/\mathrm{d}z_1,\ \mathrm{d}/\mathrm{d}z_2 + z_1\,\mathrm{d}/\mathrm{d}z_3$, et comme extension différentielle de (A, d) (noter que $(\mathrm{d}/\mathrm{d}z_2 + z_1\,\mathrm{d}/\mathrm{d}z_3)_{|A} = \mathrm{d}/\mathrm{d}z_2$) ; le crochet $[\mathrm{d}/\mathrm{d}z_1, \mathrm{d}/\mathrm{d}z_2 + z_1\,\mathrm{d}/\mathrm{d}z_3]$ n'est pas nul (c'est $\mathrm{d}/\mathrm{d}z_3$), mais sa restriction à A l'est. L'anneau des constantes de A' est k.

Pour calculer Ω'^1, remarquons que la base duale de $(\mathrm{d}/\mathrm{d}z_1, \mathrm{d}/\mathrm{d}z_2 + z_1\,\mathrm{d}/\mathrm{d}z_3, \mathrm{d}/\mathrm{d}z_3)$ dans le module de Kähler $\Omega^1_{A'/k}$ est $(\mathrm{d}z_1, \mathrm{d}z_2, \mathrm{d}z_3 - z_1\,\mathrm{d}z_2)$; on a donc

$$\Omega'^1 = \Omega^1_{A'/k}/A'.(\mathrm{d}z_3 - z_1\,\mathrm{d}z_2)(\cong \Omega^1_{A/k} \otimes_A A').$$

Il est facile de voir que (A, ∇) est soluble dans A' : $y = z_3$ est une base de solutions. On a $\Omega^2 = \Omega^2_{A/k} = (\mathrm{d}z_1 \wedge \mathrm{d}z_2).A$ (du moins si $\operatorname{car} k \neq 2$, *cf.* 2.1.1. L'image de $\mathrm{d}z_1 \wedge \mathrm{d}z_2$ dans $\Omega^2_{A'/k}$ s'écrit $\mathrm{d}(\mathrm{d}z_3 - z_1.\mathrm{d}z_2)$, donc s'annule dans le quotient Ω'^2 (en fait, on montre facilement que $\Omega'^2 = 0$).

On prendra garde à la confusion que peut créer le mot d'intégrabilité, un système non intégrable pouvant être « intégré » symboliquement. En fait, nous verrons qu'on peut développer la théorie de Picard–Vessiot sans hypothèse sur la courbure.

Toutefois, on a un carré commutatif

$$\begin{array}{ccc} M & \longrightarrow & \Omega^2 \otimes_A M \\ \downarrow & & \downarrow \\ M' & \longrightarrow & \Omega'^2 \otimes_{A'} M' \cong \Omega'^2 \otimes_A M \end{array}$$

où les flèches horizontales sont les courbures de ∇ et ∇' respectivement. Si la flèche canonique $\Omega^2 \to \Omega'^2$ est injective, et si M est plat sur A, la solubilité de ∇ dans A' implique l'intégrabilité de ∇.

3.1.3.4. *Remarque*. – Pour travailler sans aucune hypothèse de simplicité différentielle (par exemple en caractéristique mixte), on est amené à ne considérer que les morphismes « admissibles » de connexions solubles (i.e. admissibles au sens de 3.1.1.2 après extension à A'). Si A' est fidèlement plat sur A et sur C', on obtient une catégorie abélienne monoïdale. Nous ne développerons pas ce point de vue ici.

3.1.4. Exemples fondamentaux (cas intégrables)

3.1.4.1. Soit X une variété algébrique lisse sur un corps k de caractéristique nulle ou une variété analytique lisse sur $k = \mathbf{R}$ ou $\mathbf{C}$ (voire une variété analytique p-adique rigide lisse). On note m sa dimension. Soient x un k-point de X, $\mathcal{O}_{X,x}$ l'anneau local de X au point (défini par) x, et $z_1, \dots, z_m$ des coordonnées locales autour de x. Alors le complété $\widehat{A} = \widehat{\mathcal{O}}_{X,x} \cong k[[z_1, \dots, z_m]]$ est une extension fidèlement plate de A. On considère A (resp. $\widehat{A}$) comme anneau différentiel généralisé, grâce à la dérivation d vers le module de différentielles usuelles $\Omega^1 = \Omega^1_{X/k,x}$ (resp. $\Omega^1 \otimes_A \widehat{A}$). On obtient ainsi une extension d'anneaux différentiels simples, de corps de constantes k. D'après le théorème de Frobenius formel, tout $\mathcal{O}_{X,x}$-module de présentation finie M muni d'une connexion *intégrable* ∇ est soluble dans $\widehat{\mathcal{O}}_{X,x}$. En particulier, il est libre de type fini sur l'anneau local $\mathcal{O}_{X,x}$. On a $\widehat{M} \cong \widehat{\mathcal{O}}_{X,x} \otimes M$, et $\widehat{M}^\nabla$ s'identifie à la fibre de M en x.

Dans la situation algébrique, on peut plus généralement remplacer k par une $\mathbf{Q}$-algèbre commutative intègre noethérienne quelconque, pourvu que les fibres de X soient géométriquement connexes. La même construction fournit une extension fidèlement plate d'anneaux différentiels simples par couches.

On en déduit que l'objet (M, ∇) est rigide (*cf.* 2.4.2.1) si et seulement si $\widehat{M^\nabla}$ est plat sur k. En particulier, lorsque k est l'anneau de fonctions d'une courbe affine lisse, un $\mathcal{O}_{X,x}$-module de type fini M muni d'une connexion intégrable ∇ (relativement à k) s'interprète comme famille à un paramètre de systèmes différentiels linéaires intégrables. Il est rigide si et seulement s'il est sans torsion sur k.

On en déduit aussi que le foncteur « tige en x »

$$\left\{ \begin{array}{c} \mathcal{O}_X\text{-modules cohérents} \\ \text{à connexion intégrable} \end{array} \right\} \longrightarrow \left\{ \begin{array}{c} \mathcal{O}_{X,x}\text{-module de type fini} \\ \text{à connexion intégrable} \end{array} \right\}$$

est exact et pleinement fidèle, et que le foncteur « fibre en x »

$$\left\{ \begin{array}{c} \mathcal{O}_X\text{-modules cohérents} \\ \text{à connexion intégrable} \end{array} \right\} \longrightarrow \{k\text{-modules de type fini}\}$$

est exact et fidèle.

3.1.4.2. Dans la situation 1.2.2, $\overline{\mathcal{O}}_x \hookrightarrow \mathcal{O}_x^{\mathrm{pd}}$ donne lieu à une extension fidèlement plate d'anneaux différentiels simples, de corps des constantes le corps k de caractéristique p. On a vu que toute connexion intégrable ∇ sur $\overline{X}_x$ est soluble dans l'algèbre à puissances divisées complétée $\mathcal{O}_x^{\mathrm{pd}}$.

Là encore, on a une variante « relative » (remplacer k par une $\mathbf{F}_p$-algèbre commutative intègre noethérienne quelconque).

3.1.4.3. *Équations aux différences*. – On part d'un anneau k quotient de $\mathbf{C}[[h_1, \dots, h_m]]$. On note $\hbar_i$ l'image de h_i dans k. On fixe un k-point $a = (a_1, \dots, a_m)$ de l'espace affine

$\mathbf{A}_k^m$, et on note $\overline{a}$ le point fermé correspondant. On considère l'anneau local $A = \mathcal{O}_{\mathbf{A}^m,\overline{a}}$ muni des endomorphismes $\sigma_i : z_j \mapsto z_j$ si $i \neq j$, $z_i \mapsto z_i + \hbar_i$, ainsi que son complété $\widehat{A} \cong k[[z_1 - a_1, \ldots, z_m - a_m]]$. Noter que $\widehat{A}$ est fidèlement plat sur A et sur k. On fait de A et $\widehat{A}$ des anneaux différentiels comme en 1.4.4.2 : $\Omega^1 = \bigoplus \Omega^1_{\sigma_i} \cong \bigoplus \mathrm{d}z_i.A$, $\widehat{\Omega}^1 = \Omega^1 \otimes \widehat{A} \cong \bigoplus \mathrm{d}z_i.\widehat{A}$, et d est donnée par $\mathrm{d}f = \sum \mathrm{d}z_i.\delta_i(f)$. Les anneaux de constantes coïncident avec k.

Vérifions que l'anneau différentiel $\widehat{A}$ est *simple par couches*. Pour cela, on remarque que tout élément de $\widehat{A}$ s'écrit, de manière unique, comme série

$$f = \sum_{(n_1,\ldots,n_m)} \alpha_{n_1,\ldots,n_m} \prod_i \prod_{j=0}^{j=n_i} (z_i - a_i + j\hbar_i)$$

à coefficients $\alpha_{n_1,\ldots,n_m} \in k$, et que

$$\delta_i \left[\prod_{j=0}^{j=n_i} (z_i - a_i + j\hbar_i) \right] = n_i \prod_{j=0}^{j=n_i-1} (z_i - a_i + j\hbar_i) \quad \text{pour } n > 0.$$

(De cette dernière égalité, on déduit par ailleurs le calcul des coefficients :

$$\alpha_{n_1,\ldots,n_m} = \left[\left(\prod_i \frac{1}{n_i!} \delta_i^{n_i} \right)(f) \right] \Big|_a .)$$

On conclut en considérant, dans un idéal différentiel I non nul, un élément f de plus bas degré total en $z_1 - a_1, \ldots, z_m - a_m$; comme n_i est inversible dans k, on voit que le premier coefficient de f est dans I.

Considérons un système linéaire aux différences

$$\sigma_i(Y) = \mathcal{A}_{(i)}.Y,$$

où $\mathcal{A}_{(i)} \in \mathrm{GL}_\mu(A)$. On suppose de plus :

(i) que le système est intégrable : $\mathcal{A}_{(j)}^{\sigma_i} \mathcal{A}_{(i)} = \mathcal{A}_{(i)}^{\sigma_j} \mathcal{A}_{(j)}$ (2.2.3.3) ;

(ii) qu'une fois récrit sous la forme

$$\delta_i(Y) = \mathcal{G}_{(i)}.Y,$$

les matrices $\mathcal{G}_{(i)}$ sont encore à coefficients dans A ; sous cette hypothèse, on a alors *confluence* vers un système différentiel sans singularité en $\overline{a}$ lorsque $\hbar_i \to 0$.

On peut récrire ce système sous forme de A-module libre $M = \bigoplus A.m_k$ à connexion :

$$\nabla(m_k) = \bigoplus_{i,l} \frac{\mathrm{d}z_i}{\hbar_i} \otimes \left(\mathcal{A}^{-1}_{(i)lk} - \delta_{lk} \right) m_l \quad \text{(loc. cit.).}$$

Une telle connexion est toujours soluble dans $\widehat{A}$ (c'est l'analogue pour les équations aux différences du théorème de Frobenius formel). Pour le voir, il suffit de trouver une solution $Y \in \mathrm{GL}_\mu(\widehat{A})$ du système $\delta_i(Y) = \mathcal{G}_{(i)}.Y$, $i = 1, \ldots, m$. En itérant l'action des δ_i, on définit formellement pour tout multi-indice $\underline{n} = (n_1, \ldots, n_m)$ une matrice $\mathcal{G}_{(\underline{n})} \in M_\mu(A)$ définie par

$$\left(\prod_i \frac{1}{n_i!} \delta_i^{n_i} \right)(Y) = \mathcal{G}_{(\underline{n})}.Y$$

(l'ordre dans le produit $\prod_i$ est sans conséquence en vertu de l'hypothèse d'intégrabilité).

Il découle alors des calculs précédents sur les séries en $\prod_{j=0}^{j=n_i-1}(z_i - a_i + j\hbar_i)$ qu'il existe une unique solution $Y \in \mathrm{GL}_\mu(\widehat{A})$ de

$$\delta_i(Y) = \mathcal{G}_{(i)}.Y\ (i = 1, \ldots, m), \quad Y(a) = \mathrm{id}.$$

Elle est donnée par

$$Y = \sum_{\underline{n}=(n_1,\ldots,n_m)} \mathcal{G}_{(\underline{n})}(a). \prod_i \left[\prod_{j=0}^{j=n_i} (z_i - a_i + j\hbar_i) \right].$$

On a $\widehat{M} \cong \widehat{A} \otimes M$, et $\widehat{M}^\nabla$ s'identifie au k-module fibre de M en a.

Il résulte de ce qui précède et de 3.1.3.2 que tout sous-quotient de (M, ∇) est soluble dans $\widehat{A}$, et que pour tout sous-objet (N, ∇) de (M, ∇), N est libre de type fini sur A.

3.1.4.4. *Équations aux q-différences.* – La situation est analogue à la précédente, avec les changements suivants :

(i) changer h_i en $q_i - 1$;

(ii) $\sigma_i : z_j \mapsto z_j$ si $i \neq j$, $z_i \mapsto q_i z_i$;

(iii) tout élément de $\widehat{A}$ s'écrit comme série

$$f = \sum_{(n_1,\ldots,n_m)} \alpha_{n_1,\ldots,n_m} \prod_i \prod_{j=0}^{j=n_i} \left(z_i - q_i^j a_i\right)$$

à coefficients $\alpha_{n_1,\ldots,n_m} = [(\prod_i \frac{1}{[n_i]!_{q_i}} \delta_i^{n_i})(f)]|_a \in k$, et on a

$$\delta_i \left[\prod_{j=0}^{j=n_i} (z_i - q_i^j a_i) \right] = (n_i)_{q_i} \prod_{j=0}^{j=n_i-1} (z_i - q_i^j a_i) \quad \text{pour } n > 0,$$

avec $(n_i)_{q_i} = 1 + q_i + \cdots + q_i^{n_i-1}$, $[n_i]!_{q_i} = \prod_{j=1}^{j=n_i} (j)_{q_i}$;

(iv)

$$\nabla(m_k) = \bigoplus_{i,l} \mathrm{d}z_i \otimes \frac{\mathcal{A}_{(i)lk}^{-1} - \delta_{lk}}{(q_i - 1)z_i}\, m_l;$$

(v)

$$\left(\prod_i \frac{1}{[n_i]!_{q_i}} \delta_i^{n_i} \right)(Y) = \mathcal{G}_{(\underline{n})}.Y,\ Y = \sum_{\underline{n}=(n_1,\ldots,n_m)} \mathcal{G}_{(\underline{n})}(a). \prod_i \left[\prod_{j=0}^{j=n_i} (z_i - q_i^j a_i) \right].$$

L'exemple typique est celui des équations q-hypergéométriques confluant vers une équation différentielle hypergéométrique (on prend $\overline{a} \neq 0, 1$).

Dans tous ces exemples, on peut vérifier que l'intégrabilité est préservée par produit tensoriel et passage au dual.

3.2. Groupes de Galois différentiels

Dans toute la suite, on considère un anneau différentiel (A, d) (*avec* A *commutatif, bien sûr*), *d'anneau de constantes* $C = k$ noethérien, *et on suppose que* $\Omega^1 = \mathrm{d}A.A$ *est* fidèle et projectif de type fini *comme* A*-module à droite* (*ou, ce qui revient au même, fidèlement plat et de présentation finie*).

3.2.1. Définition et exemples

Soit $\mathcal{M} = (M, \nabla)$ un A-module à connexion rigide (i.e. M est projectif de type fini et la volte de ∇ est un isomorphisme, *cf.* 2.4.2.1). Pour tout couple d'entiers naturels (i, j), on pose $\mathrm{T}^{i,j}(\mathcal{M}) = \mathcal{M}^{\otimes i} \otimes \check{\mathcal{M}}^{\otimes j}$.

On note $\langle \mathcal{M} \rangle^{\otimes}$ la sous-catégorie strictement pleine (k-linéaire, abélienne, monoïdale symétrique) de la catégorie des A-modules à connexion formée des sous-quotients des sommes finies $\bigoplus \mathrm{T}^{i,j}(\mathcal{M})$.

3.2.1.1. THÉORÈME. – *Supposons donnée une sous-catégorie* $\mathcal{C}$ *pleine monoïdale abélienne de* $\langle \mathcal{M} \rangle^{\otimes}$ *contenant* $\mathcal{M}$. *On suppose que dans* $\mathcal{C}$, *tout objet est quotient d'un objet rigide, et que le dual d'un objet rigide est encore un objet de* $\mathcal{C}$. *Supposons donné en outre un foncteur monoïdal,* k*-linéaire, exact et fidèle* $\omega : \mathcal{C} \to$ (k*-modules de type fini*) *qui envoie objets rigides sur* k*-modules projectifs de type fini. Alors* :

(i) *il existe un* k*-groupe affine* (*fidèlement*) *plat* $G(\mathcal{C}, \omega)$, *muni d'un monomorphisme naturel* $\iota : G(\mathcal{C}, \omega) \to \mathrm{GL}(\omega(\mathcal{M}))$, *tel que* ω *induise une* $\otimes$*-équivalence de catégories entre* $\mathcal{C}$ *et la catégorie des représentations de type fini sur* k *de* $G(\mathcal{C}, \omega)$;

(ii) *si* k *est un corps, le monomorphisme* ι *est une immersion fermée et son image s'identifie au sous-groupe fermé de* $\mathrm{GL}(\omega(\mathcal{M}))$ *qui stabilise les* $\omega(\mathcal{N})$, *pour tout sous-objet* $\mathcal{N}$ *d'une somme finie quelconque* $\bigoplus \mathrm{T}^{i,j}(\mathcal{M})$.

3.2.1.2. *Notation et définition*. – Si $\mathcal{C} = \langle \mathcal{M} \rangle^{\otimes}$, on écrira $\mathrm{Gal}(\mathcal{M}, \omega)$ au lieu de $G(\mathcal{C}, \omega)$. C'est le *groupe de Galois différentiel de* $\mathcal{M}$ *pointé en* ω.

Démonstration du théorème 3.2.1.1. – La première assertion de 3.2.1.1 est une application directe du lemme tannakien 8.1.2 de [3] ; $G(\mathcal{C}, \omega) = \mathrm{Aut}^{\otimes}\omega$ représente le foncteur $\underline{\mathrm{Aut}}^{\otimes}\omega$ sur les k-algèbres commutatives unitaires (dans loc. cit., on demande que ω commute à la dualité sur les objets rigides, mais c'est automatique, *cf.* [11], 2.2).

Si k est un corps, le foncteur $\underline{\mathrm{Stab}}\{\omega(\mathcal{N})\}$ qui à toute k-algèbre commutative unitaire k' associe le stabilisateur dans $\mathrm{GL}(\omega(\mathcal{M}))(k')$ des $\omega(\mathcal{N}) \otimes k'$ (pour tout sous-objet $\mathcal{N}$ dans $\mathcal{C}$ d'une somme finie quelconque $\bigoplus \mathrm{T}^{i,j}(\mathcal{M})$) est représentable par un sous-schéma fermé $\mathrm{Stab}\{\omega(\mathcal{N})\}$ de $\mathrm{GL}(\omega(\mathcal{M}))$ ([17], II.1.3.6) ; c'est le stabilisateur dont il s'agit dans (ii). On a clairement $\underline{\mathrm{Aut}}^{\otimes}\omega \subset \underline{\mathrm{Stab}}\{\omega(\mathcal{N})\}$, ce qui signifie que le monomorphisme ι se factorise à travers $\mathrm{Stab}\{\omega(\mathcal{N})\}$. Réciproquement, toute représentation de type fini sur k de $G(\mathcal{C}, \omega)$ (c'est-à-dire l'image par ω de tout objet de $\mathcal{C}$) est quotient de l'image par ω d'un sous-objet de $\bigoplus \mathrm{T}^{i,j}(\mathcal{M})$; elle définit donc une représentation de type fini sur k de $\mathrm{Stab}\{\omega(\mathcal{N})\}$. D'après [41], II.3.3 (après passage aux catégories des *ind*-objets, *cf.* loc. cit 2.2.3.1), cette correspondance fonctorielle monoïdale entre catégories de représentations provient d'un homomorphisme $\mathrm{Stab}\{\omega(\mathcal{N})\} \to G(\mathcal{C}, \omega)$, qui est inverse de $G(\mathcal{C}, \omega) \hookrightarrow \mathrm{Stab}\{\omega(\mathcal{N})\}$.

3.2.1.3. *Exemples généraux*. – (i) Soit (A', d') une extension différentielle de (A, d), avec $C' = k$ régulier de dimension $\leqslant 1$, et A' fidèlement plat sur A. On suppose de plus (A', d') simple ou simple par couches, et $\mathcal{M}$ soluble dans A'. On prend pour ω le foncteur $\omega_{A'} : \mathcal{N} \mapsto (\mathcal{N}_{A'})^{\nabla_{A'}}$ sur $\mathcal{C} = \langle \mathcal{M} \rangle^{\otimes}$.

Il résulte de la proposition 3.1.3.2 que les hypothèses de 3.2.1.1 sont satisfaites.

Ceci s'applique aux exemples de 3.1.4. En 3.1.4.3 (resp. 3.1.4.4), on prendra pour k un quotient régulier de dimension un de $\mathbf{C}[[h_1,\dots,h_m]]$ (resp. $\mathbf{C}[[q_1-1,\dots,q_m-1]]$), par exemple celui défini par $h_1=\cdots=h_m$ (resp. $q_1=\cdots=q_m$).

(ii) Si (A,d) vérifie les hypothèses de 2.5.3.2, $\langle\mathcal{M}\rangle^{\otimes}$ est tannakienne. Si elle admet un foncteur fibre ω sur k, $\mathrm{Gal}(\mathcal{M},\omega)$ est le groupe tannakien associé.

(iii) Les groupes de Galois différentiels de la théorie de Picard–Vessiot (1.3), les groupes de Galois aux différences étudiés dans [47], et les groupes « mixtes » de [8] sont des exemples de groupes $\mathrm{Gal}(\mathcal{M},\omega)$; ce sont du reste des cas particuliers de (i) ou (ii), où A est un corps.

(iv) Les enveloppes algébriques des groupes d'holonomie (1.1.3) sont aussi des incarnations de groupes $G(\mathcal{C},\omega)$. En effet, soit $P\to X$ un fibré principal à droite sous GL_n, muni d'une connexion $\aleph$, et soit (E,∇) le fibré vectoriel à connexion sur X associé. On peut prendre pour $\mathcal{C}$ la catégorie des fibrés à connexion de la forme V/W, où W, resp. V, sont des champs de p-plans, resp. q-plans, stables sous connexion dans les $\bigoplus \mathrm{T}^{i,j}(E)$ (pour $p\leqslant q$ arbitraires). Le foncteur fibre en x induit une équivalence ω entre $\mathcal{C}$ et la catégorie des représentations réelles de dimension finie de l'enveloppe algébrique $G(\mathcal{C},\omega)$ de $\mathrm{Hol}_x(\nabla)$: en effet, d'une part toute représentation réelle de dimension finie de $G(\mathcal{C},\omega)$ est sous-quotient d'un $\bigoplus \mathrm{T}^{i,j}(E_x)$, d'autre part P provient d'un fibré principal sous $\mathrm{Hol}_x(\nabla)$, donc aussi d'un fibré principal sous $G(\mathcal{C},\omega)$; la construction du fibré vectoriel associé à toute représentation réelle de dimension finie de $G(\mathcal{C},\omega)$ fournit un inverse de ω.

Si X est riemannienne simplement connexe et si E est le fibré tangent muni de la connexion de Levi-Civita, le groupe compact connexe $\mathrm{Hol}_x(\nabla)$ s'identifie au groupe des points réels de $G(\mathcal{C},\omega)$.

À l'autre extrême, si la connexion ∇ sur E est intégrable, $G(\mathcal{C},\omega)$ est l'enveloppe algébrique du groupe de monodromie, ce qui exprime l'équivalence bien connue entre fibrés à connexion intégrable et systèmes locaux.

3.2.1.4. LEMME. – *Supposons que les hypothèses de* 3.2.1.1 *sont satisfaites avec* $\mathcal{C}=\langle\mathcal{M}\rangle^{\otimes}$. *Alors* $\mathrm{Gal}(\mathcal{M},\omega)$ *est le groupe trivial si et seulement si* $\mathcal{M}$ *est un module à connexion trivial.*

En effet, si $\mathrm{Gal}(\mathcal{M},\omega)$ est trivial, on a $M^{\nabla}\cong\mathrm{Mor}((A,\mathrm{d}),\mathcal{M})\cong\omega(\mathcal{M})$. En particulier, M^{∇} est projectif de type fini sur k, donc facteur d'un k^n ; ainsi $\mathcal{M}'=(A\otimes M^{\nabla}, d\otimes \mathrm{id}_{M^{\nabla}})$ est facteur direct de $(A,\mathrm{d})^n$, donc est un objet de $\langle\mathcal{M}\rangle^{\otimes}$. Le morphisme naturel $\mathcal{M}'\to\mathcal{M}$ est un isomorphisme, puisqu'il en est ainsi de son image par ω. Réciproquement, si $\mathcal{M}$ est un module à connexion trivial, il est quotient d'un $(A,\mathrm{d})^n$. Ainsi $\langle\mathcal{M}\rangle^{\otimes}$ n'est autre que la catégorie monoïdale des sous-quotients des $(A,\mathrm{d})^n$, équivalente via ω à la catégorie monoïdale des k-modules de type fini. Donc $\mathrm{Gal}(\mathcal{M},\omega)$ est le groupe trivial.

3.2.1.5. *Question de finitude*. – Considérons l'exemple $k=\mathbf{C}[[h]]$, $A=$ le localisé de $k[z]$ en $z=0$, $\mathrm{d}:A\to A\,\mathrm{d}z$ la différentielle de Kähler standard. Si nous munissons A de la connexion $\nabla(1)=\mathrm{d}z$, et prenons pour ω le foncteur fibre en $z=0$, le groupe de Galois différentiel est simplement $\mathbf{G}_m=\mathrm{Spec}\,k[z,\frac{1}{z}]\cong\mathrm{Spec}\,k[x,y]/(xy+x+y)$ (avec $x=z-1, y=\frac{1}{z}-1$).

L'objet $\mathcal{M}$ obtenu en munissant A de la connexion $\nabla(1)=h.\,\mathrm{d}z$ est plus délicat. Remarquons que pour tout $N>0$, $(k/h^Nk)\otimes\mathcal{M}$ est trivial : une base de solutions est donnée par $\sum_{n=0}^{n=N-1}\frac{(-hz)^n}{n!}$. Le groupe de Galois différentiel est

$$\mathrm{Gal}(\mathcal{M},\omega)=\varprojlim\,\mathrm{Spec}\,k[x,y]/\big(h^nxy+x+y\big)$$

(les morphismes de transition étant donnés par la multiplication de x et y par h). Ce schéma en groupes plat *n'est pas de type fini* sur k, et le monomorphisme $\iota:\mathrm{Gal}(\mathcal{M},\omega)\to\mathbf{G}_m$ n'est pas une immersion fermée. Si k' est une $\mathbf{C}((h))$-algèbre, on a $\mathrm{Gal}(\mathcal{M},\omega)(k')=k'^*$, tandis que si $k'=\mathbf{C}$ est le quotient de k, on a $\mathrm{Gal}(\mathcal{M},\omega)(k')=\{1\}$.

L'apparition de schémas en groupes non de type fini est un trait caractéristique de la théorie tannakienne sur des bases qui ne sont pas des corps.

3.2.2. Torseur des solutions et groupe de Galois différentiel intrinsèque

3.2.2.1. Nous revenons à la situation de 3.2.1.2 en faisant l'hypothèse supplémentaire que *tout objet de* $\langle\mathcal{M}\rangle^{\otimes}$ *est rigide* et que l'anneau k des constantes est un corps.

Cette hypothèse est vérifiée en particulier si $\mathcal{M}$ est soluble dans une extension différentielle *simple* (A', d') de (A, d), avec A' fidèlement plat sur A.

Sous cette hypothèse, on dispose du foncteur « oubli de la connexion »

$$\text{oubli}: \langle\mathcal{M}\rangle^{\otimes} \longrightarrow \{A\text{-modules projectifs de type fini}\}.$$

Le foncteur $\underline{\mathrm{Isom}}^{\otimes}(\omega \otimes 1_A, \text{oubli})$ sur les A-algèbres commutatives unitaires est alors représentable par un A-schéma affine $\Sigma(\mathcal{M}, \omega)$. C'est un torseur sous $\mathrm{Gal}(\mathcal{M}, \omega) \otimes_k A$ (agissant à droite par composition) ; en particulier, il est fidèlement plat sur A ([41], II.4.2).

Dans la situation évoquée ci-dessus où $\mathcal{M}$ est soluble dans (A', d') simple, et où ω est le foncteur $\omega_{A'}: \mathcal{N} \mapsto N_{A'}^{\nabla_{A'}}$, ce torseur est appelé *torseur des solutions* de $\mathcal{M}$ dans A' ; en effet, on verra plus loin que lorsque M est libre, l'algèbre des fonctions sur $\Sigma(\mathcal{M}, \omega)$ est engendrée par les coefficients d'une « matrice fondamentale de solutions » (3.4.2).

3.2.2.2. De même, le foncteur $\underline{\mathrm{Aut}}^{\otimes}(\text{oubli})$ sur les A-algèbres commutatives unitaires est représentable par un A-schéma en groupes affine plat $\mathrm{Gal}(\mathcal{M}, \text{oubli})$, appelé *groupe de Galois différentiel intrinsèque* (ou encore *générique* si A est un corps) de $\mathcal{M}$.

Ce schéma en groupes agit à gauche par composition sur $\Sigma(\mathcal{M}, \omega)$, qui est en fait un bitorseur sous $\mathrm{Gal}(\mathcal{M}, \text{oubli})$ et $\mathrm{Gal}(\mathcal{M}, \omega) \otimes_k A$.

Le schéma en groupes $\mathrm{Gal}(\mathcal{M}, \text{oubli})$ n'est autre que le sous-groupe fermé de $\mathrm{GL}(M)$ qui stabilise les sous-objets $\mathcal{N} = (N, \nabla)$ des sommes finies $\bigoplus \mathrm{T}^{i,j}(\mathcal{M})$ (noter que les sous-A-modules sous-jacents sont par hypothèse facteurs directs, de sorte que le stabilisateur $\mathrm{Stab}\{\mathcal{N}\}$ en question est bien défini : il représente le foncteur associant à toute A-algèbre commutative unitaire R le stabilisateur dans $\mathrm{GL}(M_R)$ des N_R). Ceci peut se voir en utilisant la propriété correspondante pour $\mathrm{Gal}(\mathcal{M}, \omega) \otimes_k A$ (*cf.* 3.2.1.1 (ii)), et la formule $\mathrm{Gal}(\mathcal{M}, \text{oubli}) = \mathrm{Aut}_{(\mathrm{Gal}(\mathcal{M},\omega)\otimes_k A)}\Sigma(\mathcal{M}, \omega)$.

Il faut toutefois prendre garde à la réciproque : il n'est pas vrai en général que tout sous-A-module de M stable sous $\mathrm{Gal}(\mathcal{M}, \text{oubli}) = \mathrm{Stab}\,\{\mathcal{N}\}$ soit stable sous la connexion.

3.2.2.3. Il résulte de ce qui précède (en prenant $R = A[\varepsilon]/(\varepsilon^2)$) que l'algèbre de Lie de $\mathrm{Gal}(\mathcal{M}, \text{oubli})$ est la sous-A-algèbre de Lie $\mathrm{Lie}\,\mathrm{Stab}\,\{\mathcal{N}\}$ de $\mathfrak{gl}(M)$ qui stabilise les sous-objets des sommes finies $\bigoplus \mathrm{T}^{i,j}(\mathcal{M})$, pour l'action de Lie naturelle sur les puissances tensorielles mixtes.

Remarquons que $\mathfrak{gl}(M)$ s'identifie au A-module sous-jacent au module à connexion $\mathrm{T}^{1,1}(\mathcal{M}) = \mathcal{M} \otimes \check{\mathcal{M}}$.

3.2.2.4. PROPOSITION. – $\mathrm{Lie}\,\mathrm{Gal}(\mathcal{M}, \text{oubli})$ *est (sous-jacent à) un sous-module à connexion de* $\mathrm{T}^{1,1}(\mathcal{M})$. *Tout sous-module à connexion de* $\mathrm{Lie}\,\mathrm{Gal}(\mathcal{M}, \text{oubli})$ *est un idéal de Lie.*

Démonstration. – Pour prouver la première assertion, il s'agit de faire voir que pour tout $\ell \in \mathrm{Lie}\,\mathrm{Stab}\,\{\mathcal{N}\}$, et tout sous-objet $\mathcal{N} = (N, \nabla)$ d'une somme finie $\mathcal{M}' := \bigoplus \mathrm{T}^{i,j}(\mathcal{M})$, $(\nabla\ell)N \subset \Omega^1 \otimes N$. Pour tout $n \in N$, $(\nabla\ell)n$ se calcule via l'action de Lie naturelle

$$\mathfrak{L}: \mathrm{T}^{1,1}(\mathcal{M}) \otimes \mathcal{M}' \longrightarrow \mathcal{M}'$$

qui est un morphisme de modules à connexion :

$$\nabla(\ell)n = \big(1_{\Omega^1} \otimes \mathfrak{L}\big)[\nabla(\ell) \otimes n].$$

On a $\mathfrak{L}(\ell \otimes n) = \ell.n \in N$, d'où $\nabla(\ell.n) \in \Omega^1 \otimes N$. Calculons ce dernier en faisant intervenir la contrainte de commutativité $c = c(\mathrm{T}^{1,1}(\mathcal{M}), \mathcal{M}')$ (l'échange des facteurs, qui est un morphisme de modules à connexion) :

$$\begin{aligned}\nabla(\ell.n) &= \nabla\big(\mathfrak{L}(c(n \otimes \ell))\big) = \big(1_{\Omega^1} \otimes (\mathfrak{L} \circ c)\big)\nabla(n \otimes \ell)\\ &= \big(1_{\Omega^1} \otimes (\mathfrak{L} \circ c)\big)\big[\nabla(n) \otimes \ell + \big(\phi(\nabla_{\mathcal{M}'}) \otimes 1_{\mathrm{T}^{1,1}(\mathcal{M})}\big)\big(n \otimes \nabla(\ell)\big)\big]\\ &= \big(1_{\Omega^1} \otimes (\mathfrak{L} \circ c)\big)\big[\nabla(n) \otimes \ell + \big(\phi(\nabla_{\mathcal{N}}) \otimes 1_{\mathrm{T}^{1,1}(\mathcal{M})}\big)\big(n \otimes \nabla(\ell)\big)\big].\end{aligned}$$

On en déduit que $\big(1_{\Omega^1} \otimes (\mathfrak{L} \circ c)\big)(\phi(\nabla_{\mathcal{N}}) \otimes 1_{\mathrm{T}^{1,1}(\mathcal{M})})(n \otimes \nabla(\ell)) \in \Omega^1 \otimes N$. Comme Ω^1 est supposé fidèlement plat à droite sur A, et comme n est arbitraire, ceci entraîne que

$$\big(\phi(\nabla_{\mathcal{N}}) \otimes 1_{\mathrm{T}^{1,1}(\mathcal{M})}\big)\big(N \otimes \nabla(\ell)\big) \subset \Omega^1 \otimes N \otimes \mathrm{Lie}\,\mathrm{Stab}_{\mathrm{T}^{1,1}(\mathcal{M})}(N),$$

où $\mathrm{Lie}\,\mathrm{Stab}_{\mathrm{T}^{1,1}(\mathcal{M})}(N)$ désigne la plus grande sous-A-algèbre de Lie de $\mathrm{T}^{1,1}(M)$ telle que

$$\mathfrak{L}\big(\mathrm{Lie}\,\mathrm{Stab}_{\mathrm{T}^{1,1}(\mathcal{M})}(N) \otimes N\big) \subset N.$$

Or, $\phi(\nabla_{\mathcal{N}})$ est un isomorphisme (puisque $\mathcal{N}$ est rigide), donc

$$N \otimes \nabla(\ell) \subset N \otimes \Omega^1 \otimes \mathrm{Lie}\,\mathrm{Stab}_{\mathrm{T}^{1,1}(\mathcal{M})}(N),$$

d'où finalement $\nabla(\ell) \in \Omega^1 \otimes \mathrm{Lie}\,\mathrm{Stab}_{\mathrm{T}^{1,1}(\mathcal{M})}(N)$ et $(\nabla\ell)N \subset \Omega^1 \otimes N$.

La seconde assertion en découle, car tout sous-module à connexion de $\mathrm{Lie}\,\mathrm{Stab}\,\{\mathcal{N}\} \subset \mathrm{T}^{1,1}(\mathcal{M})$ est stable sous l'action adjointe de $\mathrm{Lie}\,\mathrm{Stab}\,\{\mathcal{N}\}$.

3.2.2.5. *Le cas où A est de caractéristique $p > 0$, et où Ω^1 est un bimodule commutatif.* – Dans ce cas, l'anneau des constantes k – qu'on suppose être un corps-contient A^p (la commutativité de Ω^1 est essentielle ici). De plus, ${}^\vee\Omega^1$ est muni d'une p-structure. On peut définir l'opérateur de p-courbure $R_{\nabla,p}$: pour tout $D \in {}^\vee\Omega^1$, $R_{\nabla,p}(D) = (\nabla_D)^p - \nabla_{(D^p)}$, un endomorphisme A-linéaire de M.

Supposons ∇ *intégrable*. Alors $R_{\nabla,p}$ est additif et p-linéaire en D. Plaçons-nous dans la situation de 1.2.1.1 ou 1.2.2.1 : plus précisément, A est le corps de fonctions de X lisse sur k_0 parfait (auquel cas le corps des constantes est A^p), ou bien A est de la forme $\overline{\mathcal{O}}_x$ (auquel cas le corps des constantes est $k = k_0$). Les calculs de [30], 5.2 montrent alors qu'on a $R_{\nabla,p}(D) \in \mathrm{End}\mathcal{M}$, et que la p-algèbre de Lie engendrée sur A par les $R_{\nabla,p}(D)$ et leurs puissances p^n-ièmes est abélienne.

Le cas de la situation 1.2.1.1 étant traité dans [47] (*voir* loc. cit. 6.6 pour le cas de dimension supérieure), nous nous limiterons *au cas* $A = \overline{\mathcal{O}}_x$. Un foncteur fibre ω est alors donné par $\mathcal{N} \mapsto (\mathcal{N}_{A'})^{\nabla_{A'}}$ sur $\langle\mathcal{M}\rangle^\otimes$, avec $A' = \mathcal{O}_x^{\mathrm{pd}}$ (*cf.* 3.1.4.2), et tout objet de $\langle\mathcal{M}\rangle^\otimes$ est rigide (*cf.* 3.1.3.2 (i), (iii)). La p-algèbre de Lie abélienne $\mathcal{L}$ engendrée sur k par les endomorphismes horizontaux $R_{\nabla,p}(D)$ (et leurs puissances p^n-ièmes) peut être vue comme sous-algèbre de Lie de $\mathrm{Lie}\,\mathrm{Gal}(\mathcal{M},\omega)$; elle est invariante sous l'action adjointe de $\mathrm{Gal}(\mathcal{M},\omega)$. Notons $G(\mathcal{L})$ le sous-schéma en groupes fermé infinitésimal de hauteur 1 (i.e. annulé par Frobenius relatif à k) de $\mathrm{Gal}(\mathcal{M},\omega)$ de p-algèbre de Lie $\mathcal{L}$ (*cf.* [17], 7, n$^{\mathrm{os}}$ 3 et 4). On peut aussi voir $\mathcal{L} \otimes_k A$ comme sous-algèbre de Lie de $\mathrm{Lie}\,\mathrm{Gal}(\mathcal{M}, \mathrm{oubli})$.

3.2.2.6. THÉORÈME. – (i) $\mathrm{Gal}(\mathcal{M},\omega) = G(\mathcal{L})$; *en particulier,* $\mathrm{Gal}(\mathcal{M},\omega)$ *est abélien infinitésimal de hauteur* 1.

(ii) $\mathrm{Lie}\,\mathrm{Gal}(\mathcal{M},\mathrm{oubli})$ *est la* A*-algèbre de Lie engendrée par les* $R_{\nabla,p}(D)$.

(iii) *Le torseur des solutions* $\Sigma(\mathcal{M},\omega)$ *est un torseur trivial* ; *en particulier,* $\mathrm{Gal}(\mathcal{M},\mathrm{oubli}) \cong \mathrm{Gal}(\mathcal{M},\omega) \otimes_k A$.

Démonstration. – D'après le critère de Chevalley, il suffit de montrer que toute droite $k.\ell$ dans une somme finie $\bigoplus \omega(\mathrm{T}^{i,j}(\mathcal{M}))$ stable sous $G(\mathcal{L})$ l'est aussi sous $\mathrm{Gal}(\mathcal{M},\omega)$. On peut du reste remplacer $k.\ell$ par une quelconque puissance tensorielle non nulle ; en particulier, par sa puissance p-ième. Comme $G(\mathcal{L})$ est de hauteur 1, on peut donc supposer ℓ fixe sous $G(\mathcal{L})$. Alors ℓ est annulé par $\mathcal{L}$. Il en est de même du $\mathrm{Gal}(\mathcal{M},\omega)$-sous-espace de $\bigoplus \omega(\mathrm{T}^{i,j}(\mathcal{M}))$ engendré par ℓ, puisque $\mathcal{L}$ est invariante sous l'action adjointe de $\mathrm{Gal}(\mathcal{M},\omega)$. Le sous-module à connexion $\mathcal{N} \subset \bigoplus \mathrm{T}^{i,j}(\mathcal{M})$ correspondant est donc annulé par les $R_{\nabla,p}(D)$. D'après 1.2.2.1, $\mathcal{N}$ est par suite trivial. On conclut que ℓ est fixé par $\mathrm{Gal}(\mathcal{M},\omega)$, ce qui établit (i). Les points (ii) et (iii) en résultent aisément, et sont laissés au lecteur.

On peut voir 3.2.2.6 (ii) comme un analogue du théorème d'Ambrose–Singer (1.1.2) en caractéristique p (1.2.2).

3.2.3. Fonctorialités

3.2.3.1. Commençons par quelques préliminaires sur la catégorie $\mathrm{Ind}\langle\mathcal{M}\rangle^{\otimes}$ des *ind*-objets de $\langle\mathcal{M}\rangle^{\otimes}$. Elle admet les descriptions équivalentes suivantes :

(i) c'est la catégorie des (petits) systèmes inductifs filtrants $(\mathcal{M}_\alpha)$ de $\langle\mathcal{M}\rangle^{\otimes}$, avec

$$\mathrm{Mor}\big((\mathcal{M}_\alpha),(\mathcal{N}_\beta)\big) = \varprojlim_{\alpha}\, \varinjlim_{\beta}\ \mathrm{Mor}(\mathcal{M}_\alpha,\mathcal{N}_\beta),$$

(ii) c'est la catégorie des foncteurs contravariants $\langle\mathcal{M}\rangle^{\otimes} \to \mathrm{Ens}$ qui sont la (petite) limite inductive filtrante de foncteurs représentables $h_{\mathcal{M}_\alpha}$.

Le passage de (i) à (ii) est $(\mathcal{M}_\alpha) \mapsto \varinjlim h_{\mathcal{M}_\alpha}$ (*cf.* [18], 4).

Comme $\langle\mathcal{M}\rangle^{\otimes}$ est k-linéaire abélienne monoïdale, il en est de même de $\mathrm{Ind}\langle\mathcal{M}\rangle^{\otimes}$, et $\langle\mathcal{M}\rangle^{\otimes}$ s'identifie à une sous-catégorie strictement pleine de $\mathrm{Ind}\langle\mathcal{M}\rangle^{\otimes}$.

Par ailleurs, la catégorie des A-modules à connexion possède de manière évidente des (petites) limites inductives filtrantes, et on a $h_{\varinjlim \mathcal{M}_\alpha} = \varinjlim h_{\mathcal{M}_\alpha}$. On en déduit que le foncteur

$$\varinjlim : \mathrm{Ind}\langle\mathcal{M}\rangle^{\otimes} \longrightarrow \{A\text{-modules à connexion}\}$$

est pleinement fidèle (et d'ailleurs monoïdal), ce qui nous permet d'identifier dorénavant les *ind*-objets de $\langle\mathcal{M}\rangle^{\otimes}$ à des A-modules à connexion.

Dans la situation 3.2.1.1–3.2.1.2, tout objet de $\mathcal{C} = \langle\mathcal{M}\rangle^{\otimes}$ est noethérien, et on en déduit ([18], 4.2.1) que tout *ind*-objet de $\langle\mathcal{M}\rangle^{\otimes}$ est (petite) limite ordonnée filtrante de sous-objets qui sont objets de $\langle\mathcal{M}\rangle^{\otimes}$. Les objets de $\langle\mathcal{M}\rangle^{\otimes}$ sont les objets noethériens de $\mathrm{Ind}\langle\mathcal{M}\rangle^{\otimes}$.

3.2.3.2. *Fonctorialité en* $\mathcal{M}$. – Dans la situation 3.2.1.2, considérons un objet rigide $\mathcal{N}$ de $\langle\mathcal{M}\rangle^{\otimes}$. Supposons que tout objet de $\langle\mathcal{N}\rangle^{\otimes}$ soit quotient d'un objet rigide. On peut appliquer 3.2.1.1 (i) à la sous-catégorie pleine $\langle\mathcal{N}\rangle^{\otimes}$ de $\langle\mathcal{M}\rangle^{\otimes}$. On obtient alors un homomorphisme canonique

$$\mathrm{Gal}(\mathcal{M},\omega) \longrightarrow \mathrm{Gal}(\mathcal{N},\omega).$$

3.2.3.3. LEMME. – *Si k est régulier de dimension $\leqslant 1$, l'homomorphisme de bigèbres*

$$\mathcal{O}\big(\mathrm{Gal}(\mathcal{N},\omega)\big) \longrightarrow \mathcal{O}\big(\mathrm{Gal}(\mathcal{M},\omega)\big)$$

est injectif. Si k est un corps, $\mathrm{Gal}(\mathcal{M},\omega) \to \mathrm{Gal}(\mathcal{N},\omega)$ *est fidèlement plat.*

Démonstration. – On étend ω à la catégorie des *ind*-objets de $\langle\mathcal{M}$ ou $\mathcal{N}\rangle^{\otimes}$, en considérant des représentations non nécessairement de type fini de $\mathrm{Gal}(\mathcal{M}$ ou $\mathcal{N},\omega)$, *cf.* [41], II.2.3.4. Alors le foncteur $X \in \mathrm{Ind}\langle\mathcal{M}\rangle^{\otimes} \mapsto \mathrm{Hom}_k(\omega(X),k)$ (resp. $X \in \mathrm{Ind}\langle\mathcal{N}\rangle^{\otimes} \mapsto \mathrm{Hom}_k(\omega(X),k)$) est représentable par un objet $B_{\mathcal{M}}$ (resp. $B_{\mathcal{N}}$), et on a un morphisme naturel $B_{\mathcal{N}} \to B_{\mathcal{M}}$ dans $\mathrm{Ind}\langle\mathcal{M}\rangle^{\otimes}$; l'image de ce dernier par ω n'est autre que $\mathcal{O}(\mathrm{Gal}(\mathcal{N},\omega)) \to \mathcal{O}(\mathrm{Gal}(\mathcal{M},\omega))$, *cf.* loc. cit. 2.3.2.1.

Soit X un sous-objet (dans $\mathrm{Ind}\langle\mathcal{N}\rangle^{\otimes}$) du noyau de $B_{\mathcal{N}} \to B_{\mathcal{M}}$, tel que $\omega(X)$ soit de type fini sur k ; on peut voir X comme un objet de $\langle\mathcal{N}\rangle^{\otimes}$. Les identifications $\mathrm{Hom}_k(\omega(X),k) = \mathrm{Mor}_{\mathrm{Ind}\langle\mathcal{N}\rangle^{\otimes}}(X,B_{\mathcal{N}}) = \mathrm{Mor}_{\mathrm{Ind}\langle\mathcal{M}\rangle^{\otimes}}(X,B_{\mathcal{M}})$ montrent que $\mathrm{Hom}_k(\omega(X),k) = 0$. Comme $B_{\mathcal{N}}$ est k-plat, on en déduit que $X = 0$ si k est régulier de dimension $\leqslant 1$. Or, $\omega(\mathrm{Ker}(B_{\mathcal{N}} \to B_{\mathcal{M}}))$ est limite inductive de tels $\omega(X)$ (*cf.* [43], 1.4), donc $B_{\mathcal{N}} \hookrightarrow B_{\mathcal{M}}$.

La seconde assertion du lemme découle de la première (qui, dans le cas où k est un corps, s'obtient directement à partir de 3.2.1.1 (ii) ; *voir* aussi [41], II.4.3.2).

3.2.3.4. *Changement d'anneau différentiel*. – Soit $(A,\mathrm{d}) \to (\widetilde{A},\widetilde{\mathrm{d}})$ un morphisme d'anneaux différentiels (*cf.* 2.4.5). On *ne* suppose *pas* que la k-algèbre $\widetilde{C}$ des constantes de $\widetilde{A}$ soit égale à k.

Nous aurons besoin de la catégorie $\widetilde{C}$-linéaire abélienne monoïdale $\mathrm{Ind}\langle\mathcal{M}\rangle^{\otimes}_{(\widetilde{C})}$ formée des *ind*-objets de $\langle\mathcal{M}\rangle^{\otimes}$ munis d'une action de $\widetilde{C}$; sous les hypothèses de 3.2.1.1 (avec $\mathcal{C} = \langle\mathcal{M}\rangle^{\otimes}$), cette catégorie est $\otimes$-équivalente à la catégorie des représentations sur $\widetilde{C}$ de $\mathrm{Gal}(\mathcal{M},\omega) \otimes_k \widetilde{C}$, *cf.* [41], II.1.5, 2.0, III.1.1.

Pour simplifier, nous supposerons que $\widetilde{C} \otimes_k \widetilde{C} \cong \widetilde{C}$; c'est le cas si $\widetilde{C}$ est une *localisation* ou bien un *quotient* de k. On peut alors considérer $\mathrm{Ind}\langle\mathcal{M}\rangle^{\otimes}_{(\widetilde{C})}$ comme une sous-catégorie pleine de $\mathrm{Ind}\langle\mathcal{M}\rangle^{\otimes}$, et même comme une sous-catégorie monoïdale en vertu des isomorphismes canoniques $M' \otimes_{A\otimes\widetilde{C}} M'' \cong M' \otimes_A M''$. On dispose d'autre part d'un foncteur monoïdal

$$u : \mathrm{Ind}\langle\mathcal{M}\rangle^{\otimes}_{(\widetilde{C})} \longrightarrow \mathrm{Ind}\langle\mathcal{M}_{\widetilde{A}}\rangle^{\otimes}, \qquad N \longmapsto \widetilde{A} \otimes_{A\otimes_k\widetilde{C}} N \cong N_{\widetilde{A}}.$$

Supposons de plus $\widetilde{A}$ fidèlement plat sur $A \otimes_k \widetilde{C}$, de sorte que u est fidèle et exact.

Notons $u^{-1}\langle\mathcal{M}_{\widetilde{A}}\rangle^{\otimes}$ la sous-catégorie pleine de $\mathrm{Ind}\langle\mathcal{M}\rangle^{\otimes}_{(\widetilde{C})}$ formée des objets dont l'image par u est dans $\langle\mathcal{M}_{\widetilde{A}}\rangle^{\otimes}$. C'est la sous-catégorie pleine des objets noethériens ; elle est $\otimes$-équivalente à la catégorie des représentations de type fini sur $\widetilde{C}$ de $\mathrm{Gal}(\mathcal{M},\omega) \otimes_k \widetilde{C}$.

Supposons donné en outre un foncteur monoïdal $\widetilde{\omega}$ sur $\langle\mathcal{M}_{\widetilde{A}}\rangle^{\otimes}$ comme en 3.2.1.1, tel que $\widetilde{\omega} \circ u$ soit isomorphe à la restriction de $\omega \otimes_k \mathrm{id}_{\widetilde{C}}$ à $u^{-1}\langle\mathcal{M}_{\widetilde{A}}\rangle^{\otimes}$. Le foncteur monoïdal

$$u : u^{-1}\langle\mathcal{M}_{\widetilde{A}}\rangle^{\otimes} \longrightarrow \langle\mathcal{M}_{\widetilde{A}}\rangle^{\otimes}, \qquad N \longmapsto N_{\widetilde{A}}$$

induit un homomorphisme

$$\mathrm{Gal}(\mathcal{M}_{\widetilde{A}},\widetilde{\omega}) \longrightarrow \mathrm{Gal}(\mathcal{M},\omega) \otimes_k \widetilde{C}.$$

3.2.3.5. LEMME. – *Cet homomorphisme est un monomorphisme* (*en particulier, c'est une immersion fermée si* $\widetilde{C}$ *est un corps*). *C'est un isomorphisme si* $(\widetilde{A}, \widetilde{\mathrm{d}}) = (A, \mathrm{d}) \otimes_k \widetilde{C}$ (*localisation ou spécialisation des constantes*).

Démonstration. – On a clairement

$$\underline{\mathrm{Aut}}^{\otimes}\Big((\omega \otimes_k \mathrm{id}_{\widetilde{C}})_{|u^{-1}\langle \mathcal{M}_{\widetilde{A}}\rangle^{\otimes}} \Big) = \underline{\mathrm{Aut}}^{\otimes}(\widetilde{\omega} \circ u) \hookleftarrow \underline{\mathrm{Aut}}^{\otimes}(\widetilde{\omega})_{|\langle \mathcal{M}_{\widetilde{A}}\rangle^{\otimes}},$$

puisque tout objet de $\langle \mathcal{M}_{\widetilde{A}}\rangle^{\otimes}$ est sous-quotient d'un objet de $u(u^{-1}\langle \mathcal{M}_{\widetilde{A}}\rangle^{\otimes})$; d'où la première assertion. La seconde provient de ce que si $(\widetilde{A}, \widetilde{\mathrm{d}}) = (A, \mathrm{d}) \otimes_k \widetilde{C}$, alors $u : N \mapsto N_{\widetilde{A}} \cong N$ est une équivalence de catégories monoïdales.

3.2.3.6. LEMME. – *Supposons A noethérien d'anneau total de fractions $Q(A)$ semi-simple, Ω^1 fidèle et projectif de type fini à droite et tel que $\Omega^1 \otimes_A Q(A) \cong Q(A) \otimes_A \Omega^1$, et (A, d) simple. Alors le foncteur de localisation $\langle \mathcal{M}\rangle^{\otimes} \to \langle \mathcal{M}_{Q(A)}\rangle^{\otimes}$, $\mathcal{N} \mapsto \mathcal{N}_{Q(A)}$ est une équivalence de catégories monoïdales. Si l'on dispose d'un foncteur ω comme en* 3.2.1.1, *cela donne lieu à un isomorphisme*

$$\mathrm{Gal}(\mathcal{M}_{Q(A)}, \omega) \cong \mathrm{Gal}(\mathcal{M}, \omega).$$

Démonstration. – Sous ces hypothèses, tout objet de $\langle \mathcal{M}\rangle^{\otimes}$ est rigide (2.5.3.2), et la pleine fidélité résulte de 2.5.2.2. Pour la surjectivité essentielle, il suffit de montrer que tout sous-objet $\widetilde{\mathcal{N}}$ d'une somme finie $\bigoplus \mathrm{T}^{i,j}(\mathcal{M})_{Q(A)}$ est de la forme $\mathcal{N}_{Q(A)}$, pour un sous-objet $\mathcal{N}$ convenable de $\bigoplus \mathrm{T}^{i,j}(\mathcal{M})$. Il suffit de prendre $\mathcal{N} = \widetilde{\mathcal{N}} \cap (\bigoplus \mathrm{T}^{i,j}(\mathcal{M}))$.

3.2.3.7. *Changement de constantes*. – Soit $k \to \widetilde{k}$ un homomorphisme d'anneaux. Un $A \otimes \widetilde{k}$-module à connexion (relativement à l'anneau différentiel $(A, \mathrm{d}) \otimes_k \widetilde{k}$) n'est rien d'autre qu'un A-module à connexion $\mathcal{N}$ muni de $\widetilde{k} \to \mathrm{End}(\mathcal{N})$, ce qui fournit une équivalence tautologique de catégories monoïdales $\widetilde{k}$-linéaires $\mathrm{Ind}\langle \mathcal{M}\rangle^{\otimes}_{(\widetilde{k})} \cong \mathrm{Ind}\langle \mathcal{M} \otimes_k \widetilde{k}\rangle^{\otimes}$.

Le foncteur ω s'étend en un foncteur monoïdal k-linéaire, fidèle et exact, encore noté $\omega : \mathrm{Ind}\langle \mathcal{M}\rangle^{\otimes} \to \{k\text{-modules}\}$. Il induit un foncteur monoïdal $\widetilde{k}$-linéaire

$$\widetilde{\omega} : \mathrm{Ind}\langle \mathcal{M}\rangle^{\otimes}_{(\widetilde{k})} \cong \mathrm{Ind}\langle \mathcal{M} \otimes_k \widetilde{k}\rangle^{\otimes} \longrightarrow \{\widetilde{k}\text{-modules}\},$$

encore exact et fidèle. On en déduit :

3.2.3.8. LEMME. – *Sous ces hypothèses,* $\mathrm{Gal}(\mathcal{M} \otimes_k \widetilde{k}, \widetilde{\omega}) \cong \mathrm{Gal}(\mathcal{M}, \omega) \otimes_k \widetilde{k}$.

(*Voir* l'exemple 3.2.1.5.)

Par ailleurs le diagramme suivant de foncteurs est commutatif

$$\begin{tikzcd}
\langle \mathcal{M}\rangle^{\otimes} \arrow[r, "\omega"] \arrow[d, "\bigotimes_k \widetilde{k}"'] & \{k\text{-modules}\} \arrow[d, "\bigotimes_k \widetilde{k}"] \\
\mathrm{Ind}\langle \mathcal{M}\rangle^{\otimes}_{(\widetilde{k})} \arrow[r, "\widetilde{\omega}"] & \{\widetilde{k}\text{-modules}\}
\end{tikzcd}$$

3.3. Le théorème de spécialisation

3.3.1. Dans ce paragraphe, nous détaillons un cas particulier des fonctorialités précédentes. Comme dans l'exemple 2.2.1.3, considérons une extension différentielle (A', d') de (A, d), simple par couches. On suppose $C' = C = k$ *de Dedekind* (par exemple un anneau de valuation discrète), et A' fidèlement plat sur A.

On se donne un A-module à connexion $\mathcal{M}$ projectif de type fini sur A, soluble dans A'. On considère le foncteur $\omega_{A'} : \mathcal{N} \mapsto (\mathcal{N}_{A'})^{\nabla_{A'}}$ sur $\langle \mathcal{M} \rangle^{\otimes}$, et le groupe de Galois différentiel $\mathrm{Gal}(\mathcal{M}, \omega_{A'})$ (un k-schéma en groupes plat, non nécessairement de type fini).

Si $\widetilde{k}$ est une localisation de k (par exemple son corps de fractions $\kappa(k)$) ou bien le quotient de k par un idéal maximal, alors les hypothèses de 2.2.1.1 sont encore vérifiées si l'on remplace (A, d) par $(A, \mathrm{d}) \otimes \widetilde{k}$, (A', d') par $(A', \mathrm{d}') \otimes \widetilde{k}$, etc., et $\omega_{A'}$ par $\omega_{A'} \otimes 1 \cong \omega_{A' \otimes \widetilde{k}}$ (*cf.* 2.1.3.2 (iv)). On dispose donc du $\widetilde{k}$-schéma en groupes de Galois différentiel $\mathrm{Gal}(\mathcal{M} \otimes_k \widetilde{k}, \omega_{A' \otimes \widetilde{k}})$.

3.3.1.1. THÉORÈME. – *On a un isomorphisme canonique*

$$\mathrm{Gal}\big(\mathcal{M} \otimes_k \kappa(k), \omega_{A' \otimes \kappa(k)}\big) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Gal}(\mathcal{M}, \omega_{A'}) \otimes_k \kappa(k).$$

De plus, pour tout idéal maximal $\mathfrak{p}$ de k, on a un isomorphisme canonique

$$\mathrm{Gal}\big(\mathcal{M} \otimes_k k/\mathfrak{p}, \omega_{A' \otimes k/\mathfrak{p}}\big) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Gal}(\mathcal{M}, \omega_{A'}) \otimes_k k/\mathfrak{p}.$$

Cela découle tant du lemme 3.2.3.5 (seconde assertion) que du lemme 3.2.3.8, avec $\widetilde{C} = \widetilde{k} = \kappa(k)$, resp. $\widetilde{C} = \widetilde{k} = k/\mathfrak{p}$.

3.3.2. Pour éviter les k-schémas en groupes non de type fini et rendre l'énoncé plus tangible, introduisons le sous-groupe fermé de $\mathrm{GL}(\omega_{A'}(\mathcal{M}))$ adhérence de Zariski de $\mathrm{Gal}(\mathcal{M} \otimes_k \kappa(k), \omega_{A' \otimes \kappa(k)})$. C'est un schéma en groupes plat *de type fini* sur k égal au stabilisateur $\mathrm{Stab}\,\{\omega_{A'}(\mathcal{N})\}$ des $\omega_{A'}(\mathcal{N})$, pour tout sous-objet $\mathcal{N}$ d'une somme finie quelconque $\bigoplus \mathrm{T}^{i,j}(\mathcal{M})$ tels que $\omega_{A'}(\mathcal{N})$ soit facteur direct dans le k-module $\bigoplus \omega_{A'}(\mathrm{T}^{i,j}(\mathcal{M}))$ (*cf.* [17], II.1.3.6). Sa fibre générique est $\mathrm{Gal}(\mathcal{M} \otimes_k \kappa(k), \omega_{A' \otimes \kappa(k)})$. On a alors :

3.3.2.1. COROLLAIRE. – *Pour tout idéal maximal $\mathfrak{p}$ de k, on a une immersion fermée canonique* $\mathrm{Gal}(\mathcal{M} \otimes_k k/\mathfrak{p}, \omega_{A' \otimes k/\mathfrak{p}}) \hookrightarrow \mathrm{Stab}\,\{\omega_{A'}(\mathcal{N})\} \otimes_k k/\mathfrak{p}$. *En particulier,*

$$\dim \mathrm{Gal}(\mathcal{M} \otimes_k k/\mathfrak{p}, \omega_{A' \otimes k/\mathfrak{p}}) \leqslant \dim \mathrm{Gal}\big(\mathcal{M} \otimes_k \kappa(k), \omega_{A' \otimes \kappa(k)}\big).$$

3.3.2.2. *Remarque*. – Cet énoncé ne fournit pas exactement un théorème de semi-continuité du fait que la fonction $\mathfrak{p} \mapsto \dim \mathrm{Gal}(\mathcal{M} \otimes_k k/\mathfrak{p}, \omega_{A' \otimes k/\mathfrak{p}})$ n'est pas algébriquement constructible en général. On peut néanmoins montrer la constructibilité – et partant la semi-continuité – pour la topologie *classique*, dans la situation analytique de 3.1.4.1.

Dans la situation algébrique de 3.1.4.1, on obtient l'énoncé suivant, dû à O. Gabber (*cf.* [31], 2.4), par une autre voie :

3.3.2.3. COROLLAIRE. – *Soient X un schéma lisse séparé de type fini à fibres géométriquement connexes sur $\mathbf{C}[[h]]$, x un k-point de X, E un $\mathcal{O}_X$-module localement libre de rang fini, muni d'une connexion intégrable relative $E \to \Omega^1_{X/\mathbf{C}[[h]]} \otimes_{\mathcal{O}_X} E$. Alors le groupe de Galois différentiel de E/hE (pointé en x) est contenu dans la fibre spéciale de la $\mathbf{C}[[h]]$-adhérence de Zariski du groupe de Galois différentiel de $E \otimes \mathbf{C}((h))$ (pointé en x).*

Le corollaire 3.3.2.1 s'applique aussi bien à la situation de *confluence d'équations aux* (q-)*différences* étudiée en 3.1.4.3, 3.1.4.4, lorsque k est de dimension un :

3.3.2.4. COROLLAIRE. – *Dans cette situation, le groupe de Galois différentiel du système différentiel obtenu par confluence est contenu dans la fibre spéciale de la k-adhérence de Zariski du groupe de Galois différentiel du système aux $(q$-)différences sur le corps de fractions de k.*

D'après 3.2.3.6, on peut aussi bien considérer l'équation aux $(q$-)différences comme définie sur A ou sur le corps de fractions de A.

3.3.3. Une application

Ce dernier résultat permet de « calculer » le groupe de Galois différentiel de certaines équations q-hypergéométriques. À titre d'illustration, considérons l'équation aux q-différences d'ordre $r>1$:

$$(*)_{\underline{\alpha},\underline{\beta},q} \qquad \prod_{j=1}^{j=r}\left(q^{\beta_j-1}z\delta_q+\frac{q^{\beta_j-1}-1}{q-1}\right)y=z\prod_{i=1}^{i=r}\left(q^{\alpha_i}z\delta_q+\frac{q^{\alpha_i}-1}{q-1}\right)y$$
$$(\alpha_i,\beta_j\in\mathbf{C},\ \beta_r=1),$$

satisfaite par la série q-hypergéométrique (*cf.* [26], p. 27)

$$ {}_r\phi_{r-1}\begin{pmatrix} q^{\alpha_1} & \cdots & q^{\alpha_r} \\ q^{\beta_1} & \cdots & q^{\beta_{r-1}} \end{pmatrix}; q; z\Bigg) = \sum_{n\geqslant 0}\frac{(q^{\alpha_1};q)_n\cdots(q^{\alpha_r};q)_n}{(q^{\beta_1};q)_n\cdots(q^{\beta_{r-1}};q)_n.(q;q)_n}\,z^n.$$

Ici, une expression comme q^α est à interpréter comme l'élément $(1+(q-1))^\alpha$ de $\mathbf{C}[[q-1]]$, et

$$(q^\alpha;q)_n=(1-q^\alpha)(1-q^{\alpha+1})\cdots(1-q^{\alpha+n-1}).$$

Cette équation aux q-différences conflue vers l'équation différentielle ordinaire

$$(*)_{\underline{\alpha},\underline{\beta}} \qquad \prod_{j=1}^{j=r}\left(z\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}+\beta_j-1\right)y=z\prod_{i=1}^{i=r}\left(z\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}+\alpha_i\right)y$$

satisfaite par la série hypergéométrique ${}_rF_{r-1}\left(\begin{smallmatrix}\alpha_1 & \cdots & \alpha_r\\ \beta_1 & \cdots & \beta_{r-1}\end{smallmatrix};z\right)$.

On connaît précisément les conditions sur les paramètres α_i, β_j qui entraînent que le groupe de Galois différentiel de $(*)_{\underline{\alpha},\underline{\beta}}$ *contient* $\mathrm{SL}_{r,\mathbf{C}}$ (*cf.* [7], 4). C'est par exemple le cas lorsque les conditions suivantes sont simultanément satisfaites (toutes sauf la dernière sont d'ailleurs nécessaires) :

Conditions. – Pour tous $i\neq j$, $\alpha_i\not\equiv\beta_j$ mod. $\mathbf{Z}$;
– pour aucun entier naturel $d>1$, on n'a

$$\left\{\alpha_1+\frac{1}{d},\ldots,\alpha_r+\frac{1}{d}\right\}\equiv\{\alpha_1,\ldots,\alpha_r\},\quad \left\{\beta_1+\frac{1}{d},\ldots,\beta_r+\frac{1}{d}\right\}\equiv\{\beta_1,\ldots,\beta_r\}\ \text{mod. }\mathbf{Z};$$

– pour aucun entier naturel $d<r$, et aucun couple $(x,y)\in\mathbf{C}^2$, on n'a

$$\left\{x,x+\frac{1}{d},\ldots,x+\frac{d-1}{d},\ y,y+\frac{1}{r-d},\ldots,y+\frac{r-d-1}{r-d}\right\}\equiv\{\ldots\alpha_i,\ldots\}$$
$$(\text{resp. } \{\ldots\beta_i,\ldots\}),$$

$$\left\{\frac{ax+by}{a+b}, \frac{ax+by}{a+b}+\frac{1}{r}, \dots, \frac{ax+by}{a+b}+\frac{r-1}{r}\right\} \equiv \{\dots\beta_i,\dots\}$$
$$(\text{resp. } \{\dots\alpha_i,\dots\}) \bmod \mathbf{Z};$$

– s'il existe $x \in \mathbf{C}$ tel que les $\alpha_i + x$ et $\beta_i + x$ soient tous rationnels, alors il existe un entier n premier au dénominateur commun de ces nombres, tel que les ensembles $\{\mathrm{e}^{2\pi i n(\alpha_i+x)}\}$ et $\{\mathrm{e}^{2\pi i n(\beta_i+x)}\}$ ne s'entrelacent pas sur le cercle unité ;
– $\sum(\alpha_i - \beta_i)$ n'est pas demi-entier.

3.3.3.1. THÉORÈME. – *Sous ces conditions, le groupe de Galois différentiel de l'équation q-hypergéométrique $(*)_{\underline{\alpha},\underline{\beta},q}$ sur $\mathbf{C}((q-1))(z)$ est* $\mathrm{GL}_{r,\mathbf{C}((q-1))}$.

En effet, d'après 3.3.2.4 (complété par 3.2.3.6), ce groupe de Galois différentiel contient $\mathrm{SL}_{r,\mathbf{C}((q-1))}$. Il reste donc à examiner l'équation aux q-différences d'ordre un satisfaite par le déterminant de Casorati (*cf.* 2.4.3). C'est

$$\mathrm{Cas}(\vec{y})(qz) = \frac{(-1)^r q^{\sum(1-\beta_j)}(1-z)}{1-q^{\sum(1+\alpha_j-\beta_j)}z}\,\mathrm{Cas}(\vec{y})(z).$$

En testant la régularité en 0 et à l'infini (*cf.* [48], 12.19), on vérifie qu'elle correspond à une connexion triviale si et seulement si r est pair et $\sum(1-\beta_j) = \sum\alpha_j = 0$; or ces égalités sont exclues puisque $\sum(\alpha_i - \beta_i)$ n'est pas demi-entier.

Lorsque les paramètres $\underline{\alpha}$, $\underline{\beta}$ sont tous rationnels, de dénominateur commun N, on peut voir $(*)_{\underline{\alpha},\underline{\beta},q}$ comme définie sur $\mathbf{Q}(q^{1/N}, z)$, qu'on peut plonger dans $\mathbf{C}$ en donnant à q une valeur complexe transcendante arbitraire. On déduit a fortiori du théorème, joint au lemme 3.2.3.8, que le groupe de Galois différentiel de $(*)_{\underline{\alpha},\underline{\beta},q}$ sur $\mathbf{C}(z)$ est $\mathrm{GL}_{r,\mathbf{C}}$. Je ne connais pas de démonstration directe de ce résultat : l'outil essentiel dans la détermination du groupe de Galois différentiel hypergéométrique, à savoir la pseudo-réflexion donnée par la monodromie locale au point 1, ne se transporte pas au cas q-hypergéométrique. Pour une approche analytique de ce type de confluence (*voir* [42]).

3.4. Extensions de Picard–Vessiot

Nous supposons désormais que l'anneau des constantes k est un corps.

3.4.1. Définition

On considère un A-module à connexion $\mathcal{M} = (M, \nabla)$ rigide au sens de 2.4.2 : M est projectif de type fini et la volte $\phi(\nabla)$ est un isomorphisme. Il admet un dual $\check{\mathcal{M}}$. On rappelle que $\langle\mathcal{M}\rangle^{\otimes}$ désigne la sous-catégorie strictement pleine de la catégorie des A-modules à connexion formée des sous-quotients des sommes finies $\bigoplus \mathcal{M}^{\otimes i} \otimes \check{\mathcal{M}}^{\otimes j}$.

Soit $A' \xrightarrow{d'} \Omega'^1 \cong \Omega^1 \otimes A'$ une extension différentielle. On dispose des A'-modules à connexion $\mathcal{M}_{A'}$ et $\check{\mathcal{M}}_{A'}$. On note $\omega_{A'}$ le foncteur $\mathcal{N} \mapsto N_{A'}^{\nabla_{A'}} = \mathrm{Ker}_{N_{A'}}(\nabla_{A'})$ sur $\langle\mathcal{M}\rangle^{\otimes}$. On dispose des sous-$A$-modules de type fini $\langle M, \omega_{A'}(\check{\mathcal{M}})\rangle$ et $\langle \check{M}, \omega_{A'}(\mathcal{M})\rangle$ de A'.

3.4.1.1. DEFINITION. – On dit que (A', d') est une extension *de Picard–Vessiot* (entière) de (A, d) pour $\mathcal{M}$ si :
(i) A' est fidèlement plate sur A ;
(ii) (A', d') est simple ;
(iii) l'anneau des constantes de (A', d') est le corps k ;
(iv) $\mathcal{M}$ est soluble dans (A', d') ;
(v) A' est engendrée *comme A-algèbre* par $\langle M, \omega_{A'}(\check{\mathcal{M}})\rangle$ et $\langle \check{M}, \omega_{A'}(\mathcal{M})\rangle$.

3.4.1.2. DEFINITION. – Supposons que A soit semi-simple (i.e. produit fini de corps). On dit que (A', d') est une extension *de Picard–Vessiot fractionnaire* de (A, d) si :

(i) A' est semi-simple ;
(ii) (A', d') est simple ;
(iii) l'anneau des constantes de (A', d') est le corps k ;
(iv) $\mathcal{M}$ est soluble dans (A', d') ;
(v) A' est *une localisation* de la A-algèbre engendrée par $\langle M, \omega_{A'}(\check{\mathcal{M}})\rangle$ et $\langle \check{M}, \omega_{A'}(\mathcal{M})\rangle$.

3.4.1.3. *Remarque*. – (a) Il semble impossible de trouver une terminologie compatible à toutes celles de la littérature. Nous avons privilégié, comme dans [48] les extensions de type fini par rapport à leurs contreparties « birationnelles » ; les extensions de la théorie de Picard–Vessiot classique (*cf.* 1.3.1) sont, dans la terminologie ci-dessus, des extensions de Picard–Vessiot fractionnaires avec $A = \Omega^1$ et $A' = \Omega'^1$. Nous verrons ultérieurement que toute extension de Picard–Vessiot fractionnaire apparaît comme anneau total de fractions d'une extension de Picard–Vessiot entière.

(b) Toute extension de Picard–Vessiot est de type fini en tant qu'extension d'anneaux.

(c) Toute extension de Picard–Vessiot fractionnaire A'/A est fidèlement plate (en tant que module sur le produit fini de corps $\prod K_i$, $A' \cong \prod V_i$, où V_i est un espace vectoriel non nul sur K_i).

(d) Supposons qu'il existe une extension de Picard–Vessiot fractionnaire A'/A pour $\mathcal{M}$. Soit J/A une extension différentielle intermédiaire, avec J semi-simple. Alors A''/J est une extension de Picard–Vessiot fractionnaire pour $\mathcal{M}_J$ (c'est clair).

3.4.1.4. LEMME. – *S'il existe une extension de Picard–Vessiot A'/A pour $\mathcal{M}$ (resp. de Picard–Vessiot fractionnaire), alors $\langle\mathcal{M}\rangle^{\otimes}$ est une catégorie tannakienne neutre sur k : tout objet est rigide et le foncteur « solutions dans A' » est un foncteur fibre (i.e. un foncteur monoïdal k-linéaire fidèle et exact) à valeurs dans les k-espaces vectoriels de dimension finie.*

Cela résulte de 3.1.3.2 (resp. et de 3.4.1.3 (c)).

3.4.2. Foncteurs fibres, torseurs de solutions et extensions de Picard–Vessiot

Ce paragraphe est inspiré de [19], 9. On suppose que $\langle\mathcal{M}\rangle^{\otimes}$ est une catégorie tannakienne neutre sur k. On fixe un foncteur fibre ω. Ce foncteur fibre rend $\langle\mathcal{M}\rangle^{\otimes}$ équivalente à la catégorie monoïdale des représentations de dimension finie de $\mathrm{Gal}(\mathcal{M}, \omega)$.

Pour tout sous-objet $\mathcal{N}$ d'un $\bigoplus \mathcal{M}^{\otimes i} \otimes \check{\mathcal{M}}^{\otimes j}$, notons $\langle\mathcal{N}\rangle^{\oplus}$ la sous-catégorie abélienne strictement pleine de $\langle\mathcal{M}\rangle^{\otimes}$ formée des sous-quotients des sommes directes finies de copies de $\mathcal{N}$. Ordonnons les objets $\mathcal{N}$ par la relation « être facteur direct ».

Soit $\mathcal{O}(\mathrm{Gal}(\mathcal{M}, \omega))$ la k-algèbre des fonctions sur $\mathrm{Gal}(\mathcal{M}, \omega)$, vue comme représentation de $\mathrm{Gal}(\mathcal{M}, \omega)$ (représentation régulière gauche : $f(x) \mapsto f(g^{-1}x)$). On a la formule

$$\mathcal{O}\big(\mathrm{Gal}(\mathcal{M}, \omega)\big) = \varinjlim_{\mathcal{N}} \big(\mathrm{End}(\omega \mid \langle\mathcal{N}\rangle^{\oplus})\big)^{\vee},$$

où $^{\vee}$ désigne un k-dual (*cf.* [41], II.3.2.6, [20], 2.14).

Observons que $\mathrm{End}(\omega \mid \langle\mathcal{N}\rangle^{\oplus})$ est un sous-k-espace (et même une sous-k-algèbre) de $\mathrm{End}(\omega(\mathcal{N}))$. Si l'on fait agir $\mathrm{Gal}(\mathcal{M}, \omega)$ par composition à gauche sur $\mathrm{End}(\omega(\mathcal{N}))$, ce sous-espace est stable. En considèrant $\mathrm{End}(\omega \mid \langle\mathcal{N}\rangle^{\oplus})^{\vee}$ comme k-représentation quotient de $(\mathrm{End}(\omega(\mathcal{N})))^{\vee}$, on voit que la formule $\mathcal{O}(\mathrm{Gal}(\mathcal{M}, \omega)) = \varinjlim(\mathrm{End}(\omega \mid \langle\mathcal{N}\rangle^{\oplus}))^{\vee}$ est compatible à l'action de $\mathrm{Gal}(\mathcal{M}, \omega)$.

Considérons d'autre part la A-algèbre $\mathcal{O}(\Sigma(\mathcal{M},\omega))$ des fonctions sur le torseur $\Sigma(\mathcal{M},\omega)$ (*cf.* 3.2.2.1). On a la formule

$$\mathcal{O}(\Sigma(\mathcal{M},\omega)) = \varinjlim_{\mathcal{N}} \big(\mathrm{Hom}(\omega\otimes 1_A, \text{oubli} \mid \langle\mathcal{N}\rangle^{\oplus})\big)^{\vee},$$

où $^{\vee}$ désigne ici un A-dual.

Observons que $\mathrm{Hom}(\omega\otimes 1_A, \text{oubli} \mid \langle\mathcal{N}\rangle^{\oplus})$ est un sous-A-module de $\mathcal{I}hom(A\otimes_k \omega(\mathcal{N}),\mathcal{N})$. La connexion sur ce dernier (où $A\otimes_k \omega(\mathcal{N})$ est muni de la connexion triviale) laisse stable $\mathrm{Hom}(\omega\otimes 1_A, \text{oubli} \mid \langle\mathcal{N}\rangle^{\oplus})$. Ainsi, la connexion sur $\mathcal{I}hom((A\otimes_k \omega(\mathcal{N}),\mathcal{N})^{\vee} \cong \check{\mathcal{N}}\otimes_k \omega(\mathcal{N})$ passe au quotient $(\mathrm{Hom}(\omega\otimes 1_A, \text{oubli} \mid \langle\mathcal{N}\rangle^{\oplus}))^{\vee}$ et induit une connexion d' sur $\mathcal{O}(\Sigma(\mathcal{M},\omega))$.

On peut donc considérer $(\mathcal{O}(\Sigma(\mathcal{M},\omega)), \mathrm{d}')$ comme une extension différentielle de (A, d).

3.4.2.1. LEMME. – (i) *Le prolongement de* ω *à* $\mathrm{Ind}\langle\mathcal{M}\rangle^{\otimes}$ *envoie* $(\mathcal{O}(\Sigma(\mathcal{M},\omega)), \mathrm{d}')$ *sur* $\mathcal{O}(\mathrm{Gal}(\mathcal{M},\omega))$ *muni de la représentation régulière gauche.*

(ii) $(\mathcal{O}(\Sigma(\mathcal{M},\omega)), \mathrm{d}')$ *est une extension de Picard–Vessiot de* (A, d) *pour* $\mathcal{M}$.

Démonstration. – (i) ω envoie $\mathcal{I}hom(A\otimes_k \omega(\mathcal{N}),\mathcal{N})^{\vee}$ sur $(\mathrm{End}(\omega(\mathcal{N})))^{\vee}$ muni de l'action à gauche de $\mathrm{Gal}(\mathcal{M},\omega)$, et l'objet quotient $(\mathrm{Hom}(\omega\otimes 1_A, \text{oubli} \mid \langle\mathcal{N}\rangle^{\oplus}))^{\vee}$ sur la représentation quotient $(\mathrm{End}(\omega \mid \langle\mathcal{N}\rangle^{\oplus}))^{\vee}$, d'où le résultat en passant à la limite.

(ii) $A' = \mathcal{O}(\Sigma(\mathcal{M},\omega))$ est fidèlement plate sur A, *cf.* 3.2.2.1. Tout idéal différentiel définissant un sous-objet de (A', d') dans $\mathrm{Ind}\langle\mathcal{M}\rangle^{\otimes}$, la simplicité de (A', d') équivaut au fait que les seuls sous-schémas fermés de $G = \mathrm{Gal}(\mathcal{M},\omega)$ invariants par translation à gauche sont $\varnothing$ et G (c'est ici qu'intervient le fait que l'on travaille avec $\langle\mathcal{M}\rangle^{\otimes}$ et non une quelconque sous-catégorie abélienne monoïdale pleine $\mathcal{C}$ comme en 3.2.1.1). Les constantes de (A', d') s'identifient aux éléments de $\mathcal{O}(G)$ invariants par translation, c'est-à-dire aux éléments de k.

Montrons que tout objet $\mathcal{N}$ de $\langle\mathcal{M}\rangle^{\otimes}$ est soluble dans A' : $A'\otimes_k (\mathcal{N}_{A'})^{\nabla_{A'}} \xrightarrow{\simeq} \mathcal{N}_{A'}$. Via ω, il s'agit d'établir que la flèche naturelle de G-comodules

$$\mathcal{O}(G)\otimes_k \big(\mathcal{O}(G)\otimes_k \omega(\mathcal{N})\big)^{G} \to \mathcal{O}(G)\otimes_k \omega(\mathcal{N})$$

est un isomorphisme. Si E est le fibré vectoriel trivial de fibre $\omega(\mathcal{N})$, cela traduit le fait que le morphisme G-équivariant

$$G\times E \to G\times \big((G\times E)/G\big), \quad (g,e)\mapsto \big(g,(g,e)\big)$$

est un isomorphisme. Cet argument fournit de même un isomorphisme naturel

$$\omega(\mathcal{N}) \cong \omega_{A'}(\mathcal{N}) = (\mathcal{N}_{A'})^{\nabla_{A'}}$$

fonctoriel en $\mathcal{N}$.

Enfin, soit A'' la sous-A-algèbre de A' engendrée par $\langle M, \omega_{A'}(\check{\mathcal{M}})\rangle$ et $\langle \check{M}, \omega_{A'}(\mathcal{M})\rangle$. C'est aussi la réunion des $\langle N, \omega_{A'}(\check{\mathcal{N}})\rangle$ pour tout objet rigide $\mathcal{N}$ de $\langle\mathcal{M}\rangle^{\otimes}$. Il est clair que A'' est stable sous tout $D\in {}^{\vee}\Omega^1$, donc fournit une extension différentielle intermédiaire entre A et A'. De plus, comme tout objet de $\langle\mathcal{M}\rangle^{\otimes}$ est soluble dans A'', on a un A''-point canonique de $\Sigma(\mathcal{M},\omega)$, i.e. un homomorphisme d'algèbres $A'\to A''$, compatible aux connexions, et dont l'inclusion $A''\subset A'$ est une section. Comme (A', d') est simple, on a donc $A' = A''$, ce qui achève la démonstration.

3.4.2.2. *Remarque*. – Ce lemme traduit algébriquement l'idée géométrique suivante. La considération du fibré principal à droite $P = \Sigma(\mathcal{M},\omega)$, de groupe $G = \mathrm{Gal}(\mathcal{M},\omega)$, de base $X = \mathrm{Spec}\,A$, établit une analogie avec la situation 1.1.2, 1.1.3. Précisons en nous plaçant dans cette situation : on a un fibré à connexion E sur X, associé à un GL_n-fibré principal à connexion sur X. Ce dernier se réduit à un fibré principal $P \xrightarrow{\pi} X$ sous le groupe d'holonomie G muni d'une connexion $\aleph$.

L'analogue de l'extension de Picard–Vessiot $(\mathcal{O}(\Sigma(\mathcal{M},\omega)), \mathrm{d}')$ est l'anneau $\mathrm{C}^\infty(P)$ des fonctions de P, muni de la *différentielle longitudinale* $d' : \mathrm{C}^\infty(P) \to \Gamma(\mathrm{T}^\vee(X))$ (en considérant $\aleph$ comme un « feuilletage non-intégrable » $\mathcal{F}$ de P). La connexion « le long des feuilles » sur l'image inverse de E sur $P : \Gamma(E_P) \to \Gamma(\mathrm{T}^\vee(\mathcal{F}) \otimes E_P)$ est alors triviale. Ceci exprime le fait suivant. Considérons l'image inverse du fibré $\pi : P \to X$ sur P lui-même. L'application $\theta : P \times G \to P \times_X P$, $(p,g) \mapsto (p, \mathrm{t}_g(p))$ est un isomorphisme G-équivariant (action à droite sur les facteurs de droite). On a : $(\theta_*)_{p,\mathrm{t}_g(p)}(\mathrm{H}_p(P), 0_{\mathfrak{g}}) = \mathrm{Im}((\mathrm{id}, \mathrm{t}_g)_* \mathrm{H}_p(P)) \subset \mathrm{T}_{p,\mathrm{t}_g(p)}(P \times_X P)$, qui s'envoie isomorphiquement sur $\mathrm{H}_{\mathrm{t}_g(p)}(P)$ par la seconde projection.

3.4.2.3. THÉORÈME. – *Sous l'hypothèse que $\langle \mathcal{M} \rangle^\otimes$ soit une catégorie tannakienne neutre sur k, on a des équivalences de catégories quasi-inverses*

$$\{\textit{foncteurs fibres sur } \langle \mathcal{M} \rangle^\otimes\} \longleftrightarrow \{\textit{extensions de Picard–Vessiot pour } \mathcal{M}\}$$

données par $\omega \mapsto (\mathcal{O}(\Sigma(\mathcal{M},\omega)), \mathrm{d}')$, $(A', \mathrm{d}') \mapsto \omega_{A'}$.

En outre, si ω est un quelconque foncteur fibre, ces catégories sont équivalentes à la catégorie des $\mathrm{Gal}(\mathcal{M},\omega)$*-torseurs.*

Démonstration. – On remarque que les morphismes de ces catégories sont des isomorphismes (du côté extensions de Picard–Vessiot, cela vient de leur simplicité). On voit ainsi que $\omega \mapsto (\mathcal{O}(\Sigma(\mathcal{M},\omega)), \mathrm{d}')$, et $(A', \mathrm{d}') \mapsto \omega_{A'}$ définissent bien des foncteurs. Qu'ils soient quasi-inverses résulte de l'isomorphisme $\omega \cong \omega_{A'}$ observé ci-dessus, avec $A' = \mathcal{O}(\Sigma(\mathcal{M},\omega))$. La seconde assertion est une généralité dans les catégories tannakiennes neutres, *cf.* [41], II.3.2.3.3.

3.4.2.4. COROLLAIRE. – *Il existe une extension de Picard–Vessiot de* (A, d) *pour $\mathcal{M}$ si et seulement si $\langle \mathcal{M} \rangle^\otimes$ est une catégorie tannakienne neutre sur k.*

Cela résulte de 3.4.1.4 et 3.4.2.3.

3.4.2.5. COROLLAIRE. – *Soit $\overline{k}$ une clôture algébrique de k. Le $\overline{k}$-groupe algébrique* $\mathrm{Gal}(\mathcal{M},\omega) \otimes \overline{k}$ *ne dépend pas, à isomorphisme près, du foncteur fibre ω* (*supposé exister*)*. Les classes d'isomorphie d'extensions de Picard–Vessiot sont en bijection avec*

$$\mathrm{H}^1\left(\overline{k}/k, \mathrm{Gal}(\mathcal{M},\omega) \otimes \overline{k}\right).$$

Deux extensions de Picard–Vessiot pour $\mathcal{M}$ quelconques deviennent isomorphes après extension finie du corps des constantes k.

3.4.2.6. *Exemple.* – Pour la connexion correspondant à l'équation différentielle $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z} y = \frac{1}{2z} y$ sur $\mathbf{R}(z)$, on a deux extensions de Picard–Vessiot non isomorphes : $\mathbf{R}(z, \sqrt{z})$ et $\mathbf{R}(z, \sqrt{-z})$; elles donnent lieu à des torseurs de solutions non triviaux.

3.4.3. Existence d'extensions de Picard–Vessiot

3.4.3.1. THÉORÈME. – *On suppose que* :

(i) *l'anneau commutatif A est noethérien, et son anneau total de fractions $Q(A)$ est semi-simple* ;

(ii) $\Omega^1 = \mathrm{d}A.A$ *est fidèle et projectif de type fini à droite, et* $\Omega^1 \otimes_A Q(A) \cong Q(A) \otimes_A \Omega^1$;

(iii) *l'anneau différentiel* (A, d) *est simple de corps de constantes k.*

Alors quitte à remplacer k par une extension finie, il existe une extension de Picard–Vessiot de (A, d) pour $\mathcal{M}$.

En particulier, si k est algébriquement clos, il existe une extension de Picard–Vessiot de (A, d) pour $\mathcal{M}$, qui est unique à isomorphisme non unique près.

Démonstration. – Il suit de 2.5.3.2 que $\langle\mathcal{M}\rangle^{\otimes}$ est tannakienne. Comme elle admet un générateur tensoriel (par exemple $\mathcal{M} \oplus \check{\mathcal{M}}$), il existe une extension finie k'/k' et un foncteur fibre ω' à valeurs dans les k'-espaces vectoriels de dimension finie ([19], 6.17 [41], III.3.3). Ce foncteur fibre fait de $\langle\mathcal{M}\rangle^{\otimes}_{(k')}$ une catégorie tannakienne neutre ([20], 3.11). D'autre part, un $A\otimes k'$-module à connexion (relativement à l'anneau différentiel $(A, \mathrm{d})\otimes_k k'$) n'est rien d'autre qu'un A-module à connexion $\mathcal{N}$ muni de $k' \to \mathrm{End}(\mathcal{N})$, ce qui, du fait que k' est fini sur k, fournit une équivalence tautologique de catégories monoïdales k'-linéaires $\langle\mathcal{M}\rangle^{\otimes}_{(k')} \cong \langle\mathcal{M}_{k'}\rangle^{\otimes}$. D'après 3.4.2.4, il existe donc une extension de Picard–Vessiot de $(A, \mathrm{d})\otimes_k k'$ pour $\mathcal{M}_{k'}$. L'unicité lorsque $k = k' = \overline{k}$ suit de 3.4.2.5.

3.4.3.2. Remarquons encore qu'il n'a été fait aucune hypothèse sur la courbure de ∇. En termes figurés, 3.4.3.1 est un théorème d'intégrabilité symbolique des systèmes différentiels (ou aux différences) non nécessairement intégrables. Pour un exemple concret, voir 3.1.3.3 ; pour une interprétation géométrique, voir 3.4.2.2.

3.4.3.3. La condition supplémentaire que le corps des constantes k est algébriquement clos, qui garantit l'unicité de l'extension de Picard–Vessiot, est innocente en caractéristique 0. Elle n'est en revanche jamais remplie en caractéristique $p > 0$ sous les hypothèses générales du théorème : en effet, elle entraîne $Q(A)^p \subset k$, et comme $Q(A)$ est supposé semi-simple, on voit $Q(A) = k$; mais alors $\Omega^1 = A\,\mathrm{d}A = 0$ n'est pas fidèle.

3.4.4. Quelques propriétés des extensions de Picard–Vessiot (fractionnaires)

3.4.4.1. PROPOSITION. – *Soit (A', d') une extension de Picard–Vessiot pour $\mathcal{M}$. Soit $\mathcal{N}$ un objet de $\langle\mathcal{M}\rangle^{\otimes}$. Alors la sous-$A$-algèbre A'' de A' engendrée par $\langle N, \omega_{A'}(\check{\mathcal{N}})\rangle$ et $\langle \check{N}, \omega_{A'}(\mathcal{N})\rangle$ fournit une extension différentielle intermédiaire entre A et A'. C'est une extension de Picard–Vessiot pour $\mathcal{N}$.*

Démonstration. – D'après 3.4.2.3, on peut supposer $(A', \mathrm{d}') = (\mathcal{O}(\Sigma(\mathcal{M}, \omega_{A''})), \mathrm{d}')$. Considérons l'homomorphisme fidèlement plat $\phi : \mathrm{Gal}(\mathcal{N}, \omega_{A'}) \to \mathrm{Gal}(\mathcal{M}, \omega_{A'})$ (3.2.3.2). Il induit un ϕ-morphisme fidèlement plat ϕ' du $\mathrm{Gal}(\mathcal{M}, \omega_{A'})_A$-torseur $\Sigma(\mathcal{M}, \omega_{A'})$ vers le $\mathrm{Gal}(\mathcal{N}, \omega_{A'})_A$-torseur $\Sigma(\mathcal{N}, \omega_{A'})$, d'où une inclusion d'algèbres compatible aux connexions $\mathcal{O}(\Sigma(\mathcal{N}, \omega_{A'})) \hookrightarrow \mathcal{O}(\Sigma(\mathcal{M}, \omega_{A'}))$. On conclut en appliquant 3.4.2.1 (ii) à $(\mathcal{O}(\Sigma(\mathcal{N}, \omega_{A''})), \mathrm{d}')$.

3.4.4.2. PROPOSITION. – *Supposons que A soit semi-simple et qu'il existe une extension de Picard–Vessiot fractionnaire (A'', d'') de (A, d) pour $\mathcal{M}$. Alors il existe une unique extension différentielle intermédiaire (A', d') qui est de Picard–Vessiot pour $\mathcal{M}$; on a $A'' = Q(A')$.*

Démonstration. – A'' est l'anneau total de fractions de la sous-A-algèbre A' de A'' engendrée par $\langle M, \omega_{A''}(\check{\mathcal{M}})\rangle$ et $\langle \check{M}, \omega_{A''}(\mathcal{M})\rangle$. D'après 3.4.2.3, il existe une extension de Picard–Vessiot $\widetilde{A}/A$ (qu'on peut prendre égale à $\mathcal{O}(\Sigma(\mathcal{M}, \omega_{A''})$ telle que $\omega_{A''}$ s'identifie à $\omega_{\widetilde{A}}$. L'homomorphisme canonique $(\mathcal{O}(\Sigma(\mathcal{M}, \omega_{A''})), \mathrm{d}') = \widetilde{A} \to A''$ est compatible aux différentielles, donc injectif puisque $(\widetilde{A}, \widetilde{\mathrm{d}})$ est simple. On en déduit que $(\widetilde{A}, \widetilde{\mathrm{d}})$ s'identifie à (A', d').

Prendre garde à la réciproque : si A est semi-simple, et si (A', d') est une extension de Picard–Vessiot avec $Q(A')$ semi-simple, il n'est pas clair en général que $\mathrm{d}'(Q(A')).Q(A') \cong \mathrm{d}'A'.Q(A')$, et donc que la structure naturelle d'anneau différentiel sur $Q(A')$ en fasse une extension différentielle de (A, d) au sens de 2.1.2.5 (*voir* aussi 2.1.3.5). C'est toutefois le cas si $\mathrm{d}'A'.A'$ est un sesquimodule.

3.4.4.3. COROLLAIRE. – *S'il existe une extension de Picard–Vessiot fractionnaire* (A'', d'') *pour* $\mathcal{M}$*, alors* $\Sigma(\mathcal{M}, \omega_{A''})$ *est lisse, et* A'' *est le produit des corps de fonctions* K_i *de ses composantes connexes.*

En effet, on a vu que l'anneau semi-simple A'' s'identifie à l'anneau total de fractions de $\mathcal{O}(\Sigma(\mathcal{M}, \omega_{A''})$, donc $\Sigma(\mathcal{M}, \omega_{A''})$ est réduit. Étant un torseur sur un anneau semi-simple, il est lisse.

3.4.4.4. PROPOSITION. – *Si* A *est intègre de caractéristique nulle, toute extension de Picard–Vessiot* A' *est lisse. Elle est intègre si* Ω^1 *est un bimodule commutatif. En particulier, si* A *est un corps, si le corps de constantes est algébriquement clos de caractéristique nulle, et si* Ω^1 *est un bimodule commutatif, il existe un corps extension de Picard–Vessiot fractionnaire pour tout* A*-espace vectoriel de dimension finie à connexion* (*non nécessairement intégrable*).

Démonstration. – En effet, si A est intègre de caractéristique nulle, tout A-groupe algébrique, et tout torseur sous un tel groupe, est lisse. Or on a vu que $A' \cong \mathcal{O}(\Sigma(\mathcal{M}, \omega_{A'}))$. Si en outre Ω^1 est un bimodule commutatif, il en est de même de Ω'^1 ; tout idempotent de A' est nécessairement une constante, égale à 0 ou 1, d'où l'assertion. Si A est un corps, on obtient une extension de Picard–Vessiot fractionnaire en passant au corps de fractions de A'.

Dans le cas d'une connexion attachée à une équation aux différences sur un corps de caractéristique nulle, les extensions de Picard–Vessiot sont lisses mais non nécessairement intègres (considérer l'équation $y^\sigma = -y$).

3.4.4.5. PROPOSITION. – *Soit* (A', d') *un corps extension de Picard–Vessiot fractionnaire de* (A, d) *pour* $\mathcal{M}$*. Alors le degré de transcendance de* A' *sur* A *est égal à la dimension de* $\mathrm{Gal}(\mathcal{M}, \omega_{A'})$.

Démonstration. – D'après 3.4.4.2 et 3.4.2.3, A' est isomorphe au corps de fonctions de la A-variété $\Sigma(\mathcal{M}, \omega_{A'})$ qui est un torseur sous $\mathrm{Gal}(\mathcal{M}, \omega_{A'}) \otimes_k A$. D'où le résultat.

3.5. Correspondance galoisienne

3.5.1. Le groupe algébrique affine $\mathbf{Aut}((A', \mathrm{d}')/(A, \mathrm{d}))$

Soit (A', d') une extension différentielle de (A, d). On note $\underline{\mathrm{Aut}}((A', \mathrm{d}')/(A, \mathrm{d}))$ le foncteur qui associe à toute k-algèbre k' (commutative unitaire) le groupe des automorphismes de l'anneau différentiel $(A', \mathrm{d}') \otimes_k k'$ induisant l'identité sur $A \otimes_k k'$ (et donc aussi sur $\Omega^1 \otimes_k k'$).

3.5.1.1. THÉORÈME. – *Soit* (A', d') *une extension de Picard–Vessiot ou une extension de Picard–Vessiot fractionnaire pour* $\mathcal{M}$*. Alors le foncteur* $\underline{\mathrm{Aut}}((A', \mathrm{d}')/(A, \mathrm{d}))$ *est représenté par* $\mathrm{Gal}(\mathcal{M}, \omega_{A'})$.

Dans ce rôle, ce k-groupe algébrique affine est aussi noté $\mathbf{Aut}((A', \mathrm{d}')/(A, \mathrm{d}))$ ou simplement $\mathbf{Aut}_d(A'/A)$, et appelé *groupe de Galois différentiel de* A' *sur* A.

Démonstration du théorème 3.5.1.1. – Traitons d'abord le cas d'une extension de Picard–Vessiot. D'après 3.4.2.3, on peut supposer $(A', \mathrm{d}') = (\mathcal{O}(\Sigma(\mathcal{M}, \omega_{A'})), \mathrm{d}')$. Via $\omega_{A'}$, le foncteur $\underline{\mathrm{Aut}}((A', \mathrm{d}')/(A, \mathrm{d}))$ s'identifie au foncteur $\underline{\mathrm{Aut}}_{\mathrm{Gal}(\mathcal{M}, \omega_{A'})}(\mathcal{O}(\mathrm{Gal}(\mathcal{M}, \omega_{A'})))$, qui n'est autre que le foncteur que représente $\mathrm{Gal}(\mathcal{M}, \omega_{A'})$. Le cas d'une extension de Picard–Vessiot fractionnaire s'en déduit grâce à 3.4.4.2 (dans la situation de 3.4.4.2, il est clair que le groupe de Galois différentiel de l'extension de Picard–Vessiot fractionnaire A''/A s'identifie au groupe de Galois différentiel de l'extension de Picard–Vessiot associée A'/A).

3.5.2. La correspondance galoisienne pour les extensions de Picard–Vessiot fractionnaires

Dans la suite, on se limite au cas où le corps des constantes k est algébriquement clos de caractéristique nulle. La donnée du schéma en groupes $\mathbf{Aut}_d(A'/A)$ équivaut alors à celle du groupe de ses k-points vu comme sous-groupe de $\mathrm{GL}(\omega_{A'}(\mathcal{M}))$; c'est le groupe $G = \mathrm{Aut}_d(A'/A)$ des *A-automorphismes de A' commutant à* d (en revanche, il n'y a pas d'action algébrique de $\mathbf{Aut}_d(A'/A)$ sur A' en général).

3.5.2.1. LEMME. – *Supposons que $A = K = \prod K_i$ soit semi-simple et qu'il existe une extension de Picard–Vessiot fractionnaire L pour $\mathcal{M}$. Soit H un sous-groupe Zariski-fermé de $G = \mathrm{Aut}_d(L/K)$. Alors*

(i) *l'anneau des invariants L^G est K* ;

(ii) *si $L^H = K$, alors $H = G$.*

Démonstration. – D'après 3.4.4.2, $L = Q(K')$ pour une extension de Picard–Vessiot « entière » K' de K. Posons $\mathbf{G} = \mathrm{Gal}(\mathcal{M}, \omega_{K'}) = \mathbf{Aut}_d(L/K)$ (3.5.1.1), et notons $\mathbf{H} \subset \mathbf{G}$ le sous-schéma en groupes de groupe de k-points H. On peut identifier K' à $\mathcal{O}(\Sigma(\mathcal{M}, \omega_{K'}))$ (3.4.2.3), donc tout élément de L à un K-morphisme $f : \Sigma(\mathcal{M}, \omega_{K'}) \to \mathbf{P}^1_K$ (i.e. à une famille de K_i-morphismes $\Sigma(\mathcal{M}, \omega_{K'}) \otimes_K K_i \to \mathbf{P}^1_{K_i}$). D'après 3.2.2.1, $\Sigma(\mathcal{M}, \omega_{K'})$ est un torseur à droite sous $\mathbf{G}_K = \mathbf{G} \otimes_k K$. Il est équivalent de dire qu'un élement de L est invariant sous G (resp. sous H) ou que le morphisme correspondant f est invariant sous $\mathbf{G}_K$ (resp. sous $\mathbf{H}_K$). Comme $\mathbf{G}_K$ agit transitivement sur $\Sigma(\mathcal{M}, \omega_{K'})$, un tel f invariant sous $\mathbf{G}_K$ est constant, ce qui implique (i). Pour (ii), il s'agit de montrer que si $H \neq G$, il existe une fonction rationnelle $\mathbf{H}_K$-invariante non constante. C'est une conséquence de l'existence du K-schéma $\Sigma(\mathcal{M}, \omega_{K'})/\mathbf{H}_K$ (qui se déduit par descente étale de l'existence de la k-variété algébrique $\mathbf{G}/\mathbf{H}$).

Lorsque G et H sont réductifs, $\mathbf{G}/\mathbf{H}$ est affine, de même que $\Sigma(\mathcal{M}, \omega_{K'})/\mathbf{H}_K$, et on peut alors remplacer $\mathbf{P}^1$ par $\mathbf{A}^1$, et extensions de Picard–Vessiot fractionnaires par extensions de Picard–Vessiot « entières ».

3.5.2.2. THÉORÈME. – *Supposons que $A = K$ soit semi-simple et qu'il existe une extension de Picard–Vessiot fractionnaire L pour $\mathcal{M}$. Alors $H \mapsto (L^H, d)$ et $(J, d) \mapsto \mathrm{Aut}_d(L/J)$ sont des bijections réciproques entre l'ensemble des sous-groupes Zariski-fermés de $G = \mathrm{Aut}_d(L/K)$ et l'ensemble des extensions différentielles intermédiaires (J, d) entre K et L, avec J semi-simple. En outre, si H est normal dans G, L^H est une extension de Picard–Vessiot fractionnaire L pour un objet convenable $\mathcal{N}$ de $\langle \mathcal{M} \rangle^{\otimes}$.*

Démonstration. – L/J étant une extension de Picard–Vessiot fractionnaire (3.4.1.3 (d)), il découle de 3.5.1.1 que $\mathrm{Aut}_d(L/J)$ est un sous-groupe Zariski-fermé de $G = \mathrm{Aut}_d(L/K)$. Montrons, inversement, que L^H définit une extension différentielle intermédiaire. Il s'agit de voir que pour tout $D \in {}^{\vee}\Omega^1$, $\langle D, d(L^H) \rangle \subset L^H$. Cela vient de ce que l'action de G sur L commute à d donc à l'endomorphisme k-linéaire $x \mapsto \langle D, \mathrm{d}x \rangle$ de L. Qu'on ait des bijections réciproques résulte alors du lemme précédent.

Enfin, si H est normal dans G, $\mathbf{H}$ est normal dans $\mathbf{G} = \mathrm{Gal}(\mathcal{M}, \omega_L)$, et le groupe quotient $\mathbf{G}/\mathbf{H}$ est le k-groupe associé à une sous-catégorie tannakienne de $\langle \mathcal{M} \rangle^{\otimes}$. Une telle sous-catégorie tannakienne admet nécessairement un générateur tensoriel $\mathcal{N}$, et on a alors $\mathbf{G}/\mathbf{H} = \mathrm{Gal}(\mathcal{N}, \omega_L)$. Comme $\mathbf{H} = \mathrm{Gal}(\mathcal{M}_J, \omega_L)$ agit trivialement sur $\omega_L(\mathcal{N})$, $\mathcal{N}$ est soluble dans J. La K-algèbre engendrée par $\langle M, \omega_J(\check{\mathcal{M}}) \rangle$ et $\langle \check{M}, \omega_J(\mathcal{M}) \rangle$ fournit donc une extension de Picard–Vessiot K' de K pour $\mathcal{N}$ (3.4.4.1). Son anneau total de fractions $Q(K')$ est contenu dans l'anneau semi-simple. Il est donc semi-simple (et différentiellement simple d'après 2.1.3.5). On a $\mathbf{G}/\mathbf{H} = \mathrm{Gal}(\mathcal{N}, \omega_L) = \mathbf{Aut}_d(Q(K')/K)$ (3.5.1.1), et on conclut de la correspondance galoisienne que $Q(K') = J$. Ceci montre que J/K est une extension de Picard–Vessiot fractionnaire pour $\mathcal{N}$.

Ce résultat contient et unifie la correspondance de Picard–Vessiot classique (*cf.* [35], 3), son analogue aux différences (*cf.* [48], 1.29, 1.30), ainsi que les situations mixtes étudiées par Bialynicki-Birula [8]. Il englobe le cas des systèmes à plusieurs variables, éventuellement non intégrables.

Remerciements

Cet article est l'aboutissement d'un projet commencé avec [1], [2], et dont diverses phases ont été exposées au séminaire d'Algèbre de Paris-6, au Colloque différentiel de Plovdiv 93, au Colloque Galois différentiel de Luminy 99 et à l'Atelier différentiel de Strasbourg 99 ; je remercie les organisateurs de m'en avoir donné l'occasion. Je remercie M. Dubois-Violette et C. Kassel de m'avoir fait connaître les articles [21] et [39] respectivement.

RÉFÉRENCES

[1] ANDRÉ Y., *Quatre descriptions des groupes de Galois différentiels*, Sém. d'algèbre de Paris 86/87, Lect. Notes in Math., Vol. **1296**, Springer-Verlag, 1987, pp. 28–41.
[2] ANDRÉ Y., *Notes sur la théorie de Galois différentielle*, Prépubl. IHES/M/89/49, 1989.
[3] ANDRÉ Y., Pour une théorie inconditionnelle des motifs, *Publ. Math. Inst. Hautes Études Sci.* **83** (1996) 5–49.
[4] AOMOTO K., q-analogue of de Rham cohomology associated with Jackson integrals, *Proc. Japan Acad.* **66** (1990) 161–164.
[5] BERTHELOT P., OGUS A., *Notes on Crystalline Cohomology*, Math. Notes, Vol. **21**, Princeton Univ. Press, 1978.
[6] BERTRAND D., Groupes algébriques et équations différentielles linéaires, *Sém. Bourbaki, exp. 750, février 1992, Astérisque* **206** (1992) 183–204.
[7] BEUKERS F., Differential Galois theory, in: Waldschmidt M., Moussa P., Luck J.M., Itzykson C. (Eds.), *From Number Theory to Physics*, Springer-Verlag, 1992.
[8] BIALYNICKI-BIRULA, On Galois theory of fields with operators, *Amer. J. Math.* **84** (1962) 89–109.
[9] BOURBAKI N., *Algèbre*, Masson, 1981, chapitres III, IV et X.
[10] BOURBAKI N., *Algèbre commutative*, Masson, 1985, chapitre I.
[11] BRUGUIÈRES A., Théorie tannakienne non commutative, *Comm. Algebra* **22** (14) (1994) 5817–5860.
[12] BRYANT R., Recent advances in the theory of holonomy, *Sém. Bourbaki, exp. 861, juin 1999, Astérisque* **266** (2000) 351–374.
[13] COHN P., *Free Rings and their Relations*, London Math. Soc. Monogr., Vol. **2**, Academic Press, 1971.
[14] COHN P., *Skew Field Constructions*, Cambridge Univ. Press, 1977.
[15] CONNES A., *Géométrie non commutative*, Interéditions, 1990.
[16] CONNES A., *Non-Commutative Geometry*, Academic Press, 1994.
[17] DEMAZURE M., GABRIEL P., *Groupes algébriques 1*, North-Holland, 1970.
[18] DELIGNE P., Le groupe fondamental de la droite projective moins trois points, in: *Galois Groups over* $\overline{Q}$, M.S.R.I. Publ., Vol. **16**, 1989, pp. 79–297.
[19] DELIGNE P., *Catégories tannakiennes*, Grothendieck Festschrift, Vol. **2**, Birkhäuser P.M. 87, 1990, pp. 111–198.
[20] DELIGNE P., MILNE J., *Tannakian categories*, Lect. Notes in Math., Vol. **900**, Springer-Verlag, 1982, pp. 101–228.
[21] DUBOIS-VIOLETTE M., MASSON T., On the first order operators in bimodules, *Lett. Math. Phys.* **37** (1996) 464–474.
[22] DUBOIS-VIOLETTE M., *Some aspects of noncommutative differential geometry*, Contemporary Math., Vol. **203**, 1997, pp. 145–157.
[23] DUVAL A., Lemmes de Hensel et factorisation formelle pour les opérateurs aux différences, *Funkcial. Ekvac.* **26** (1983) 349–368.

[24] EKEDAHL T., Foliations and inseparable morphisms, *Proc. Symp. Pure Math.* **46** (1987) 139–149.
[25] FAHIM A., Extensions galoisiennes d'algèbres différentielles, *C. R. Acad. Sci. Paris, Série A* **314** (1992) 1–4.
[26] GASPER G., RAHMAN M., *Basic Hypergeometric Series*, Cambridge Univ. Press, 1990.
[27] HELLEGOUARCH Y., Galois calculus and Carlitz exponentials, in: Goss D., Hayes D., Rosen M. (Eds.), *The Arithmetic of Function Fields*, de Gruyter, 1992, pp. 33–50.
[28] KAROUBI M., *Homologie cyclique et K-théorie*, Astérisque, Vol. **149**, Soc. Math. France, 1987.
[29] KAROUBI M., Formes différentielles non commutatives et cohomologie à coefficients arbitraires, *Trans. Amer. Math. Soc.* **347** (11) (1995) 4277–4299.
[30] KATZ N., Nilpotent connections and the monodromy theorem. Applications of a result of Turrittin, *Publ. Math. Inst. Hautes Études Sci.* **39** (1970) 175–232.
[31] KATZ N., *Exponential Sums and Differential Equations*, Annals of Math. Studies, Vol. **124**, Princeton, 1990.
[32] KOBAYASHI S., NOMIZU K., *Foundations of Differential Geometry*, Interscience I, 1963.
[33] KOLCHIN E., Algebraic matrix groups and the Picard–Vessiot theory of linear ordinary differential equations, *Ann. of Math.* **49** (1948) 1–42.
[34] LAKSOV D., THORUP A., These are the differentials of order n, *Trans. Amer. Math. Soc.* **351** (4) (1999) 1293–1353.
[35] LEVELT A., Differential Galois theory and tensor products, *Indag. Math. N.S.* **1** (1990) 439–450.
[36] LICHNEROWICZ A., *Théorie globale des connexions et des groupes d'holonomie*, Cremona, 1955.
[37] MATHIEU O., Classification des algèbres de Lie simples, *Sém. Bourbaki, exp. 858, mars 1999, Astérisque* **266** (2000) 245–286.
[38] MOURAD J., Linear connections in noncommutative geometry, *Class. Quant. Grav.* **12** (1995) 965–974.
[39] NUSS P., Noncommutative descent and non-abelian cohomology, *K-Theory* **12** (1997) 23–74.
[40] PRAAGMAN C., The formal classification of linear difference operators, *Proc. Kon. Ned. Ac. Wet. Ser. A* **86** (1983) 249–261.
[41] SAAVEDRA RIVANO N., *Catégories tannakiennes*, Lect. Notes in Math., Vol. **256**, Springer-Verlag, 1972.
[42] SAULOY J., Matrice de connexion d'un système aux q-différences confluant vers un système différentiel de matrices de monodromie, *C. R. Acad. Sci. Paris, Série I* **328** (1999) 155–160.
[43] SERRE J.-P., Gèbres, *L'Ens. Math.* **39** (1993) 33–85.
[44] SUZUKI, General formulation of quantum analysis, *Rev. Math. Physics* **11** (2) (1999) 243–265.
[45] TANNAKA T., Über der Dualitätssatz der nichtkommutative topologischen Gruppen, *Tôhoku Math. J.* **45** (1939) 1–12.
[46] TARASOV V., VARCHENKO A., *Geometry of q-Hypergeometric Functions, Quantum Affine Algebras and Elliptic Quantum Groups*, Astérisque, Vol. **246**, Soc. Math. France, 1997.
[47] VAN DER PUT M., Differential equations in characteristic p, *Compositio Math.* **97** (1995) 227–251.
[48] VAN DER PUT M., SINGER M., *Galois Theory of Difference Equations*, Lect. Notes Math., Vol. **1666**, Springer-Verlag, 1997.
[49] WARNER F., *Foundations of Differentiable Manifolds and Lie Groups*, Graduate Texts in Math., Vol. **94**, Springer-Verlag, 1971.

(Manuscrit reçu le 11 janvier 2000 ;
accepté, après révision, le 26 avril 2000.)

Yves ANDRÉ
Institut de mathématiques,
175, rue du Chevaleret, 7e étage,
75013 Paris, France
E-mail : andre@math.jussieu.fr