ANNALES SCIENTIFIQUES DE L'É.N.S.

A. GUICHARDET

# Sur les groupes $EXT^n$ des représentations des groupes de Lie semi-simples

*Annales scientifiques de l'É.N.S. 4e série*, tome 21, nº 3 (1988), p. 333-358

<http://www.numdam.org/item?id=ASENS_1988_4_21_3_333_0>

*Ann. scient. Éc. Norm. Sup.*,
4ᵉ série, t. 21, 1988, p. 333 à 358.

# SUR LES GROUPES EXT$^n$ DES REPRÉSENTATIONS DES GROUPES DE LIE SEMI-SIMPLES

PAR A. GUICHARDET

## Introduction

Étant donnés un groupe de Lie G et une classe de représentations unitaires irréductibles $\pi$ de G, on peut se poser des problèmes de trois types (parmi bien d'autres...) :

(*a*) déterminer les groupes $\mathrm{Ext}^n_G(\pi, \pi)$ et la structure d'algèbre de cohomologie (pour le cup-produit) de leur somme directe $\mathrm{Ext}^*_G(\pi, \pi)$;

(*b*) décrire la catégorie $\mathrm{Ext}(G, \pi)$ des G-modules de longueur finie, à sous-quotients simples isomorphes à $\pi$;

(*c*) étudier la « géométrie différentielle » de $\hat{G}$ au voisinage de $\pi$ : algèbre des jets d'ordre infini de fonctions $C^\infty$ au voisinage de $\pi$, déformations $C^\infty$ de $\pi$, vecteurs tangents à $\hat{G}$ en $\pi$, etc.

Il se trouve que ces problèmes sont assez intimement liés, comme le montrent les considérations — souvent très formelles — qui suivent.

(i) Si G est compact, les trois problèmes sont triviaux.

(ii) Prenons $G = \mathbf{R}^m$; alors $\hat{G} = \mathbf{R}^m$, $\mathrm{Ext}^*_G(\pi, \pi)$ est l'algèbre extérieure $\Lambda^* \mathbf{C}^m$; la catégorie $\mathrm{Ext}(G, \pi)$ est équivalente à celle des A-modules de dimension finie à sous-quotients simples triviaux, où A est l'algèbre de polynômes $\mathbf{C}[X_1, \ldots, X_m]$; enfin l'algèbre des jets d'ordre infini de fonctions $C^\infty$ au voisinage de $\pi$ est l'algèbre de séries formelles $\mathbf{C}[[X_1, \ldots, X_m]]$.

(iii) Les résultats de (ii) ont été généralisés, sous une forme moins simpliste, au cas d'un groupe G nilpotent simplement connexe par F. du Cloux ([3], [4]); dans ce cas les assertions relatives à $\mathrm{Ext}_G(\pi, \pi)$ et à $\mathrm{Ext}(G, \pi)$ sont vraies « génériquement », et cela semble devoir se généraliser à tous les groupes de Lie (*voir* [11] et [12] pour d'autres cas).

(iv) Le groupe G étant maintenant quelconque, considérons une réalisation U de $\pi$ dans un espace E, et une déformation $C^\infty$ de U, *i.e.* une famille à un paramètre de représentations unitaires $U_t$ de G dans E telles que $U_0 = U$ et que les applications $t \mapsto U_t(g)$ soient $C^\infty$; posons

$$\Phi(g) = -i \frac{d}{dt}\bigg|_0 U_t(g) . U(g)^{-1};$$

alors $\Phi$ est un 1-cocycle sur G à valeurs dans End E; nous noterons $[\Phi]$ sa classe dans le groupe $\mathrm{Ext}^1_G(\pi, \pi)$; la formule correspondante pour l'algèbre de Lie $\mathfrak{g}$ est

$$\Phi(X) = -i \left.\frac{d}{dt}\right|_0 U_t(X) \qquad \forall X \in \mathfrak{g}.$$

Il est clair que $\Phi(g)$ et $\Phi(X)$ sont hermitiens, ce que nous écrirons

$$[\Phi] \in \mathrm{Ext}^1_G(\pi, \pi)_h;$$

de plus $[\Phi]$ est de cup-carré nul, comme on le voit en dérivant deux fois la relation

$$U_t(g_1 g_2) = U_t(g_1) . U_t(g_2);$$

nous écrirons cela

$$[\Phi] \in \mathrm{Ext}^1_G(\pi, \pi)_{0, h}.$$

Nous dirons qu'un tel 1-cocycle $\Phi$ « s'obtient en dérivant une déformation de U »; on a montré dans [14] que, dans le cas des groupes de déplacements, tous les éléments de $\mathrm{Ext}^1_G(\pi, \pi)_{0, h}$ s'obtiennent par ce procédé.

A ce point il est bon de rappeler qu'en Géométrie Algébrique, on définit couramment l'espace tangent à une variété V en un point $x$ comme étant l'espace $\mathrm{Ext}^1_A(x, x)$ où A est l'algèbre des fonctions algébriques sur V.

Revenant au cas qui nous intéresse, l'indice 0 (condition de « cup-carré nul ») indique clairement une situation non commutative; l'indice $h$ est dû, bien entendu, au fait que l'on ne considère que des représentations unitaires. Signalons aussi un phénomène assez inattendu : il peut arriver que deux déformations équivalentes fournissent des 1-cocycles non équivalents; plus précisément il peut exister deux familles à un paramètre $(U_t)$, $(U'_t)$ vérifiant $U_0 = U'_0 = U$, et des entrelacements $A_t : U_t \to U'_t$ n'ayant aucune limite lorsque $t \to 0$, si bien que les 1-cocycles obtenus $\Phi$ et $\Phi'$ peuvent ne pas être équivalents; ce phénomène se produit pour le groupe nilpotent $G_{5, 5}$, et semble être intimement lié à celui, étudié par J. Ludwig [17], des suites d'orbites dans $\mathfrak{g}^*$ qui convergent plusieurs fois vers une orbite donnée.

(v) Pour les groupes G ayant des $\mathrm{Ext}^n$ non nuls entre représentations irréductibles distinctes, il s'avère intéressant de considérer aussi des représentations $\pi$ non irréductibles, à condition de remplacer $\mathrm{Ext}^1_G(\pi, \pi)_{0, h}$ par son sous-ensemble $\mathrm{Ext}^1_G(\pi, \pi)_{0, h, \mathrm{irr}}$ formé des classes $\alpha$ qui sont irréductibles au sens suivant : pour tout élément $\varphi$ de $\alpha$, les opérateurs $U(g)$ et $\Phi(g)$ forment un ensemble irréductible; puis de diviser ce dernier par l'action (par conjugaison) du groupe $\mathscr{C}^u$ des éléments unitaires du commutant $\mathscr{C}$ de U. Prenons par exemple le groupe des déplacements du plan : $G = \mathbf{R}^2 \rtimes SO(2)$; $\hat{G}$ est formé des caractères $\chi_n$, $n \in \mathbf{Z}$, de SO(2), et d'une famille de représentations de dimension infinie $\rho_r$, $r \in \mathbf{R}^*_+$; $\mathrm{Ext}^1_G(\chi_n, \chi_n)$ est nul pour tout $n$; par contre si l'on considère la représentation $\pi = \bigoplus_n \chi_n$, un calcul direct montre que $\mathrm{Ext}^1_G(\pi, \pi)_{0, h, \mathrm{irr}}/\mathscr{C}^u$ est naturellement homéomorphe à la famille des $\rho_r$; celle-ci doit donc être considérée comme une déformation $C^\infty$ de $\pi$, et non des divers $\chi_n$, bien que, pour la topologie de Fell, elle converge vers tous les $\chi_n$. On trouvera dans [13] une étude plus complète de $\mathrm{Ext}^1_G(\pi, \pi)_{0, h, \mathrm{irr}}/\mathscr{C}^u$ dans le cas des groupes de déplacements quelconques.

Le but initial du présent travail était d'examiner les problèmes ci-dessus dans le cas où G est un groupe semi-simple, et où $\pi$ est un $(\mathfrak{g}, K)$-module « série principale généralisée » $I_{P, \delta, \nu}$; il est encore bien loin d'être atteint! Nous décrivons les espaces vectoriels $\mathrm{Ext}^n_{\mathfrak{g}, K}(I_{P, \delta, \nu}, I_{P, \delta, \nu})$ sans autres hypothèses, mais nous ne décrivons la structure d'algèbre de $\mathrm{Ext}^*_{\mathfrak{g}, K}(I_{P, \delta, \nu}, I_{P, \delta, \nu})$ que lorsque le groupe $W^0_{\delta, \nu}$ est trivial et $\nu$ imaginaire pure.

Nous tenons à remercier très chaleureusement ici P. Delorme dont la compétence dans le vaste domaine « semi-simple » nous a été indispensable tout au long de l'élaboration de ce travail, ainsi que J.-B. Baillon et J. Soto Andrade qui nous ont fourni des démonstrations du lemme 8.10; à la demande du rapporteur nous avons reproduit la seconde, plus intuitive et « géométrique » que la première.

## 1. Préliminaires

### 1.1. Notations générales

Dans tout ce travail on note :

- G un groupe de Lie réel semi-simple connexe de centre fini;
- $\mathfrak{g}$ son algèbre de Lie;
- K un sous-groupe compact maximal de G;
- $P=MAN$ un sous-groupe parabolique cuspidal;
- $\mathfrak{p}=\mathfrak{m}+\mathfrak{a}+\mathfrak{n}$ son algèbre de Lie;
- $l=\dim A$;
- $K_M=K\cap M$;
- $\rho$ la demi-somme des racines de $\mathfrak{a}$ dans $\mathfrak{n}$;
- $W=N_G(A)/Z_G(A)$ le groupe de Weyl de A;
- $\delta$ un élément de $\hat{M}_d$ (série discrète de M);
- $\nu$ un élément de $\mathfrak{a}^*_c$ avec $\mathrm{Re}\,\nu\in-\bar{C}_P$ (chambre de Weyl négative fermée);
- $W_{\delta, \nu}$ le stabilisateur du couple $(\delta, \nu)$ dans W, qu'on peut écrire comme une extension

$$1 \to W^0_{\delta, \nu} \to W_{\delta, \nu} \to R_{\delta, \nu} \to 1$$

- $I^\infty_{P, \delta, \nu}$ la série principale correspondante, induite au sens $C^\infty$ dans sa réalisation compacte, à savoir :

$$I^\infty_{P, \delta, \nu}=\{f\in C^\infty(K, E_\delta) \mid f(km)=\delta(m)^{-1}.f(k)\ \forall k\in K,\ m\in K_M\};$$

- I ou $I_{P, \delta, \nu}$ le $(\mathfrak{g}, K)$-module correspondant;
- U ou $U_{P, \delta, \nu}$ la représentation dans $I_{P, \delta, \nu}$;
- $\mathscr{A}=S(\mathfrak{a}_c)$ l'algèbre symétrique de $\mathfrak{a}_c$;

— $\mathscr{B}$ l'ensemble des éléments de $\mathscr{A}$ invariants par $W^0_{\delta, \nu}$;

— $\mathscr{C}_A$ la catégorie des A-modules $C^\infty$;

— Ext(A, ν) sa sous-catégorie pleine formée des A-modules de longueur finie à sous-quotients simples isomorphes à $\mathbf{C}_\nu$;

— $\mathscr{C}_{\mathfrak{g}, K}$ la catégorie des ($\mathfrak{g}$, K)-modules;

— Ext($\mathfrak{g}$, K; I) sa sous-catégorie pleine formée des modules de longueur finie à sous-quotients simples isomorphes à I (lorsque celui-ci est simple);

— $\mathscr{C} = \mathrm{Ext}^0_{\mathfrak{g}, K}(I, I)$ le commutant de I;

— $\mathscr{C}^*$ le groupe des éléments inversibles de $\mathscr{C}$;

— lorsque $\mathrm{Re}\, \nu = 0$, $\mathscr{C}^u$ le groupe des éléments unitaires de $\mathscr{C}$;

— $\mathrm{Ext}^1_{\mathfrak{g}, K}(I, I)_0$ le sous-ensemble de $\mathrm{Ext}^1_{\mathfrak{g}, K}(I, I)$ formé des éléments de cup-carré nul;

— $\mathrm{Ext}^1_{\mathfrak{g}, K}(I, I)_{\mathrm{irr}}$ le sous-ensemble de $\mathrm{Ext}^1_{\mathfrak{g}, K}(I, I)$ formé des éléments $\alpha$ qui sont irréductibles au sens suivant : pour tout 1-cocycle $\Phi \in \alpha$, l'ensemble des opérateurs U(X) et $\Phi$(X), où $X \in \mathfrak{g}$, ne laisse stable aucun sous-espace non trivial de I;

— lorsque $\mathrm{Re}\, \nu = 0$, $\mathrm{Ext}^1_{\mathfrak{g}, K}(I, I)_h$ le sous-ensemble de $\mathrm{Ext}^1_{\mathfrak{g}, K}(I, I)$ formé des classes contenant au moins un cocycle hermitien;

— $\mathrm{Ext}^1_{\mathfrak{g}, K}(I, I)_{0, h, \mathrm{irr}}$ l'intersection des trois sous-ensembles précédents.

On fait agir $\mathscr{C}^*$ dans $\mathrm{Ext}^1_{\mathfrak{g}, K}(I, I)$ par conjugaison; plus précisément, le transformé d'un 1-cocycle $\Phi$ par un élément T de $\mathscr{C}^*$ est le 1-cocycle $X \mapsto T . \Phi(X) . T^{-1}$; de même lorsque $\mathrm{Re}\, \nu = 0$ on fait agir $\mathscr{C}^u$ dans $\mathrm{Ext}^1_{\mathfrak{g}, K}(I, I)_h$.

1.2. Structure de $I_{P, \delta, \nu}$. (*Voir* [6], [16], [18]).

On rappelle que I est somme directe d'une famille finie de sous-modules indécomposables, famille qui a même cardinal que $\hat{R}_{\delta, \nu}$; nous noterons $I^\chi$ ou $I^\chi_{P, \delta, \nu}$, avec $\chi \in \hat{R}_{\delta, \nu}$, ces sous-modules; chacun d'eux a un unique sous-module simple noté $J^\chi$ ou $J^\chi_{P, \delta, \nu}$.

1.3. Cas où $\mathrm{Re}\, \nu = 0$.

Dans ce cas les sous-modules $I^\chi = J^\chi$ sont deux à deux inéquivalents; pour tout $w \in W_{\delta, \nu}$ on notera A($w$) l'opérateur d'entrelacement unitaire associé, normalisé de façon que $A(w)|_{I^1} = \mathrm{id}$; alors A est un morphisme de groupes, de noyau $W^0_{\delta, \nu}$; les A($w$) avec $w \in R_{\delta, \nu}$ forment une base de l'espace vectoriel $\mathscr{C}$; enfin on peut choisir l'indexation $I^\chi$ de façon que

$$A(w)|_{I^\chi} = \chi(w) . \mathrm{id}.$$

1.4. Applications linéaires $T^n : \Lambda^n \mathfrak{a}^*_c \to \mathrm{Ext}^n_{\mathfrak{g}, K}(I, I)$. (*Voir* [10] et [12].)

On dispose d'un foncteur $T : \mathscr{C}_A \to \mathscr{C}_{\mathfrak{g}, K}$ associant à tout A-module $\pi$ le ($\mathfrak{g}$, K)-module induit au sens K-fini par le ($\mathfrak{p}$, $K_M$)-module $\delta \times e^\rho \pi \times 1$; il en résulte des applications linéaires

$$T^n : \Lambda^n \mathfrak{a}^*_c = \mathrm{Ext}^n_{\mathfrak{a}}(\nu, \nu) \to \mathrm{Ext}^n_{\mathfrak{g}, K}(I, I);$$

pour tout $\xi \in \Lambda^n \mathfrak{a}_c^*$ et tout $\chi \in \hat{\mathrm{R}}_{\delta, \nu}$ on notera $\mathrm{T}^{n, \chi}(\xi)$ la restriction de $\mathrm{T}^n(\xi)$ à $\mathrm{Ext}^n_{\mathfrak{g}, \mathrm{K}}(\mathrm{I}^\chi, \mathrm{I})$.

Enfin notant $\mathrm{T}^*$ la somme directe des divers $\mathrm{T}^n$, $n \geqq 0$, on a

$$\mathrm{T}^*(\xi_1 \wedge \xi_2) = \mathrm{T}^*(\xi_1) \smile \mathrm{T}^*(\xi_2) \tag{1.1}$$

pour $\xi_1, \xi_2 \in \Lambda^* \mathfrak{a}_c^*$, où $\smile$ désigne le cup-produit.

## 2. Énonce des résultats

THÉORÈME 1. — *Les données sont celles du* 1.1; *en particulier* $\nu \in \mathfrak{a}_c^*$.

(i) *On a des isomorphismes d'espaces vectoriels*

$$\mathrm{Ext}^n_{\mathfrak{g}, \mathrm{K}}(\mathrm{I}^\chi, \mathrm{I}) \sim \mathrm{Ext}^n_{\mathscr{B}}(\nu, \nu) \qquad \forall \chi \in \hat{\mathrm{R}}_{\delta, \nu}$$
$$\mathrm{Ext}^n_{\mathfrak{g}, \mathrm{K}}(\mathrm{I}, \mathrm{I}) \sim \mathbf{C}^{|\mathrm{R}_{\delta, \nu}|} \otimes \mathrm{Ext}^n_{\mathscr{B}}(\nu, \nu).$$

(ii) *Pour tout* $\xi \in \mathfrak{a}_c^*$, $\mathrm{T}^1(\xi)$ *est la classe du* 1-*cocycle*

$$\mathfrak{g} \ni \mathrm{X} \mapsto \left.\frac{d}{dt}\right|_0 \mathrm{U}_{\mathrm{P}, \delta, \nu(t)}(\mathrm{X})$$

*pour toute courbe différentiable* $t \mapsto \nu(t)$ *vérifiant* $\nu(0) = \nu$, $\nu'(0) = \xi$.

(iii) *Écrivons* $\mathfrak{a}_c^* = \mathrm{V}_0 \oplus \mathrm{V}_1$ *où* $\mathrm{V}_0$ (*resp.* $\mathrm{V}_1$) *est le sous-espace de* $\mathfrak{a}_c^*$ *où* $\mathrm{W}^0_{\delta, \nu}$ *opère trivialement* (*resp. la somme des sous-espaces isotypiques non triviaux*), *puis*

$$\Lambda^n \mathfrak{a}_c^* = \bigoplus_{p=0}^{n} (\Lambda^{n-p} \mathrm{V}_0 \otimes \Lambda^p \mathrm{V}_1);$$

*alors*

$$\mathrm{Ker}\, \mathrm{T}^{n, \chi} = \bigoplus_{p=1}^{n} (\Lambda^{n-p} \mathrm{V}_0 \otimes \Lambda^p \mathrm{V}_1).$$

*N.B.* — On a

$$\mathrm{Ext}^n_{\mathscr{B}}(\nu, \nu) \sim \mathrm{Ext}^n_{\mathscr{A}}(\nu, \nu) \sim \Lambda^n \mathfrak{a}_c^*$$

puisque $\mathscr{B}$ est, comme $\mathscr{A}$, une algèbre de polynômes à $n$ indéterminées; mais cet isomorphisme n'a rien de canonique!

PROPOSITION 1. — *Si* $\mathrm{Re}\,\nu = 0$ *on a, pour tout* $\xi \in \Lambda^n \mathfrak{a}_c^*$ *et tout* $w \in \mathrm{W}_{\delta, \nu}$,

$$\mathrm{T}^n(w \,.\, \xi) = \mathrm{A}(w) \,.\, \mathrm{T}^n(\xi) \,.\, \mathrm{A}(w)^{-1}.$$

THÉORÈME 2. — *On suppose ici* $W_{\delta,\nu}$ *trivial et* I *simple.*

(i) $T^n$ *est bijectif pour tout* $n \geqq 0$.

(ii) *L'algèbre de cohomologie* $\mathrm{Ext}^*_{\mathfrak{g},K}(I, I)$ *est isomorphe à l'algèbre extérieure* $\Lambda^* \mathfrak{a}_c^*$.

(iii) *Tout élément de* $\mathrm{Ext}^1_{\mathfrak{g},K}(I, I)$ *s'obtient en dérivant une déformation de* I.

(iv) *Si* $\mathrm{Re}\,\nu=0$, *tout élément de* $\mathrm{Ext}^1_{\mathfrak{g},K}(I, I)_h$ *s'obtient en dérivant une déformation unitaire de* I.

(v) *Le foncteur* T, *défini en* 1.4, *induit une équivalence de catégories de* $\mathrm{Ext}(A, \nu)$ *sur* $\mathrm{Ext}(\mathfrak{g}, K; I)$.

*N.B.* — Les assertions (i), (ii), (v) ont déjà été démontrées dans [12], l'assertion (v) dans [7].

THÉORÈME 3. — *On suppose maintenant* $W^0_{\delta,\nu}=\{1\}$ *et* $\mathrm{Re}\,\nu=0$.

(i) $T^{n,\chi}$ *est bijectif pour tout* $n \geqq 0$ *et tout* $\chi \in \hat{R}_{\delta,\nu}$.

(ii) *On a*

$$\mathrm{Ext}^n_{\mathfrak{g},K}(I^{\chi_1}, I^{\chi_2}) \sim (\Lambda^n \mathfrak{a}_c^*)_{\chi_1^{-1}\chi_2} \qquad \forall \chi_1, \chi_2 \in \hat{R}_{\delta,\nu}$$

*où l'indice* $\chi_1^{-1}\chi_2$ *signifie qu'on prend le sous-espace isotypique de type* $\chi_1^{-1}\chi_2$ *pour l'action de* $R_{\delta,\nu}$.

(iii) *L'algèbre de cohomologie* $\mathrm{Ext}^*_{\mathfrak{g},K}(I, I)$ *est isomorphe au produit croisé* $\Lambda^* \mathfrak{a}_c^* \ltimes R_{\delta,\nu}$.

(iv) $T^1$ *induit des bijections*

$$(\mathfrak{a}_c^*)_{\mathrm{irr}}/R_{\delta,\nu} \underset{\sim}{\to} \mathrm{Ext}^1_{\mathfrak{g},K}(I, I)_{0,\mathrm{irr}}/\mathscr{C}^*$$

$$(i\,\mathfrak{a}^*)_{\mathrm{irr}}/R_{\delta,\nu} \underset{\sim}{\to} \mathrm{Ext}^1_{\mathfrak{g},K}(I, I)_{0,h,\mathrm{irr}}/\mathscr{C}^u$$

*où* $(\mathfrak{a}_c^*)_{\mathrm{irr}}$ *est l'image réciproque de* $\mathrm{Ext}^1_{\mathfrak{g},K}(I, I)_{\mathrm{irr}}$ *par* $T^1$.

(v) *Tout élément de* $\mathrm{Ext}^1_{\mathfrak{g},K}(I, I)_{0,\mathrm{irr}}$ (*resp. de* $\mathrm{Ext}^1_{\mathfrak{g},K}(I, I)_{0,h,\mathrm{irr}}$ *s'obtient en dérivant une déformation irréductible* (*resp. unitaire irréductible*) *de* I.

*N.B.* — L'assertion (i) ne suppose pas $\mathrm{Re}\,\nu=0$.

*Remarque* 1. — On sait ([5]) que les assertions suivantes sont équivalentes :

— l'une des représentations $I^\chi$ est une limite de séries discrètes;

— toutes les $I^\chi$ sont des limites de séries discrètes;

— $(\mathfrak{a}_c^*)_1\,(=(\mathfrak{a}_c^*)^{R_{\delta,\nu}})$ est nul.

On retrouve donc le fait que, si V est un ($\mathfrak{g}$, K)-module limite de séries discrètes, $\mathrm{Ext}^1_{\mathfrak{g},K}(V, V)$ est nul; en réalité les $\mathrm{Ext}^n_{\mathfrak{g},K}(V, V)$ le sont aussi, d'après un résultat de Schmid et Zuckerman communiqué par D. Vogan.

*Remarque* 2. — Le cas où $W^0_{\delta,\nu}$ est non trivial semble nettement plus difficile; nous espérons y revenir dans un travail ultérieur; signalons toutefois que, lorsque $R_{\delta,\nu}=\{1\}$, il existe une équivalence de catégories entre $\mathrm{Ext}(\mathscr{B}, \nu)$ et $\mathrm{Ext}(\mathfrak{g}, K; I)$ (*cf.* [7], théorème 2).

*Remarque* 3. — Il peut être intéressant de rapprocher le théorème 3 de certains résultats connus concernant le dual réduit de G.

(*a*) Considérons l'ensemble des représentations unitaires obtenues par complétion des divers $I^{\chi}_{P,\delta,\nu}$ où $P=MAN$ parcourt l'ensemble des sous-groupes paraboliques cuspidaux à association près, $\delta\in\hat{M}_d/W$, $\nu\in i\mathfrak{a}^*/W_\delta$, $\chi\in\hat{R}_{\delta,\nu}$; cet ensemble est celui des représentations tempérées de G, et constitue le dual réduit $\hat{G}_r$ de G ([8], 2.3).

(*b*) Fixant P et $\delta$ on obtient un sous-ensemble $S_{P,\delta}$ de $\hat{G}_r$ qui est ouvert et fermé dans $\hat{G}_r$ ([8], 2.3); notons $\mathscr{C}_0(i\mathfrak{a}^*/W^0_\delta)$ l'algèbre des fonctions continues nulles à l'infini sur $i\mathfrak{a}^*/W^0_\delta$, et formons la C*-algèbre produit croisé $\mathscr{A}_{P,\delta}=\mathscr{C}_0(i\mathfrak{a}^*/W^0_\delta)\rtimes R_\delta$; les représentations irréductibles de cette algèbre sont en correspondance bijective avec les éléments de $S_{P,\delta}$, comme on le voit en appliquant la théorie de Mackey à $\mathscr{A}_{P,\delta}$.

(*c*) La C*-algèbre réduite de G est Morita-équivalente à la somme des diverses $\mathscr{A}_{P,\delta}$ ([19], théorème 9).

(*d*) Supposons, comme au théorème 3, que $W^0_{\delta,\nu}=\{1\}$, formons le groupe produit semi-direct $H=A\rtimes R_{\delta,\nu}$, et notons T la représentation régulière de $R_{\delta,\nu}$ considérée comme représentation de H; alors il est facile de voir que l'algèbre de cohomologie $\mathrm{Ext}^*_H(T, T)$ est isomorphe à $\Lambda^*\mathfrak{a}^*_c\rtimes R_{\delta,\nu}$, donc à l'algèbre de cohomologie $\mathrm{Ext}^*_{\mathfrak{g},K}(I_{P,\delta,\nu}, I_{P,\delta,\nu})$.

EXEMPLE

Prenons pour G le groupe SL(2, **R**) et pour P le sous-groupe des matrices triangulaires supérieures; alors M est réduit à I et $-I$; on note 0 et 1 ses caractères, 0 étant le caractère trivial; on identifie $\mathfrak{a}^*_c$ à **C** en associant à tout $\nu\in\mathfrak{a}^*_c$ sa valeur sur l'élément $\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix}$. On se place au point $\nu=0$; alors $W_{\delta,\nu}=\mathbf{Z}_2$.

Examinons d'abord le cas $\delta=0$. Alors $R_{\delta,\nu}$ est trivial et $W^0_{\delta,\nu}=\mathbf{Z}_2$; le théorème 1 montre que

$$\dim \mathrm{Ext}^n_{\mathfrak{g},K}(I, I)=\dim\Lambda^n\mathfrak{a}^*_c=\begin{cases}1 & \text{si } n=0, 1\\ 0 & \text{sinon}\end{cases}$$

mais que l'application $T^1$ est nulle; le théorème 3 ne donne évidemment rien, mais on peut montrer directement que tout élément de $\mathrm{Ext}^1_{\mathfrak{g},K}(I, I)$ (resp. $\mathrm{Ext}^1_{\mathfrak{g},K}(I, I)_h$) s'obtient en dérivant une déformation (resp. une déformation unitaire) de I; mais le paramètre par rapport auquel on doit dériver est $\nu^2$ et non pas $\nu$.

Examinons maintenant le cas $\delta=1$. Alors $W^0_{\delta,\nu}$ est trivial, $R_{\delta,\nu}=\mathbf{Z}_2$; le théorème 1 montre que

$$\dim \mathrm{Ext}^n_{\mathfrak{g},K}(I, I)=\begin{cases}2 & \text{si } n=0, 1\\ 0 & \text{sinon;}\end{cases}$$

le théorème 3 s'applique; $(\mathfrak{a}^*_c)_{\mathrm{irr}}$ et $(i\mathfrak{a}^*)_{\mathrm{irr}}$ s'identifient respectivement à $\mathbf{C}^*$ et $\mathbf{R}^*$; $(\mathfrak{a}^*_c)_{\mathrm{irr}}/R_{\delta,\nu}$ et $(i\mathfrak{a}^*)_{\mathrm{irr}}/R_{\delta,\nu}$ — à $\mathbf{C}^*/\{1, -1\}$ et $\mathbf{R}^*_+$; les déformations mentionnées au théorème 3 (v) sont formées respectivement de « séries principales non sphériques » et de « séries principales unitaires non sphériques ».

PRINCIPE DE LA DÉMONSTRATION DES THÉORÈMES (ajouté à la demande du rapporteur)

(*a*) On a des isomorphismes successifs

$$\begin{array}{c}\mathrm{Ext}^n_{\mathfrak{g},\,\mathrm{K}}(\mathrm{I}^\chi,\mathrm{I})=\mathrm{H}^n(\mathfrak{g},\mathrm{K};\mathrm{Hom}(\mathrm{I}^\chi,\mathrm{I}))\\ \big\downarrow{\scriptstyle \mathrm{J}_1^\chi}\\ \mathrm{H}^n(\mathfrak{p},\mathrm{K}_\mathrm{M};\mathrm{Hom}(\mathrm{I}^\chi,\delta\times(\nu+\rho)\times 1))\\ \big\downarrow{\scriptstyle \mathrm{J}_2^\chi}\\ \mathrm{H}^n(\mathfrak{a},\mathrm{Hom}_{\mathfrak{m},\,\mathrm{K}_\mathrm{M}}(\mathrm{H}_0(\mathfrak{n},\mathrm{I}^\chi)_{\delta,\,\nu+\rho},\delta\times(\nu+\rho)))\\ \big\downarrow{\scriptstyle \mathrm{J}_3^\chi}\\ \mathrm{Ext}^n_{\mathscr{B}}(\nu,\nu).\end{array}$$

$\mathrm{J}_1$ n'est autre que l'isomorphisme de Shapiro. $\mathrm{J}_2$ s'obtient en écrivant la suite spectrale de Hochschild-Serre pour l'idéal $\mathfrak{n}$ de $\mathfrak{p}$, puis en utilisant divers résultats de Hecht et Schmid, Vogan, Zuckerman sur la structure des $\mathfrak{m}+\mathfrak{a}$-modules $\mathrm{H}_q(\mathfrak{n},\mathrm{I}^\chi)$, et la nullité des $\mathrm{Ext}^n$ entre séries discrètes. Enfin $\mathrm{J}_3$ résulte d'un théorème de Delorme sur la structure du $\mathfrak{a}$-module dont on prend la cohomologie.

(*b*) Comme I est somme directe des $\mathrm{I}^\chi$, on en déduit des isomorphismes

$$\begin{array}{c}\mathrm{Ext}^n_{\mathfrak{g},\,\mathrm{K}}(\mathrm{I},\mathrm{I})\\ \big\downarrow{\scriptstyle \mathrm{J}_1}\\ \mathrm{H}^n(\mathfrak{p},\mathrm{K}_\mathrm{M};\mathrm{Hom}(\mathrm{I},\delta\times(\nu+\rho)\times 1))\\ \big\downarrow{\scriptstyle \mathrm{J}_2}\\ \mathrm{H}^n(\mathfrak{a},\mathrm{Hom}_{\mathfrak{m},\,\mathrm{K}_\mathrm{M}}(\mathrm{H}_0(\mathfrak{n},\mathrm{I})_{\delta,\,\nu+\rho},\delta\times(\nu+\rho)))\\ \big\downarrow{\scriptstyle \mathrm{J}_3}\\ \mathbf{C}^{|\mathrm{R}_{\delta,\nu}|}\otimes\mathrm{Ext}^n_{\mathscr{B}}(\nu,\nu);\end{array}$$

ceci démontre le théorème 1 (i).

(*c*) On a de plus des applications (associées au foncteur $\mathrm{T}:\mathscr{C}_{\mathscr{A}}\to\mathscr{C}_{\mathfrak{g},\,\mathrm{K}}$) :

$$\mathrm{T}^n:\mathrm{Ext}^n_{\mathscr{A}}(\nu,\nu)=\Lambda^n\mathfrak{a}_c^*\to\mathrm{Ext}^n_{\mathfrak{g},\,\mathrm{K}}(\mathrm{I},\mathrm{I});$$

on a une formule explicite (3.7) pour l'application composée $\mathrm{J}_1\circ\mathrm{T}^n$; on en déduit le théorème 1 (ii) qui affirme que $\mathrm{T}^1$ s'obtient en dérivant des déformations, puis l'équivariance de $\mathrm{T}^n$ relativement à $\mathrm{W}_{\delta,\,\nu}$ opérant dans $\mathfrak{a}_c^*$ de façon naturelle, et dans I par les opérateurs d'entrelacements (prop. 1). Cette équivariance est la clef du théorème 1 (iii), si l'on se souvient en outre de ce que $\mathrm{A}(w)$ est scalaire si et seulement si $w\in\mathrm{W}^0_{\delta,\,\nu}$; la démonstration complète du théorème 1 (iii) utilise aussi la forme explicite de l'application $\mathrm{J}_3\circ\mathrm{J}_2\circ\mathrm{J}_1\circ\mathrm{T}^n$ donnée par (5.4).

(*d*) Le théorème 2 est une conséquence facile du théorème 1 et, pour l'assertion (v), d'un lemme catégoriel démontré dans [12].

(*e*) Théorème 3 : (i) est une conséquence facile du théorème 1; (ii) de l'équivariance énoncée à la proposition 2; (iii) est un calcul sans mystère; (v) résulte facilement de (iv). Dans (iv), la partie difficile est la surjectivité de l'application

$$(\mathfrak{a}_c^*)_{\mathrm{irr}}/\mathrm{R}_{\delta,\,\nu} \to \mathrm{Ext}^1_{\mathfrak{g},\,\mathrm{K}}(\mathrm{I},\,\mathrm{I})_{0,\,\mathrm{irr}}/\mathscr{C}^*;$$

le lemme 8.9 la ramène à un problème combinatoire consistant à mettre certaines fonctions sur un groupe $\mathbf{Z}_2^n$ sous une forme « canonique » — problème qui ressemble beaucoup, mais en plus difficile, à celui qui consiste à écrire un 2-cocycle sous la forme d'un cobord; c'est l'objet du lemme 8.10.

## 3. Description des isomorphismes de Shapiro

$$\mathrm{Ext}^n_{\mathfrak{g},\,\mathrm{K}}(\mathrm{I}^\chi,\,\mathrm{I}) \underset{\sim}{\to} \mathrm{Ext}^n_{\mathfrak{p},\,\mathrm{K_M}}(\mathrm{I}^\chi,\,\delta\times(\nu+\rho)\times 1) \tag{3.1}$$

$$\mathrm{Ext}^n_{\mathfrak{g},\,\mathrm{K}}(\mathrm{I},\,\mathrm{I}) \underset{\sim}{\to} \mathrm{Ext}^n_{\mathfrak{p},\,\mathrm{K_M}}(\mathrm{I},\,\delta\times(\nu+\rho)\times 1). \tag{3.2}$$

3.1. On notera L l'application « évaluation en 1 » de I vers $\mathrm{E}_\delta$, soit $\mathrm{L}(f)=f(1)$, et $\mathrm{L}^\chi$ sa restriction à $\mathrm{I}^\chi$.

3.2. Lemme. — *Les applications* L *et* $\mathrm{L}^\chi$ *sont des* $(\mathfrak{p},\,\mathrm{K_M})$*-morphismes surjectifs.*

*Démonstration.* — Il est clair que ce sont des $(\mathfrak{p},\,\mathrm{K_M})$-morphismes; pour montrer que $\mathrm{L}^\chi$ est surjectif, il suffit de vérifier qu'il est non nul. Supposons donc $\mathrm{L}(f)=0$ pour tout $f\in\mathrm{I}^\chi$; on aura, pour tout $g\in\mathrm{G}$

$$0=\mathrm{L}(\mathrm{U}(g).f)=f(g^{-1})$$

donc $f=0$, d'où contradiction.

3.3. On sait (*cf.* [1], III.2.5) que l'isomorphisme de Shapiro (3.1) associe à tout $n$-cocycle $\Phi\in\mathrm{Z}^n(\mathfrak{g},\,\mathrm{K};\,\mathrm{Hom}(\mathrm{I}^\chi,\,\mathrm{I}))$ le $n$-cocycle $\Phi'$ défini par

$$\Phi'(\mathrm{X}_1,\,\ldots,\,\mathrm{X}_n)=\mathrm{L}\circ\Phi(\mathrm{X}_1,\,\ldots,\,\mathrm{X}_n) \qquad \forall\,\mathrm{X}_1,\,\ldots,\,\mathrm{X}_n\in\mathfrak{p} \tag{3.3}$$

ou encore par

$$\Phi'(p_1,\,\ldots,\,p_n)=\mathrm{L}\circ\Phi(p_1,\,\ldots,\,p_n) \qquad \forall\,p_1,\,\ldots,\,p_n\in\mathrm{P}. \tag{3.4}$$

3.4. Prenons en particulier un 1-cocycle $\Phi$ « dérivée de déformation » de la forme

$$\Phi(g)=-i\,\frac{d}{dt}\bigg|_0 \mathrm{U}_{\mathrm{P},\,\delta,\,\nu(t)}(g).\,\mathrm{U}_{\mathrm{P},\,\delta,\,\nu}(g)^{-1};$$

(3.4) donne

$$\Phi'(p)=-i\,\langle\,\nu'(0),\,\log a\,\rangle.\,\mathrm{L} \tag{3.5}$$

pour $p=m\,a\,n\in \mathrm{P}$; par suite, pour $\mathrm{U}=\mathrm{X}+\mathrm{Y}+\mathrm{Z}\in \mathfrak{p}=\mathfrak{m}+\mathfrak{a}+\mathfrak{n}$ :

$$\Phi'(\mathrm{U})=-i\langle \nu'(0), \mathrm{Y}\rangle.\mathrm{L}. \tag{3.6}$$

3.5. Cas où $\Phi$ est de la forme $\mathrm{T}^{n,\chi}(\xi)$ avec $\xi\in\Lambda^n \mathfrak{a}_c^*$.

En vertu de [12] lemme 3, on sait que, pour $\mathrm{U}_1, \ldots, \mathrm{U}_n\in\mathfrak{p}$, $\mathrm{U}_j=\mathrm{X}_j+\mathrm{Y}_j+\mathrm{Z}_j$ on a

$$\mathrm{T}^{n,\chi}(\xi)'(\mathrm{U}_1, \ldots, \mathrm{U}_n)=\langle \xi; \mathrm{Y}_1, \ldots, \mathrm{Y}_n\rangle.\mathrm{L}^\chi. \tag{3.7}$$

3.6. Démonstration du théorème 1 (ii).

Il suffit de juxtaposer (3.6) et (3.7).

3.7. Démonstration de la proposition 1.

En vertu de (1.1) on peut supposer $n=1$. Considérons une courbe $\nu(t)$ vérifiant $\nu(0)=\nu$, $\nu'(0)=\xi$; introduisons les opérateurs d'entrelacement $\mathrm{A}_t=\mathrm{A}_\mathrm{P}(w, \delta, \nu(t))$ où $w\in \mathrm{W}_{\delta,\nu}$ vérifiant

$$\mathrm{U}_{\mathrm{P},\delta,w.\nu(t)}(\mathrm{X})=\mathrm{A}_t.\mathrm{U}_{\mathrm{P},\delta,\nu(t)}.\mathrm{A}_t^{-1} \qquad \forall \mathrm{X}\in\mathfrak{g} \tag{3.8}$$

et $\mathrm{A}_0=\mathrm{A}(w)$ avec les notations du n° 1.3; posons $\mathrm{A}'_0=(d/dt)|_0\,\mathrm{A}_t$; notons $\Phi$ et $\Phi^w$ les 1-cocycles associés aux courbes $\nu(t)$ et $w.\nu(t)$; dérivant (3.8) pour $t=0$, on obtient

$$\Phi^w(\mathrm{X})=-i.\mathrm{A}'_0.\mathrm{U}(\mathrm{X}).\mathrm{A}_0^{-1}+\mathrm{A}_0.\Phi(\mathrm{X}).\mathrm{A}_0^{-1}+i.\mathrm{A}_0.\mathrm{U}(\mathrm{X}).\mathrm{A}_0^{-1}.\mathrm{A}'_0.\mathrm{A}_0^{-1};$$

comme $\mathrm{A}_0$ permute à $\mathrm{U}(\mathrm{X})$ :

$$\Phi^w(\mathrm{X})=\mathrm{A}_0.\Phi(\mathrm{X}).\mathrm{A}_0^{-1}+i[\mathrm{U}(\mathrm{X}), \mathrm{A}'_0.\mathrm{A}_0^{-1}]$$

d'où

$$\mathrm{T}^1(w.\xi)=\mathrm{A}(w).\mathrm{T}^1(\xi).\mathrm{A}(w)^{-1}.$$

## 4. Construction d'isomorphismes

$$\mathrm{Ext}^n_{\mathfrak{p},\mathrm{K_M}}(\mathrm{I}^\chi, \delta\times(\nu+\rho)\times 1) \underset{\sim}{\to} \mathrm{H}^n(\mathfrak{a}, \mathrm{Hom}_{\mathfrak{m},\mathrm{K_M}}(\mathrm{H}_0(\mathfrak{n}, \mathrm{I}^\chi)_{\delta,\nu+\rho}, \delta\times(\nu+\rho))).$$

4.1. On sait (*cf.* [1], I.6.5) qu'il existe une suite spectrale (de Hochschild-Serre) vérifiant

$$\mathrm{E}_2^{p,q}=\mathrm{H}^p(\mathfrak{m}+\mathfrak{a}, \mathrm{K_M}; \mathrm{H}^q(\mathfrak{n}, \mathrm{Hom}(\mathrm{I}^\chi, \delta\times(\nu+\rho)\times 1))) \Rightarrow \mathrm{Ext}^n_{\mathfrak{p},\mathrm{K_M}}(\mathrm{I}^\chi, \delta\times(\nu+\rho)\times 1). \tag{4.1}$$

Comme $\mathfrak{n}$ opère trivialement dans $\delta\times(\nu+\rho)\times 1$, on a des isomorphismes de $(\mathfrak{m}+\mathfrak{a}, \mathrm{K_M})$-modules

$$\mathrm{H}^q(\mathfrak{n}, \mathrm{Hom}(\mathrm{I}^\chi, \delta\times(\nu+\rho)\times 1))=\mathrm{Hom}(\mathrm{H}_q(\mathfrak{n}, \mathrm{I}^\chi), \delta\times(\nu+\rho)).$$

En vertu de [15], formule (2.29), le $\mathfrak{a}$-module $H_q(\mathfrak{n}, I^\chi)$ est somme directe finie de sous-modules propres généralisés que nous noterons $H_q(\mathfrak{n}, I^\chi)_{\mu+\rho}$ avec $\mu \in \mathfrak{a}_c^*$; si $\mu \neq \nu$ on a

$$H^p(\mathfrak{a}, \operatorname{Hom}(H_q(\mathfrak{n}, I^\chi)_{\mu+\rho}, \nu+\rho))=0 \qquad \forall p \geqq 0;$$

donc, dans l'expression (4.1), seul intervient le terme en $\nu+\rho$, *i.e.*

$$E_2^{p,q}=H^p(\mathfrak{m}+\mathfrak{a}, K_M; \operatorname{Hom}(H_q(\mathfrak{n}, I^\chi)_{\nu+\rho}, \delta\times(\nu+\rho))).$$

En vertu de [15], 8.4.6 (*voir* aussi [6], proposition 7), on a

$$H_q(\mathfrak{n}, I^\chi)_{\nu+\rho}=0 \qquad \forall q>0;$$

donc la suite spectrale dégénère et on obtient

$$(4.2) \quad \operatorname{Ext}^n_{\mathfrak{p}, K_M}(I^\chi, \delta\times(\nu+\rho)\times 1) \sim H^n(\mathfrak{m}+\mathfrak{a}, K_M; \operatorname{Hom}(H_0(\mathfrak{n}, I^\chi)_{\nu+\rho}, \delta\times(\nu+\rho))).$$

Ensuite le $(\mathfrak{m}, K_M)$-module $H_0(\mathfrak{n}, I^\chi)_{\nu+\rho}$ est somme directe de séries discrètes que nous noterons $\delta'$ (résultat de Vogan cité dans [6], proposition 6); or, en vertu d'un résultat non publié de Zuckerman et de Schmid, on a

$$H^n(\mathfrak{m}, K_M; \operatorname{Hom}(\delta', \delta))=0$$

sauf pour $\delta'=\delta$ et $n=0$; donc (4.2) devient

$$(4.3) \quad \operatorname{Ext}^n_{\mathfrak{p}, K_M}(I^\chi, \delta\times(\nu+\rho)\times 1) \sim H^n(\mathfrak{a}, \operatorname{Hom}_{\mathfrak{m}, K_M}(H_0(\mathfrak{n}, I^\chi)_{\delta, \nu+\rho}, \delta\times(\nu+\rho)))$$

où l'indice $\delta$ indique le sous-espace isotypique de type $\delta$.

4.2. Calcul explicite de l'isomorphisme (4.3).

Partons d'un $n$-cocycle $\Psi \in Z^n(\mathfrak{p}, K_M; \operatorname{Hom}(I^\chi, \delta\times(\nu+\rho)\times 1))$; par suite de la nullité de $E_2^{p,q}$ pour $q>0$, on peut supposer que $\Psi(U_1, \ldots, U_n)$ est nul dès que l'un des $U_i$ appartient à $\mathfrak{n}$; alors, du fait que $\Psi$ est un cocycle, pour $X_i+Y_i \in \mathfrak{m}+\mathfrak{a}$, $\Psi(X_1+Y_1, \ldots, X_n+Y_n)$ est nul sur $\mathfrak{n}.I$, donc définit une application de $H_0(\mathfrak{n}, I^\chi)$ vers $\delta\times(\nu+\rho)$; enfin l'image $\Psi'$ de $\Psi$ par (4.3) s'obtient en restreignant ceci, d'une part à $\Lambda^n \mathfrak{a}$, d'autre part à $H_0(\mathfrak{n}, I^\chi)_{\delta, \nu+\rho}$.

4.3. Cas où $\Psi$ est de la forme $T^{n,\chi}(\xi)'$ (notations (3.7)).

Le lemme 3.2 montre que $L^\chi$ passe au quotient en un $(\mathfrak{m}+\mathfrak{a}, K_M)$-morphisme surjectif

$$\tilde{L}^\chi: H_0(\mathfrak{n}, I^\chi)_{\delta, \nu+\rho} \to \delta\times(\nu+\rho);$$

(3.7) montre que l'image de $T^{n,\chi}(\xi)'$ par (4.3) est donnée par

$$(4.4) \qquad T^{n,\chi}(\xi)''(Y_1, \ldots, Y_n)=\langle \xi; Y_1, \ldots, Y_n\rangle . \tilde{L}^\chi.$$

## 5. Construction d'isomorphismes

$$H^n(\mathfrak{a}, \operatorname{Hom}_{\mathfrak{m}, K_M}(H_0(\mathfrak{n}, I^\chi)_{\delta, \nu+\rho}, \delta\times(\nu+\rho))) \to \operatorname{Ext}^n_{\mathscr{B}}(\mathsf{v}, \mathsf{v}).$$

Nous poserons, pour simplifier les notations :

$$D=\mathrm{Hom}_{\mathfrak{m},\, K_M}(H_0(\mathfrak{n}, I^{\chi})_{\delta,\, \nu+\rho}, \delta\times(\nu+\rho))$$

$$E=\mathrm{Hom}_{\mathfrak{m},\, K_M}(H_0(\mathfrak{n}, J^{\chi})_{\delta,\, \nu+\rho}, \delta\times(\nu+\rho))$$

$$F=\mathrm{Hom}_{\mathfrak{m},\, K_M}(\delta, H_0(\mathfrak{n}, J^{\chi})_{\delta,\, \nu+\rho}).$$

5.1. STRUCTURE DU $\mathfrak{a}$-MODULE D.

On sait (*voir* [6], proposition 7) que l'application naturelle

$$H_0(\mathfrak{n}, J^{\chi})_{\delta,\, \nu+\rho}\to H_0(\mathfrak{n}, I^{\chi})_{\delta,\, \nu+\rho}$$

est un isomorphisme; donc les $\mathfrak{a}$-modules D et E sont isomorphes; d'autre part on a évidemment

$$H_0(\mathfrak{n}, J^{\chi})_{\delta,\, \nu+\rho}\sim\delta\otimes F$$

d'où

$$E\sim\mathrm{Hom}(F, \nu+\rho);$$

en vertu de [6], théorème 2, on a

$$F\sim(\mathscr{A}\otimes_{\mathscr{B}}\mathbf{C}_{\nu})\otimes\mathbf{C}_{\rho}=(\mathrm{Ind}_{\mathscr{B}}^{\mathscr{A}}\mathbf{C}_{\nu})\otimes\mathbf{C}_{\rho};$$

donc

$$D\sim E\sim\mathrm{Hom}(\mathrm{Ind}_{\mathscr{B}}^{\mathscr{A}}\mathbf{C}_{\nu}, \mathbf{C}_{\nu}). \tag{5.1}$$

5.2. ISOMORPHISME $H^n(\mathfrak{a}, D)\underset{\sim}{\to}\mathrm{Ext}^n_{\mathscr{B}}(\nu, \nu)$.

La relation (5.1) entraîne

$$H^n(\mathfrak{a}, D)\sim\mathrm{Ext}^n_{\mathscr{A}}(\mathrm{Ind}_{\mathscr{B}}^{\mathscr{A}}\mathbf{C}_{\nu}, \mathbf{C}_{\nu});$$

comme $\mathscr{A}$ est un $\mathscr{B}$-module libre, le lemme de Shapiro pour les algèbres associatives s'applique (*cf.* [9], proposition C.7) et donne

$$H^n(\mathfrak{a}, D)\sim\mathrm{Ext}^n_{\mathscr{B}}(\nu, \nu). \tag{5.2}$$

5.3. DÉMONSTRATION DU THÉORÈME 1 (i)

Il suffit de juxtaposer les isomorphismes (3.1), (3.2), (4.3), (5.2).

5.4. CALCUL DE L'IMAGE DE $T^{n,\chi}(\xi)''$ (notations (4.4)) PAR L'ISOMORPHISME (5.2).

L'application $\tilde{L}^{\chi}$ de la formule (4.3) est un élément $\mathfrak{a}$-invariant non nul de D; par (5.1) il devient un élément $\mathfrak{a}$-invariant non nul de $\mathrm{Hom}(\mathrm{Ind}_{\mathscr{B}}^{\mathscr{A}}\mathbf{C}_{\nu}, \mathbf{C}_{\nu})$, c'est-à-dire une forme linéaire sur $\mathscr{A}$ de la forme $P\mapsto k^{\chi}.\ P(\nu)$ où $k^{\chi}$ est un scalaire non nul; (4.4) signifie que l'élément $T^{n,\chi}(\xi)''$, transporté dans $\mathrm{Ext}^n_{\mathfrak{a}}(\mathrm{Ind}^{\mathscr{A}}_{\mathscr{B}}\, C_\nu, C_\nu)$, est le $n$-cocycle $\Psi$ suivant :

$$\Psi(Y_1, \ldots, Y_n)(P)=k^\chi . \langle \xi; Y_1, \ldots, Y_n \rangle . P(\nu)$$

pour $Y_i \in \mathfrak{a}$, $P \in \mathscr{A}$; $\Psi$ se prolonge en un cocycle $\Psi' \in \mathrm{Ext}^n_{\mathscr{A}}(\mathrm{Ind}^{\mathscr{A}}_{\mathscr{B}}\, C_\nu, C_\nu)$ donné par

$$\Psi'(P_1, \ldots, P_n)(P)=k^\chi . \langle \xi; P_1, \ldots, P_n \rangle . P(\nu)$$

où $\langle \xi; P_1, \ldots, P_n \rangle$ a le sens suivant : si $\xi$ est un tenseur décomposé $\xi_1 \wedge \ldots \wedge \xi_n$, alors

$$\langle \xi; P_1, \ldots, P_n \rangle = \sum_{s \in S_n} \varepsilon_s . \langle (dP_1)_\nu, \xi_{s(1)} \rangle \ldots \langle (dP_n)_\nu, \xi_{s(n)} \rangle. \tag{5.3}$$

L'élément $\Psi''$ de $\mathrm{Ext}^n_{\mathscr{B}}(\nu, \nu)$ qui correspond à $\Psi$ par (5.2) est donné par

$$\begin{aligned}\psi''(Q_1, \ldots, Q_n) &= \Psi'(Q_1, \ldots, Q_n)(1)\\ &= k^\chi . \langle \xi; Q_1, \ldots, Q_n \rangle \qquad \forall\, Q_i \in \mathscr{B}.\end{aligned}$$

Finalement l'image $T^{n,\chi}(\xi)'''$ de $T^{n,\chi}(\xi)''$ par (5.2) est donnée par

$$T^{n,\chi}(\xi)'''(Q_1, \ldots, Q_n)=k^\chi . \langle \xi; Q_1, \ldots, Q_n \rangle. \tag{5.4}$$

## 6. **Démonstration du théorème 1** (iii).

Montrons d'abord que $\mathrm{Ker}\, T^{n,\chi}$ contient le second membre; prenons donc $\xi$ de la forme $\xi_1 \wedge \ldots \wedge \xi_n$ avec, par exemple, $\xi_n \in V_1$; (5.3) et (5.4) montrent que, pour $Q_1, \ldots, Q_n \in \mathscr{B}$ :

$$T^{n,\chi}(\xi)'''(Q_1, \ldots, Q_n)=k^\chi . \sum_{s \in S_n} \varepsilon_s . \langle (dQ_1)_\nu, \xi_{s(1)} \rangle \ldots \langle (dQ_n)_\nu, \xi_{s(n)} \rangle;$$

chacun des termes du second membre contient un facteur de la forme $\langle (dQ_i)_\nu, \xi_n \rangle$; la forme bilinéaire sur $\mathscr{B} \times V_1$ :

$$(Q_i, \xi_n) \mapsto \langle (dQ_i)_\nu, \xi_n \rangle$$

est invariante par $W^0_{\delta,\nu}$, donc nulle.

Démontrons l'inclusion inverse, à savoir que si $\xi$ appartient à $\Lambda^n V_0$ et est non nul, il existe $Q_1, \ldots, Q_n \in \mathscr{B}$ vérifiant $\langle \xi; Q_1, \ldots, Q_n \rangle \neq 0$ (on rappelle que $k^\chi$ est non nul). Prenons une base $Y_1, \ldots, Y_r$ de l'ensemble M des éléments de $\mathfrak{a}$ invariants par $W^0_{\delta,\nu}$; $V_0$ est le dual de cet espace $\Lambda^n V_0$ est celui de $\Lambda^n M$, donc il existe $i_1 < \ldots < i_n$ tels que

$$\langle \xi; Y_{i_1}, \ldots, Y_{i_n} \rangle \neq 0;$$

enfin il est clair que les $Y_{i_j}$ appartiennent à $\mathscr{B}$.

## 7. Démonstration du théorème 2.

(i) L'application $T^n$ est injective d'après le théorème 1 (iii), et donc bijective pour des raisons de dimension (théorème 1 (i) avec $R_{\delta,\nu}=\{1\}$).

(ii) résulte de la formule (1.1).

(iii) résulte du théorème 1 (ii).

(iv) résulte de ce que $\mathrm{Ext}^1_{g,K}(I, I)$ est le complexifié de sa partie hermitienne.

(v) Voir [12].

## 8. Démonstration du théorème 3

8.1. Démonstration du théorème 3 (i).

L'application $T^{n,\chi}$ est injective d'après le théorème 1 (iii), donc bijective pour des raisons de dimension (théorème 1 (i)).

8.2. Démonstration du théorème 3 (ii).

Fixons $\chi_1\in\hat{R}_{\delta,\nu}$ et écrivons

$$T^{n,\chi_1}: \Lambda^n\mathfrak{a}_c^* \to \mathrm{Ext}^n_{g,K}(I^{\chi_1}, I)=\bigoplus_{\chi_2}\mathrm{Ext}^n_{g,K}(I^{\chi_1}, I^{\chi_2});$$

pour tout $\chi\in\hat{R}_{\delta,\nu}$, tout $\xi\in(\Lambda^n\mathfrak{a}_c^*)_\chi$, et tout $w\in R_{\delta,\nu}$ on a, en vertu de la proposition 1

$$\chi(w).T^{n,\chi_1}(\xi)=\bigoplus_{\chi_2}(\chi_1^{-1}\chi_2)(w).T^{n,\chi_1}(\xi);$$

donc $T^{n,\chi_1}$ est en fait une bijection de $(\Lambda^n\mathfrak{a}_c^*)_\chi$ sur le sous-espace $\mathrm{Ext}^n_{g,K}(I^{\chi_1}, I^{\chi\chi_1})$.

8.3. Lemme. — *On peut identifier* $\mathrm{Ext}^n_{g,K}(I, I)$ *à l'ensemble des familles* $\xi=(\xi^{\chi_1,\chi_2})$ *avec* $\chi_1, \chi_2\in\hat{R}_{\delta,\nu}$ *et* $\xi^{\chi_1,\chi_2}\in(\Lambda^n\mathfrak{a}_c^*)_{\chi_1^{-1}\chi_2}$; *dans cette identification le cup-produit devient*

$$(\xi\smile\eta)^{\chi_1,\chi_2}=\sum_{\chi_3}\xi^{\chi_3,\chi_2}\wedge\eta^{\chi_1,\chi_3};$$

*enfin* $T^n$ *est donné par*

$$T^n(\zeta)^{\chi_1,\chi_2}=\zeta_{\chi_1^{-1}\chi_2}\qquad\forall\zeta\in\Lambda^n\mathfrak{a}_c^*.$$

*Démonstration :*

(*a*) Le numéro 8.2 dit que pour tout $\Phi\in\mathrm{Ext}^p_{g,K}(I^{\chi_1}, I^{\chi_2})$ il existe un unique $\xi\in(\Lambda^p\mathfrak{a}_c^*)_{\chi_1^{-1}\chi_2}$ vérifiant $T^p(\xi)|_{I^{\chi_1}}=\Phi$; de même pour tout $\Psi\in\mathrm{Ext}^q_{g,K}(I^{\chi_2}, I^{\chi_3})$ il existe un unique $\eta\in(\Lambda^q\mathfrak{a}_c^*)_{\chi_2^{-1}\chi_3}$ vérifiant $T^q(\eta)|_{I^{\chi_2}}=\Psi$; on a alors en vertu de (1.1)

$$T^q(\eta)\smile T^p(\xi)=T^{p+q}(\eta\wedge\xi)$$

d'où

$$\Psi \smile \Phi = \mathrm{T}^{p+q}(\eta \wedge \xi)\big|_{\mathrm{I}^{\chi_1}}.$$

(*b*) Soit maintenant $\Phi$ et $\Psi$ des éléments de $\mathrm{Ext}^p_{\mathfrak{g},\,\mathrm{K}}(\mathrm{I}, \mathrm{I})$ et $\mathrm{Ext}^q_{\mathfrak{g},\,\mathrm{K}}(\mathrm{I}, \mathrm{I})$; on peut écrire

$$\Phi = \sum_{\chi_1,\, \chi_2} \Phi^{\chi_1,\, \chi_2}, \quad \Psi = \sum_{\chi_1,\, \chi_2} \Psi^{\chi_1,\, \chi_2};$$

d'après (*a*) il leur correspond des éléments

$$\xi^{\chi_1,\, \chi_2} \in (\Lambda^p\, \mathfrak{a}_c^*)_{\chi_1^{-1}\chi_2}, \quad \eta^{\chi_1,\, \chi_2} \in (\Lambda^q\, \mathfrak{a}_c^*)_{\chi_1^{-1}\chi_2}$$

auxquels il suffit d'appliquer la partie *a*).

8.4. Démonstration du théorème 3 (iii).

La famille $\xi$ étant définie comme au lemme 8.3, il sera commode de poser

$$\xi_\chi^{\chi_1} = \xi^{\chi_1,\, \chi\chi_1} \in (\Lambda^n\, \mathfrak{a}_c^*)_\chi$$

puis

$$\xi^{\chi_1} = \sum_\chi \xi_\chi^{\chi_1} \in \wedge^n\, \mathfrak{a}_c^*;$$

autrement dit $\mathrm{Ext}^*_{\mathfrak{g},\,\mathrm{K}}(\mathrm{I}, \mathrm{I})$ s'identifie à l'ensemble des applications de $\hat{\mathrm{R}}_{\delta,\,\nu}$ dans $\Lambda^*\, \mathfrak{a}_c^*$, le cup-produit s'écrivant alors

$$(\xi \smile \eta)_\chi^{\chi_1} = \sum_{\chi_2} \xi^{\chi_1\chi_2}_{\chi_2^{-1}\chi} \wedge \eta^{\chi_1}_{\chi_2}. \tag{8.1}$$

D'autre part le produit croisé $\Lambda^*\, \mathfrak{a}_c^* \rtimes \mathrm{R}_{\delta,\,\nu}$ est l'ensemble des applications $f$ de $\mathrm{R}_{\delta,\,\nu}$ dans $\Lambda^*\, \mathfrak{a}_c^*$ avec le produit

$$(f * g)(w) = \sum_{w'} f(w') \wedge w'.g(w'^{-1}w);$$

définissons une application U de ce produit croisé dans $\mathrm{Ext}^*_{\mathfrak{g},\,\mathrm{K}}(\mathrm{I}, \mathrm{I})$ par

$$\mathrm{U}(f)^{\chi_1} = \hat{f}(\chi_1) = \sum_w \chi_1(w).f(w)$$

soit encore

$$\mathrm{U}(f)_\chi^{\chi_1} = \sum_w \chi_1(w).f(w)_\chi;$$

un calcul facile utilisant (8.1) montre que

$$\mathrm{U}(f * g)_\chi^{\chi_1} = (\mathrm{U}(f) \smile \mathrm{U}(g))_\chi^{\chi_1}.$$

8.5. LEMME. — *Soient* $\Phi$ *un élément de* $\operatorname{Ext}^1_{\mathfrak{g}, \mathrm{K}}(\mathrm{I}, \mathrm{I})$ *et* $\xi$ *la famille associée à* $\Phi$ *par le lemme* 8.3*; alors* $\Phi$ *appartient à* $\operatorname{Ext}^1_{\mathfrak{g}, \mathrm{K}}(\mathrm{I}, \mathrm{I})_{\mathrm{irr}}$ *si et seulement si pour toute partie* J *de* $\hat{\mathrm{R}}_{\delta, \nu}$ *distincte de* $\varnothing$ *et de* $\hat{\mathrm{R}}_{\delta, \nu}$*, il existe* $\chi_1 \in \mathrm{J}$ *et* $\chi_2 \in \hat{\mathrm{R}}_{\delta, \nu} \setminus \mathrm{J}$ *vérifiant* $\xi^{\chi_1, \chi_2} \neq 0$.

*Démonstration.* — Comme les sous-modules simples $\mathrm{I}^\chi$ de I sont deux à deux non isomorphes, les sous-espaces de I stables par les $\mathrm{U}(\mathrm{X})$, $\mathrm{X} \in \mathfrak{g}$, et non triviaux sont exactement les sommes directes $\bigoplus_{\chi \in \mathrm{J}} \mathrm{I}^\chi$, $\mathrm{J} \neq \varnothing$, $\hat{\mathrm{R}}_{\delta, \nu}$; si maintenant $\varphi$ est un 1-cocycle de la classe $\Phi$, ce sous-espace sera stable par les $\varphi(\mathrm{X})$ si et seulement si $\varphi^{\chi_1, \chi_2}$ est nul pour tous $\chi_1 \in \mathrm{J}$, $\chi_2 \in \hat{\mathrm{R}}_{\delta, \nu} \setminus \mathrm{J}$.

8.6. LEMME. — *Un élément* $\zeta$ *de* $\mathfrak{a}_c^*$ *appartient à* $(\mathfrak{a}_c^*)_{\mathrm{irr}}$ *si et seulement si, notant* $\zeta_\chi$ *la composante de* $\zeta$ *dans* $(\mathfrak{a}_c^*)_\chi$*, le sous-groupe* $\Gamma$ *de* $\hat{\mathrm{R}}_{\delta, \nu}$ *engendré par les* $\chi$ *vérifiant* $\zeta_\chi \neq 0$ *est égal à* $\hat{\mathrm{R}}_{\delta, \nu}$ (1).

*Démonstration.* — Condition nécessaire : supposons $\Gamma$ distinct de $\hat{\mathrm{R}}_{\delta, \nu}$; prenons $\chi_1 \in \Gamma$, $\chi_2 \in \hat{\mathrm{R}}_{\delta, \nu} \setminus \Gamma$; alors $\chi_1^{-1} \chi_2 \in \hat{\mathrm{R}}_{\delta, \nu} \setminus \Gamma$; puis, d'après le lemme 8.3

$$\mathrm{T}^1(\zeta)^{\chi_1, \chi_2} = \zeta_{\chi_1^{-1} \chi_2} = 0$$

donc

$$\mathrm{T}^1(\zeta) \notin \operatorname{Ext}^1_{\mathfrak{g}, \mathrm{K}}(\mathrm{I}, \mathrm{I})_{\mathrm{irr}}.$$

Condition suffisante : supposons-la réalisée et prenons $\mathrm{J} \neq \varnothing$, $\hat{\mathrm{R}}_{\delta, \nu}$; il existe $\chi \in \hat{\mathrm{R}}_{\delta, \nu}$ tel que $\chi . \mathrm{J} \neq \mathrm{J}$; par hypothèse $\chi$ s'écrit $\chi_1 \ldots \chi_r$ avec $\zeta_{\chi_i} \neq 0$; donc il existe $i$ tel que $\chi_i . \mathrm{J} \neq \mathrm{J}$, donc il existe $\chi' \in \mathrm{J}$ tel que $\chi'' = \chi_i \chi' \in \hat{\mathrm{R}}_{\delta, \nu} \setminus \mathrm{J}$; enfin

$$\mathrm{T}^1(\zeta)^{\chi', \chi''} = \zeta_{\chi'^{-1} \chi''} = \zeta_{\chi_i} \neq 0.$$

8.7. LEMME. — *L'application*

$$(\mathfrak{a}_c^*)_{\mathrm{irr}} / \mathrm{R}_{\delta, \nu} \to \operatorname{Ext}^1_{\mathfrak{g}, \mathrm{K}}(\mathrm{I}, \mathrm{I})_{0, \mathrm{irr}} / \mathscr{C}^*$$

*est injective.*

*Démonstration.* — Prenons $\zeta$, $\eta \in (\mathfrak{a}_c^*)_{\mathrm{irr}}$, $\mathrm{U} \in \mathscr{C}^*$ et supposons que l'on ait

$$\mathrm{T}^1(\eta) = \mathrm{U} . \mathrm{T}^1(\zeta) . \mathrm{U}^{-1}; \tag{8.2}$$

on doit montrer que $\eta$ appartient à $\mathrm{R}_{\delta, \nu} . \zeta$. L'opérateur U a des composantes $u(\chi) \in \mathbf{C}^*$ dans les divers $\mathrm{I}^\chi$, et on peut supposer que $u(1) = 1$; (8.2) s'écrit

$$\mathrm{T}^1(\eta)^{\chi_1, \chi_2} = (u(\chi_1))^{-1} . u(\chi_2) . \mathrm{T}^1(\zeta)^{\chi_1, \chi_2}$$

(1) Ou encore si et seulement si le stabilisateur de $\zeta$ dans $\mathrm{R}_{\delta \nu}$ est trivial.

ou encore

$$\eta_\chi = (u(\chi_1))^{-1} . u(\chi_1 \chi) . \zeta_\chi; \tag{8.3}$$

il suffit maintenant de montrer que $u$ est un caractère, car alors il sera de la forme $u(\chi) = \langle \chi, w \rangle$ avec $w \in R_{\delta, \nu}$. Notons E l'ensemble des $\chi$ vérifiant

$$u(\chi_1 \chi) = u(\chi_1) . u(\chi) \qquad \forall \chi_1;$$

il est immédiat que E est un sous-groupe; (8.3) montre qu'il contient les $\chi$ pour lesquels $\zeta_\chi \neq 0$; le lemme 8.6 montre enfin que $E = \hat{R}_{\delta, \nu}$.

8.8. Démonstration de la surjectivité de l'application

$$(\mathfrak{a}_c^*)_{\mathrm{irr}}/R_{\delta, \nu} \to \mathrm{Ext}^1_{\mathfrak{g}, K}(I, I)_{0, \mathrm{irr}}/\mathscr{C}^*.$$

En utilisant les notations de 8.3 on doit montrer que si une famille

$$\xi = (\xi^{\chi_1, \chi_2}), \ \chi_1, \chi_2 \in \hat{R}_{\delta, \nu}, \ \xi^{\chi_1, \chi_2} \in (\mathfrak{a}_c^*)_{\chi_1^{-1} \chi_2}$$

vérifie les deux conditions suivantes :

$$\text{(C)} \qquad \sum_{\chi_3} \xi^{\chi_3, \chi_2} \wedge \xi^{\chi_1, \chi_3} = 0 \qquad \forall \chi_1, \chi_2.$$

(C′) pour toute partie J de $\hat{R}_{\delta, \nu}$ distincte de $\varnothing$ et de $\hat{R}_{\delta, \nu}$, il existe $\chi_1 \in J$, $\chi_2 \in \hat{R}_{\delta, \nu} \setminus J$ vérifiant $\xi^{\chi_1, \chi_2} \neq 0$ alors il existe des familles $(\zeta_\chi)$, $(u_\chi)$ telles que

$$\zeta_\chi \in (\mathfrak{a}_c^*)_\chi, \ u_\chi \in \mathbf{C}^*, \ \xi^{\chi_1, \chi_2} = u_{\chi_1}^{-1} . u_{\chi_2} . \zeta_{\chi_1^{-1} \chi_2}.$$

La démonstration de cette assertion sera divisée en deux lemmes; nous écrirons pour alléger les notations A au lieu de $\hat{R}_{\delta, \nu}$; $a, b, c, \ldots, x, y, z, \ldots$ au lieu de $\chi, \chi_1, \chi_2, \ldots$; E au lieu de $\mathfrak{a}_c^*$.

8.9. Lemme. — *On se donne :*

– *un groupe* A *isomorphe à une puissance de* $\mathbf{Z}_2$;

– *un espace vectoriel complexe de dimension finie* E;

– *une décomposition en somme directe* $E = \bigoplus_{a \in A} E_a$ *où certains* $E_a$ *peuvent être nuls;*

– *une famille* $(x_{a, b})$ *avec* $a, b \in A$, $x_{a, b} \in E_{ab}$ *vérifiant les conditions suivantes :*

(C) *pour toute partie* J *de* A *distincte de* $\varnothing$ *et de* A, *il existe* $a \in J$, $b \in A \setminus J$ *vérifiant* $x_{a, b} \neq 0$

$$\text{(C′)} \qquad \sum_b x_{a, b} \wedge x_{b, c} = 0 \qquad \forall a, c \in A.$$

*Alors il existe des éléments* $y_a \in E_a$ *et une fonction complexe* $f$ *sur* $A \times A$ *vérifiant les conditions suivantes :*

– $x_{a, b} = f(a, b) . y_{ab}$

– $f(a, b) . f(b, c) = f(a, abc) . f(abc, c) \qquad \forall a, b, c.$

*Démonstration :*

(*a*) On a :

(8.4) $$x_{a,b} \wedge x_{b,a} = 0 \qquad \forall a, b.$$

En effet la condition (C′) avec $a=c$ donne $\sum_b x_{a,b} \wedge x_{b,a}=0$; mais $x_{a,b}$ et $x_{b,a}$ appartiennent à $E_{ab}$ et la somme $\sum_b \Lambda^2 E_{ab}$ est directe; d'où l'assertion.

(*b*) On a

(8.5) $$x_{a,b} \wedge x_{b,c} + x_{a,abc} \wedge x_{abc,c} = 0 \qquad \forall a, b, c.$$

En effet si $a=c$ cela résulte de (*a*); supposons donc $a \neq c$; dans la condition (C′) on peut grouper les termes en $b$ et en $abc$ :

$$x_{a,b} \wedge x_{b,c} + x_{a,abc} \wedge x_{abc,c} \in E_{ab} \wedge E_{bc};$$

la somme $\sum_b E_{ab} \wedge E_{bc}$ obtenue en prenant un seul élément de chaque couple $(b, abc)$ est directe; d'où l'assertion.

(*c*) On a

(8.6) $$x_{a,a} = x_{1,1} \qquad \forall a.$$

En effet notons J l'ensemble des $a$ ayant cette propriété et supposons $J \neq A$; d'après la condition (C) il existe $a \in J$, $c \in A \setminus J$ tels que $x_{a,c} \neq 0$; écrivons (8.5) avec $b=a$ :

$$(x_{a,a} - x_{c,c}) \wedge x_{a,c} = 0;$$

$x_{a,a} - x_{c,c}$ et $x_{a,c}$ sont non nuls et appartiennent respectivement à $E_1$ et $E_{ac}$, qui ont une intersection nulle; d'où contradiction.

(*d*) Montrons que pour tout $b \neq 1$ les éléments $x_{a,ab}$ sont tous proportionnels, et en outre tous nuls ou tous non nuls.

Montrons d'abord que $x_{d,bd}=0$ pour un $d$ implique $x_{a,ab}=0$ pour tout $a$; notons J l'ensemble des $a$ ayant cette propriété et supposons $J \neq A$; il existe $a \in J$ et $c \in A \setminus J$ tels que $x_{a,c} \neq 0$; écrivons (8.5) en remplaçant $a$, $b$, $c$ respectivement par $a$, $c$, $bc$ :

(8.7) $$x_{a,c} \wedge x_{c,bc} + x_{a,ab} \wedge x_{ab,bc} = 0;$$

comme $a \in J$, $x_{a,ab}=0$; comme $c \in A \setminus J$, $x_{c,bc} \neq 0$; puis $x_{a,c} \in E_{ac}$, $x_{c,bc} \in E_b$; comme $x_{a,ab} = 0 \neq x_{a,c}$ on a $c \neq ab$, d'où $b \neq ac$, $E_{ac}$ et $E_b$ ont une intersection nulle, $x_{a,c} \wedge x_{c,bc}$ est non nul, ce qui contredit (8.7).

Montrons maintenant que si $x_{1,b}$ est non nul, $x_{a,ab}$ lui est proportionnel pour tout $a$; notons J l'ensemble des $a$ ayant cette propriété et supposons $J \neq A$; il existe $a \in J$ et $c \in A \setminus J$ tels que $x_{a,c} \neq 0$; écrivons (8.5) en remplaçant $a$, $b$, $c$ respectivement par $a$, $ab$, $bc$ :

$$x_{a,\,ab} \wedge x_{ab,\,bc} = x_{c,\,bc} \wedge x_{a,\,c}; \tag{8.8}$$

d'après ($a$), $x_{ab,\,a}$ est proportionnel à $x_{a,\,ab}$, donc non proportionnel à $x_{c,\,bc}$, ce qui implique $c \neq ab$, donc $b \neq ac$; $E_b$ et $E_{ac}$ ont une intersection nulle; dans la relation (8.8) $x_{a,\,ab}$ et $x_{c,\,bc}$ sont dans $E_b$ et non proportionnels, $x_{ab,\,bc}$ et $x_{a,\,c}$ sont dans $E_{ac}$, $x_{a,\,c}$ est non nul; cela contredit (8.8).

($e$) Posons

$$A_1 = \{a \mid x_{b,\,ab} \neq 0 \ \forall b\};$$

pour $a \in A \setminus A_1$ on posera $y_a = 0$, $f(b,\,ab) = 0 \ \forall b$; pour $a \in A_1$ on posera $y_a = x_{1,\,a}$ et on définira $f(b,\,ab)$ par $x_{b,\,ab} = f(b,\,ab).\,y_a$; il sera alors clair que $f$ et les $y_a$ vérifient les conditions de l'énoncé.

8.10. LEMME. — *On se donne un groupe* A *isomorphe à une puissance de* $\mathbf{Z}_2$ *et une fonction complexe* $f$ *sur* $A \times A$ *vérifiant les conditions suivantes :*

(C) *pour toute partie* J *de* A *distincte de* $\varnothing$ *et de* A, *il existe* $x \in J$ *et* $y \in A \setminus J$ *vérifiant* $f(x,\,y) \neq 0$

$$f(x,\,y).\,f(y,\,z) = f(x,\,xyz).\,f(xyz,\,z) \qquad \forall x,\,y,\,z \in A. \tag{Z}$$

*Alors il existe des fonctions complexes* $g$ *et* $h$ *sur* A *vérifiant*

$$g(1) = 1, \qquad g(x) \neq 0 \quad \forall x, \qquad f(x,\,y) = g(x)^{-1}.\,g(y).\,h(xy).$$

La démonstration est donnée en Appendice.

8.11. DÉMONSTRATION DE LA SURJECTIVITÉ DE L'APPLICATION

$$(i\,\mathfrak{a}^*)_{\mathrm{irr}}/R_{\delta,\,\nu} \to \mathrm{Ext}^1_{\mathfrak{g},\,K}(I,\,I)_{0,\,h,\,\mathrm{irr}}/\mathscr{C}^u.$$

Du fait que $T^1$ est $\mathbf{C}$-linéaire et que $T^1(\xi)$ est hermitien lorsque $\xi \in i\,\mathfrak{a}^*$, il résulte que l'on a

$$T^1(\xi)^* = T^1(-\overline{\xi}),$$

puis qu'une famille $\xi$ (avec les notations du lemme 8.3) représente un élément hermitien de $\mathrm{Ext}^1_{\mathfrak{g},\,K}(I,\,I)$ si et seulement si l'on a

$$\xi^{\chi_1,\,\chi_2} = -\overline{\xi^{\chi_2,\,\chi_1}}.$$

Ensuite, avec les notations du lemme 8.9, si $x_{a,\,b} = -\overline{x_{b,\,a}}$, on peut choisir les $y_a$ dans $i\,\mathfrak{a}^*$; alors $f(a,\,b) = \overline{f(b,\,a)}$; enfin, avec les notations du lemme 8.10, il suffit de montrer que si $f$ vérifie cette relation, $g$ est de module 1 et $h$ est réelle; or on a

$$0 \leqq f(x,\,y).\,f(y,\,x) = h(xy)^2$$

d'où résulte que $h$ est réelle; pour montrer que $g$ est de module 1, on remarque que

$$|g(x)|^{-1}.|g(y)|.|h(xy)|=|f(x, y)|=|f(y, x)|=|g(y)|^{-1}.|g(x)|.|h(xy)|$$

d'où $|g(x)|=|g(y)|$ si $f(x, y) \neq 0$; enfin on applique la condition $(C_J)$ en prenant pour J l'ensemble des $x$ vérifiant $|g(x)|=1$.

8.12. DÉMONSTRATION DU THÉORÈME 3 (v).

En vertu du théorème 1 (ii), tout élément de la forme $T^1(\xi)$ avec $\xi \in \mathfrak{a}_c^*$ s'obtient en dérivant une déformation $U_{P, \delta, \nu(t)}$; alors tout élément de la forme $S.T^1(\xi).S^{-1}$ avec $S \in \mathscr{C}^*$ s'obtient en dérivant la déformation $S.U_{P, \delta, \nu(t)}.S^{-1}$. Supposons maintenant $\xi \in i\mathfrak{a}^*$; alors on peut prendre $\nu(t) \subset i\mathfrak{a}^*$ et $U_{P, \delta, \nu(t)}$ sera unitaire; enfin on peut supposer S unitaire, alors $S.U_{P, \delta, \nu(t)}.S^{-1}$ est aussi unitaire.

## APPENDICE

### Démonstration homotopique du lemme 8.10

par J. Soto-Andrade

1. TRADUCTION DU LEMME 8.10 EN TERMES DE GRAPHES DE CAYLEY

Soit $f$ une fonction vérifiant les hypothèses du lemme 8.10.

LEMME 1. — *Pour chaque* $u \in A$, *posons* $\Delta_u=\{(x, xu) \mid x \in A\}$. *Alors* $\operatorname{Supp} f=\bigcup_{u \in S} \Delta_u$, *pour une certaine partie* S *de* A.

*Démonstration.* — Supposons $f(x_0, x_0 u) \neq 0$. On veut montrer que $f(y, yu) \neq 0$ pour tout $y \in A$. Posons $J=\{z \in A \mid f(z, zu)=0\}$. Alors $J \subsetneqq A$ car $x_0 \notin J$. Si $J \neq \varnothing$, on aurait, par (C), $f(x, y) \neq 0$ pour $x \in J$, $y \in A-J$ convenable. Mais alors, par (Z), il s'ensuit que

$$0=f(x, xu)\, f(xu, yu)=f(x, y)\, f(y, yu) \neq 0,$$

d'où $J=\varnothing$, comme voulu.

C.Q.F.D.

Notons $G_f$ le graphe d'ensemble de sommets A, dont les arêtes sont les parties à deux éléments $\{x, y\} \subset A$ telles que $f(x, y) \neq 0$. Il est alors clair que l'hypothèse (C) sur $f$ équivaut à chacune des conditions suivantes.

(C′) le graphe $G_f$ est connexe;

(C″) la partie S engendre le groupe A.

On peut donc reformuler le lemme 8.10 comme suit.

LEMME 8.10 *bis*. — *Soit* A *un groupe isomorphe à une puissance de* $\mathbf{Z}/2\mathbf{Z}$ *et* S *un ensemble générateur de* A. *Soit $f$ une fonction complexe jamais nulle sur l'ensemble* $\mathfrak{a}_S$ *des arêtes du graphe de Cayley orienté* $G_S$ *de* A *associé à* S, *telle que*

(Z) $\qquad f(x, xu)\, f(xu, xuv)=f(x, xv)\, f(xv, xvu) \qquad (x \in A,\ u, v \in S).$

*Alors il existe une fonction complexe h sur* A *et une fonction complexe (jamais nulle) g sur* S *telles que*

$$f(x, y)=\frac{g(y)}{g(x)}h\left(\frac{y}{x}\right) \qquad ((x, y)\in \mathfrak{a}_S).$$

Rappelons que le *graphe de Cayley orienté* $G_S$ *de* A *associé à* S a pour ensemble de sommets, l'ensemble A, et pour ensemble $\mathfrak{a}_S$ d'arêtes, l'ensemble des $(x, y)\in A\times A$ tels que $(y/x)\in S$.

Il sera commode de reformuler encore notre lemme à l'aide des notations suivantes.

Pour $a=(x, y)\in \mathfrak{a}_S$, on appelle *type* de $a$ et l'on note $\tau(a)$, l'élément $(y/x)\in S$. Pour une fonction complexe jamais nulle $g$ sur A, on pose

$$(\partial g)(x, y)=\frac{g(y)}{g(x)} \qquad (x, y\in A).$$

On désigne par $\mathscr{Z}$ le groupe multiplicatif de toutes les fonctions $f: \mathfrak{a}_S\to \mathbf{C}^\times$ vérifiant (Z) et par $\mathscr{B}$ le groupe multiplicatif de toutes les fonctions complexes sur $\mathfrak{a}_S$ qui sont de la forme $(\partial g).(h\circ\tau)$, où $g: A\to \mathbf{C}^\times$ et $h: S\to \mathbf{C}^\times$.

Il est clair que $\mathscr{B}\subset\mathscr{Z}$. *Il s'agit de démontrer que* $\mathscr{Z}\subset\mathscr{B}$, d'où $\mathscr{Z}=\mathscr{B}$.

2. Schéma de la démonstration de $\mathscr{Z}\subset\mathscr{B}$.

L'idée de la démonstration est de décomposer $f\in\mathscr{Z}$ en parties symétrique et antisymétrique, au sens suivant.

Pour toute fonction complexe $f$ jamais nulle sur $\mathfrak{a}_S$, on pose

$$\check{f}(x, y)=f(y, x) \qquad \left(\frac{y}{x}\in S\right)$$

et

$$f^+=f.\check{f},\ f^-=f/\check{f}.$$

Il est clair que si $f\in\mathscr{Z}$, alors il en est de même de $\check{f}$, $f^+$, $f^-$ et $f^2=f^+.f^-$.

Pour $f\in\mathscr{Z}$, on établit ci-dessous que $f^+$, $f^-\in\mathscr{B}$, d'où $f^2\in\mathscr{B}$. Autrement dit, on prouve que $\mathscr{Z}^2\in\mathscr{B}$. Comme il n'est pas clair *a priori* que $\mathscr{Z}^2=\mathscr{Z}$, on remarque que, évidemment, $\mathscr{B}^2=\mathscr{B}$ et donc que $\mathscr{Z}^2=\mathscr{B}^2$. On est ainsi ramené au cas $f^2=1$, où l'on achève la démonstration par une analyse directe, en se ramenant tout d'abord au cas symétrique.

3. Démonstration de : $f\in\mathscr{Z}\Rightarrow f^+\in\mathscr{B}$.

Lemme 2. — *Pour tout* $f\in\mathbb{Z}$, *on a*

$$f(x, xu)f(xu, x)=f(y, yu)f(yu, y) \qquad (x, y\in A,\ u\in S).$$

*Démonstration.* — Pour $x\in A$ et $s\in S$ quelconque, on a, par (Z),

$$f(x, xu)f(xu, xus)=f(x, xs)f(xs, xsu)$$

et aussi

$$f(xu, xus)\, f(xus, xs) = f(xu, x)\, f(x, xs)$$

d'où

$$\frac{f(x, xu)}{f(xsu, xs)} = \frac{f(xs, xsu)}{f(xu, x)} \qquad (x \in \mathrm{A},\ u,\ s \in \mathrm{S}),$$

c'est-à-dire

$$f(x, xu)\, f(xu, x) = f(xs, xsu)\, f(xsu, xs) \qquad (x \in \mathrm{A},\ u,\ s \in \mathrm{S}).$$

Comme tout $y \in \mathrm{A}$ s'écrit $y = xs_1 \ldots s_m$ pour $s_1, \ldots, s_m \in \mathrm{S}$ convenables, le lemme s'ensuit aussitôt.

C.Q.F.D.

COROLLAIRE. — *Pour tout* $f \in \mathscr{Z}$, *on a*

$$f^+ = h \circ \tau$$

*pour une fonction* $h : \mathrm{S} \to \mathbf{C}^\times$ *convenable. En particulier* $f^+ \in \mathscr{B}$.

4. DÉMONSTRATION DE : $f \in \mathscr{Z} \Rightarrow f^- \in \mathscr{B}$.

DÉFINITION. — *Si* $\gamma = (x_1, \ldots, x_n)$ (où $(x_i, x_{i+1}) \in \mathfrak{a}_\mathrm{S}$, $1 \leqq i \leqq n-1$) est *un chemin quelconque dans le graphe de Cayley* $\mathrm{G_S}$ *et* $\varphi$ *est une fonction complexe sur* $\mathfrak{a}_\mathrm{S}$, *on pose*

$$\tilde{\varphi}(\gamma) = \varphi(x_1, x_2)\, \varphi(x_2, x_3) \ldots \varphi(x_{n-1}, x_n).$$

*Remarque.* — Pour $f \in \mathscr{Z}$ on a

$$\tilde{f}(x, xu, xuv) = \tilde{f}(x, xv, xvu) \qquad (x \in \mathrm{A},\ u,\ v \in \mathrm{S}),$$

ce qui peut s'interpréter comme une propriété d'invariance par certaines déformations de chemins. Cette propriété suffit en fait à entraîner des propriétés d'invariance plus générales (*cf.* lemmes ci-dessous).

LEMME 3. — *Soient* $s_1, s_2, \ldots, s_m \in \mathrm{S}$ *tels que* $s := s_1 \ldots s_m \in \mathrm{S}$ *et soit* $\varphi \in \mathscr{Z}$. *Alors on a, quel que soit* $x \in \mathrm{A}$,

$$\tilde{\varphi}(x, xs_1, xs_1 s_2, \ldots, xs, x) = \tilde{\varphi}(xs_1 \ldots s_i, xs_1 \ldots s_{i+1}, \ldots, xs_1 \ldots s_{i-1})$$
$$= \tilde{\varphi}(xs, xs_2 \ldots s_m, \ldots, x, xs)$$

*pour* $1 \leqq i \leqq m$.

*Démonstration.* — Il suffit de remplacer successivement le facteur $\tilde{\varphi}(xs, x, xs_1)$ par $\tilde{\varphi}(xs, xs_2 \ldots s_m, xs_1)$, $\tilde{\varphi}(xs_2 \ldots s_m, xs_1, xs_1 s_2)$ par $\tilde{\varphi}(xs_2 \ldots s_m, xs_3 \ldots s_m, xs_1 s_2)$, et ainsi de suite, jusqu'à $\tilde{\varphi}(xs_m, xs_1 \ldots s_{m-1}, xs)$ par $\tilde{\varphi}(xs_m, x, xs)$, à l'aide de la propriété (Z).

C.Q.F.D.

LEMME 4. — *Soient* $s_1, \ldots, s_m \in \mathrm{S}$ *tels que* $s := s_1 \ldots s_m \in \mathrm{S}$ *et* $\varphi \in \mathscr{Z}$. *Alors on a*

$$\tilde{\varphi}(x, xs_1, xs_1 s_2, \ldots, xs, x) = \tilde{\varphi}(x, xs, xs_1 \ldots s_{m-1}, \ldots, xs_1, x)$$

*quel que soit* $x \in \mathrm{A}$.

*Démonstration.* — D'après le lemme 3, on a

$$\tilde{\varphi}(x, xs_1, \ldots, x) = \tilde{\varphi}(x, xs, xs_2 \ldots s_m, \ldots, xs_m, x).$$

Or, par des applications successives de (Z), on obtient

$$\begin{aligned}\tilde{\varphi}(xs, xs_2 \ldots s_m, xs_3 \ldots s_m, xs_m, x) &= \varphi(xs, xs_1 \ldots s_{m-1}, xs_2 \ldots s_{m-1}, \ldots, xs_{m-1}, x)\\ &= \tilde{\varphi}(xs, xs_1 \ldots s_{m-1}, xs_1 \ldots s_{m-2}, xs_2 \ldots s_{m-2}, \ldots, xs_{m-2}, x)\\ &= \tilde{\varphi}(xs, xs_1 \ldots s_{m-1}, xs_1 \ldots s_{m-2}, \ldots, xs_1, x).\end{aligned}$$

C.Q.F.D.

LEMME 5. — *Pour* $f \in \mathscr{Z}$, *la fonction* $\tilde{f}^-$ *vaut* 1 *sur tous les lacets du graphe* $\mathrm{G_S}$ *et par conséquent, pour tout* $x, y \in \mathrm{A}$, $\tilde{f}^-(\gamma) = \tilde{f}^-(\gamma')$ *quels que soient les chemins* $\gamma$ *et* $\gamma'$ *joignant* $x$ *à* $y$ *dans* $\mathrm{G_S}$.

*Démonstration.* — Le lemme 4 montre que si $\delta = (x_0, x_1, \ldots, x_m, x_0)$ est un lacet dans $\mathrm{G_S}$, alors $f(\delta) = f(\check{\delta})$, où $\check{\delta}$ désigne le lacet opposé à $\delta$, autrement dit

$$f(x_0, x_1) f(x_1, x_2) \ldots f(x_m, x_0) = f(x_0, x_m) \ldots f(x_2, x_1) f(x_1, x_0),$$

c'est-à-dire

$$\tilde{f}^-(\delta) = f^-(x_0, x_1) f^-(x_1, x_2) \ldots f^-(x_m, x_0) = 1,$$

comme voulu. Enfin, si $\gamma$ et $\gamma'$ sont deux lacets dans $\mathrm{G_S}$ joignant $x$ à $y$, il suffit de remarquer que $\delta = \gamma' \check{\gamma}$ est un lacet en $x$ et par conséquent

$$1 = \tilde{f}^-(\gamma' \check{\gamma}) = \tilde{f}^-(\gamma') \tilde{f}^-(\check{\gamma}) = \tilde{f}^-(\gamma') (\tilde{f}^-(\gamma))^{-1}.$$

C.Q.F.D.

COROLLAIRE. — *Pour* $f \in \mathscr{Z}$, *on a* $f^- = \partial g$, *où* $g : \mathrm{A} \to \mathbf{C}^\times$ *est définie par*

$$g(x) = \tilde{f}^-(\gamma) \qquad (x \in \mathrm{A}),$$

*où* $\gamma$ *est un chemin quelconque dans* $\mathrm{G_S}$ *joignant l'élément neutre* $e$ *de* $\mathrm{A}$ *à* $x$.

En effet, il suffit de remarquer que, $g$ étant bien définie en vertu du lemme 5, on a, pour $(x, y) \in \mathfrak{a}_\mathrm{S}$ et un chemin quelconque $\gamma = (e, \ldots, x)$ joignant $e$ et $x$ dans $\mathrm{G_S}$,

$$\tilde{f}^-(e, \ldots, x, y) = \tilde{f}^-(x, y),$$

c'est-à-dire

$$g(y)=g(x)\,f^{-}(x, y),$$

comme annoncé.

5. RÉDUCTION OU CAS $f^2=1$.

Si $f\in\mathscr{X}$, on a, d'après les corollaires ci-dessus,

$$f^2=f^{+}.f^{-}=(h\circ\tau).(\partial g),$$

pour $h\colon \mathrm{S}\to\mathbf{C}^{\times}$ et $g\colon \mathrm{A}\to\mathbf{C}^{\times}$ convenables.

Comme évidemment $h$ (resp. $g$) admet une racine carrée $h'$ (resp. $g'$), on a $f=[(h'\circ\tau).(\partial g')].\varepsilon$, où $\varepsilon\colon \mathfrak{a}_{\mathrm{S}}\to\{\pm 1\}$ et $\varepsilon\in\mathscr{X}$.

Pour prouver que $f\in\mathscr{B}$, il suffit donc de vérifier que $\varepsilon\in\mathscr{B}$. On est ainsi ramené au cas $f\in\mathscr{X}$, $f^2=1$.

6. RÉDUCTION AU CAS $f^2=1$ et $f=\check{f}$.

Soit $f\in\mathscr{X}$, $f^2=1$. D'après le lemme 2, on aura

$$f(y, x)=\varepsilon_f\left(\frac{y}{x}\right)f(x, y)$$

pour toute arête $(x, y)\in\mathfrak{a}_{\mathrm{S}}$, où *le signe* $\varepsilon_f(y/x)$ *ne dépend donc que du type* $(y/x)\in\mathrm{S}$ *de l'arête* $(x, y)$.

LEMME 6. — *Fixons une base* B *de* A *contenue dans* S. *Alors pour chaque* $b\in\mathrm{B}$ *il existe une fonction* $\varphi_b\in\mathscr{B}$, $(\varphi_b)^2=1$, *telle que* $\varepsilon_{\varphi_b}$ *vaut* $-1$ *sur tous les éléments de* S *dont l'expression réduite relative à la base* B *contient* $b$ *et vaut* 1 *ailleurs; en particulier* $\varepsilon_{\varphi_b}(b')=1$ *pour* $b'\neq b\,(b'\in\mathrm{B})$.

*Démonstration.* — On pose $\varphi_b:=(\partial g_b).(h_b\circ\tau)$, où $g_b$ (resp. $h_b$) est la fonction complexe sur A (resp. S) qui vaut $i$ sur les $x\in\mathrm{A}$ (resp. $s\in\mathrm{S}$) dont l'expression réduite par rapport à B contient $b$, et vaut 1 ailleurs.

C.Q.F.D.

LEMME 7. — *Si* $f\in\mathscr{X}$, $f^2=1$, *alors il existe* $\varphi\in\mathscr{B}$, $\varphi^2=1$, *telle que* $f':=f.\varphi$ *soit symétrique.*

*Démonstration.* — On pose $\varphi=\prod_{b\in\mathrm{B}_f^-}\varphi_b$, où

$$\mathrm{B}_f^-=\{b\in\mathrm{B}\mid\varepsilon_f(b)=-1\}.$$

Il est clair que $\varepsilon_{f'}(b)=\varepsilon_f(b)\,\varepsilon_f(b)\,\varepsilon_\varphi(b)=\varepsilon_f(b)\prod_{b'\in\mathrm{B}_f^-}\varepsilon_{\varphi_{b'}}(b)=1$, pour tout $b\in\mathrm{B}$. Montrons maintenant que $\varepsilon_{f'}(s)=1$ pour tout $s\in\mathrm{S}$.

Soit $s=b_1\ldots b_m\in S$. Considérons le lacet $\gamma=(e, b_1, b_1 b_2, \ldots, b_1\ldots b_{m-1}, s, e)$ en $e\in A$. D'après le lemme 4, on a $\tilde{f}'(\gamma)=\tilde{f}'(\check{\gamma})$, c'est-à-dire

$$f'(e, b_1)\, f'(b_1, b_1 b_2)\ldots f'(s, e)=f'(e, s)\, f'(s, b_1\ldots b_{m-1})\ldots f'(b_1, e);$$

comme $\varepsilon_{f'}(b)=1$ quel que soit $b\in B$, il s'ensuit que $f'(s, e)=f'(e, s)$, d'où $\varepsilon_{f'}(s)=1$, comme voulu.

C.Q.F.D.

On est ainsi ramené au cas $f\in Z$, $f^2=1$, $f=\check{f}$.

7. DÉMONSTRATION DE : $f\in\mathscr{Z}$, $f^2=1$, $f=\check{f}\Rightarrow f\in\mathscr{B}$.

Soit donc $f\in\mathscr{Z}$, à valeurs 1 ou $-1$, telle que $f(y, x)=f(x, y)$ pour tout $(x, y)\in\mathfrak{a}_S$.

Considérons *le graphe de Cayley* $G_B$ *de* A *associé à la base* B *de* A. Des applications successives de la propriété (Z) entraînent aussitôt que, pour $x, y, \in A$, on a

$$\tilde{f}(\gamma)=\tilde{f}(\gamma')$$

quels que soient les chemins $\gamma$ et $\gamma'$ joignant $x$ à $y$ dans $G_B$.

LEMME 8. — *Il existe* $g: A\to \mathbf{C}^\times$ *telle que* $f.(\partial g)^{-1}$ *vaut* 1 *sur le sous-ensemble* $\mathfrak{a}_B$ *de* $\mathfrak{a}_S$.

*Démonstration.* — Il suffit de poser

$$g(x)=\tilde{f}(\gamma) \qquad (x\in A),$$

où $\gamma$ est un chemin quelconque dans $\mathfrak{a}_B$ joignant $e$ à $x$. Alors $f$ et $\partial g$ coïncident sur $\mathfrak{a}_B$.

C.Q.F.D.

On est ainsi ramené au cas où $f=1$ sur $\mathfrak{a}_B$.

LEMME 9. — *Soit* $f\in\mathscr{Z}$ *telle que* $f^2=1$, $f=\check{f}$ *et* $f=1$ *sur* $\mathfrak{a}_B$. *Alors* $f=h\circ\tau$, *où* $h: S\to\mathbf{C}^\times$.

*Démonstration.* — Soient $s\in S$ et $x\in A$. On a à montrer que $f(e, s)=f(x, xs)$. Or $x=b_1\ldots b_m$, pour $b_1, \ldots, b_m\in B$ convenables. A l'aide de (Z), on obtient

$$\begin{aligned}
f(e, b_1)\, f(b_1, b_1 s) &= f(e, s)\, f(s, sb_1)\\
f(b_1, b_1 b_2)\, f(b_1 b_2, b_1 b_2 s) &= f(b_1, b_1 s)\, f(b_1 s, b_1 sb_2)\\
&\vdots\\
f(b_1\ldots b_{m-1}, x)\, f(x, xs) &= f(b_1\ldots b_{m-1}, b_1\ldots b_{m-1} s)\, f(b_1\ldots b_{m-1} s, xs),
\end{aligned}$$

d'où

$$f(e, s)=f(b_1, b_1 s)=f(b_1 b_2, b_1 b_2 s)=\ldots=f(x, xs),$$

puisque $f=1$ sur $\mathfrak{a}_B$.

C.Q.F.D.

On a ainsi achevé la démonstration de $\mathscr{Z}\subset\mathscr{B}$.

## BIBLIOGRAPHIE

[1] A. Borel et N. Wallach, *Continuous Cohomology, Discrete Subgroups and Representations of Reductive Groups* (*Ann. Math. Studies*, vol. 94, 1980).

[2] N. Bourbaki, *Groupes et algèbres de Lie*, chapitre 5.

[3] F. du Cloux, *Extensions entre représentations unitaires irréductibles des groupes de Lie nilpotents* (*Astérisque*, vol. 124-125, 1985).

[4] F. du Cloux, *Jets de fonctions différentiables sur le dual d'un groupe de Lie nilpotent* (*Invent. Math.*, t. 88, 1987, p. 375-394).

[5] L. Clozel et P. Delorme, *Le théorème de Paley-Wiener invariant pour les groupes de Lie réductifs*, II (à paraître).

[6] P. Delorme, *Homomorphismes de Harish-Chandra liés aux* K-*types minimaux des séries principales généralisées des groupes de Lie réductifs connexes* (*Ann. Scient. Ec. Norm. Sup.*, t. 17, 1984, p. 117-156).

[7] P. Delorme, *Self-extensions de modules de Harish-Chandra irréductibles, et une question* de I. M. Gelfand (*Astérisque*, vol. 124-125, 1985).

[8] P. Delorme, *Formules limites et formules asymptotiques pour les multiplicités dans* $L^2(G/\Gamma)$ (*Duke Math. J.*, t. 53, 1986, p. 691-731).

[9] A. Guichardet, *Cohomologie des groupes topologiques et des algèbres de Lie* (C.E.D.I.C., 1980).

[10] A. Guichardet, *Représentations de longueur finie des groupes de Lie inhomogènes* (*Astérisque*, vol. 124-125, 1985).

[11] A. Guichardet, *Méthode des orbites pour les représentations de longueur finie* (*Invent. Math.*, t. 85, 1986, p. 199-215).

[12] A. Guichardet, *Méthode des orbites pour les représentations de longueur finie*, II (*Bull. Soc. Math. France*, t. 115, 1987, p. 197-210).

[13] A. Guichardet, *Représentations de longueur finie et géométrie différentielle sur* $\hat{G}$ (exposé au Colloque J. Braconnier, Lyon, 1986).

[14] A. Guichardet, *Groupes* $\mathrm{Ext}^1$ *et déformations des représentations des groupes de déplacements* (*C.R. Acad. Sci.*, t. 305, 1987, p. 323-325).

[15] H. Hecht et W. Schmid, *Characters, Asymptotics and* $\mathfrak{n}$*-Homology of Harish-Chandra Modules* (*Acta Math.*, t. 151, 1983, p. 49-151).

[16] A. Knapp, *Representation Theory of Semi-Simple Groups* (Princeton Univ. Press, 1986).

[17] J. Ludwig, *On the Behaviour of Sequences in the Dual of a Nilpotent Lie Group* (à paraître).

[18] D. Vogan, *Representations of Real Reductive Groups* (Birkhäuser, 1981).

[19] A. Wassermann, *Une démonstration de la conjecture de Connes-Kasparov pour les groupes de Lie linéaires connexes réductifs* (à paraître).

(Manuscrit reçu le 29 mai 1987,
révisé le 12 avril 1988).

A. Guichardet,
Centre de Mathématiques,
École Polytechnique,
91128 Palaiseau.