

# ANNALES SCIENTIFIQUES DE L'É.N.S.

I. SATAKE

## **La déformation des formes hermitiennes et son application aux domaines de Siegel**

*Annales scientifiques de l'É.N.S. 4<sup>e</sup> série*, tome 11, n° 3 (1978), p. 445-449

[http://www.numdam.org/item?id=ASENS\\_1978\\_4\\_11\\_3\\_445\\_0](http://www.numdam.org/item?id=ASENS_1978_4_11_3_445_0)

© Gauthier-Villars (Éditions scientifiques et médicales Elsevier), 1978, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Annales scientifiques de l'É.N.S. » (<http://www.elsevier.com/locate/ansens>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme  
Numérisation de documents anciens mathématiques  
<http://www.numdam.org/>

# LA DÉFORMATION DES FORMES HERMITIENNES ET SON APPLICATION AUX DOMAINES DE SIEGEL

PAR I. SATAKE

Soit  $V$  un espace vectoriel complexe de dimension finie, que l'on considère comme un espace vectoriel réel muni d'une structure complexe  $I$ . Alors une forme hermitienne définie positive  $H$  sur  $V$  est déterminée par sa partie imaginaire  $A$ , qui est une forme bilinéaire alternée vérifiant la condition de Riemann :  $AI = '(AI) \gg 0$ . On considère les couples  $(X, Y)$  formés d'un ensemble  $X$  de structures complexes  $I$  de  $V$  et d'un ensemble  $Y$  de formes bilinéaires alternées  $A$  sur  $V \times V$ , couples tels que la condition de Riemann soit satisfaite pour tout  $A \in Y$  et  $I \in X$ . Le but de cette note est de déterminer tous les couples  $(X, Y)$  maximaux (dits « saturés »). Comme une application, nous démontrons que l'espace classifiant d'un domaine de Siegel (au sens de Piatetsky-Chapiro [1]) est toujours un domaine borné symétrique de type classique.

1. Soit  $V$  un espace vectoriel réel de dimension  $2n$ . On dira qu'un couple  $(A, I)$  formé d'une forme bilinéaire alternée  $A$  sur  $V \times V$  et d'une structure complexe  $I$  de  $V$  satisfait à la condition de Riemann et notera  $R(A, I)$ , si la forme bilinéaire  $A(x, Iy)$  ( $x, y \in V$ ) est symétrique et définie positive. Si  $(A, I)$  est un tel couple,

$$H(x, y) = A(x, Iy) + iA(x, y)$$

est une forme hermitienne définie positive sur l'espace vectoriel complexe  $(V, I)$  (qui est  $\mathbb{C}$ -linéaire en  $y$ ) et, réciproquement, toute forme hermitienne définie positive s'obtient dans cette manière. On fixe un couple  $(A_0, I_0)$  vérifiant la condition de Riemann et on pose  $S_0 = A_0 I_0$ . (Dans ces notations, une forme bilinéaire sur  $V \times V$  est toujours considérée comme une application linéaire  $V \rightarrow V^*$ ,  $V^*$  désignant le dual de  $V$ .) On désignera par  $\mathfrak{S}_0 = \mathfrak{S}(V, A_0)$  l'ensemble de toutes les structures complexes  $I$  de  $V$  telles que  $R(A_0, I)$  et par  $\mathfrak{P}_0 = \mathfrak{P}(V, I_0)$  l'ensemble de toutes les formes bilinéaires alternées  $A$  sur  $V \times V$  telles que  $R(A, I_0)$ . On sait que  $\mathfrak{S}_0$  s'exprime comme un domaine borné symétrique  $\{z \in \text{Sym}_n(\mathbb{C}) \mid 1_n - z\bar{z} \gg 0\}$  (l'espace de Siegel) et que  $\mathfrak{P}_0 (\approx \mathfrak{P}_n(\mathbb{C}))$  est un cône homogène auto-adjoint. Pour un sous-ensemble quelconque  $X$  (resp.  $Y$ ) de  $\mathfrak{S}_0$  (resp.  $\mathfrak{P}_0$ ) on posera

$$(1) \quad \begin{cases} \mathfrak{P}(X) = \{A \in \mathfrak{P}_0 \mid R(A, I) \text{ pour tout } I \in X\}, \\ \mathfrak{S}(Y) = \{I \in \mathfrak{S}_0 \mid R(A, I) \text{ pour tout } A \in Y\}. \end{cases}$$

Alors il est clair qu'on a

$$\begin{aligned} X &\subset \mathfrak{S}\mathfrak{P}(X), & \mathfrak{P}(X) &= \mathfrak{P}\mathfrak{S}\mathfrak{P}(X), \\ Y &\subset \mathfrak{P}\mathfrak{S}(Y), & \mathfrak{S}(Y) &= \mathfrak{S}\mathfrak{P}\mathfrak{S}(Y). \end{aligned}$$

Les correspondances  $X \mapsto \mathfrak{S}\mathfrak{P}(X)$ ,  $Y \mapsto \mathfrak{P}\mathfrak{S}(Y)$  sont donc des opérateurs de clôture. Un couple  $(X, Y)$  ( $X \subset \mathfrak{S}_0$ ,  $Y \subset \mathfrak{P}_0$ ) sera dit *saturé* si on a  $Y = \mathfrak{P}(X)$ ,  $X = \mathfrak{S}(Y)$ . Un couple saturé  $(X, Y)$  est maximal au sens que s'il y a un autre couple  $(X', Y')$  tel que  $X \subset X'$ ,  $Y \subset Y' \subset \mathfrak{P}(X')$  alors on a  $X = X'$ ,  $Y = Y'$ . Pour  $X \subset \mathfrak{S}_0$ ,  $Y \subset \mathfrak{P}_0$  quelconques, les couples  $[\mathfrak{S}\mathfrak{P}(X), \mathfrak{P}(X)]$  et  $[\mathfrak{S}(Y), \mathfrak{P}\mathfrak{S}(Y)]$  sont toujours saturés. Dans ce qui suit, on se propose de déterminer tous les couples saturés  $(X, Y)$ .

2. On désigne par  $\mathfrak{P}(V, S_0)$  l'ensemble de toutes les transformations linéaires  $R$  de  $V$  telles que  $S_0 R$  est symétrique et définie positive. [Si on fixe une base orthonormale de  $V$  par rapport à  $S_0$ ,  $\mathfrak{P}(V, S_0)$  s'identifie à  $\mathfrak{P}_{2n}(\mathbf{R})$ , l'ensemble des matrices réelles symétriques définies positives.] Comme d'habitude, on pose

$$\begin{aligned} \text{GL}(V, I_0) &= \{g \in \text{GL}(V) \mid [g, I_0] = 0\}, \\ \text{Sp}(V, A_0) &= \{g \in \text{GL}(V) \mid {}^t g A_0 g = A_0\}. \end{aligned}$$

Alors on a les lemmes suivants.

LEMME 1. — *L'application  $I \mapsto I_0^{-1} I$  (resp.  $A \mapsto A_0^{-1} A$ ) donne une correspondance biunivoque entre  $\mathfrak{S}_0$  et  $\text{Sp}(V, A_0) \cap \mathfrak{P}(V, S_0)$  [resp.  $\mathfrak{P}_0$  et  $\text{GL}(V, I_0) \cap \mathfrak{P}(V, S_0)$ ]. De plus, on a  $\mathfrak{S}_0 \subset \text{Sp}(V, A_0)$ .*

La démonstration est triviale.

LEMME 2. — *Soient  $A \in \mathfrak{P}_0$  et  $I \in \mathfrak{S}_0$ . Alors le couple  $(A, I)$  vérifie la condition de Riemann, si et seulement si on a  $[A_0^{-1} A, I] = 0$ .*

En effet, supposons d'abord que  $(A, I)$  vérifie la condition de Riemann. Alors  $A_0 I$  et  $AI$  sont symétriques, i. e.,  $A_0 I = -{}^t I A_0$ ,  $AI = -{}^t I A$ , d'où  $A_0^{-1} AI = -A_0^{-1} {}^t I A = IA_0^{-1} A$ . Réciproquement, supposons que  $[A_0^{-1} A, I] = 0$ . Alors, comme  $[A_0^{-1} A, I_0] = 0$ , on a

$$AI = A_0(A_0^{-1} A)I = S_0(A_0^{-1} A)(I_0^{-1} I).$$

Comme  $A_0^{-1} A, I_0^{-1} I \in \mathfrak{P}(V, S_0)$  (lemme 1) et  $[A_0^{-1} A, I_0^{-1} I] = 0$  par l'hypothèse, on a  $(A_0^{-1} A)(I_0^{-1} I) \in \mathfrak{P}(V, S_0)$ , ce qui entraîne que  $(A, I)$  vérifie la condition de Riemann.

Soit maintenant  $(X, Y)$  un couple saturé, et posons

$$(2) \quad \begin{cases} G_1 = \{g \in \text{GL}(V) \mid [g, I] = 0 \text{ pour tout } I \in X\}, \\ G'_1 = \{g \in \text{GL}(V) \mid {}^t g A g = A \text{ pour tout } A \in Y\}; \end{cases}$$

ce dernier peut s'écrire aussi comme

$$G'_1 = \{g \in \text{Sp}(V, A_0) \mid [g, A_0^{-1} A] = 0 \text{ pour tout } A \in Y\}.$$

THÉORÈME 1. — *Les groupes  $G'_1$  et  $G_1$  définis plus haut sont des sous-groupes algébrique, réductifs de  $\text{GL}(V)$ , dont  $X$  et  $Y$  sont les espaces symétriques associés.*

On note d'abord qu'une involution de Cartan de  $GL(V)$  est donnée par

$$\theta : g \mapsto S_0^{-1} t g^{-1} S_0$$

et que les sous-groupes  $GL(V, I_0)$  et  $Sp(V, A_0)$  sont stables par  $\theta$ . Les involutions de Cartan induites sur ces sous-groupes peuvent s'écrire comme

$$g \mapsto A_0^{-1} t g^{-1} A_0, \quad g \mapsto I_0^{-1} g I_0,$$

respectivement; en particulier, on a  $I_0^{\theta} = I_0$ . On a d'ailleurs  $R^{\theta} = R^{-1}$  pour tout  $R \in \mathfrak{P}(V, S_0)$ . D'après les lemmes 1 et 2 et la maximalité du couple  $(X, Y)$ , on a donc  $X^{\theta} = X$ ,  $(A_0^{-1} Y)^{\theta} = A_0^{-1} Y$ . Par conséquent,  $G_1$  et  $G'_1$  sont des sous-groupes algébriques de  $GL(V)$ , stables par  $\theta$ . En vertu d'un théorème de Mostow, il s'ensuit que  $G_1$  et  $G'_1$  sont réductifs. D'après les lemmes 1 et 2, on voit d'ailleurs que l'application  $I \mapsto I_0^{-1} I$  (resp.  $A \mapsto A_0^{-1} A$ ) donne une correspondance biunivoque entre  $X$  et  $G'_1 \cap \mathfrak{P}(V, S_0)$  [resp.  $Y$  et  $G_1 \cap \mathfrak{P}(V, S_0)$ ]. Cela signifie que  $X$  et  $Y$  sont les espaces symétriques associés aux groupes  $G'_1$  et  $G_1$ .

On notera que  $Y$  est un cône (ouvert, convexe) dans un certain sous-espace linéaire de  $\text{End } V$ , et le théorème 1 entraîne que  $Y$  est homogène et auto-adjoint. D'autre part, puisqu'on a  $I_0 \in G'_1$ ,  $G'_1$  est un groupe réductif de type hermitien, et  $X$  est un domaine borné symétrique associé, plongé analytiquement dans  $\mathfrak{S}_0$ .

3. On peut obtenir une description plus précise d'un couple saturé  $(X, Y)$  comme suit. En général, une représentation d'un groupe est dite « primaire », si elle est une somme de représentations irréductibles équivalentes. La représentation identique  $\rho$  de  $G'_1$  sur  $V$  étant complètement réductible, l'espace  $V$  se décompose en une somme directe

$$(3) \quad V = V^{(1)} \oplus \dots \oplus V^{(r)},$$

où les  $V^{(i)}$  sont des « composants primaires » (c'est-à-dire, des sous-espaces primaires maximaux) de  $V$ . Puisque  $G_1^{\theta} = G_1$ , les sous-espaces  $V^{(i)}$  sont orthogonaux l'un de l'autre par rapport à  $S_0$ . Comme on a  $[A_0^{-1} A, g] = 0$  pour tout  $A \in Y$  et  $g \in G'_1$ , chaque  $V^{(i)}$  est stable par  $A_0^{-1} A$  ( $A \in Y$ ). Il s'ensuit que la somme (3) est aussi orthogonale par rapport à toute forme  $A \in Y$ . Cela signifie que le couple  $(X, Y)$  est une somme directe (au sens évident) des couples  $(X_i, Y_i)$  sur  $V^{(i)}$ , qui sont aussi saturés. Donc, pour notre but, nous pouvons supposer que la représentation  $\rho$  est primaire; dans ce cas, le couple  $(X, Y)$  sera dit *irréductible*.

Étant donné un couple saturé irréductible  $(X, Y)$ , soit  $V'$  un  $G'_1$ -espace irréductible contenu dans  $V$ . Alors on a

$$\mathcal{K} = \text{End}_{G'_1} V' = \mathbf{R} \text{ ou } \mathbf{C} \text{ ou } \mathbf{H},$$

et l'espace  $V$  se décompose dans la forme

$$(4) \quad V = V' \otimes_{\mathcal{K}} V'', \quad V'' = \text{Hom}_{G'_1}(V', V).$$

Considérons le cas  $\mathcal{K} = \mathbf{R}$ ; alors on a

$$(5) \quad V = V' \otimes_{\mathbf{R}} V'', \quad g = g' \otimes \text{id},$$

où  $g \in G'_1 \mapsto g'$  est une représentation absolument irréductible. On a

$$(6) \quad I = I' \otimes \text{id}$$

et, en particulier,  $I_0 = I'_0 \otimes \text{id}$ . En vertu du lemme de Schur, on a d'ailleurs

$$(7) \quad A_0 = A'_0 \otimes S''_0, \quad A_0^{-1} A = \text{id} \otimes R'',$$

où  $A'_0$  (resp.  $S''_0$ ) est une forme bilinéaire alternée (resp. symétrique définie positive) sur  $V' \times V'$  (resp.  $V'' \times V''$ ). Il s'ensuit que  $A$  est de la forme  $A'_0 \otimes S''$  et que  $R(A, I)$  entraîne  $R(A'_0, I')$  et  $S'' \in \mathfrak{P}(V'')$ , où  $\mathfrak{P}(V'')$  désigne l'ensemble des formes bilinéaires symétriques définies positives sur  $V'' \times V''$ . Vu la maximalité du couple  $(X, Y)$  on en conclut que

$$(8) \quad \begin{cases} X = \{ I = I' \otimes \text{id} \mid I' \in \mathfrak{S}(V', A'_0) \}, \\ Y = \{ A = A'_0 \otimes S'' \mid S'' \in \mathfrak{P}(V'') \} \end{cases}$$

et, par conséquent,

$$(9) \quad \begin{cases} G_1 = \text{id}_{V'} \otimes \text{GL}(V''), \\ G'_1 = \text{Sp}(V', A'_0) \otimes \text{id}_{V''}. \end{cases}$$

Cela montre que  $Y$  (resp.  $X$ ) est un cône homogène auto-adjoint irréductible (resp. un domaine borné symétrique irréductible) de type (III). Dans les autres cas, où  $\mathcal{K} = \mathbf{C}$  ou  $\mathbf{H}$ , on obtient un résultat analogue, sauf que  $X$  et  $Y$  sont de type (I) ou (II).

**THÉORÈME 2.** — Soit  $(X, Y)$  est un couple saturé irréductible. Alors  $Y$  est un cône homogène auto-adjoint irréductible de type classique [(I)–(III)] et  $X$  est un domaine borné symétrique irréductible du type correspondant.

Les cas extrêmes  $X = \mathfrak{S}_0$ ,  $Y = \{ \lambda A_0 (\lambda > 0) \}$  et  $X = \{ I_0 \}$ ,  $Y = \mathfrak{P}_0$  s'obtiennent en prenant  $\mathcal{K} = \mathbf{R}$ ,  $V'' = \mathbf{R}$  et  $\mathcal{K} = \mathbf{C}$ ,  $V' = \mathbf{C}$ , respectivement.

*Remarque.* — De la définition de  $G_1$  et  $G'_1$ , on voit que  $G_1 \cap G'_1$  coïncide avec le plus grand sous-groupe normal compact de  $G_1$  et aussi avec celui de  $G'_1$ . D'après le théorème 2,  $G_1 \cap G'_1$  est toujours abélien. Il s'ensuit que  $G_1$  et  $G'_1$  sont les centriseurs mutuels dans  $\text{GL}(V, I_0)$  et  $\text{Sp}(V, A_0)$ .

4. Soit  $\mathcal{S}$  un domaine de Siegel (de la seconde espèce) définie par

$$\mathcal{S} = \{ (u, v) \in U_{\mathbf{C}} \times V \mid \text{Im } u - H(v, v) \in \Omega \},$$

où  $U$  est un espace vectoriel réel (de dimension finie),  $V$  un espace vectoriel complexe (de dimension finie),  $\Omega$  est un cône (ouvert, convexe, et « non-dégénéré », c'est-à-dire que  $\Omega$  ne contient aucune ligne droite), et  $H$  est une application hermitienne  $V \times V \rightarrow U_{\mathbf{C}}$  «  $\Omega$ -positive » (c'est-à-dire qu'on a  $H(x, x) \in \overline{\Omega} - \{0\}$  pour tout  $x \in V$ ,  $x \neq 0$ ). On considère  $V$  comme un espace vectoriel réel muni d'une structure complexe  $I_0$  et pose

$$(10) \quad H(x, y) = A(x, I_0 y) + i A(x, y).$$

Alors  $A$  est une application bilinéaire alternée  $V \times V \rightarrow U$  telle que  $A(x, I_0 y)$  est symétrique et  $\Omega$ -positive. Par définition, l'espace classifiant de  $\mathcal{S}$  (ou « l'espace de Siegel généré

ralisé »), noté  $\mathfrak{S}(V, A, \Omega)$ , est l'ensemble de toutes les structures complexes  $I$  de  $V$  telles que l'application  $A(x, Iy)$  soit symétrique et  $\Omega$ -positive (cf. [1], V, § 20; [4], III, § 6).

On introduit un produit scalaire (défini positif)  $\langle \quad \rangle$  dans  $U$  et on définit le « dual » de  $\Omega$  par

$$\Omega^* = \{u \in U \mid \langle u, u' \rangle > 0 \text{ pour tout } u' \in \overline{\Omega} - \{0\}\}.$$

Pour chaque  $u \in U$ , on pose

$$A_u(v, v') = \langle u, A(v, v') \rangle \quad (v, v' \in V).$$

Alors  $A_u$  est une forme bilinéaire alternée sur  $V \times V$ ; et il est facile de voir que, pour une structure complexe  $I$  de  $V$ , l'application  $A(x, Iy)$  est symétrique et  $\Omega$ -positive si et seulement si le couple  $(A_u, I)$  satisfait à la condition de Riemann pour tout  $u \in \Omega^*$ . Avec les notations précédentes, cela signifie que, si on pose  $Y = \{A_u(u \in \Omega^*)\}$ , on a  $Y \subset \mathfrak{P}_0$  et  $\mathfrak{S}(Y) = \mathfrak{S}(V, A, \Omega)$ . Donc les théorèmes 1 et 2 entraînent le résultat suivant :

**THÉORÈME 3.** — *L'espace classifiant  $\mathfrak{S}(V, A, \Omega)$  d'un domaine de Siegel est un domaine borné symétrique, qui est un produit direct de domaines irréductibles de type classique [(I)–(III)].*

#### BIBLIOGRAPHIE

- [1] I. I. PIATETSKY-CHAPIRO, *Géométrie des domaines classiques et théorie des fonctions automorphes* (en russe), Fizmatgiz, Moscow, 1961; traduction française, Dunod, Paris, 1966.
- [2] I. SATAKE, Symplectic Representations of Algebraic Groups satisfying a Certain Analyticity Condition (*Acta Math.*, 117, 1967, p. 215-279).
- [3] I. SATAKE, Linear Imbeddings of Self-dual Homogeneous Cones (*Nagoya Math. J.*, 46, 1972, p. 121-145; Corrections, *ibid.*, 60, 1976, p. 219).
- [4] I. SATAKE, Algebraic Structures of Symmetric Domains [*Publ. de Math. Soc. Japan*, Iwanami et Princeton Univ. Press (à paraître)].

(Manuscrit reçu le 3 mars 1978.)

M. I. SATAKE,  
Department of Mathematics,  
University of California,  
Berkeley, California 94720,  
U.S.A.