L. SAUVAGE

Compléments à la théorie des diviseurs élémentaires

Annales scientifiques de l'É.N.S. 3e série, tome 10 (1893), p. 9-42

<http://www.numdam.org/item?id=ASENS_1893_3_10__9_0>

ANNALES
SCIENTIFIQUES
DE
L'ÉCOLE NORMALE SUPÉRIEURE.

COMPLÉMENTS
A LA
THÉORIE DES DIVISEURS ÉLÉMENTAIRES,

PAR M. L. SAUVAGE,

PROFESSEUR A LA FACULTÉ DES SCIENCES DE MARSEILLE.

I.

1. Le théorème fondamental de la théorie des formes bilinéaires (¹) est le suivant :

Soient deux formes bilinéaires aux mêmes $2n$ *variables*

$$f = \Sigma a_{\alpha\beta} x_\alpha y_\beta,$$
$$\varphi = \Sigma b_{\alpha\beta} x_\alpha y_\beta;$$

si le déterminant de la forme f *n'est pas nul, la nouvelle forme*

$$F = fs + \varphi,$$

(¹) Voir la *Théorie des diviseurs élémentaires* dans les *Annales de l'École Normale supérieure*; 1891.

où s est une indéterminée, peut s'écrire

$$F = \sum_{i=1}^{i=\rho} [(s_i - s)(\xi\eta)_{e_i} + (\xi\eta)_{e_i-1}].$$

$(s - s_i)^{e_i}$ est l'un quelconque des ρ diviseurs élémentaires du déterminant de la forme F. *On a, en outre, par définition,*

$$(\xi\eta)_{e-1} = 0 \qquad \text{pour } e = 1,$$
$$(\xi\eta)_e = \xi_0\eta_{e-1} + \xi_1\eta_{e-2} + \ldots + \xi_{e-1}\eta_0;$$

les ξ sont des fonctions linéaires, indépendantes et à coefficients constants de $y_1, y_2, \ldots, y_n$, et les η sont des fonctions analogues de $x_1, x_2, \ldots, x_n$.

Si les déterminants des formes f et φ sont nuls tous les deux, mais si l'on peut trouver deux nombres m et n tels que la forme $f_1 = mf + n\varphi$ ait un déterminant différent de zéro, on pourra appliquer à f_1 et à φ le théorème précédent.

Le seul cas où l'on ne sache donc pas réduire la forme F est celui où le déterminant de cette forme est identiquement nul. C'est le cas que nous allons maintenant examiner.

Nous suivrons encore la marche indiquée par M. Darboux dans sa profonde analyse des formes quadratiques (*Journal de Mathématiques pures et appliquées*; 1874).

2. Supposons donc que le déterminant

$$B(s) = \begin{vmatrix} a_{11}s + b_{11} & \ldots & a_{1n}s + b_{1n} \\ \ldots\ldots\ldots & \ldots & \ldots\ldots\ldots \\ a_{n1}s + b_{n1} & \ldots & a_{nn}s + b_{nn} \end{vmatrix}$$

soit identiquement nul, ou encore que tous les coefficients du polynôme B(s) soient identiquement nuls.

Plus généralement, supposons que tous les mineurs de B(s) soient identiquement nuls jusqu'à ceux de l'ordre ϖ exclusivement.

Nous pourrons établir ϖ relations de la forme

$$C_1 Y_1 + C_2 Y_2 + \ldots + C_n Y_n = 0, \tag{1}$$

les C étant des fonctions rationnelles en s, et les Y représentant les dérivées partielles de F par rapport aux y. On a donc

$$Y_i = (a_{1i}s + b_{1i})x_1 + \ldots + (a_{ni}s + b_{ni})x_n.$$

Il faudra que les C satisfassent identiquement aux relations

$$\begin{gathered} C_1(a_{11}s + b_{11}) + \ldots + C_n(a_{1n}s + b_{1n}) = 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ C_1(a_{n1}s + b_{n1}) + \ldots + C_n(a_{nn}s + b_{nn}) = 0. \end{gathered}$$

Ce système du premier degré admet ϖ solutions indépendantes en C_1, $C_2, \ldots, C_n$, et, par suite, *il y a exactement ϖ relations distinctes de la forme* (1).

L'étude de ces relations nous arrêtera un certain temps.

3. Les quantités C qu'on vient d'obtenir sont, en général, des fonctions rationnelles en s, de sorte que, si l'on ordonne par rapport à la lettre s, on aura, au lieu des relations (1), des relations en s de la forme

$$(2) \qquad s^p U_0 - s^{p-1} U_1 + s^{p-2} U_2 - \ldots \pm U_p = 0,$$

où les coefficients $U_0, U_1, \ldots, U_p$ sont des fonctions linéaires de Y_1, $Y_2, \ldots, Y_n$.

Considérons d'abord le cas où l'on aurait une relation de la forme

$$U = 0,$$

ne renfermant pas s. Soit

$$U = \alpha_1 Y_1 + \ldots + \alpha_n Y_n = 0.$$

Parmi les coefficients constants $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$, l'un au moins n'est pas nul Posons alors

$$\begin{aligned} y_1 &= \alpha_1 y'_1, \\ y_i &= \alpha_i y_1 + y'_i \qquad (i = 2, 3, \ldots, n) \end{aligned}$$

Nous aurons

$$\frac{\partial F}{\partial y'_1} = \alpha_1 \frac{\partial F}{\partial y_1} + \ldots + \alpha_n \frac{\partial F}{\partial y_n} = U = 0.$$

Ainsi, après le changement de variables, y'_1 aura disparu.

Supposons qu'il en soit ainsi et que la forme F soit ramenée à l'expression

$$\Sigma(a_{\alpha\beta}s + b_{\alpha\beta})x_\alpha y_\beta,$$

où l'on suppose, par exemple, que le coefficient de y_1 soit identiquement nul. On aura

$$\Sigma(a_{\alpha 1}s + b_{\alpha 1})x_\alpha = 0,$$

ou encore, séparément et simultanément,

$$\Sigma a_{\alpha 1} x_\alpha = 0,$$
$$\Sigma b_{\alpha 1} x_\alpha = 0.$$

Le nombre des fonctions Y étant alors moindre que n, il faudra pour qu'il en soit ainsi, que l'un des x soit, dans les deux fonctions f et φ à la fois, une fonction linéaire des autres x. En remplaçant cet x par cette combinaison dans la forme F, on voit qu'on aura finalement une forme F' ne dépendant plus que de $n-1$ variables x et $n-1$ variables y.

Sans écarter le cas précédent de notre discussion, nous supposerons que les ϖ relations distinctes de la forme (1) renferment s et puissent s'écrire

$$(3) \qquad L_i = s^{p_i}U_0^i - s^{p_i-1}U_1^i + s^{p_i-2}U_2^i - \ldots \pm U_{p_i}^i = 0 \qquad (i = 1, 2, \ldots, \varpi).$$

4. Dans les relations $L_i = 0$, on peut toujours supposer que les coefficients U sont linéairement indépendants. Car, si cette hypothèse n'était pas d'abord réalisée, on pourrait remplacer le système des équations $L_i = 0$ par un système équivalent d'équations de degrés p'_1, $p'_2, \ldots, p'_\varpi$ en s, et, de plus, la somme $\Sigma p'$ pourrait être rendue inférieure à Σp. C'est ce que nous allons montrer.

Admettons qu'il y ait une relation linéaire, à coefficients constants et identique, de la forme

$$(4) \qquad \sum (t_0^i U_0^i + \ldots + t_{p_i}^i U_{p_i}^i) = 0 \qquad (i = 1, 2, \ldots, \varpi).$$

Si nous remarquons que les fonctions

$$Y = s\frac{\partial f}{\partial y} + \frac{\partial \varphi}{\partial y}$$

sont linéaires en s, nous pourrons poser

$$U = U' + sU'',$$

et il faudra que les fonctions linéaires à coefficients constants U' et U'', où les variables sont $x_1, x_2, \ldots, x_n$, satisfassent, quelle que soit la valeur de s, aux relations (3) et (4). Nous aurons donc, en supprimant l'indice i pour la simplicité de la notation,

$$s^p(U'_0 + sU''_0) - s^{p-1}(U'_1 + sU''_1) + \ldots \pm (U'_p + sU''_p) = 0.$$

Il faudra, en conséquence, que nous ayons

$$\begin{aligned} U''_0 &= 0, \\ U'_0 - U''_1 &= 0, \\ U'_1 - U''_2 &= 0, \\ \ldots\ldots&\ldots, \\ U'_p &= 0, \end{aligned}$$

d'où nous tirerons

$$(5)\qquad \left\{ \begin{aligned} U_0 &= u_0, \\ U_1 &= u_1 + su_0, \\ U_2 &= u_2 + su_2, \\ \ldots&\ldots\ldots, \\ U_p &= su_{p-1}, \end{aligned} \right.$$

en appelant $u_0, u_1, \ldots, u_{p-1}$ des fonctions linéaires à coefficients constants des variables $x_1, x_2, \ldots, x_n$.

Mais alors la relation (4) devient

$$\Sigma[t_0 u_0 + t_1(u_1 + su_0) + \ldots + t_p s u_{p-1}] = 0,$$

et se décompose en deux autres

$$(6)\qquad \left\{ \begin{aligned} &\Sigma(t_0 u_0 + t_1 u_1 + \ldots + t_{p-1} u_{p-1}) = 0, \\ &\Sigma(t_1 u_0 + t_2 u_1 + \ldots + t_p u_{p-1}) = 0. \end{aligned} \right.$$

Revenons maintenant aux anciennes fonctions U. Nous aurons

$$\begin{aligned}
u_0 &= U_0,\\
u_1 &= U_1 - sU_0,\\
u_2 &= U_2 - sU_1 + s^2 U_0,\\
&\dots\dots\dots\dots\dots,\\
u_{p-1} &= U_{p-1} - sU_{p-2} + \dots \pm s^{p-1} U_0.
\end{aligned}$$

Par suite, les formules (6) deviendront

$$\text{(7)} \qquad \left\{ \begin{aligned} A &= \Sigma[t_0 U_0 + t_1(U_1 - sU_0) + \dots] = 0,\\ B &= \Sigma(t_1 U_0 + t_2(U_1 - sU_0) + \dots] = 0, \end{aligned} \right.$$

c'est-à-dire deux nouvelles relations identiques entre les dérivées Y de la forme F.

On peut écrire

$$\begin{aligned}
A &= \Sigma[U_0(t_0 - st_1 + \dots \pm s^{p-1} t_{p-1}) + U_1(t_1 - st_2 + \dots \mp s^{p-2} t_{p-1}) + \dots + U_{p-1} t_{p-1}] =\\
B &= \Sigma[U_0(t_1 - st_2 + \dots \pm s^{p-1} t_p) + U_1(t_2 - st_3 + \dots \mp s^{p-2} t_p) + \dots + U_{p-1} t_p] =
\end{aligned}$$

On tire de là

$$A + sB = \Sigma[U_0(t_0 \pm s^p t_p) + U_1(t_1 \mp s^{p-1} t_p) + \dots + U_{p-1}(t_{p-1} + st_p)] = 0,$$

ou encore, à cause de la relation (4),

$$A + sB = \Sigma t_p[-U_p + sU_{p-1} - s^2 U_{p-2} + \dots \pm s^p U_0],$$

ou enfin

$$\text{(8)} \qquad A + sB + \Sigma(\pm t_p L) = 0.$$

On peut toujours supposer que l'une au moins des quantités $t^1_{p_1}$, $t^2_{p_2}$, ..., $t^\varpi_{p_\varpi}$ est différente de zéro. Car, en substituant aux formes proposées deux de leurs combinaisons linéaires $mf + n\varphi$, $m'f + n'\varphi$, cela reviendrait à remplacer s par $\dfrac{ms + m'}{ns + n'}$ dans les calculs précédents, et on pourrait toujours faire en sorte que l'équation (4) renfermât un terme $t^i_{p_i} U^i_{p_i}$ si $U^i_{p_i}$ est le terme indépendant de s dans l'équation $L_i = 0$.

Il résulte de ce qui précède que l'on aurait les équations

$$\begin{aligned} &L_i = 0 \qquad (i = 1, 2, \ldots, \varpi), \\ &A = 0, \\ &B = 0, \end{aligned}$$

et, entre ces équations, la relation identique (8). Or il ne peut y avoir que ϖ relations distinctes entre les fonctions U, ou, ce qui revient au même, entre les fonctions Y. Il faut donc que, en prenant dans les $\varpi + 1$ équations distinctes précédentes ϖ relations, la dernière soit une conséquence des ϖ équations choisies.

On peut donc remplacer le système précédent par

$$\begin{gathered} L'_j = 0 \qquad [j = 1, 2, \ldots, (\varpi - 1)], \\ mA + nB = 0, \end{gathered}$$

m et n étant deux constantes quelconques. On écrira simplement

$$L'_i = 0 \qquad (i = 1, 2, \ldots, \varpi),$$

et l'on remarquera qu'on a pu remplacer l'une des équations $L_i = 0$, celle du plus haut degré en s, et qui entre dans l'identité (8), par une relation

$$mA + nB = 0$$

d'un degré inférieur au moins d'une unité.

5. Supposons donc que l'on ait ϖ relations $L_i = 0$ de degrés p_1, $p_2, \ldots, p_i$ par rapport à s, et dont les coefficients exprimés en Y_1, $Y_2, \ldots, Y_n$ soient linéairement indépendants.

Soit posé

$$U_k^i = \alpha_{k1}^i Y_1 + \ldots + \alpha_{kn}^i Y_n \qquad (i = 1, 2, \ldots, \varpi;\ k = 0, 1, 2, \ldots, p_i).$$

Puisque le déterminant de tous les α n'est pas nul, on peut choisir, pour chaque indice i, un déterminant de constantes qui ne soit pas nul, mais de plus les $p_i + 1$ éléments Y qui ont ces α comme coefficients dans les équations précédentes peuvent être pris complètement différents pour chaque valeur de l'indice i.

Supposons, par exemple, que pour un indice i quelconque le déterminant

$$\begin{vmatrix} \alpha_{01} & \ldots & \alpha_{0p_1+1} \\ \ldots & \ldots & \ldots\ldots \\ \alpha_{p_1 1} & \ldots & \alpha_{p_1 p_1+1} \end{vmatrix}$$

ne soit pas nul.

Posons alors

$$\begin{aligned}
y_1 &= \alpha_{01} y'_1 + \ldots + \alpha_{p_1 1} y'_{p_1+1}, \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\
y_{p_1+1} &= \alpha_{0p_1+1} y'_1 + \ldots + \alpha_{p_1 p_1+1} y'_{p_1+1}, \\
y_{p_1+2} &= \alpha_{0p_1+2} y'_1 + \ldots + \alpha_{p_1 p_1+2} y'_{p_1+1} + y'_{p_1+2}, \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\
y_n &= \alpha_{0n} y'_1 + \ldots + \alpha_{p_1 n} y'_{p_1+1} + y'_n.
\end{aligned}$$

Nous tirerons de là

$$\begin{aligned}
\frac{\partial F}{\partial y'_1} &= \alpha_{01} \frac{\partial F}{\partial y_1} + \ldots + \alpha_{0n} \frac{\partial F}{\partial y_n} = U_0, \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\
\frac{\partial F}{\partial y'_{p_1+1}} &= \alpha_{p_1 1} \frac{\partial F}{\partial y_1} + \ldots + \alpha_{p_1 n} \frac{\partial F}{\partial y_n} = U_{p_1}.
\end{aligned}$$

Nous voyons maintenant qu'on peut préparer les formes f et φ, de manière que les relations $L_i = 0$ prennent la forme

$$L_i = s^{p_i} \frac{\partial F}{\partial y_m} - s^{p_i-1} \frac{\partial F}{\partial y_{m+1}} + s^{p_i-2} \frac{\partial F}{\partial y_{m+2}} - \ldots \pm \frac{\partial F}{\partial y_{m+p_i}} = 0,$$

et les y qui entrent dans l'une de ces relations n'entreront pas dans une autre.

6. Nous supposerons maintenant que cette hypothèse soit satisfaite. Or, une relation $L = 0$, par exemple

$$s^p \frac{\partial F}{\partial y_1} - s^{p-1} \frac{\partial F}{\partial y_2} + s^{p-2} \frac{\partial F}{\partial y_3} - \ldots \pm \frac{\partial F}{\partial y_{p+1}} = 0,$$

est la condition nécessaire et suffisante pour que la fonction F ne dépende que des combinaisons

$$\begin{aligned}
\bar{y}_1 &= y_1 + s y_2,\\
\bar{y}_2 &= y_2 + s y_3,\\
&\dots\dots\dots\dots,\\
\bar{y}_p &= y_p + s y_{p+1},
\end{aligned}$$

c'est-à-dire que, si l'on prend pour variables indépendantes $\bar{y}_1$, $\bar{y}_2, \ldots, \bar{y}_p$ et y_{p+1}, cette dernière variable s'éliminera de la forme F. Cette proposition est facile à démontrer.

Donc, si l'on a ϖ équations $\mathrm{L} = 0$, on peut trouver dans la forme F $\varpi + 1$ groupes de variables

$$\begin{aligned}
&y_1^i, y_2^i, \ldots, y_{p_i+1}^i \qquad (i = 1, 2, \ldots, \varpi),\\
&y_1', y_2', \ldots, y_h',
\end{aligned}$$

de manière que cette forme ne dépende effectivement que des seules variables

$$\bar{y}_1^i, \bar{y}_2^i, \ldots, \bar{y}_{p_i}^i, y_1', y_2', \ldots, y_h',$$

dont le nombre est inférieur de ϖ unités au nombre des variables primitives.

Quant au nombre h, il est déterminé par la relation

$$h + \varpi + p_1 + \ldots + p_\varpi = n,$$

et, comme tous ces nombres doivent être positifs, on a la condition

$$\Sigma p \leqq n - \varpi.$$

7. Nous pouvons donc écrire

$$\mathrm{F} = \sum_i (x_1^i \bar{y}_1^i + \ldots + x_{p_i}^i \bar{y}_{p_i}^i) + \mathrm{F}_1(x_1, x_2, \ldots, x_k, y_1', y_2', \ldots, y_h', s).$$

Les nouvelles variables x^i sont des combinaisons linéaires des anciennes variables $x_1, \ldots, x_n$. Je dis que les coefficients qui entrent dans ces combinaisons sont indépendants de s. En effet, supposons qu'ils dépendent de s, et revenons aux anciennes variables $y_1^i, \ldots, y_{p+1}^i$ qui sont indépendantes. Le coefficient de $y_{p_i+1}^i$ doit être linéaire en s

à cause de la forme primitive de F. Il faut donc que $x_{p_i}^i$ soit indépendant de s. Le coefficient de $y_{p_i}^i$ est $s x_{p_i-1}^i + x_{p_i}^i$. Il doit être linéaire en s, donc $x_{p_i-1}^i$ est indépendant de s, ...

Les variables x^i sont indépendantes entre elles; car, si elles étaient liées par une combinaison linéaire quelconque, on pourrait réduire la forme

$$\sum_i (x_1^i \bar{y}_1^i + \ldots + x_{p_i}^i \bar{y}_{p_i}^i)$$

à renfermer au moins une variable x^i et au moins une variable $\bar{y}^i$ de moins; or cela est impossible, parce que les $\bar{y}^i$ sont indépendants entre eux.

Nous poserons, en général, quelle que soit la signification de R,

$$\bar{R}_m = R_m + s R_{m+1},$$

et nous nous servirons de cette notation dans toute la suite du Mémoire.

8. On peut échanger les lettres x et y dans les raisonnements précédents. On aura donc

$$\begin{aligned} F = \sum_i (x_1^i \bar{y}_1^i + \ldots + x_{p_i}^i \bar{y}_{p_i}^i) + \sum_i (y_1^i \bar{x}_1^i + \ldots + y_{q_i}^i \bar{x}_{q_i}^i) \\ + F_1(x_1', \ldots, x_\alpha', y_1', \ldots, y_\alpha') + s F_2(x_1', \ldots, x_\alpha', y_1', \ldots, y_\alpha'). \end{aligned}$$

Les x^i et les y^i ne renfermeront plus s et seront indépendants. On aura en outre

$$\bar{x}_m = x_m + s x_{m+1},$$

$$\bar{y}_m = y_m + s y_{m+1},$$

$$p_1 + \ldots + p_\varpi + q_1 + \ldots + q_\varpi + \varpi + \alpha = n.$$

On en conclut la nouvelle condition

$$(\Sigma p + \Sigma q) \leqq n - \varpi,$$

compatible avec la condition déjà trouvée.

9. Avant de simplifier encore plus la forme F, remarquons que l'on peut donner aux relations $L = 0$ des formes variées sans qu'elles cessent de satisfaire aux conditions qui leur sont imposées.

Supposons qu'on multiplie les relations $L_i = 0$ par des fonctions quelconques de s, pourvu qu'elles soient rationnelles. Soit posé

$$K_1 L_1 + K_2 L_2 + \ldots + K_\varpi L_\varpi = 0,$$

$K_1, K_2, \ldots, K_\varpi$ étant des fractions irréductibles rationnelles en s. Soit $s = h$ une valeur de s qui rend infinie une ou plusieurs de ces fractions. En décomposant le premier membre de l'équation précédente en fractions simples, on aura un terme en $\frac{1}{s-h}$ dont le numérateur sera une fonction linéaire des polynômes U et ne pourra être nul.

Donc toute équation nouvelle $L = 0$, étant entière en s et dépendant des autres dont le nombre est déjà ϖ, est une combinaison de la forme

$$\Sigma KL = 0,$$

où les coefficients K sont des polynômes entiers en s.

Supposons qu'on remplace les équations $L = 0$ par les combinaisons qu'on vient d'indiquer, on aura, par exemple,

$$M_i = s^{r_i} V_0^i - s^{r_i - 1} V_0^{i-1} + \ldots = 0.$$

Les fonctions V seront des combinaisons linéaires des U, et, si elles sont indépendantes, il faudra que leur nombre soit le même que celui des U. Il est donc nécessaire que $\Sigma r = \Sigma p$, c'est-à-dire que la somme des degrés des équations $M_i = 0$ soit la même que celle des degrés des équations $L_i = 0$.

Inversement, on voit que, si ces conditions sont remplies, les deux systèmes $L_i = 0$, $M_i = 0$ peuvent être équivalents.

On conclut de là que ce qu'il y a de fixe dans la dernière forme de F, c'est le nombre des variables x_{p+1} et le nombre des variables y_{q+1} qui disparaissent quand on introduit les nouvelles variables $\bar{x}$ et $\bar{y}$. Quant au groupement des variables $x_1, x_2, \ldots, x_n$ pour former les variables $\bar{x}$, il est aussi arbitraire que la manière de former les équations $L_i = 0$ ou $M_i = 0$.

10. Nous réduirons maintenant l'expression F à une forme plus simple en nous appuyant sur un lemme que nous allons démontrer.

Considérons la forme générale

$$F = \Sigma(a_{\alpha\beta}s + b_{\alpha\beta})x_\alpha y_\beta = \Sigma A_{\alpha\beta}x_\alpha y_\beta.$$

Partageons les variables en deux groupes, d'une part les variables x_1, x_2, ..., x_μ, y_1, y_2, ..., y_μ, et d'autre part les variables $x_{\mu+1}$, ..., x_n, $y_{\mu+1}$, ..., y_n. Nous représenterons les variables du premier groupe par la notation x_α, $y_{\alpha'}$ et les variables du second groupe par x_β, $y_{\beta'}$, de sorte que les indices α et α' pourront prendre les valeurs $1, 2, \ldots, \mu$ et que les indices β et β' pourront prendre les valeurs $\mu+1, \ldots, n$.

L'expression F pourra s'écrire

$$\Sigma A_{\alpha\alpha'}x_\alpha y_{\alpha'} + \Sigma A_{\alpha\beta'}x_\alpha y_{\beta'} + \Sigma A_{\beta\alpha'}x_\beta y_{\alpha'} + \Sigma A_{\beta\beta'}x_\beta y_{\beta'}.$$

Remplaçons maintenant x_β et $y_{\beta'}$ par $x_\beta + h_\beta$ et $y_{\beta'} + k_{\beta'}$, et nous aurons

$$\begin{aligned}&\Sigma A_{\alpha\alpha'}x_\alpha y_{\alpha'} + \Sigma A_{\alpha\beta'}x_\alpha(y_{\beta'} + k_{\beta'})\\ &\quad + \Sigma A_{\beta\alpha'}(x_\beta + h_\beta)y_{\alpha'} + \Sigma A_{\beta\beta'}(x_\beta + h_\beta)(y_{\beta'} + k_{\beta'}).\end{aligned}$$

Nous décomposerons cette expression en trois parties

$$\text{(I)}\qquad \Sigma A_{\alpha\alpha'}x_\alpha y_{\alpha'} + \Sigma A_{\alpha\beta'}x_\alpha k_{\beta'} + \Sigma A_{\beta\alpha'}h_\beta y_{\alpha'} + \Sigma A_{\beta\beta'}h_\beta k_{\beta'},$$

$$\text{(II)}\qquad \Sigma A_{\alpha\beta'}x_\alpha y_{\beta'} + \Sigma A_{\beta\alpha'}x_\beta y_{\alpha'} + \Sigma A_{\beta\beta'}(x_\beta k_{\beta'} + y_{\beta'}h_\beta),$$

$$\text{(III)}\qquad \Sigma A_{\beta\beta'}x_\beta y_{\beta'}.$$

Nous supposerons qu'on remplace les indéterminées h et k par des fonctions linéaires des variables x_α et y_α, et nous montrerons qu'on peut choisir les coefficients constants qui entrent dans ces fonctions de manière que la seconde partie prenne la forme

$$\text{(II}'\text{)}\qquad \Sigma x_\alpha \overline{P}_\alpha + \Sigma y_{\alpha'}\overline{Q}_{\alpha'}.$$

Posons, en effet,

$$h_i = h_{i1}x_1 + \ldots + h_{i\mu}x_\mu,$$
$$k_i = k_{i1}y_1 + \ldots + k_{i\mu}y_\mu,$$

et identifions les deux expressions (II) et (II′).

Il faudra que dans (II) le coefficient de sx_α soit identique au coefficient de $x_{\alpha+1}$. On devra donc avoir identiquement

$$\sum_{\beta'} a_{\alpha\beta'} y_{\beta'} + \sum_{\beta\beta'} a_{\beta\beta'} h_{\beta\alpha} y_{\beta'} = \sum_{\beta'} b_{\alpha+1,\beta'} y_{\beta'} + \sum_{\beta\beta'} b_{\beta\beta'} h_{\beta,\alpha+1} y_{\beta'}.$$

Il faudra que le coefficient de $y_{\beta'}$ soit nul identiquement, quel que soit β', c'est-à-dire qu'on aura

$$a_{\alpha\beta'} + \sum_{\beta} a_{\beta\beta'} h_{\beta\alpha} = b_{\alpha+1,\beta'} + \sum_{\beta} b_{\beta\beta'} h_{\beta,\alpha+1}.$$

En donnant à β' successivement toutes les valeurs $\mu+1, \ldots, n$ on aura un système du premier degré qui déterminera les coefficients $h_{\beta,\alpha+1}$ quand on connaîtra les coefficients $h_{\beta\alpha}$.

Le déterminant $|b_{\beta\beta'}|$ peut être supposé différent de zéro. Il est, en effet, le déterminant de la forme $\Sigma b_{\beta\beta'} x_\beta y_{\beta'}$ et l'on peut toujours, par des combinaisons préalables, faire que dans la forme

$$\Sigma A_{\beta\beta'} x_\beta y_{\beta'}$$

le terme indépendant de s ait son déterminant différent de zéro.

On voit donc que l'on peut choisir arbitrairement $h_{11}, \ldots, h_{\mu 1}$, et calculer successivement

$$\begin{matrix} h_{12}, & \ldots, & h_{\mu 2}, \\ \ldots, & \ldots, & \ldots, \\ h_{1\mu}, & \ldots, & h_{\mu\mu}. \end{matrix}$$

On pourra de même calculer les coefficients $k_{\beta,\alpha}$.

L'expression (I) peut être ramenée à une forme analogue à la précédente, soit à la forme

$$\text{(I')} \qquad \Sigma x_\alpha \overline{P}'_\alpha + \Sigma y_{\alpha'} \overline{Q}'_{\alpha'}.$$

Posons, en effet,

$$P'_\alpha = p_{\alpha 1} y_1 + \ldots + p_{\alpha\mu} y_\mu,$$
$$Q'_{\alpha'} = q_{\alpha' 1} x_1 + \ldots + q_{\alpha'\mu} x_\mu,$$

et supposons le calcul qui ramène (II) à (II') effectué, de sorte que l'expression (I) est réduite à une fonction bilinéaire des seules variables $x_\alpha y_{\alpha'}$. Soit

$$\Sigma B_{\alpha\alpha'} x_\alpha y_{\alpha'} = \Sigma (a'_{\alpha\alpha'} s + b'_{\alpha\alpha'}) x_\alpha y_{\alpha'}$$

cette fonction.

Identifions cette forme avec la forme (I'). Nous aurons

$$\begin{aligned} a'_{\alpha\alpha'} &= p_{\alpha+1,\alpha'} + q_{\alpha'+1,\alpha}, \\ b'_{\alpha\alpha'} &= p_{\alpha\alpha'} \quad\;\; + q_{\alpha'\alpha}. \end{aligned}$$

Il est facile de résoudre ces équations en p et q. Car les équations précédentes entraînent la relation

$$b'_{\alpha+1,\alpha'} = p_{\alpha+1,\alpha'} + q_{\alpha',\alpha+1}$$

et, par suite, on aura

$$a'_{\alpha\alpha'} - b'_{\alpha+1,\alpha'} = q_{\alpha'+1,\alpha} - q_{\alpha',\alpha+1},$$

c'est-à-dire que l'on connaît les différences de deux termes successifs dans une même direction diagonale du tableau

$$\begin{matrix} q_{11}, & q_{12}, & \ldots, & q_{1\mu}, \\ q_{21}, & q_{22}, & \ldots, & q_{2\mu}, \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ q_{\mu 1}, & q_{\mu 2}, & \ldots, & q_{\mu\mu}. \end{matrix}$$

Il suffira donc de prendre arbitrairement les termes de la première ligne et de la dernière colonne par exemple, et les autres termes s'en déduiront. De plus, la relation

$$p_{\alpha\alpha'} = b_{\alpha\alpha'} - q_{\alpha'\alpha},$$

donnera ensuite tous les coefficients p. Elle montre même que l'on pourrait se donner arbitrairement

$$\begin{matrix} q_{11}, & q_{12}, & \ldots, & q_{1\mu}, \\ p_{11}, & p_{12}, & \ldots, & q_{1\mu}, \end{matrix}$$

au lieu des arbitraires indiquées plus haut.

En résumé, on peut poser

$$\Sigma A_{\alpha\beta} x_\alpha y_\beta = \Sigma x_\alpha \overline{P}'_\alpha + \Sigma y_{\alpha'} \overline{Q}'_{\alpha'} + \Sigma x_\alpha P_\alpha + \Sigma y_{\alpha'} \overline{Q}_{\alpha'} + \Sigma A_{\beta\beta'} x_\beta y_{\beta'},$$

ou plus simplement, en réunissant les termes de même forme

$$\Sigma A_{\alpha\beta} x_\alpha y_\beta = \Sigma x_\alpha \overline{P}_\alpha + \Sigma y_{\alpha'} \overline{Q}_{\alpha'} + \Sigma A_{\beta\beta'} x_\beta y_{\beta'}.$$

11. Il est maintenant facile de ramener l'expression

$$\begin{aligned} F = \sum_i (x_1^i \overline{y}_1^i + \ldots + x_{p_i}^i \overline{y}_{p_i}^i) + \sum_i (y_1^i \overline{x}_1^i + \ldots + y_{q_i}^i \overline{x}_{q_i}^i) \\ + F'(x'_1, \ldots, x'_\alpha, y'_1, \ldots, y'_\alpha, s) \end{aligned}$$

à une forme simple définitive.

Si F′ ne renferme que des variables x' et y' indépendantes des variables x^i et y^i qui servent de coefficients aux $\overline{y}$ et aux $\overline{x}$, la forme F sera décomposée en deux parties : la première qu'on vient de mettre en évidence sous les deux signes Σ, et la seconde qui peut être traitée par les règles ordinaires et indépendamment de la première.

Mais, en général, les x^i et les y^i seront des combinaisons linéaires des anciens x ou des anciens y qui ne servent pas à former les $\overline{x}$ ou les $\overline{y}$. Dans ces conditions, on pourra exprimer un certain nombre de variables x' et y' au moyen des x^i et des y^i, car ces dernières variables sont indépendantes.

Or le nombre des variables x^i est Σp et le nombre des variables y^i est Σq. Supposons que l'on ait, par exemple,

$$\Sigma p \leqq \Sigma q,$$

nous exprimerons Σp variables x' en fonction des x^i et Σp variables y' en fonction des y^i, de sorte que l'expression F′ prendra la forme

$$F'(x_1^i, \ldots, x_{\Sigma p}^i, y_1^i, \ldots, y_{\Sigma p}^i, x'_1, \ldots, x'_\beta, y'_1, \ldots, x'_\beta, y'_1, \ldots, y'_\beta, s),$$

et, d'après le lemme établi plus haut, pourra se mettre sous la forme

$$\sum_{\alpha=1}^{\alpha=\Sigma p} x_\alpha^i \overline{P}_\alpha + \sum_{\alpha'=1}^{\alpha'=\Sigma p} y_{\alpha'}^i \overline{Q}_{\alpha'} + F''(x'_1, \ldots, x'_\beta, y'_1, \ldots, y'_\beta, s),$$

F″ renfermant des variables x indépendantes de celles qui entrent dans les termes précédents.

En réunissant maintenant tous les termes semblables dans un seul terme, on peut écrire

$$F = \Sigma(y_1^i \bar{x}_1^i + \ldots + y_{p_i}^i \bar{x}_{p_i}^i) + \Sigma(x_1^i \bar{y}_1^i + \ldots + x_{q_i}^i \bar{y}_{q_i}^i) + F'',$$

et supposer que les variables

$$x_1^i, \ \ldots, \ x_{q_i}^i, \ \bar{x}_1^i, \ \ldots, \ \bar{x}_{p_i}^i, \ x'_1, \ \ldots, \ x'_\beta$$

sont indépendantes. Leur nombre est $n - \varpi$. Or le nombre des y étant le même et le déterminant de la forme F n'étant pas nul, il faut que les variables

$$y_1^i, \ \ldots, \ y_{p_i}^i, \ \bar{y}_1^i, \ \ldots, \ \bar{y}_{q_i}^i, \ y'_1, \ \ldots, \ y'_\beta,$$

au nombre de $n - \varpi$ soient aussi indépendantes. On pouvait donc avoir

$$\Sigma p \leqq \Sigma q,$$

et alors le nombre β satisfait à la relation (¹)

$$\Sigma p + \beta \leqq n - \varpi.$$

12. Si l'on considère les variables indépendantes

$$x, \ x, \ x', \ \bar{y}, \ y, \ y',$$

le déterminant de F, qui n'est pas nul, se réduit au déterminant de F''. Donc F'' peut être ramené à une forme simplifiée par l'application des règles ordinaires.

13. En résumé, on peut énoncer la proposition suivante :

Étant données deux formes bilinéaires f et φ aux mêmes $2n$ variables, on peut former deux combinaisons distinctes

$$mf + n\varphi,$$
$$m'f + n'\varphi,$$

(¹) Pour $p = 0$, on peut ramener F à une forme d'un nombre moindre de variables indépendantes et la réduction est immédiate. Si l'on écarte ces cas, le minimum de Σp sera ϖ et l'on aura alors $\beta = n - 3\varpi$. Or β est positif, donc on a $n \geqq 3\varpi$, c'est-à-dire que le maximum de ϖ est le plus grand entier contenu dans $\frac{n}{3}$.

au moyen de quatre constantes m, m', n, n', *dont le déterminant ne soit pas nul, de manière que la forme*

$$F = (mf + n\varphi)s + (m'f + n'\varphi),$$

qui renferme une indéterminée s, *soit réductible à plusieurs groupes de termes à variables indépendantes ayant respectivement les formes*

$$y_1\bar{x}_1 + \ldots + y_p\bar{x}_p,$$
$$x_1\bar{y}_1 + \ldots + x_q\bar{y}_q,$$
$$-(s - s_i)(\xi\eta)_{e_i} - (\xi\eta)_{e_i - 1}.$$

Les diviseurs $(s - s_i)^{e_i}$ *sont les diviseurs élémentaires d'un certain déterminant de degré* $\beta \leqq n - \varpi - \Sigma p - \Sigma q$ *que l'on a appris à former;* ϖ *est l'ordre des premiers mineurs qui ne s'annulent pas identiquement dans le déterminant de la forme* F; *les nombres* $p_1, \ldots, p_i, q_1, \ldots, q_i$ *sont les degrés respectifs en* s *des relations à coefficients indépendants qui relient les dérivées partielles de* F.

14. Si l'on considère deux formes quadratiques $\mathfrak{P}$ et $\mathfrak{Q}$ aux mêmes n variables $x_1, \ldots, x_n$, elles ont mêmes déterminants que les formes bilinéaires

$$P = \sum_\beta \frac{1}{2}\frac{\partial \mathfrak{P}}{\partial x_\beta} y_\beta,$$
$$Q = \sum_\beta \frac{1}{2}\frac{\partial \mathfrak{Q}}{\partial x_\beta} y_\beta,$$

et ces déterminants sont symétriques. De là résulte le théorème démontré par M. Darboux pour les formes quadratiques :

Étant données deux formes quadratiques, on peut toujours en former deux combinaisons linéaires distinctes de manière que la forme

$$(m\mathfrak{P} + n\mathfrak{Q})s + (m'\mathfrak{P} + n'\mathfrak{Q})$$

soit décomposable en plusieurs groupes de termes ayant respectivement les formes suivantes :

$$x'_1\bar{x}_1 + \ldots + x'_p\bar{x}_p,$$
$$-(s - s_i)(\xi\xi)_{e_i} - (\xi\xi)_{e_i - 1},$$

les variables x', $\bar{x}$ *et* ξ *étant indépendantes.*

15. En égalant à f le coefficient de s dans $F = fs + \varphi$ et à φ le terme indépendant, on aura les expressions de f et φ sous formes réduites avec mêmes variables indépendantes.

On aura, par exemple,

$$f = y_1 x_1 + \ldots + y_p x_p + x'_1 y'_1 + \ldots + x'_p y'_p - \Sigma(\xi\eta)_{e_i},$$
$$\varphi = y_1 x_2 + \ldots + y_p x_{p+1} + x'_1 y'_2 + \ldots + x'_p y'_{p+1} + \Sigma s_i(\xi\eta)_{e_i} + \Sigma(\xi\eta)_{e_i - 1}.$$

On a des résultats analogues pour les formes quadratiques.

16. Considérons un groupe de termes tels que

$$y_1 \bar{x}_1 + \ldots + y_p \bar{x}_p + x'_1 \bar{y}'_1 + \ldots + x'_q \bar{y}'_q,$$

et formons le déterminant de cette forme en prenant pour variables indépendantes les $\bar{x}$ et les x', les y et les $\bar{y}'$, et, en outre, x_{p+1} et y_{q+1}. Nous obtiendrons le déterminant

$$\begin{vmatrix} 10 & \ldots & 00 \\ 01 & \ldots & 00 \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ 00 & \ldots & 10 \\ 00 & \ldots & 00 \end{vmatrix},$$

ou encore, en échangeant les lignes, sauf la dernière

$$\begin{vmatrix} 00 & \ldots & 10 \\ 00 & \ldots & 00 \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ 10 & \ldots & 00 \\ 00 & \ldots & 00 \end{vmatrix}.$$

Or, si l'on se rappelle que, si l'on pose

$$ap + bq = u,$$
$$gq - hp = v,$$

et si le déterminant $ga + hb$ est différent de zéro, u^e est le seul diviseur élémentaire du déterminant

$$[\mathrm{P}, \mathrm{Q}] = \begin{vmatrix} 0\,0 & \ldots & 0\,v\,u \\ 0\,0 & \ldots & v\,u\,0 \\ \cdot\,\cdot & \ldots & \ldots \\ v\,u & \ldots & 0\,0\,0 \\ u\,0 & \ldots & 0\,0\,0 \end{vmatrix},$$

on peut dire que dans la forme précédente, il y a un diviseur élémentaire u^e ou $(ap + bq)^e$ devenu indéterminé [§ V de la *Théorie des diviseurs élémentaires* (*Annales de l'École Normale supérieure*; 1891)].

On peut alors considérer la forme du déterminant canonique du § V de la *Théorie des diviseurs élémentaires* comme étant tout à fait générale. On aura donc *dans tous les cas*

$$[\mathrm{P}, \mathrm{Q}] = \left|\begin{array}{ccc|ccc|c} 0\,0 & \ldots & v\,u_1 & 0\,0 & \ldots & 0\,0 & \ldots \\ 0\,0 & \ldots & u_1\,0 & 0\,0 & \ldots & 0\,0 & \ldots \\ \cdot\,\cdot & \ldots & \cdot\,\cdot & \cdot\,\cdot & \ldots & \cdot\,\cdot & \ldots \\ v\,u_1 & \ldots & 0\,0 & 0\,0 & \ldots & 0\,0 & \ldots \\ u_1\,0 & \ldots & 0\,0 & 0\,0 & \ldots & 0\,0 & \ldots \\ \hline 0\,0 & \ldots & 0\,0 & 0\,0 & \ldots & v\,u_2 & \ldots \\ 0\,0 & \ldots & 0\,0 & 0\,0 & \ldots & u_2\,0 & \ldots \\ \cdot\,\cdot & \ldots & \cdot\,\cdot & \cdot\,\cdot & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0\,0 & \ldots & 0\,0 & v\,u_2 & \ldots & 0\,0 & \ldots \\ 0\,0 & \ldots & 0\,0 & u_2\,0 & \ldots & 0\,0 & \ldots \\ \hline \cdot\,\cdot & \ldots & \cdot\,\cdot & \ldots & \ldots & \cdot\,\cdot & \ldots \end{array}\right|,$$

même quand certains diviseurs élémentaires $u_1^{e_1}$, $u_2^{e_2}$, ... deviendront indéterminés. Cette indétermination correspond aux divers groupements de lignes et de colonnes que l'on peut faire alors dans [P, Q] sans en changer la forme, ces divers groupements étant déterminés par les diverses formes des équations $\mathrm{L}_i = 0$.

17. *Pour que deux formes f et φ puissent être transformées en deux autres formes f' et φ', il faut et il suffit :*

1° *Que le nombre ϖ soit le même pour les formes*

$$\mathrm{F} = fs + \varphi, \qquad \mathrm{F}' = f's + \varphi';$$

2° *Que les degrés en* s *des équations* $L_i = 0$, $L'_i = 0$ *puissent être ramenés les uns aux autres ;*

3° *Que les formes à déterminants non nuls*

$$F''_1 \quad \text{et} \quad F''_2,$$

qui servent à achever les décompositions de F *et* F', *aient les mêmes diviseurs élémentaires.*

Ces conditions nécessaires sont évidemment suffisantes, puisque l'on pourra ramener F et F' à des formes réduites identiques. En égalant de part et d'autre les variables correspondantes, on aura les substitutions qui transforment f et φ en f' et φ'.

On peut énoncer d'une façon synthétique le théorème précédent de la manière suivante :

Pour que deux formes f et φ puissent être ramenées à deux formes f' et φ', il faut et il suffit que les déterminants des deux formes $fs + \varphi$ et $f's + \varphi'$ aient mêmes diviseurs élémentaires.

Mais alors, dans cet énoncé, interviennent les diviseurs élémentaires indéterminés, dont la signification est fournie par les parties 1° et 2° de l'énoncé complet donné plus haut.

II.

18. De la décomposition du déterminant

$$\Delta(\lambda) = \begin{vmatrix} a_{11}\lambda + b_{11} & \ldots & a_{1n}\lambda + b_{1n} \\ \ldots\ldots\ldots & \ldots & \ldots\ldots\ldots \\ b_{n1}\lambda + b_{n1} & \ldots & a_{nn}\lambda + b_{nn} \end{vmatrix}$$

en diviseurs élémentaires, on a déjà pu tirer un certain nombre de propositions intéressantes. Nous nous proposons maintenant de revenir sur quelques-unes de ces propositions, et d'en ajouter d'autres. Toutes ces propositions seront des corollaires de la théorie générale.

19. Pour décomposer $\Delta(\lambda)$ en diviseurs élémentaires, on doit résoudre l'équation $\Delta(\lambda) = 0$; nous dirons que cette équation est *une équation en* λ.

Parmi les cas particuliers de cette équation, il y en a un assez important pour que nous lui donnions une désignation spéciale. Nous appellerons *équation en s* une équation de la forme

$$\Delta(s) = \begin{vmatrix} b_{11}+as & b_{12} & \dots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22}+as & \dots & b_{2n} \\ \dots & \dots\dots\dots & \dots & \dots \\ b_{n1} & b_{n2} & \dots & b_{nn}+as \end{vmatrix} = 0,$$

où les coefficients sont réels et symétriquement égaux, et où l'inconnue s n'entre que dans la diagonale principale avec un seul et même coefficient.

20. Il y a une différence essentielle à établir entre une équation en λ et une équation en s. *Cette dernière a toujours n diviseurs élémentaires simples et réels.*

M. Darboux a démontré, par un procédé d'une grande généralité, au § VI de son *Mémoire sur les formes quadratiques*, que l'équation en s a toutes ses racines réelles et que tout diviseur $(s-s')^p$ du premier membre $\Delta(s)$ ou $B_0(s)$ divise aussi $B_0(s)$, $B_1(s)$, ..., $B_{p-1}(s)$, c'est-à-dire le déterminant $\Delta(s)$ *bordé* 0 fois, 1 fois, ..., $p-1$ fois avec des arbitraires quelconques. Ces théorèmes reviennent à dire que le déterminant $\Delta(s)$ a tous ses diviseurs élémentaires réels d'abord et simples ensuite.

On peut suivre d'autres marches pour démontrer cette proposition analytique si importante.

Considérons, par exemple, les deux formes quadratiques

$$f = x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2,$$
$$\varphi = \Sigma A_{\alpha\alpha} x_\alpha^2 + 2\Sigma A_{\alpha\beta} x_\alpha y_\beta \qquad (\alpha, \beta = 1, 2, \dots, n).$$

Puisque la forme f ne peut s'annuler qu'en égalant à zéro toutes les variables x, si la forme φ a ses coefficients A réels, il est nécessaire que le déterminant de la forme $fs+\varphi$ ait n diviseurs élémentaires simples et réels [1]. Comme conséquence, les racines de toute équation en s sont réelles.

---

[1] *Voir* la proposition de M. Weierstrass, au § VI, n° 52, de la *Théorie des diviseurs élémentaires*.

21. La forme ordinaire de l'équation en s est

$$\Delta(s) = \begin{vmatrix} a_{11}-s & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22}-s & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots\dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn}-s \end{vmatrix}.$$

Plus généralement on pourrait appeler équation en s toute équation qui a n diviseurs élémentaires simples et réels. Car, d'après la théorie des formes bilinéaires, on pourrait ramener cette équation en s à la forme canonique

$$\Delta(s) = \begin{vmatrix} s-s_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & s-s_2 & \dots & 0 \\ \dots\dots & \dots\dots & \dots & \dots\dots \\ 0 & 0 & \dots & s-s_n \end{vmatrix} = 0.$$

22. Les équations en λ servent, comme on l'a vu, dans la théorie des formes bilinéaires ou quadratiques. Mais, partout où l'on trouvera des équations ou des déterminants $\Delta(\lambda)$ en λ, la discussion sera facilitée par la notion de diviseur élémentaire.

En voici un exemple intéressant, que nous avons déjà traité rapidement en appliquant la théorie des diviseurs élémentaires à la recherche des propriétés des intégrales des équations linéaires [1].

On sait que l'on a identiquement

$$(1)\qquad x_1 y_1 + \dots + x_n y_n = x'_1 y'_1 + \dots + x'_n y'_n,$$

si l'on a les équations

$$(2)\qquad x'_i = C_{i1} x_1 + \dots + C_{in} x_n$$
$$(3)\qquad y_i = C_{1i} y'_1 + \dots + C_{ni} y'_n \qquad (i = 1, 2, \dots, n).$$

On aura de même identiquement

$$(1')\qquad X_1 y_1 + \dots + X_n y_n = X'_1 y'_1 + \dots + X'_n y'_n,$$

si l'on a

$$(2')\qquad X'_i = C_{i1} X_1 + \dots + C_{in} X_n,$$

---

[1] *Voir* le § VII de la *Théorie des diviseurs élémentaires*.

et de nouveau les équations

$$(3) \qquad y_i = C_{1i}y'_1 + \ldots + C_{ni}y'_n.$$

Peut-on ajouter à ces équations évidemment compatibles deux nouvelles relations de la forme

$$(4) \qquad X_i = a_{i1}x_1 + \ldots + a_{in}x_n,$$

$$(4') \qquad X'_i = a'_{i1}x'_1 + \ldots + a'_{in}x'_n ?$$

Si les sept équations (1), (2), (3), (1′), (2′), (4), (4′) sont compatibles entre elles, il devra en être de même de leurs conséquences. En particulier, si nous éliminons les X et les X′, nous aurons l'équation

$$\Sigma y_i(a_{i1}x_1 + \ldots + a_{in}x_n) = \Sigma y'_i(a'_{i1}x'_1 + \ldots + a'_{in}x'_n)$$

ou encore

$$(5) \qquad \Sigma a_{ij}x_j y_i = \Sigma a'_{ij}x'_j y'_i.$$

Nous voyons donc que l'on devra avoir à la fois cette équation (5) et l'équation

$$x_1y_1 + \ldots + x_ny_n = x'_1y'_1 + \ldots + x'_ny'_n,$$

à la condition suffisante que l'on ait

$$(2) \qquad x'_i = C_{i1}x_1 + \ldots + C_{in}x_n,$$

$$(3) \qquad y_i = C_{1i}y'_1 + \ldots + C_{ni}y'_n,$$

c'est-à-dire que les substitutions (2) et (3) devront transformer à la fois les deux formes

$$(\mathrm{I}) \qquad \Sigma a'_{ij}x'_j y'_i \quad \text{et} \quad \Sigma x'_i y'_i$$

dans les deux formes

$$(\mathrm{II}) \qquad \Sigma a_{ij}x_j y_i \quad \text{et} \quad \Sigma x_i y_i.$$

On en conclut que les deux déterminants

$$|a_{ij} - \lambda\varepsilon_{ij}| \quad \text{et} \quad |a'_{ij} - \lambda\varepsilon_{ij}| \qquad \left(\varepsilon_{ij} = \begin{cases} 1, & i = j \\ 0, & i \neq j \end{cases}\right)$$

auront les mêmes diviseurs élémentaires.

Réciproquement, si les deux déterminants précédents ont les mêmes diviseurs élémentaires, on peut, par des substitutions linéaires, transformer à la fois les deux formes (I) dans les formes (II). Mais alors, à cause de la relation

$$\Sigma x_i y_i = \Sigma x'_i y'_i,$$

il faut que la substitution faite sur les y soit inverse de celle faite sur les x, c'est-à-dire qu'on aura les relations (2) et (3).

Ensuite, on peut écrire

$$\sum a_{ij} x_j y_i = \sum_i y_i \Big(\sum_j a_{ij} x_j\Big) = \sum_i y_i X_i,$$

$$\sum a'_{ij} x'_j y'_i = \sum_i y'_i \Big(\sum_j a'_{ij} x'_j\Big) = \sum_i y'_i X'_i.$$

On doit donc pouvoir ramener directement les formes $\sum_i y_i X_i$ et $\sum_i y'_i X'_i$ l'une à l'autre, en choisissant convenablement les relations entre les X et les X'. Or ces relations seront nécessairement (2'), puisque les y satisfont déjà à la relation (3).

Donc les X' sont liés aux X par les mêmes relations que les x' aux x.

On peut énoncer ces résultats de la manière suivante :

Si par le produit de deux substitutions dont les déterminants sont $|a'_{ij}|$ *et* $|C_{ij}|$ *on passe des variables X' aux variables x, et si l'on peut de même passer des mêmes variables X' aux mêmes variables x par le produit de deux substitutions aux déterminants* $|C_{ij}|$ *et* $|a_{ij}|$, *les déterminants*

$$|a_{ij} - \varepsilon_{ij}\lambda| \quad \text{et} \quad |a'_{ij} - \varepsilon_{ij}\lambda|$$

auront mêmes diviseurs élémentaires.

Réciproquement, si ces déterminants ont les mêmes diviseurs élémentaires, on peut déterminer une substitution $|C_{ij}|$ *telle que les deux produits de substitutions* $|a'_{ij}| \times |C_{ij}|$ *et* $|C_{ij}| \times |a_{ij}|$ *soient les mêmes, et alors les X' seront liés aux X par les mêmes relations que les x' aux x, les X et les x' étant les variables intermédiaires.*

23. Nous rappellerons aussi la discussion du système d'équations linéaires

$$\sum_i a_{ij} x_{ij} = k_j x_{i,j-1} \qquad (i = 1, 2, \ldots, n;\ j = 1, 2, \ldots, n'),$$

sachant que le déterminant

$$\begin{vmatrix} a_{11} - \lambda & \ldots & a_{1n} \\ a_{n1} & \ldots & a_{nn} - \lambda \end{vmatrix}$$

admet les diviseurs élémentaires $\lambda^{e_0}, \lambda^{e_1}, \ldots, \lambda^{e_r}$.

Nous ne reviendrons pas sur ce calcul que nous avons donné d'après M. Horn (¹).

III.

24. Les formules de réduction des formes bilinéaires ou quadratiques, étant tout à fait générales au point de vue algébrique, peuvent être compliquées d'imaginaires qu'il soit utile de chasser dans des questions sur les formes à coefficients réels, par exemple dans les problèmes de Géométrie analytique.

Considérons alors deux formes quadratiques P et Q à coefficients réels, et supposons qu'on puisse choisir deux constantes réelles g et h telles que le déterminant de la forme $gP + hQ$ ne soit pas identiquement nul. Si $(a_i p + b_i q)^{e_i}$ est un diviseur élémentaire quelconque du déterminant

$$[P, Q] = \begin{vmatrix} a_{11} p + b_{11} q & \ldots & a_{1n} p + b_{1n} q \\ \ldots\ldots\ldots & \ldots & \ldots\ldots\ldots \\ a_{n1} p + b_{n1} q & \ldots & a_{nn} p + b_{nn} q \end{vmatrix},$$

et satisfait à la relation $ag + bh = 1$, on sait qu'on peut poser

$$P = \Sigma[a_i(\xi\xi)_{e_i} - h(\xi\xi)_{e_i - 1}],$$
$$Q = \Sigma[b_i(\xi\xi)_{e_i} + g(\xi\xi)_{e_i - 1}];$$

nous nous proposons de ramener ces formes à d'autres équivalentes ne renfermant plus d'imaginaires.

(¹) *Voir* le § VII, nº 69, de la *Théorie des diviseurs élémentaires*.

On sait qu'on détermine les ξ par la formule générale (1)

$$\frac{M'_1}{\sqrt{B_0 B'_{0-1}}} = \xi_0 + \xi_1 \sigma + \xi_2 \sigma^2 + \ldots.$$

Dans cette formule ne s'introduit qu'une irrationnelle. Nous la représenterons par $\sqrt{c}$, c étant le même pour tous les ξ, quels que soient leurs indices inférieurs. Nous poserons donc

$$\xi_m = \sqrt{c}\,\xi'_m,$$

quel que soit l'indice m.

Soit $(a_i p + b_i q)^{e_i}$ un diviseur élémentaire quelconque :

1° Si le rapport $\frac{b_i}{a_i}$ est réel, a_i et b_i sont réels en même temps, puisque l'on a $a_i g + b_i h = 1$. Il s'ensuit que les ξ' sont à coefficients réels et, si $\sqrt{c}$ est imaginaire, il sera de la forme $\pm k\sqrt{-1}$, de sorte que, dans les produits $\xi\xi$, l'imaginaire disparaîtra. On pourra donc poser

$$(\xi\xi)_e = \varepsilon(\xi'\xi')_e,$$

en posant $\varepsilon = \pm 1$ et en introduisant k dans ξ'.

2° Si le rapport $\frac{b_i}{a_i}$ est imaginaire, alors au diviseur élémentaire $(a_i p + b_i q)^{e_i}$ en correspondra un autre $(\overline{a}_i p + \overline{b}_i q)^{e_i}$ conjugué du premier. De plus $\sqrt{c}$ et $\sqrt{\overline{c}}$ auront des valeurs conjuguées, et les $\overline{\xi}$ seront conjugués des ξ. Posons alors

$$\begin{aligned}
a_i &= a'_i + \sqrt{-1}\,a''_i, & \overline{a}_i &= a'_i - \sqrt{-1}\,a''_i,\\
b_i &= b'_i + \sqrt{-1}\,b''_i, & \overline{b}_i &= b'_i - \sqrt{-1}\,b''_i,\\
\xi_m &= \xi'_m + \sqrt{-1}\,\xi''_m, & \overline{\xi}_m &= \xi'_m - \sqrt{-1}\,\xi''_m.
\end{aligned}$$

Nous aurons pour un terme quelconque de $\Sigma a_i(\xi\xi)_{e_i}$

$$(a' + \sqrt{-1}\,a'')(\xi'_\alpha + \sqrt{-1}\,\xi''_\alpha)(\xi'_\beta + \sqrt{-1}\,\xi''_\beta)$$

---

(1) *Théorie des diviseurs élémentaires*, § IV, n° 26.

ou encore

$$(a' + \sqrt{-1}\,a'')\left[(\xi'_\alpha\xi'_\beta - \xi''_\alpha\xi''_\beta) + \sqrt{-1}\,(\xi'_\alpha\xi''_\beta + \xi''_\alpha\xi'_\beta)\right].$$

Nous aurons dans $\Sigma\bar{a}_i(\bar{\xi}\bar{\xi})_{e_i}$ une somme de termes conjuguée de la précédente. En ajoutant, nous aurons l'expression

$$2a'(\xi'_\alpha\xi'_\beta - \xi''_\alpha\xi''_\beta) - 2a''(\xi'_\alpha\xi''_\beta + \xi''_\alpha\xi'_\beta).$$

Nous trouverons donc dans $\Sigma a_i(\xi\xi)_{e_i} + \Sigma\bar{a}_i(\bar{\xi}\bar{\xi})_{e_i}$ la somme

$$\Sigma\{2a'[(\xi'\xi')_{e_i} - (\xi''\xi'')_{e_i}] - 4a''(\xi'\xi'')_{e_i}\}.$$

Nous trouverons de même dans $\Sigma b_i(\xi\xi)_{e_i} + \Sigma\bar{b}_i(\bar{\xi}\bar{\xi})_{e_i}$ la somme

$$\Sigma\{2b'[(\xi'\xi')_{e_i} - (\xi''\xi'')_{e_i}] - 4b''(\xi'\xi'')_{e_i}\}.$$

Nous traiterons de même les sommes

$$-h\Sigma(\xi\xi)_{e_i-1} \quad \text{et} \quad g\Sigma(\xi\xi)_{e_i-1}.$$

Il est sans intérêt de réunir ces résultats dans des formules d'ensemble; il n'y a lieu de retenir qu'un fait : c'est qu'au point de vue de la réalité il faut non seulement tenir compte des diviseurs élémentaires $(a_ip + b_iq)^{e_i}$, mais encore des irrationnelles $\sqrt{c}$ qui leur correspondent et qui peuvent modifier les signes.

Abordons maintenant la discussion des équations en λ qui se rencontrent en Géométrie analytique, sans souci des imaginaires qui se présenteront; car nous saurons nous en débarrasser quand cela sera devenu nécessaire pour la discussion géométrique.

25. Soit d'abord l'équation

$$\Delta_1(\lambda) = \begin{vmatrix} A + \lambda A' & B + \lambda B' \\ B + \lambda B' & C + \lambda C' \end{vmatrix} = 0,$$

qui correspond aux deux formes quadratiques

$$P = Ax^2 + 2Bxy + Cy^2,$$
$$Q = A'x^2 + 2B'xy + C'y^2.$$

1° Le déterminant $\Delta_1(\lambda)$ a deux diviseurs élémentaires $\lambda - \lambda_1$ et $\lambda - \lambda_2$. On peut avoir $\lambda_1 = \lambda_2$.

Les deux formes pourront se ramener à

$$P_1 = \lambda_1 X_1^2 + \lambda_2 X_2^2,$$
$$P_2 = -X_1^2 - X_2^2.$$

2° Le déterminant $\Delta_1(\lambda)$ a un diviseur élémentaire double $\lambda - \lambda_1$. On pourra poser

$$P_1 = \quad \lambda_1(X_1 X_2 + X_2 X_1) + X_1 X_1 = 2\lambda_1 X_1 X_2 + X_1^2,$$
$$Q_1 = - \quad (X_1 X_2 + X_2 X_1) = -2 X_1 X_2.$$

On voit que les formes P_1 et Q_1 ont en commun le diviseur linéaire X_1: on en conclut que les formes P et Q doivent avoir en commun un diviseur de la forme $\alpha x + \beta y$.

De là résulte que, pour qu'il y ait un diviseur linéaire commun à P et à Q, il faut et il suffit que l'équation en λ ait une racine double, ou encore que l'on ait

$$(AC' + CA' - 2BB')^2 - 4(AC - B^2)(A'C' - B'^2) = 0$$

ou

$$(AC' - CA')^2 - 4(AB' - BA')(BC' - CB') = 0.$$

On retrouve un résultat bien connu.

Passons à la discussion géométrique, en partant des formules réduites que nous venons d'obtenir.

α. $\Delta_1(\lambda)$ a deux diviseurs élémentaires réels $\lambda - \lambda_1$ et $\lambda - \lambda_2$; λ_1 et λ_2 sont de mêmes signes et $\sqrt{c_1}$ et $\sqrt{c_2}$ sont réels.

On a

$$P = \quad \lambda_1 X_1^2 + \lambda_2 X_2^2,$$
$$Q = - \quad X_1^2 \quad - X_2^2.$$

Les deux faisceaux de droites représentés par les équations $P = 0$, $Q = 0$ sont composés de droites imaginaires conjuguées.

β. Mêmes hypothèses, mais $\sqrt{c_1}$ et $\sqrt{c_2}$ sont imaginaires.

On posera

$$P = -\lambda_1 X_1'^2 + \lambda_2 X_2'^2,$$
$$Q = \quad X_1'^2 \quad + X_2'^2.$$

Mêmes résultats que dans le cas précédent.

γ. Mêmes hypothèses, mais $\sqrt{c_2}$ est seul imaginaire.

On posera

$$P = \lambda_1 X_1^2 - \lambda_2 X_2'^2,$$
$$Q = X_1^2 - X_2'^2.$$

Les quatre droites sont réelles.

δ. λ_1 et λ_2 sont de signes contraires et $\sqrt{c_1}$ et $\sqrt{c_2}$ sont réels.

On a

$$P = \lambda_1 X_1^2 - \lambda_2' X_2^2,$$
$$Q = X_1^2 + X_2^2.$$

Les droites du faisceau P sont réelles, celles du faisceau Q sont imaginaires conjuguées.

ε. Mêmes hypothèses, mais $\sqrt{c_1}$ et $\sqrt{c_2}$ sont imaginaires.

On posera

$$P = -\lambda_1 X_1'^2 + \lambda_2' X_2'^2,$$
$$Q = -X_1'^2 - X_2'^2,$$

Mêmes résultats que dans le cas précédent.

ζ. Mêmes hypothèses, mais $\sqrt{c_2}$ est imaginaire.

On posera

$$P = -\lambda_1 X_1^2 - \lambda_2' X_2'^2,$$
$$Q = -X_1^2 + X_2'^2.$$

Les droites du faisceau P sont imaginaires conjuguées, celles du faisceau Q sont réelles.

η. λ_1 et λ_2 sont imaginaires conjuguées; alors $\sqrt{c_1}$ et $\sqrt{c_2}$ sont aussi imaginaires conjuguées. On posera

$$P = 2 \text{ fois partie réelle de } (\lambda' + \lambda''\sqrt{-1})(X' + X''\sqrt{-1})^2$$

ou encore

$$P = 2 \text{ fois partie réelle de } (\lambda' + \lambda''\sqrt{-1})(X'^2 - X''^2 + 2X'X''\sqrt{-1})$$

ou encore

$$P = 2\lambda'(X'^2 - X''^2) - 4\lambda'' X'X''.$$

De même, on aura

$$Q = 2(X'^2 - X''^2).$$

Donc les faisceaux P et Q se composeront nécessairement de droites réelles.

On voit que, lorsqu'il y a deux droites imaginaires conjuguées formant un faisceau, les racines de l'équation en λ sont nécessairement réelles, ce qui est d'accord avec le théorème de M. Weierstrass (¹).

θ. λ_1 et λ_2 sont égaux. On a

$$P = \lambda_1(X_1^2 + X_2^2), \qquad Q = -(X_1^2 + X_2^2).$$

Alors P et Q ne diffèrent que par un facteur constant. Il est facile de voir que l'on a

$$\frac{A}{A'} = \frac{B}{B'} = \frac{C}{C'} = -\lambda_1.$$

Tous les mineurs du premier ordre de $\Delta_1(\lambda)$, c'est-à-dire tous ses éléments, s'annulent à la fois.

Les deux faisceaux P et Q coïncident.

ι. $\Delta_1(\lambda)$ a un diviseur élémentaire double $\lambda - \lambda_1$; λ_1 est forcément réel. Suivant la réalité de $\sqrt{c_1}$, on a

$$P = \pm(2\lambda_1 X_1 X_2 + X_1^2),$$
$$Q = \mp 2 X_1 X_2.$$

Les deux faisceaux ont une droite commune.

Nous avons donné tout le détail de la discussion géométrique pour servir d'exemple dans les questions analogues que nous traiterons plus loin et sur lesquelles nous n'insisterons pas.

Encore quelques mots sur la question de Géométrie. Pour que les quatre droites des faisceaux P et Q forment un faisceau harmonique, il faut et il suffit que l'on ait

$$\lambda_1 + \lambda_2 = 0$$

ou encore

$$AC' + CA' = 2BB'.$$

C'est une condition connue.

Dans le cas où l'on a un diviseur élémentaire double et où les quatre

(¹) *Théorie des diviseurs élémentaires*, § VI, n° 52.

droites forment un faisceau harmonique, on a nécessairement

$$(AC - B^2)(A'C' - B'^2) = 0,$$

c'est-à-dire que l'un au moins des faisceaux doit se composer de deux droites confondues. On en conclut la condition précédente

$$AC' + CA' = 2BB',$$

qui est donc tout à fait générale.

L'équation en s est un cas particulier de l'équation en λ : celui où il y a deux diviseurs élémentaires réels.

Un théorème d'Algèbre a autant d'applications que l'on peut donner de significations géométriques aux lettres qui entrent dans les identités. Par exemple, au lieu de considérer, dans P et Q, les lettres x et y comme des coordonnées cartésiennes, on peut les considérer comme des coordonnées tangentielles. On aura alors à étudier les relations de position entre quatre points sur une droite.

Enfin faisons une dernière remarque. Les quatre droites (ou les quatre points) sont réelles dans deux cas : 1° λ_1 et λ_2 sont réels et l'une des quantités $\sqrt{c}$ est imaginaire; 2° λ_1 et λ_2 sont imaginaires. Il est facile de voir que, dans le premier cas, deux droites d'un faisceau comprennent une droite de l'autre, et que, dans le second, les deux faisceaux forment des angles intérieurs ou extérieurs l'un à l'autre. A ces résultats correspondent les signes du discriminant de l'équation en λ, c'est-à-dire

$$(AC' + CA' - 2BB')^2 - 4(AC - B^2)(A'C' - B'^2),$$

ou encore

$$(AC' - CA')^2 - 4(AB' - BA')(BC' - CB').$$

Ces résultats sont encore bien connus.

26. Nous ne donnerons aucun détail géométrique dans l'étude de l'équation

$$\Delta_2(\lambda) = \begin{vmatrix} A_{11}\lambda + B_{11} & A_{12}\lambda + B_{12} & A_{13}\lambda + B_{13} \\ A_{21}\lambda + B_{21} & A_{22}\lambda + B_{22} & A_{23}\lambda + B_{23} \\ A_{31}\lambda + B_{31} & A_{32}\lambda + B_{32} & A_{33}\lambda + B_{33} \end{vmatrix} = 0.$$

On sait qu'elle intervient dans la recherche des sécantes communes, ou des points de rencontre des tangentes communes à deux coniques.

Les cas principaux de la discussion seront les suivants :

1° Le déterminant a trois diviseurs élémentaires $\lambda - \lambda_1$, $\lambda - \lambda_2$, $\lambda - \lambda_3$; on peut avoir deux ou trois des quantités λ_1, λ_2, λ_3 égales entre elles.

On pourra ramener les deux formes

$$P = \Sigma A_{\alpha\alpha} x_\alpha^2 + 2\Sigma A_{\alpha\beta} x_\alpha x_\beta,$$
$$Q = \Sigma B_{\alpha\alpha} x_\alpha^2 + 2\Sigma A_{\alpha\beta} x_\alpha x_\beta$$

aux formes

$$P_1 = \lambda_1 X_1^2 + \lambda_2 X_2^2 + \lambda_3 X_3^2,$$
$$Q_1 = - X_1^2 - X_2^2 - X_3^2.$$

Dans ce cas rentre celui de l'équation en s, $\Delta_2(s) = 0$.

2° $\Delta_2(\lambda)$ a un diviseur élémentaire double $\lambda - \lambda_1$ et un simple $\lambda - \lambda_2$. On peut avoir $\lambda_1 = \lambda_2$.

On posera

$$P_1 = \lambda_1 (X_1 X_2 + X_2 X_1) + X_1^2 + \lambda_2 X_3^2,$$
$$Q_1 = -(X_1 X_2 + X_2 X_1) - X_3^2.$$

3° $\Delta_2(\lambda)$ a un diviseur élémentaire triple $\lambda - \lambda_1$.

On posera

$$P_1 = \lambda_1 (X_1 X_3 + X_2^2 + X_3 X_1) + (X_1 X_2 + X_2 X_1),$$
$$Q_1 = -(X_1 X_3 + X_2^2 + X_3 X_1).$$

4° Si les formes P et Q dépendent bien à la fois de trois variables indépendantes, on ne peut pas supposer que les mineurs du second ordre soient tous nuls à la fois, mais on peut supposer que ceux du premier ordre s'annulent tous en même temps et identiquement.

Dans ce cas, on posera

$$P_1 = X_3 X_1,$$
$$Q_1 = X_2 X_1.$$

27. Discutons encore rapidement l'équation

$$\Delta_3(\lambda) = \begin{vmatrix} A_{11}\lambda + B_{11} & A_{12}\lambda + B_{12} & A_{13}\lambda + B_{13} & A_{14} + B_{14} \\ A_{21}\lambda + B_{21} & A_{22}\lambda + B_{22} & A_{23}\lambda + B_{23} & A_{24} + B_{24} \\ A_{31}\lambda + B_{31} & A_{32}\lambda + B_{32} & A_{33}\lambda + B_{33} & A_{34} + B_{34} \\ A_{41}\lambda + B_{41} & A_{42}\lambda + B_{42} & A_{43}\lambda + B_{43} & A_{44} + B_{44} \end{vmatrix} = 0.$$

Elle intervient dans la discussion de l'intersection de deux surfaces du second ordre. (Painvin, *Nouvelles Annales de Mathématiques;* 1867, 1868.)

Premier cas. — Le déterminant $\Delta_3(\lambda)$ a quatre diviseurs élémentaires $\lambda-\lambda_1$, $\lambda-\lambda_2$, $\lambda-\lambda_3$, $\lambda-\lambda_4$; les quantités λ_1, λ_2, λ_3, λ_4 peuvent être égales les unes aux autres.

On ramènera les formes générales P et Q à

$$\begin{aligned} P_1 &= \lambda_1 X_1^2 + \lambda_2 X_2^2 + \lambda_3 X_3^2 + \lambda_4 X_4^2, \\ Q_1 &= -X_1^2 - X_2^2 - X_3^2 - X_4^2. \end{aligned}$$

Dans ce cas rentre celui de l'équation en s.

Deuxième cas. — On a un diviseur élémentaire double $\lambda-\lambda_1$ et deux diviseurs simples $\lambda_1-\lambda_2$, $\lambda-\lambda_3$. Les quantités λ_1, λ_2, λ_3 ne sont pas nécessairement distinctes.

On posera

$$\begin{aligned} P_1 &= \lambda_1(X_1X_2 + X_2X_1) + X_1^2 + \lambda_2 X_3^2 + \lambda_3 X_4^2, \\ Q_1 &= -(X_1X_2 + X_2X_1) - X_3^2 - X_4^2. \end{aligned}$$

Troisième cas. — On a un diviseur élémentaire triple $\lambda-\lambda_1$ et un diviseur élémentaire simple $\lambda-\lambda_2$. On peut avoir $\lambda_1=\lambda_2$.

On posera

$$\begin{aligned} P_1 &= \lambda_1(X_1X_3 + X_2^2 + X_3X_1) + X_1X_2 + X_2X_1 + \lambda_2 X_4^2, \\ Q_1 &= -(X_1X_3 + X_2^2 + X_3X_1) - X_4^2. \end{aligned}$$

Quatrième cas. — On a un diviseur élémentaire quadruple $\lambda-\lambda_1$.

On posera

$$\begin{aligned} P_1 &= \lambda_1(X_1X_4 + X_2X_3 + X_3X_2 + X_4X_1) + (X_1X_3 + X_2^2 + X_3X_1), \\ Q_1 &= -(X_1X_4 + X_2X_3 + X_3X_2 + X_4X_1). \end{aligned}$$

Cinquième cas. — On a deux diviseurs élémentaires doubles $\lambda-\lambda_1$ et $\lambda-\lambda_2$. On peut avoir $\lambda_1=\lambda_2$.

On posera

$$\begin{aligned} P_1 &= \lambda_1(X_1X_2 + X_2X_1) + X_1^2 + \lambda_2(X_3X_4 + X_4X_3) + X_3^2, \\ Q_1 &= -X_1^2 - X_3^2. \end{aligned}$$

Sixième cas. — Si les formes P et Q dépendent bien toutes deux à la fois de quatre variables indépendantes, on ne peut pas supposer les mineurs du second ordre de $\Delta_3(\lambda)$ tous identiquement nuls, mais on peut faire cette hypothèse pour ceux du premier ordre. Dans ce cas, on a

$$P_1 = X_3 X_1 + X_4^2,$$
$$Q_1 = X_3 X_2 + X_4^2.$$

Il est entendu que l'on a préparé les formes P et Q pour l'application de la théorie générale.

28. La discussion précédente s'applique à la classification des développables circonscrites à deux surfaces du second ordre. Il suffit d'interpréter les équations dans le système des coordonnées tangentielles.