ANNALES SCIENTIFIQUES DE L'É.N.S.

C. STÉPHANOS

Mémoire sur la théorie des formes binaires et sur l'élimination

Annales scientifiques de l'É.N.S. 3e série, tome 1 (1884), p. 329-388
<http://www.numdam.org/item?id=ASENS_1884_3_1__329_0>

MÉMOIRE

SUR LA

THÉORIE DES FORMES BINAIRES

ET SUR

L'ÉLIMINATION,

PAR M. CYPARISSOS STÉPHANOS.

L'importance de la théorie des invariants et covariants pour l'Algèbre n'est plus à établir aujourd'hui. Indépendamment des grandes et profondes questions que le développement de cette théorie a soulevées, elle nous a appris à chercher, dans chaque problème d'Algèbre, tout ce qu'il peut y avoir d'inaltérable par des substitutions linéaires convenables, et à donner ainsi aux méthodes et aux résultats un cachet de perfection et une généralité puisée à la nature même des choses.

Il est vrai que cette *mise sous forme projective* (comme on dit, d'après une expression empruntée à la Géométrie) des diverses questions d'Algèbre n'est pas toujours très commode; ce qu'on pourrait attribuer, en partie, à des raisons subjectives. Mais le fait est que cette difficulté est le plus souvent minime devant l'importance des résultats auxquels il s'agit d'arriver.

La théorie de l'élimination, entre deux équations à une seule variable, a déjà été l'objet de nombreuses recherches sous le point de vue de la théorie des formes; mais ces recherches se bornent, pour la plupart, à la manière dont on peut obtenir le résultant de deux formes données, et il n'y en a que fort peu, si je ne me trompe, qui se rapportent à la théorie générale du plus grand commun diviseur.

Par contre, on trouve, dans divers Mémoires rédigés en dehors de toute préoccupation de projectivité, des résultats qui, bien que valables pour le cas où les équations considérées, supposées d'ordres donnés, n'admettent point de racines infinies, ne sont plus applicables au cas où il s'agirait de chercher les facteurs linéaires que peuvent avoir en commun deux formes binaires d'ordres donnés.

Nous étant proposé dernièrement d'approfondir la théorie de l'élimination sous le point de vue projectif, nous sommes arrivés à plusieurs nouveaux résultats, et nous avons trouvé, entre autres, comment on devrait modifier les énoncés des propositions défectueuses mentionnées plus haut, de manière qu'elles ne se prêtent plus à aucune sorte d'objections.

Un des buts du travail actuel est précisément de donner un aperçu de ces divers résultats en les présentant comme des conséquences de la théorie des systèmes linéaires de formes binaires et de celle des formes apolaires, théories qui n'ont fixé l'attention que dans ces dernières années, mais dont l'importance se montre plus considérable d'un jour à l'autre.

Le présent Mémoire peut être considéré comme constitué de trois Parties distinctes.

Dans la première Partie (§§ I-III), nous étudions les propriétés des systèmes linéaires de formes binaires et les relations qui doivent avoir lieu entre $k+1$ formes binaires d'ordre $m (m \geqq k)$ pour que ces formes soient liées entre elles par quelque relation linéaire. Cette première Partie n'est que le développement, sous des points de vue différents, des trois premiers paragraphes de notre *Mémoire sur les faisceaux de formes binaires ayant une même jacobienne* (¹). Nous y avons pourtant ajouté (nᵒˢ 10-13) divers résultats, mis en lumière par des recherches postérieures pour la plupart à ce travail.

Dans une seconde Partie (§§ IV-VII), nous examinons les propriétés

(¹) Présenté à l'Académie des Sciences de Paris dans la séance du 12 décembre 1881 et inséré dans le *Recueil des Mémoires des Savants étrangers*, t. XXVII, n° 7; 1883.

de deux formes binaires a_x^m et d_x^{m-t} $(0 \leqq t < m)$, liées entre elles par la relation

$$(ad)^{m-t} a_x^t = 0 \text{ (}^1\text{)}.$$

Nous étudions ainsi, d'une part (§ IV), les formes a_x^m liées à une forme d_x^{m-t} donnée par la relation précédente, formes qu'on appelle *conjuguées* à d_x^{m-t}, et, d'autre part (§§ V-VII), les formes d_x^{m-t}, liées par la même relation à une forme a_x^m donnée, formes qu'on appelle *apolaires à* a_x^m.

Je passe ici sur plusieurs résultats nouveaux de cette Partie et je me borne à signaler, d'après les résultats des §§ V-VII, les faits suivants :

Étant donnée une forme binaire $f = a_x^m$ quelconque, on peut toujours déterminer deux formes r_x^k et s_x^l, où $k + l = m + 2$, de manière qu'elles soient apolaires à f et n'admettent aucun facteur linéaire en commun. Les nombres k et l $(k \leqq l)$ sont toujours déterminés d'une manière unique.

Si $k = l$, ce qui suppose que m soit pair, chacune des deux formes r et s peut être déterminée d'une infinité de manières. Pourtant le faisceau $\varkappa r + \lambda s$ est toujours le même. Les formes de ce faisceau constituent les seules formes apolaires à f qui soient d'ordre minimum.

Si $k < l$, la forme r est complètement déterminée à un facteur constant près, et constitue la seule forme d'ordre minimum qui soit apolaire à f. Quant à la forme s, elle peut être déterminée d'une infinité de manières; malgré cela, le système linéaire

$$\varkappa_x^{l-k} r + \lambda s,$$

où $\varkappa_x^{l-k}$ désigne une forme arbitraire d'ordre $l - k$ et λ une constante arbitraire, reste toujours le même.

Dans l'un et dans l'autre de ces deux cas $(k \leqq l)$, les formes comprises dans l'expression

$$\sigma_x^{m-k-t} r - \rho_x^{m-l-t} s \quad (m \geqq m - t \geqq k)$$

(1) Pour la commodité des notations je me servirai partout, par la suite, des notations symboliques, comme elles ont été mises en usage par MM. Clebsch et Gordan. Le lecteur qui voudrait se familiariser avec ces notations, dont nous ne ferons, du reste, ici que des applications élémentaires, pourrait consulter l'Ouvrage de Clebsch : *Theorie der binären algebraischen Formen* (Leipzig, 1872), ou encore le premier Volume de la *Géométrie* du même auteur, publiée par M. Lindemann (traduction française par M. Benoist; Paris, 1879).

(*où les formes* ρ *et* σ *sont arbitraires*) *constituent les seules formes d'ordre* $m-t$ *qui soient apolaires à* f.

Les formes r *et* s, *déterminées d'après ce qui précède, peuvent être deux formes quelconques de leurs ordres respectifs, astreintes seulement à la condition de n'avoir aucun facteur linéaire en commun. Il se trouve, en effet, qu'en partant de deux formes* r_x^k *et* s_x^l *arbitraires et n'admettant aucun facteur linéaire en commun, on peut toujours déterminer d'une manière unique la forme* $f = a_x^m (m = k+l-2)$, *de manière qu'on ait*

$$(ar)^k a_x^{m-k} = 0, \quad (as)^l a_x^{m-l} = 0.$$

C'est à ces propriétés qu'est due la relation qui existe entre la théorie de l'élimination et la théorie des formes apolaires.

Enfin, dans la troisième Partie (§§ VIII-IX), nous nous occupons exclusivement de la théorie de l'élimination, pour le cas de deux formes binaires $r = r_x^k$ et $s = s_x^l$ $(k \leqq l)$.

Les développements de cette Partie sont fondés sur la considération de la forme

$$\omega_{i-1}(x^{i-1}, x^i, \ldots, x^{k+l-i})$$

symétrique et d'ordre $i-1$ par rapport aux $k+l-2i+2$ séries de variables binaires $x^{i-1}, x^i, \ldots, x^{k+l-i}$), dont l'évanouissement, pour quelque système de valeurs des $x^{i-1}, x^i, \ldots, x^{k+l-i}$, constitue la condition nécessaire et suffisante pour qu'une forme comprise dans l'expression

$$\sigma_x^{l-i} r - \rho_x^{k-i} s \quad (0 < i \leqq k \leqq l)$$

soit divisible par la forme $(xx^{i-1})(xx^i)\ldots(xx^{k+l-i})$, où

$$(xx^j) = x_1 x_{j2} - x_2 x_{j1}.$$

La grande importance des formes $\omega_0, \omega_1, \ldots, \omega_{k-1}$ (dont la première coïncide avec le résultant des deux formes r et s), pour la théorie de l'élimination, tient à cette circonstance, que l'évanouissement identique de la forme ω_{i-1} fournit l'ensemble des relations (fondamentales) qui doivent avoir lieu, entre les coefficients des deux formes r et s, pour que ces deux formes admettent i facteurs linéaires en commun.

Parmi les résultats obtenus par la considération des formes ω_{i-1}, je citerai ici les suivants :

Pour que les deux formes r *et* s *admettent au moins* i *facteurs linéaires* *en commun (c'est-à-dire pour que l'on ait* $\omega_{i-1} = 0$*), il faut et il suffit que la forme*

$$R_{i-1}(x) = \omega_{i-1}(x, x, \ldots, x),$$

qui est d'ordre $(i-1)(k+l-2i+2)$ *par rapport à* x*, soit (identiquement) nulle, quel que soit* x*.*

En désignant maintenant par y une valeur *donnée* de x, choisie de manière qu'on n'ait pas à la fois $r(y) = 0$ et $s(y) = 0$, on aura ces propositions :

Dans le cas où $R_{i-1} = 0$, $R_i \neq 0$, *le plus grand commun diviseur des deux formes* r *et* s *est une forme* $p(x)$, *d'ordre* i, *telle que*

$$\omega_i(x, y, y, \ldots, y) = \lambda p(x),$$

λ *désignant une constante différente de zéro.*

Pour que les deux formes r *et* s *admettent* i *facteurs linéaires en commun, il faut et il suffit qu'on ait*

$$R_0 = \omega_0 = 0, \quad R_1(y) = 0, \quad \ldots, \quad R_{i-1}(y) = 0.$$

Si l'on veut, de plus, que les deux formes r *et* s *n'admettent pas plus de* i *facteurs linéaires en commun, il faut ajouter, aux* i *relations précédentes, l'inégalité* $R_i(y) \neq 0$.

Pour que les deux formes r *et* s *admettent, comme plus grand commun diviseur, une forme d'ordre* i, *il faut et il suffit que la forme, d'ordre* $i-1$ *par rapport à* x,

$$\omega_{i-1}(x, y, y, \ldots, y)$$

soit nulle, quel que soit x, *pourvu qu'on ait, en même temps,* $R_i(y) \neq 0$.

Cette dernière proposition est d'autant plus remarquable que l'évanouissement de la forme $\omega_{i-1}(x, y, y, \ldots, y)$, quel que soit x, ne peut fournir aucune indication sur le nombre des facteurs linéaires que les deux formes r et s peuvent avoir en commun, dans le cas où l'on aurait $R_i(y) = 0$ (*voir* le n° 46).

I.

Propriétés relatives au cas où $k+1$ formes binaires $f = a_k^m$ $(m \geqq k)$ sont liées entre elles par quelque relation linéaire.

1. Soient $k+1$ formes binaires d'ordre $m(\geqq k)$

$$f_i = a_{ix}^m = \Sigma \binom{m}{j} a_j^i x_1^{m-j} x_2^j \quad (i = 0, 1, \ldots, k).$$

C'est une proposition élémentaire que si ces formes sont liées entre elles par quelque relation linéaire

$$\lambda_0 f_0 + \lambda_1 f_1 + \ldots + \lambda_k f_k = 0,$$

tous les déterminants (d'ordre $k+1$) du système

$$(1) \qquad \left\{ \begin{array}{llll} a_0^0, & a_1^0, & \ldots, & a_m^0, \\ a_0^1, & a_1^1, & \ldots, & a_m^1, \\ \ldots, & \ldots, & \ldots, & \ldots, \\ a_0^k, & a_1^k, & \ldots, & a_m^k \end{array} \right.$$

doivent être nuls, et réciproquement.

Il importe de remarquer que les diverses équations qui expriment l'évanouissement des $\binom{m+1}{k+1}$ déterminants d'ordre $k+1$ du système précédent peuvent être condensées en une seule, celle qui exprime l'évanouissement (identique) de la forme

$$(\mathrm{A}) \qquad \begin{vmatrix} f_0(x^0) & f_0(x^1) & \ldots & f_0(x^k) \\ f_1(x^0) & f_1(x^1) & \ldots & f_1(x^k) \\ \ldots\ldots & \ldots\ldots & \ldots & \ldots\ldots \\ f_k(x^0) & f_k(x^1) & \ldots & f_k(x^k) \end{vmatrix},$$

quelles que soient les valeurs attribuées aux variables

$$x^0, \; x^1, \; \ldots, \; x^k.$$

Et d'abord il est clair que, lorsque les $k+1$ formes f_i sont liées entre elles par quelque relation linéaire, la forme précédente (A) est identiquement nulle. Il s'agit donc d'établir que, réciproquement, l'évanouissement identique de la forme (A) conduit précisément aux $\binom{m+1}{k+1}$ équations qui expriment l'évanouissement de tous les déterminants du système (1).

Pour cela, remarquons que, d'après un théorème dû à Binet et à Cauchy, la forme (A) doit être égale à la somme des produits des déterminants du système (1) par les déterminants correspondants du système

$$(2)\qquad \begin{cases} x_{01}^m, & \binom{m}{1} x_{01}^{m-1} x_{02}, & \ldots, & x_{02}^m, \\ x_{11}^m, & \binom{m}{1} x_{11}^{m-1} x_{12}, & \ldots, & x_{12}^m, \\ \ldots, & \ldots\ldots\ldots\ldots, & \ldots, & \ldots, \\ x_{k1}^m, & \binom{m}{1} x_{k1}^{m-1} x_{k2}, & \ldots, & x_{k2}^m. \end{cases}$$

Or, il est clair que les divers déterminants de ce dernier système sont des formes linéairement indépendantes entre elles, ce qui revient à dire qu'une combinaison linéaire $\Sigma L_i X_i$ des déterminants X_i de ce système ne peut être identiquement nulle que dans le cas où tous les coefficients L_i sont nuls. On voit par là comment l'évanouissement identique de la forme (A) a pour conséquence l'évanouissement de tous les déterminants du système (1).

2. A côté de la forme (A) se place encore une autre forme, contenant $m-k$ séries de variables $x^{k+1}, x^{k+2}, \ldots, x^m$, et qui, à l'exemple de la forme (A), ne peut être identiquement nulle qu'aussitôt que les déterminants du système (1) sont tous nuls.

Cette seconde forme est la suivante :

$$(B)\qquad \begin{vmatrix} a_0^0 & a_1^0 & \ldots & a_m^0 \\ a_0^1 & a_1^1 & \ldots & a_m^1 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_0^k & a_1^k & \ldots & a_m^k \\ \xi_0^{k+1} & \xi_1^{k+1} & \ldots & \xi_m^{k+1} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \xi_0^m & \xi_1^m & \ldots & \xi_1^m \end{vmatrix},$$

où nous avons posé, pour abréger,

$$\xi_j^i = (-1)^j x_{i1}^j x_{i2}^{m-j} \quad (i = k+1,\ k+2,\ \ldots,\ m;\ j = 0,\ 1,\ \ldots,\ m).$$

Comme cette forme est égale à la somme des produits des déterminants du système (1) par les déterminants *complémentaires* du système

$$(3)\qquad \left\{\begin{array}{llll} \xi_0^{k+1}, & \xi_1^{k+1}, & \ldots, & \xi_m^{k+1}, \\ \ldots, & \ldots, & \ldots, & \ldots, \\ \xi_0^m, & \xi_1^m, & \ldots, & \xi_m^m, \end{array}\right.$$

où

$$\xi_j^i = (-1)^j x_{i1}^j x_{i2}^{m-j},$$

on voit que, pour passer de la forme (A) à la forme (B), il suffit de considérer l'expression (unique) de (A) en fonction linéaire des déterminants du système (2) et d'y remplacer, au lieu des déterminants du système (2), les déterminants complémentaires du système (3).

3. Au lieu de la forme (A), qui est alternée et d'ordre m par rapport aux $x^0, x^1, \ldots, x^k$, on peut aussi considérer la forme, symétrique et d'ordre $m-k$ par rapport aux $x^0, x^1, \ldots, x^k$, qu'on obtient en divisant (A) par la fonction alternée

$$\begin{aligned} \Delta(x^0, x^1, \ldots, x^k) &= (-1)^{\frac{k(k+1)}{2}} (x^0x^1)(x^0x^2)\ldots(x^{k-1}x^k) \\ &= (-1)^{\frac{k(k+1)}{2}} \begin{vmatrix} x_{01}^k & x_{01}^{k-1}x_{02} & \ldots & x_{02}^k \\ x_{11}^k & x_{11}^{k-1}x_{12} & \ldots & x_{12}^k \\ \ldots & \ldots\ldots & \ldots & \ldots \\ x_{k1}^k & x_{k1}^{k-1}x_{k2} & \ldots & x_{k2} \end{vmatrix}. \end{aligned}$$

Cette nouvelle forme, nous la représenterons par

$$(\mathrm{C})\qquad \Phi(x^0, x^1, \ldots, x^k) = \frac{\Sigma \pm f_0(x^0)\, f_1(x^1)\ldots f_k(x^k)}{\Delta(x^0, x^1, \ldots, x^k)}.$$

C'est un fait connu ([1]) que, si l'on représente par

$$h = \Sigma \tbinom{k+1}{j} h_j x_1^{k+1-j} x_2^j$$

la forme

$$(xx^0)(xx^1)\ldots(xx^k),$$

([1]) *Voir* le Mémoire de M. Gordan : *Ueber den grössten gemeinsamen Factor* (*Math. Annalen*, t. VII, p. 432-448, 1874).

les quotients des divers déterminants du système

$$(2') \qquad \left\{\begin{array}{llll} x_{01}^m, & x_{01}^{m-1}x_{02}, & \ldots, & x_{02}^m, \\ x_{11}^m, & x_{11}^{m-1}x_{12}, & \ldots, & x_{12}^m, \\ \ldots, & \ldots\ldots\ldots, & \ldots, & \ldots, \\ x_{k1}^m, & x_{k1}^{m-1}x_{k2}, & \ldots, & x_{k2}^m, \end{array}\right.$$

par la fonction alternée

$$\Delta(x^0, x^1, \ldots, x^k)$$

sont égaux aux déterminants complémentaires du système à $m+1$ colonnes

$$\begin{array}{lllll} h_0, & \binom{k+1}{1}h_1, & \binom{k+2}{2}h_2, & \ldots, & 0, \\ 0, & h_0, & \binom{k+1}{1}h_1, & \ldots, & 0, \\ ., & .., & \ldots\ldots\ldots, & \ldots, & ., \\ 0, & 0, & 0, & \ldots, & h_{k+1}. \end{array}$$

De là il suit que l'expression entière de la forme (C) est

$$(C') \qquad \Phi(x^0, x^1, \ldots, x^k) = \left|\begin{array}{cccc} a_0^0 & \binom{m}{1}a_1^0 & \ldots & a_m^0 \\ a_0^1 & \binom{m}{1}a_1^1 & \ldots & a_m^1 \\ .. & \ldots\ldots & \ldots & .. \\ a_0^k & \binom{m}{1}a_1^k & \ldots & a_m^k \\ h_0 & \binom{k+1}{1}h_1 & \ldots & 0 \\ 0 & h_0 & \ldots & 0 \\ . & .. & \ldots & . \\ 0 & 0 & \ldots & h_{k+1} \end{array}\right|.$$

4. D'une manière analogue, on peut considérer, au lieu de la forme alternée (B), la forme symétrique et d'ordre $k+1$ par rapport à chacune des $m-k$ séries de variables $x^{k+1}, x^{k+2}, \ldots, x^m$

$$(D) \qquad \Omega(x^{k+1}, x^{k+2}, \ldots, x^m) = \frac{\Sigma \pm a_0^0 a_1^1 \ldots a_k^k \xi_{k+1}^{k+1} \ldots \xi_m^m}{\Delta(x^{k+1}, x^{k+2}, \ldots, x^m)},$$

qu'on obtient en divisant la forme (B) par la fonction alternée

$$\Delta(x^{k+1}, x^{k+2}, \ldots, x^m) = (-1)^{\frac{(m-k)(m-k-1)}{2}}(x^{k+1}x^{k+2})(x^{k+1}x^{k+3})\ldots(x^{m-1}x^m).$$

Voici maintenant comment on peut obtenir l'expression entière de la forme (D).

Supposons qu'on ait remplacé, dans l'expression de la forme (B), les coefficients a_j^i des formes f_i

$$f_0,\ f_1,\ \ldots,\ f_k$$

par les coefficients correspondants $(-1)^j x_{i1}^j x_{i2}^{m-j}$ des formes $(xx^i)^m$:

$$(xx^0)^m,\ (xx^1)^m,\ \ldots,\ (xx^k)^m.$$

On obtient ainsi une expression qui est égale à

$$(x^0x^1)(x^0x^2)\ldots(x^{m-1}x^m) = (-1)^{\frac{m(m+1)}{2}} \Delta(x^0, x^1, \ldots, x^k, x^{k+1}, \ldots, x^m).$$

Pour arriver maintenant à l'expression de la forme (B), par le moyen des symboles a_{i1}, a_{i2} des formes

$$f_i = a_{ix}^m = (a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2)^m,$$

il suffit évidemment de remplacer, dans l'expression

$$(x^0x^1)(x^0x^2)\ldots(x^{m-1}x^m),$$

les variables x_{i1}, x_{i2} $(i = 0, 1, \ldots, k)$ par les symboles $-a_{i2}$, a_{i1}.

De cette manière on trouve

$$\begin{aligned}&\Sigma \pm a_0^0 a_1^1 \ldots a_k^k \xi_{k+1}^{k+1} \ldots \xi_m^m \\ &= (-1)^{\frac{m(m+1)}{2}} \Delta(a_0, a_1, \ldots, a_k) \prod_{i=0}^{i=k} a_{ix^{k+1}} a_{ix^{k+2}} \ldots a_{ix^m} . \Delta(x^{k+1}, x^{k+2}, \ldots, x^m),\end{aligned}$$

étant posé

$$\Delta(a_0, a_1, \ldots, a_k) = (-1)^{\frac{k(k+1)}{2}} (a_0a_1)(a_0a_2)\ldots(a_{k-1}a_k),$$
$$(a_ia_j) = a_{i1}a_{j2} - a_{i2}a_{j1}.$$

L'expression cherchée, de la forme (D), est donc

$$(\mathrm{D}') \qquad \left\{\begin{aligned}&\Omega(x^{k+1}, x^{k+2}, \ldots, x^m) \\ &\quad = (-1)^{\frac{m(m+1)}{2}} \Delta(a_0, a_1, \ldots, a_k) \prod_{i=0}^{i=k} a_{ix^{k+1}} a_{ix^{k+2}} \ldots a_{ix^m}.\end{aligned}\right.$$

Il importe de remarquer qu'en posant

$$d_x^{m-k} = (xx^{k+1})(xx^{k+2})\ldots(xx^m)$$

et

$$(da_i)^{m-k} a_{ix}^k = a_{ix^{k+1}} a_{ix^{k+2}} \ldots a_{ix^m} a_{ix}^k = \Sigma \binom{k}{j} A_j^i x_1^{k-j} x_2^j$$

on a

$$\begin{vmatrix} A_0^0 & A_1^0 & \ldots & A_k^0 \\ A_0^1 & A_1^1 & \ldots & A_k^1 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ A_0^k & A_1^k & \ldots & A_k^k \end{vmatrix} = (-1)^{\frac{m(m+1)}{2}+\frac{k(k+1)}{2}} \Omega(x^{k+1}, x^{k+2}, \ldots, x^m).$$

5. Comme les déterminants du système (2) sont des formes linéairement indépendantes entre elles, il faut bien que les $\binom{m+1}{k+1}$ formes, symétriques et d'ordre $m-k$ par rapport aux $x^0, x^1, \ldots, x^k$, qu'on obtient en divisant ces déterminants par

$$\Delta(x^0, x^1, \ldots, x^k),$$

soient aussi des formes linéairement indépendantes entre elles.

Or on sait que toute fonction symétrique et d'ordre $m-k > 0$ par rapport à $k+1$ variables $x_0, x_1, \ldots, x_k$ (non homogènes) peut être composée linéairement, et cela d'une seule manière, au moyen de $\binom{m+1}{k+1}$ fonctions symétriques élémentaires de la forme

$$\Sigma x_0^{t_0} x_1^{t_1} \ldots x_k^{t_k}, \quad (t_0, t_1, \ldots, t_k \leqq m-k).$$

De là on déduit aisément que, si l'on considère l'expression de la forme (C) en fonction linéaire des formes symétriques élémentaires

$$\Sigma x_{01}^{t_0} x_{02}^{m-k-t_0} x_{11}^{t_1} x_{12}^{m-k-t_1} \ldots x_{k1}^{t_k} x_{k2}^{m-k-t_k}$$

correspondantes, les coefficients de cette expression seront des combinaisons linéaires, linéairement indépendantes entre elles, des déterminants du système (2).

Des propriétés analogues subsistent, évidemment, pour la forme (D).

II.

Systèmes linéaires de formes binaires. — Formes involutives.

6. Lorsque $k+1$ formes binaires, d'ordre $m (m \geqq k)$,

$$f_0, f_1, \ldots, f_k,$$

sont linéairement indépendantes entre elles, on dit que les formes comprises dans l'expression

$$\lambda_0 f_0 + \lambda_1 f_1 + \ldots + \lambda_k f_k, \tag{4}$$

où les $\lambda_0, \lambda_1, \ldots, \lambda_k$ désignent des paramètres arbitraires, constituent un *système linéaire à k paramètres*. Celles des formes d'un tel système, qui ne diffèrent entre elles que par un facteur constant, sont considérées comme coïncidentes, c'est-à-dire comme constituant un même individu du système linéaire. Dans les cas où $k=1$ et $k=2$, le système linéaire est désigné sous les noms de *faisceau* et de *réseau*.

A la notion d'un système linéaire de formes binaires, tel que (4), correspond une notion géométrique également importante. Ainsi, lorsqu'on considère les groupes de points (ou autres éléments) représentés sur une droite (une courbe rationnelle, etc.) par les diverses formes binaires d'ordre m appartenant à un système binaire à $k (\leqq m)$ paramètres, on obtient un système k fois infini de groupes de m points, auquel on a donné le nom d'*involution du $m^{ième}$ ordre et du $k^{ième}$ rang* (1).

Pour obtenir la condition, pour qu'une forme du système linéaire (4) soit divisible par

$$(xx^0)(xx^1)\ldots(xx^k),$$

il suffit, évidemment, d'égaler à zéro le déterminant qu'on obtient en éliminant les paramètres $\lambda_0, \lambda_1, \ldots, \lambda_k$, ainsi que les $m-k$ coefficients

(1) Ces involutions ont été considérées, pour le cas où $k<1$, par Poncelet (dans la 2e édition de son *Traité des propriétés projectives des figures*, 2e volume, p. 235-267, 1866), Battaglini [*Sulle forme binarie di grado qualunque* (*Memorie dell'Accad. di Napoli*, 1867)], Cayley et autres auteurs. Dans ces derniers temps, elles ont fait l'objet de nombreuses recherches géométriques par MM. Emile Weyr, Le Paige, Franz Meyer, etc., sans parler des travaux algébriques qu'on peut y rattacher également et que nous aurons l'occasion de citer par la suite.

de la forme $\varphi(x)$ d'ordre $m-k-1$, entre les $m+1$ relations auxquelles conduit l'évanouissement identique de la forme

$$\lambda_0 f_0 + \lambda_1 f_1 + \ldots + \lambda_k f_k + (xx^0)(xx^1)\ldots(xx^k)\,\varphi(x).$$

Ainsi, en représentant la forme

$$(xx^0)(xx^1)\ldots(xx^k)$$

par

$$h = h_x^{k+1} = \Sigma \tbinom{k+1}{j} h_j x_1^{k+1-j} x_2^j,$$

on aura, pour expression du déterminant en question,

$$(C')\qquad \begin{vmatrix} a_0^0 & \binom{m}{1} a_1^0 & \ldots & a_m^0 \\ a_0^1 & \binom{m}{1} a_1^1 & \ldots & a_m^1 \\ \ldots & \ldots\ldots & \ldots & \ldots \\ a_0^k & \binom{m}{1} a_1^k & \ldots & a_m^k \\ h_0 & \binom{k+1}{1} h_1 & \ldots & 0 \\ 0 & h_0 & \ldots & 0 \\ \cdot & \cdot\,\cdot & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & \ldots & h_{k+1} \end{vmatrix},$$

étant posé

$$f_i = \Sigma \tbinom{m}{j} a_j^i x_1^{m-j} x_2^j.$$

Du reste, nous savons que l'expression précédente est égale à la forme

$$(C)\qquad \Phi(x^0, x^1, \ldots, x^k) = \frac{\Sigma \pm f_0(x^0) f_1(x^1)\ldots f_k(x^k)}{\Delta(x^0, x^1, \ldots, x^k)},$$

que nous avons déjà eu à considérer au n° **3**, forme qui ne saurait être identiquement nulle (quelles que soient les $x^0, x^1, \ldots, x^k$) tant que les formes $f_0, f_1, \ldots, f_k$ sont linéairement indépendantes entre elles.

Toute forme symétrique analogue à la forme (C) peut être appelée *forme symétrique involutive,* comme correspondant à un système linéaire à k paramètres et définissant, par conséquent, une involution du $m^{\text{ième}}$ ordre et du $k^{\text{ième}}$ rang.

De même, on peut appeler *forme alternée involutive* toute forme alternée analogue à la forme

$$(A)\qquad \Sigma \pm f_0(x^0) f_1(x^1)\ldots f_k(x^k).$$

Un système linéaire à k paramètres, tel que (4), est complètement déterminé lorsqu'on donne les rapports mutuels des déterminants du système

$$(1)\qquad \begin{cases} a_0^0, & a_1^0, & \ldots, & a_m^0, \\ a_0^1, & a_1^1, & \ldots, & a_m^1, \\ \ldots, & \ldots, & \ldots, & \ldots, \\ a_0^k, & a_1^k, & \ldots, & a_m^k, \end{cases}$$

puisque les formes involutives (A) et (C) correspondantes sont alors complètement déterminées (*voir* nos 1 et 5).

Les rapports mutuels des déterminants du système (1) ne changent pas lorsqu'on remplace les formes f_i par d'autres formes, linéairement indépendantes entre elles, contenues dans le système (4). De là il suit qu'un pareil système linéaire est susceptible d'un nombre $(k+1)(m-k)$ fois infini de déterminations.

7. Comme les déterminants d'un système à m lignes et à $m+1$ colonnes sont, en général, indépendants les uns des autres, il se trouve que toute forme alternée et d'ordre m (de même que toute forme symétrique et du premier ordre), par rapport à m séries de variables binaires, est involutive par rapport à toutes ces séries de variables.

Par contre, pour qu'une forme alternée et d'ordre m (ou une forme symétrique et d'ordre $m-k>1$), par rapport à $k+1<m$ séries de variables $x^0, x^1, \ldots, x^k$, soit involutive par rapport à ces variables, il faut que ses $\binom{m+1}{k+1}$ coefficients satisfassent à un grand nombre de relations correspondant aux relations qui existent entre les déterminants du système (1).

Ainsi, par exemple, pour qu'une forme

$$\varphi(x, y) = -\varphi(y, x),$$

alternée par rapport à deux séries de variables binaires x et y, soit involutive, c'est-à-dire de la forme

$$f_0(x) f_1(y) - f_0(y) f_1(x),$$

il faut et il suffit que la forme

$$\varphi(y, z)\,\varphi(x, t) + \varphi(z, x)\,\varphi(y, t) + \varphi(x, y)\,\varphi(z, t)$$

soit identiquement nulle, quelles que soient les valeurs de x, y, z, t (1).

Une forme symétrique et involutive par rapport à $k+1$ séries de variables $x^0, x^1, \ldots, x^k$ jouit de cette propriété qu'elle est aussi involutive par rapport à $k'+1$ quelconques de ces $k+1$ séries de variables.

Ainsi, en supposant que la forme involutive symétrique

$$\Phi(x^0, x^1, \ldots, x^k)$$

soit relative au système linéaire (4), la forme involutive

$$\varphi(x^0, x^1, \ldots, x^{k'}) = \Phi(x^0, x^1, \ldots, x^{k'}, y^{k'+1}, y^{k'+2}, \ldots, y^k)$$

sera relative au système linéaire composé par celles des formes du système (4) qui sont divisibles par

$$(xy^{k'+1})(xy^{k'+2})\ldots(xy^k).$$

Cette forme involutive $\varphi(x^0, x^1, \ldots, x^{k'})$ peut quelquefois devenir identiquement nulle par un choix convenable des paramètres $y^{k'+1}, \ldots, y^k$; dans ce cas, les formes du système (4) qui sont divisibles par

$$(xy^{k'+1})(xy^{k'+2})\ldots(xy^k),$$

forment un système linéaire à plus de k' paramètres (2).

Réciproquement, on peut démontrer que, *toutes les fois qu'une forme, symétrique par rapport à $k+1$ séries de variables binaires $x^0, x^1, \ldots, x^k$, est involutive par rapport à un certain nombre $k'+1$ ($k'>0$) de ces $k+1$ séries de variables, elle doit être aussi involutive par rapport à l'ensemble de ces $k+1$ séries de variables $x^0, x^1, \ldots, x^k$.*

Il s'ensuit de là que :

Pour qu'une forme, symétrique par rapport à $k+1$ séries de variables

---

(1) Voir, pour la démonstration de cette propriété, notre *Mémoire sur les faisceaux de formes binaires ayant une même jacobienne*, p. 29 (*Recueil des Mémoires des savants étrangers*, t. XXVII, n° 7; 1883).

(2) Les valeurs de $y^{k'+1}, y^{k'+2}, \ldots, y^k$ pour lesquelles cette circonstance a lieu sont celles qui annulent tous les déterminants du système :

$$\left\| \begin{matrix} f_0(y^{k'+1}) & f_1(y^{k'+1}) & \ldots & f_k(y^{k'+1}) \\ \ldots\ldots & \ldots\ldots & \ldots & \ldots\ldots \\ f_0(y^k) & f_1(y^k) & \ldots & f_k(y^k) \end{matrix} \right\|.$$

binaires, soit involutive par rapport à toutes ces séries de variables, il faut et il suffit qu'elle soit involutive par rapport à deux de ces séries de variables arbitrairement choisies.

8. De même que les formes (A) et (C), les formes (B) et (D), considérées aux n^{os} **2** et **4**, sont involutives par rapport aux $m-k$ séries de variables

$$x^{k+1},\ x^{k+2},\ \ldots,\ x^{m}$$

qui y entrent. Le système linéaire auquel se rapportent ces deux formes est celui que l'on appelle *conjugué* du système linéaire (4), auquel se rapportent les formes (A) et (C).

Deux formes binaires

$$f = a_x^m = \Sigma\tbinom{m}{j} a_j x_1^{m-j} x_2^j \quad \text{et} \quad g = b_x^m = \Sigma\tbinom{m}{j} b_j x_1^{m-j} x_2^j$$

sont appelées *conjuguées* (d'après M. Rosanes) lorsque leur invariant simultané

$$(f, g)_m = (ab)^m = \Sigma(-1)^j \tbinom{m}{j} a_j b_{m-j}$$

est nul.

Si m formes binaires d'ordre m

$$g_1,\ g_2,\ \ldots,\ g_m,$$

conjuguées à la forme f, sont linéairement indépendantes entre elles, toute forme $g = g_x^m$, conjuguée à f, sera comprise dans le système linéaire

$$\lambda_1 g_1 + \lambda_2 g_2 + \ldots + \lambda_m g_m.$$

De même, étant donné un système linéaire à k paramètres

$$\lambda_0 f_0 + \lambda_1 f_1 + \ldots + \lambda_k f_k,$$

les formes d'ordre m conjuguées aux formes de ce système donnent un autre système, à $m-k-1$ paramètres,

$$\lambda_{k+1} g_{k+1} + \lambda_{k+2} g_{k+2} + \ldots + \lambda_m g_m. \tag{5}$$

C'est ce second système linéaire qu'on appelle *conjugué* du premier [1].

Puisque les $m-k$ formes $g_{k+1}, \ldots, g_m$ correspondent à $m-k$ so-

---

[1] Dans son Mémoire cité plus haut, M. Battaglini avait déjà considéré la notion des *involutions conjuguées*, qu'il appelle *involutions associées*.

lutions linéairement indépendantes des $k+1$ équations linéaires

$$(f_0, g)_m = 0, \quad (f_1, g)_m = 0, \quad \ldots, \quad (f_k, g)_m = 0,$$

il faut bien, d'après un théorème énoncé d'abord par Grassmann et retrouvé depuis par divers géomètres (Clebsch, Brill, d'Ovidio), que les déterminants du système

$$(6) \qquad \left\{ \begin{array}{llll} b_m^{k+1}, & -\binom{m}{1} b_{m-1}^{k+1}, & \ldots, & (-1)^m b_0^{k+1}, \\ \ldots, & \ldots\ldots\ldots\ldots & \ldots, & \ldots\ldots\ldots\ldots, \\ b_m^m, & -\binom{m}{1} b_{m-1}^m, & \ldots, & (-1)^m b_0^m. \end{array} \right.$$

soient proportionnels aux déterminants complémentaires du système (1).

Ce fait peut servir à démontrer que la forme involutive

$$\Sigma \pm g_{k+1}(x^{k+1})\, g_{k+2}(x^{k+2}) \ldots g_m(x^m),$$

relative au système linéaire (5), conjugué du système linéaire (4), coïncide, à un facteur numérique près, avec la forme alternée (B) considérée au n° **2**.

Pour cela, il suffit de remarquer que la forme involutive

$$\Sigma \pm g_{k+1}(x^{k+1})\, g_{k+2}(x^{k+2}) \ldots g_m(x^m)$$

est égale à la somme des produits des déterminants du système (6) par les déterminants correspondants du système (3).

Il est, de même, aisé d'établir directement que la forme

$$(\mathrm{D}) \qquad \Omega(x^{k+1}, x^{k+2}, \ldots, x^m) = (-1)^{\frac{m(m+1)}{2} + \frac{k(k+1)}{2}} \Sigma \pm \mathrm{A}_0^0 \mathrm{A}_1^1 \ldots \mathrm{A}_k^k,$$

considérée au n° 4, coïncide avec la forme involutive symétrique relative au système linéaire (5), conjugué du système (4).

Pour cela, supposons qu'une forme conjuguée aux formes du système linéaire (4) soit divisible par

$$d_x^{m-k} = (x x^{k+1})(x x^{k+2}) \ldots (x x^m),$$

et soit $g = c_x^k d_x^{m-k}$ cette forme. Nous aurons ainsi les $k+1$ relations

$$0 = (f_i, g)_m = (a_i c)^k (a_i d)^{m-k} = (-1)^{m-k} (a_i c)^k a_{ix^{k+1}} a_{ix^{k+2}} \ldots a_{ix^m},$$
$$(i = 0, 1, \ldots, k).$$

Pour obtenir la condition pour qu'une des formes conjuguées aux formes du système linéaire (4) soit divisible par d_x^{m-k}, on aura évidemment à éliminer les $k+1$ coefficients de la forme c_x^k entre les $k+1$ relations précédentes. Or il est à remarquer que le résultat de cette élimination est, à un facteur numérique près, égal au déterminant

$$\Sigma \pm A_0^0 A_1^1 \ldots A_k^k$$

(du n° 4), et par conséquent proportionnel à la forme (D). Cette forme (D) est donc la forme involutive symétrique relative au système linéaire (5), conjugué du système (4) [1].

9. Dans le cas où $k = m$, la forme involutive (D), de même que la forme involutive (C), se réduit, à un facteur numérique près, au déterminant

$$\Sigma \pm a_0^0 a_1^1 \ldots a_m^m.$$

Par contre, dans le cas où $k = 0$, la forme involutive (C) peut être supposée égale à

$$f(x) = a_x^m,$$

de sorte que la forme (D) correspondante sera

$$(-1)^{\frac{m(m+1)}{2}} a_{x^1} a_{x^2} \ldots a_{x^m}.$$

On remarquera que cette dernière expression est, au signe près, égale à ce que devient l'invariant $(f, g)_m = (ab)^m$ des deux formes $f = a_x^m$ et $g = b_x^m$, lorsqu'on suppose

$$g = (xx^1)(xx^2)\ldots(xx^m).$$

---

[1] On démontrerait, de même, que la condition nécessaire et suffisante pour que les formes du système (5) divisibles par $d_x^{m-k'} = (xx^{k'+1})(xx^{k'+2})\ldots(xx^m)$, où $k' > k$, forment un système linéaire à plus de $k' - k - 1$ paramètres, consiste dans l'évanouissement de tous les déterminants du système

$$\begin{array}{cccc} B_0^0 & B_1^0 & \ldots & B_{k'}^0, \\ B_0^1 & B_1^1 & \ldots & B_{k'}^1, \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots, \\ B_0^k & B_1^k & \ldots & B_{k'}^k, \end{array}$$

étant supposé que l'on ait

$$(-1)^{m-k'}(a_i d)^{m-k'} a_{i,x}^{k'} = \Sigma \binom{k'}{j} B_j^i x_1^{k'-j} x_2^j.$$

10. Les deux formes involutives (A) et (B) jouent un rôle important dans la théorie des *combinants* des $k+1$ formes

$$f_i(x) = a_{ix}^m \quad (i = 0, 1, \ldots, k),$$

c'est-à-dire de ceux des invariants et covariants de ces formes qui se reproduisent multipliés par une puissance du déterminant

$$\Sigma \pm \lambda_0^0 \lambda_1^1 \ldots \lambda_k^k,$$

lorsqu'on remplace les formes f_i par des combinaisons linéaires

$$\lambda_0^i f_0 + \lambda_1^i f_1 + \ldots + \lambda_k^i f_k$$

de ces mêmes $k+1$ formes.

D'après un théorème dû à M. Gordan [*Ueber Combinanten* (*Math. Annalen*, t. V, p. 116, 1872)], les covariants et invariants de la forme (A) fournissent tous les combinants des $k+1$ formes f_i. D'autre part, de récentes recherches ont conduit à cette remarque importante que la même propriété appartient aussi à la forme (B). Ainsi donc :

Deux formes involutives relatives à deux systèmes linéaires conjugués doivent admettre les mêmes covariants et invariants, ce qu'on peut aussi exprimer en disant que *deux systèmes linéaires de formes binaires, conjugués entre eux, admettent les mêmes covariants et invariants* (¹).

Le fait que deux formes involutives, telles que (A) et (B), relatives à deux systèmes linéaires conjugués, constituent chacune un covariant de l'autre, résulte assurément de ce que les formes de chacun de deux systèmes linéaires conjugués sont liées aux formes de l'autre par des relations invariantes. Pourtant, on peut encore trouver un autre motif de ce fait, et qui tient à la manière dont on peut passer (d'après le n° 2) de la forme (A) à la forme (B). Il se trouve, en effet, que *si, en partant*

(¹) Ces théorèmes, que j'ai toujours considérés comme étant évidents *a priori* (de même que leurs généralisations relatives à des formes à plus de deux variables), se trouvent dûment exposés et utilisés dans mon Mémoire déjà cité *Sur les faisceaux de formes binaires ayant une même jacobienne*, Mémoire qui avait été présenté à l'Académie des Sciences de Paris dans la séance du 10 décembre 1881. Pourtant c'est seulement dans le Rapport de M. Jordan (*Comptes rendus*, t. XCIV, mai 1882) qu'il en est fait mention pour la première fois. *Voir* aussi M. Brill : *Ueber binären Formen und die Gleichung sechsten Grades* (*Math. Annalen*, t. XX, p. 330-336; 1882). Franz Meyer, *Apolarität und rationale Curven* (Tübingen, 1883).

d'une forme alternée quelconque, d'ordre $m(\geqq k)$ par rapport à $k+1$ séries de variables binaires $x^0, x^1, \ldots, x^k$ et qui soit exprimée en fonction linéaire des déterminants du système (2) (ce qui est toujours possible d'une seule manière), on y remplace, au lieu des déterminants du système (2), les déterminants complémentaires du système (3), on obtient une nouvelle forme, alternée et d'ordre m par rapport aux $m-k$ séries de variables binaires $x^{k+1}, x^{k+2}, \ldots, x^m$, laquelle constitue un covariant de la première (1).

III.

Sur les déterminants fonctionnels.

11. Parmi les formes $f = a_x^m$ d'un système linéaire à k paramètres

$$\lambda_0 f_0 + \lambda_1 f_1 + \ldots + \lambda_k f_k, \tag{4}$$

il y en a seulement $(k+1)(m-k)$ qui admettent comme facteur la puissance $(k+1)^{\text{ième}}$ d'une expression linéaire (xy). Les valeurs de y auxquelles correspondent de pareils facteurs sont précisément ceux qui annulent le déterminant fonctionnel

$$\Sigma \pm \frac{\partial^k f_0}{\partial x_1^k} \frac{\partial^k f_1}{\partial x_1^{k-1} \partial x_2} \cdots \frac{\partial^k f_k}{\partial x_2^k} \tag{E^0}$$

des $k+1$ formes f_i.

La forme (E^0) doit, d'après cela, être proportionnelle à la forme $\Omega(x, x, \ldots, x)$ qu'on obtient en faisant $x^0 = x^1 = \ldots = x^k = x$ dans la forme involutive symétrique (C), relative au système linéaire considéré (4). D'autre part, il est aisé de voir que l'expression symbolique de la forme (E^0) est, à un facteur numérique près,

$$\Delta(a_0, a_1, \ldots, a_k) a_{0x}^{m-k} a_{1x}^{m-k} \ldots a_{kx}^{m-k}. \tag{E}$$

---

(1) La considération de deux formes alternées, déduites l'une de l'autre d'après ce procédé, est d'une grande importance pour la théorie des formes binaires (entre autres, elle conduit à de nouveaux aperçus sur la loi de réciprocité de M. Hermite). Dans une occasion prochaine nous espérons publier relativement à ce sujet un petit travail *Sur la théorie des formes complémentaires*.

D'une manière analogue, le déterminant fonctionnel

$$(\mathrm{E}') \qquad \Sigma \pm \frac{\partial^{m-k-1} g_{k+1}}{\partial x_1^{m-k-1}} \frac{\partial^{m-k-1} g_{k+2}}{\partial x_1^{m-k-2}\partial x_2} \cdots \frac{\partial^{m-k-1} g_m}{\partial x_2^{m-k-1}},$$

relatif au système linéaire

$$(5) \qquad \lambda_{k+1} g_{k+1} + \lambda_{k+2} g_{k+2} + \ldots + \lambda_m g_m,$$

conjugué du système linéaire (4), ne s'annule que pour celles des valeurs y de x auxquelles correspondent des formes $(xy)^{m-k}$ entrant en facteur dans quelque forme du système (5). La forme (E') doit donc être proportionnelle au résultat $\Omega'(x, x, \ldots, x)$, qu'on obtient en faisant $x^{k+1} = x^{k+2} = \ldots = x^m = x$ dans la forme involutive (D), relative au système linéaire (5), c'est-à-dire qu'elle doit être proportionnelle à la forme (E) précédente.

On voit, d'après cela, que *deux systèmes linéaires de formes binaires, conjugués entre eux, doivent admettre les mêmes déterminants fonctionnels*. On a ainsi l'exemple le plus simple de ce fait que deux pareils systèmes linéaires admettent les mêmes covariants (n° **10**).

Dans son Mémoire déjà cité (*Math. Annalen,* t. XX), M. Brill a fait voir que le discriminant du déterminant fonctionnel (E) se décompose en deux facteurs entiers, lesquels sont respectivement d'ordres

$$k(m-k+1) \quad \text{et} \quad (m-k-1)(k+2)$$

par rapport aux divers déterminants du système (1) [1]. Il est à remarquer que l'évanouissement du premier de ces facteurs constitue la condition nécessaire et suffisante pour qu'il existe dans le système linéaire (4) une forme admettant un facteur linéaire $(m-k+1)^{\text{uple}}$, tandis que l'évanouissement du second facteur constitue la condition nécessaire et suffisante pour que, parmi les formes du système conjugué, il y en ait une admettant un facteur linéaire $(k+2)^{\text{uple}}$ (*voir* n° **15**).

---

[1] Le cas où $k=1$ avait déjà été considéré par SALMON (*Higher Algebra*, 3e édition, n° 180). — Dans une Note *Sur le système complet des combinants de deux formes binaires biquadratiques* (*Comptes rendus*, t. XCVII, p. 27, 1883) nous avons donné (pour le cas où $k=1$, $m=4$) l'expression des deux facteurs du discriminant de la jacobienne $(ab)a_x^3 b_x^3$, en fonction entière des invariants (combinants) du faisceau $\lambda a_x^4 + \mu b_x^4$.

On doit aussi à M. Brill une démonstration de ce fait que le déterminant fonctionnel (E) d'un système, tel que (4), peut coïncider avec toute forme binaire d'ordre $(k+1)(m-k)$.

12. Donner (à un facteur constant près) le déterminant fonctionnel d'un système linéaire, tel que (4), revient évidemment à donner $(k+1)(m-k)$ relations linéaires et homogènes entre les $\binom{m+1}{k+1}$ déterminants du système (1), déterminants que j'appellerai, pour abréger, *coordonnées* du système linéaire (4). Aussi le problème de la détermination du nombre des systèmes linéaires d'ordre m et à k paramètres (ou bien des systèmes linéaires d'ordre m et à $m-k-1$ paramètres) qui admettent un déterminant fonctionnel donné est identique au fond avec le problème de la détermination de l'*ordre*

$$N(k+1, m-k) = N(m-k, k+1)$$

du système d'équations par lesquelles sont liés entre eux les déterminants du système (1), ou bien ceux du système (6), problème qui est d'une importance capitale pour la Géométrie d'un espace à m dimensions [1].

On voit, d'après cela, que le nombre $N(k+1, m-k)$ représente, non seulement le nombre des systèmes linéaires, tels que (4), dont le déterminant fonctionnel serait une forme donnée d'ordre $(k+1)(m-k)$, mais, aussi, le nombre des systèmes linéaires, tels que (4), dont les coordonnées satisferaient à $(k+1)(m-k)$ équations linéaires arbitraires, ou, en d'autres termes, le nombre des formes involutives

$$\Phi(x^0, x^1, \ldots, x^k),$$

---

(1) L'examen du cas où $m=4$, $k=1$ (ou $k=2$), et où $N(2,3) = N(3,2) = 5$, nous a conduit à de nombreux résultats, communiqués à l'Académie des Sciences de Paris dans les séances des 17 et 24 octobre 1881 [*Sur une configuration remarquable de quinze cercles et sur les congruences linéaires de cercles dans l'espace* (*Comptes rendus*, t. XCIII, p. 578 et 633)]. Quant à l'étude détaillée des faisceaux (et des réseaux) de formes biquadratiques ayant pour jacobienne (déterminant fonctionnel) une forme donnée du sixième ordre, nous lui avons consacré toute la seconde Partie (p. 57-135) de notre *Mémoire sur les faisceaux de formes binaires* déjà cité (*voir* un court extrait de ce Mémoire dans les *Comptes rendus* du 10 décembre 1881, t. XCIII, p. 994).

symétriques et d'ordre $m-k$ par rapport aux $x^0, x^1, \ldots, x^k$, dont les coefficients seraient liés par $(k+1)(m-k)$ conditions linéaires [1].

Dans une Communication faite à la Société mathématique de France, il y a quatre ans (séance du 13 décembre 1880), nous avons donné la valeur du nombre $N(k+1, m-k)$ pour le cas où $k=1$. Cette valeur, qui a été aussi obtenue depuis par M. Franz Meyer [2], est

$$N(2, m-1) = \frac{[2(m-1)]!}{(m-1)!\,m!}.$$

J'ajouterai que, tout dernièrement, M. Schubert a annoncé [3] que, par l'application des méthodes de la Géométrie énumérative, il a pu arriver à ce résultat, que, *dans un espace à m dimensions, le nombre des variétés linéaires à $m-k-1$ dimensions qui rencontrent (en un point) chacune de $(k+1)(m-k)$ variétés linéaires à k dimensions données est égal à*

$$\frac{1!\,2!\,3!\ldots k!\,[(k+1)(m-k)]!}{(m-k)!\,(m-k+1)!\ldots(m-1)!\,m!}.$$

Si ce résultat est exact, comme il y a tout lieu de le croire, nous aurons

$$\begin{aligned} N(k+1, m-k) &= N(m-k, k+1) \\ &= \frac{[1!\,2!\ldots k!]\,[1!\,2!\ldots(m-k-1)!]\,[(k+1)(m-k)]!}{1!\,2!\,3!\ldots(m-1)!\,m!}. \end{aligned}$$

13. Étant données $(k+1)(m-k)+1$ équations linéaires et homogènes entre les déterminants du système (1), on ne peut, en général, en déduire aucun système de valeurs pour les rapports de ces détermi-

---

(1) On remarquera que, si l'on considère les deux formes involutives symétriques

$$\Phi(x^0, x^1, \ldots, x^k) \quad \text{et} \quad \Omega(x^{k+1}, x^{k+2}, \ldots, x^m),$$

relatives au système linéaire (4) et à son conjugué (5), toute relation

$$\Phi(y^0, y^1, \ldots, y^k) = 0 \quad \text{ou} \quad \Omega(y^{k+1}, y^{k+2}, \ldots, y^m) = 0,$$

où les $y^0, y^1, \ldots, y^k, y^{k+1}, \ldots, y^m$ ont des valeurs données, constitue une condition linéaire entre les déterminants du système (1).

(2) Franz Meyer, *Apolarität und rationale Curven*, p. 391 (Tübingen, 1883).

(3) Dans les *Mittheilungen der Mathem. Gesellschaft in Hamburg* (n° 4, p. 87; 1884).

nants, de sorte que, dans ce cas, la seule solution permise est de supposer que tous ces déterminants soient égaux à zéro.

Par contre, pour que les $(k+1)(m-k)+1$ équations données soient compatibles avec le système de relations qui lient entre eux les déterminants du système (1), il faut que les coefficients des équations en question satisfassent à une certaine relation, dont le degré, par rapport aux coefficients de chacune de ces équations, doit être égal à

$$N(k+1, m-k).$$

Supposer que le déterminant fonctionnel des $k+1$ formes binaires

$$f_i(x) = a_{ix}^m \quad (i = 0, 1, \ldots, k)$$

soit identiquement nul revient évidemment à donner $(k+1)(m-k)+1$ équations linéaires entre les déterminants du système (1). Maintenant c'est un fait de la plus haute importance, que ces $(k+1)(m-k)+1$ équations ne peuvent être satisfaites autrement qu'en supposant que tous les déterminants de la matrice (1) soient nuls. Nous avons, en effet, ce théorème :

Le déterminant fonctionnel

$$\Sigma \pm \frac{\partial^k f_0}{\partial x_1^k} \frac{\partial^k f_1}{\partial x_1^{k-1} \partial x_2^k} \cdots \frac{\partial^k f_k}{\partial x_2^k}$$

de $k+1$ *formes binaires d'ordre* $m (m \geqq k)$,

$$f_0, f_1, \ldots, f_k,$$

ne peut être identiquement nul que dans le cas où les $k+1$ *formes* f_i *sont liées entre elles par quelque relation linéaire.*

Ce théorème n'est qu'un simple corollaire de cette proposition fondamentale, que si $k+1$ fonctions $f_0, f_1, \ldots, f_k$ d'une variable x sont telles que le déterminant

$$\begin{vmatrix} f_0 & \frac{df_0}{dx} & \frac{d^2 f_0}{dx^2} & \cdots & \frac{d^k f_0}{dx^k} \\ f_1 & \frac{df_1}{dx} & \frac{d^2 f_1}{dx^2} & \cdots & \frac{d^k f_1}{dx^k} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ f_k & \frac{df_k}{dx} & \frac{d^2 f_k}{dx^2} & \cdots & \frac{d^k f_k}{dx_k} \end{vmatrix}$$

soit identiquement nul, ces $k+1$ formes doivent être liées entre elles par une relation linéaire et homogène à coefficients constants [1].

On remarquera que, réciproquement, la condition nécessaire et suffisante pour que $k+1$ formes $f_0, f_1, \ldots, f_k$, d'ordre $m \leqq k$, soient liées entre elles par quelque relation linéaire, consiste dans l'évanouissement identique du déterminant fonctionnel de ces $k+1$ formes.

En d'autres termes :

La condition nécessaire et suffisante pour qu'une forme involutive symétrique

$$\Phi(x^0, x^1, \ldots, x^k)$$

soit identiquement nulle consiste dans l'évanouissement identique de son covariant principal

$$\Phi(x, x, \ldots, x).$$

IV.

Sur les formes a_x^m conjuguées à une forme h_x^{k+1} donnée ($m > k$).

14. La notion des *formes conjuguées* relative à deux formes binaires du même ordre (nº 8), notion dont nous avons déjà fait un grand usage, est susceptible d'une extension importante.

Ainsi, étant données deux formes $f = a_x^m$ et $h = h_x^{k+1}$ $(m > k+1)$, nous dirons que *la forme $f = a_x^m$ est conjuguée par rapport à $h = h_x^{k+1}$ dans le cas où la forme*

$$(f, h)_{k+1} = (ah)^{k+1} a_x^{m-k-1}$$

est identiquement nulle, de même que nous avons employé cette expression pour le cas où $m = k+1$.

---

(1) Des démonstrations de cette proposition, indépendantes de la théorie des équations différentielles linéaires, ont été données par MM. Brioschi (*Théorie des déterminants*, p. 82; 1854), Christoffel (*Journal de Crelle*, t. 55, p. 281) et Frobenius (*Journal de Borchardt*, t. 76, p. 238; 1873). — *Voir* aussi Baltzer : *Theorie und Anwendung der Determinanten* (5ᵉ édition, p. 78; 1881) et Pasch : *Note über die Determinante, etc.* (*Journal de Borchardt*, t. 80, p. 177; 1875).

Lorsque la forme $(f, h)_{k+1}$ est identiquement nulle, on a

$$(ah)^{k+1}(a\lambda)^{m-k-1} = 0,$$

quelle que soit la forme $\lambda = \lambda_x^{m-k-1}$. Réciproquement, si cette dernière relation est satisfaite, quelle que soit la forme λ, on doit avoir aussi

$$(f, h)_{k+1} = (ah)^{k+1} a_x^{m-k-1} = 0,$$

quel que soit x. On voit par là que les formes $f = a_x^m$, conjuguées à une forme $h = h_x^{k+1}$ donnée, sont caractérisées par cette propriété, d'être conjuguées par rapport à toutes les formes d'ordre m divisibles par h_x^{k+1}. (On démontrerait de même que les formes $f = a_x^m$ en question sont aussi *conjuguées* par rapport à toutes les formes, d'ordre inférieur à m, divisibles par h).

D'après cela, *le système linéaire composé par les formes d'ordre m, conjuguées à une forme $h = h_x^{k+1}$ donnée $(m > k)$, coïncide avec le conjugué du système linéaire composé par les formes d'ordre m divisibles par h.* Ce dernier système contient $m - k$ formes linéairement indépendantes, de sorte que le nombre des formes d'ordre m conjuguées à f (et linéairement indépendantes entre elles) doit être égal à $k + 1$.

15. Lorsqu'une forme $f = a_x^m$ est conjuguée à $(xy)^{k+1}$, on doit avoir

$$a_x^{m-k-1} a_y^{k+1} = 0,$$

quel que soit x, et réciproquement. En d'autres termes, pour qu'une forme $f = a_x^m$ soit conjuguée à $(xy)^{k+1}$, il faut et il suffit que toutes les dérivées d'ordre $m - k - 1$ de f s'annulent pour la valeur y de x. Ainsi :

Les seules formes d'ordre m conjuguées à $(xy)^{k+1}$, c'est-à-dire conjuguées à toutes les formes d'ordre m divisibles par $(xy)^{k+1}$, sont celles divisibles par $(xy)^{m-k}$.

Cette proposition permet de se rendre compte comment deux systèmes linéaires de formes binaires d'ordre m

$$(4) \qquad \lambda_0 f_0 + \lambda_1 f_1 + \ldots + \lambda_k f_k$$

et

$$(5) \qquad \lambda_{k+1} g_{k+1} + \lambda_{k+2} g_{k+2} + \ldots + \lambda_m g_m,$$

conjugués entre eux, ont les mêmes déterminants fonctionnels (n° **11**), c'est-à-dire comment les points $(k+1)^{\text{uples}}$ du système (4) coïncident avec les points $(m-k)^{\text{uples}}$ du système conjugué (5). En effet, si l'on suppose que $(xy)^{k+1}\lambda_x^{m-k-1}$ soit une forme du premier système, il est clair qu'on pourra toujours déterminer une forme, d'ordre m et divisible par $(xy)^{m-k}$, qui soit comprise dans le second système linéaire, puisque cette forme, étant déjà conjuguée à $(xy)^{k+1}\lambda_x^{m-k-1}$, n'aura plus à satisfaire qu'à k conditions linéaires indépendantes.

On démontrerait de même que :

Lorsque le système linéaire (4) *contient i formes divisibles par $(xy)^{k'+1}$ où $k'+i>k$, le système linéaire conjugué* (5) *doit contenir $i+k'-k$ formes, divisibles par $(xy)^{m-k'}$* (¹), *et réciproquement.*

Cette proposition, appliquée au cas où $i=1$, $k'=k+1$ et au cas où $i=2$, $k'=k-1$, conduit à de nouvelles propriétés des deux invariants, dont il a été question à la fin du n° **11**, propriétés qui permettent d'obtenir l'expression de ces deux invariants.

16. Parmi les formes d'ordre m conjuguées à $h=h_u^{k+1}$ se distinguent les $k+1$ formes $(xy)^m$ correspondant aux divers facteurs linéaires (xy) de h. Dans le cas où les facteurs linéaires

$$(xy^0), \quad (xy^1), \quad \ldots, \quad (xy^k)$$

de h sont tous distincts entre eux, l'expression

$$\lambda_0(xy_0)^m + \lambda_1(xy^1)^m + \ldots + \lambda_k(xy^k)^m \qquad (m>k)$$

représente l'ensemble des formes d'ordre m conjuguées à h (²).

(¹) Cette proposition n'est qu'un cas particulier de cette autre : *Lorsque le système linéaire* (4) *contient i formes, linéairement indépendantes, qui soient divisibles par $h_x^{k'+1}$ (ou qui soient conjuguées à une même forme $d_x^{m-k'}$), où $k'+i>k$, le système conjugué* (5) *doit contenir $i+k'-k$ formes, linéairement indépendantes entre elles, qui soient conjuguées à $h_x^{k'+1}$ (ou qui soient divisibles par $d_x^{m-k'}$).*

(²) Il est à remarquer que si l'on part d'une forme $f=a_x^m$ conjuguée à $h_x^{k+1}(m>k)$, Il résulte de cette propriété que *la forme involutive symétrique relative au système linéaire des formes* $f = a_x^m$, *conjuguées à la forme*

$$h = h_x^{k+1} = (xy^0)(xy^1)\ldots(xy^k),$$

est

$$\text{(F)}\qquad \frac{\Sigma \pm (x^0 y^0)^m (x^1 y^1)^m \ldots (x^k y^k)^m}{\Delta(x^0, x^1, \ldots, x^k)\,\Delta(y^0, y^1, \ldots, y^k)}.$$

De même, *la forme involutive symétrique relative au système linéaire conjugué, composé par les formes d'ordre m divisibles par h, sera*

$$\text{(G)}\quad \frac{\Delta(y^0, y^1, \ldots, y^k, x^{k+1}, x^{k+2}, \ldots, x^m)}{\Delta(y^0, y^1, \ldots, y^k)\,\Delta(x^{k+1}, x^{k+2}, \ldots, x^m)} = h(x^{k+1})\,h(x^{k+2})\ldots h(x^m).$$

On remarquera que les deux expressions (F) et (G) précédentes, mises sous forme entière, doivent constituer les formes involutives relatives aux deux systèmes linéaires considérés, même dans le cas où la forme h aurait des facteurs linéaires multiples ([1]).

En posant $x^0 = x^1 = \ldots = x^k = x$ dans la forme (F), multipliée par un facteur numérique convenable, on obtient, d'après le n° **11**, le même résultat qu'en posant $x_x^{k+1} = x^{k+2} = \ldots = x^m = x$ dans la

---

on aura, pour déterminer les coefficients λ_i qui figurent dans l'expression

$$f = a_x^m = \lambda_0 (xy^0)^m + \lambda_1 (xy^1)^m + \ldots + \lambda_k (xy^k)^m,$$

les $k+1$ relations

$$(ah_i)^k a_y^{m-k} = \lambda_i (yy^i)^{m-k} h_i(y^i),$$

où nous avons posé

$$h_i(y) = h_{iy}^k = (yy^0)(yy^1)\ldots(yy^{i-1})(yy^{i+1})\ldots(yy^k).$$

([1]) La valeur de l'expression (F), en fonction des coefficients des deux formes

$$g = \Pi(xx^i) \quad \text{et} \quad h = \Pi(xy^i),$$

peut être mise sous la forme d'un déterminant d'ordre $m - k$, dont les éléments sont des fonctions linéaires, aussi bien des coefficients de la forme g que de ceux de la forme h. Les divers éléments de ce déterminant ne sont autre chose que les coefficients de la forme doublement binaire

$$\varphi(y, z) = [g(xy)^{m-k-1}, h(xz)^{m-k-1}]_m.$$

L'évanouissement identique de tous les mineurs d'ordre $m - i - k - 1$ de ce déterminant fournit l'ensemble des conditions qui doivent avoir lieu pour que, parmi les formes d'ordre m divisibles par g (ou par h), il y en ait i qui soient conjuguées à h (ou à g) (*comparez* la note du n° 15). Dans le cas où $m = k + 1$, ce déterminant est égal à $(gh)_m$.

forme (G). Comme maintenant ce résultat est égal à la puissance $(m-k)^{\text{ième}}$ de $h(x)$, on voit que *les seules formes* $(xy)^{k+1}$ *qui entrent en facteur dans quelque forme* $f = a_x^m$ *conjuguée à* $h = h_x^{k+1}$ *correspondent aux facteurs linéaires* (xy) *de* h.

17. Voici maintenant quelques résultats relatifs au cas où la forme $h = h_x^{k+1}$ aurait des facteurs linéaires multiples.

Lorsque la forme $f = a_x^m$ *est conjuguée à*

$$h = h_x^{k+1} = (xy^0)^{i_0+1}(xy^1)y^{i_1+1}\ldots,$$

où les y^0, y^1, ... *sont différents entre eux, elle peut toujours être représentée, et cela d'une manière unique, par une expression de la forme*

$$f = (xy^0)^{m-i_0}\lambda_x^{i_0} + (xy^1)^{m-i_1}\lambda_x'^{i_1} + \ldots,$$

où λ, λ', ... *désignent des formes d'ordre* i_0, i_1, ... *convenablement choisies.*

Dans le cas où la forme $f = a_x^m$ *n'est conjuguée par rapport à aucune forme qui soit un diviseur de* h, *les formes* λ, λ', ... *doivent satisfaire aux conditions*

$$\lambda(y^0) \neq 0, \quad \lambda'(y^1) \neq 0, \quad \ldots.$$

Si, au lieu de partir de la forme h, *on partait d'une autre forme divisible par* h, *mais qui ne soit pas d'ordre supérieur à* $m+1$ (¹), *on serait conduit à une représentation de* $f = a_x^m$, *laquelle coïnciderait terme par terme avec la représentation obtenue en partant de la forme* h.

(¹) Si je dis « pas supérieur à $m+1$ » et non « pas supérieur à m », c'est parce qu'il se trouve que : *Étant donnée une forme binaire d'ordre* $m+1$

$$h_x^{m+1} = (xy^0)^{i_0+1}(xy^1)^{i_1+1}\ldots,$$

toute forme binaire $f = a_x^m$ *peut être représentée d'une manière unique par une expression de la forme*

$$f = a_x^m = (xy^0)^{m-i_0}\lambda_x^{i_0} + (xy^1)^{m-i_1}\lambda_x'^{i_1} + \ldots,$$

pourvu que les y^0, y^1, ... *soient tous différents entre eux.*

J'ajouterai que le problème de la détermination des formes λ, λ', ... revient au problème

V.

Sur les formes d_x^{m-t} apolaires à une forme donnée a_x^m.

18. On appelle *polaire* d'une forme c_x^t par rapport à $f = a_x^m (m > t)$ la forme

$$(ac)^t a_x^{m-t}.$$

Par contre, on dit, avec M. Reye, qu'une forme d_x^{m-t} est *apolaire* par rapport à $f = a_x^m$, lorsque la polaire

$$(ad)^{m-t} a_x^t$$

est identiquement nulle, c'est-à-dire lorsque la forme f est, d'après l'expression dont nous nous sommes servi dans le paragraphe précédent, *conjuguée* à d_x^{m-t} (¹).

Une forme d^{m-t} apolaire à f est conjuguée par rapport à toutes les polaires $(ac)^t a_x^{m-t}$, correspondant aux diverses formes c_x^t. La relation

$$(ac)^t (ad)^{m-t} = 0$$

n'est, en effet, qu'une conséquence de

$$(ad)^{m-t} a_x^t = 0.$$

Il est clair que, réciproquement, si une forme d_x^{m-t} est conjuguée par rapport à toutes les polaires $(ac)^t a_x^{m-t}$, elle doit être apolaire par rapport à f. Ainsi donc :

Le système linéaire composé par les formes d'ordre $m-t$ apolaires

---

de la décomposition de la fonction rationnelle $\dfrac{(xy)^m}{h_y^{m+1}}$ en une somme telle que

$$\frac{\mu_y'^{i_0}}{(yy^0)^{i_0+1}} + \frac{\mu_y''^{i_1}}{(yy^1)^{i_1+1}} + \ldots.$$

Voir, pour le cas où $i_0 = i_1 = \ldots = 0$, notre notice : *Sur la décomposition en fractions simples d'une fonction rationnelle homogène*, § I (*Bulletin des Sciences mathématiques*, 2ᵉ série, t. VIII, p. 120-144; 1884).

(¹) Pourtant M. Reye emploie aussi l'expression de « formes apolaires » pour désigner les formes que nous avons appelées *conjuguées*.

à $f = a_x^m$, est le conjugué du système linéaire composé par les diverses formes polaires $(ac)^t a_x^{m-t}$.

D'après cela, on voit que si les polaires $(ac)^t a_x^{m-t}$ forment un système linéaire à t' paramètres $(t' \leqq m - t)$, il faudra que, parmi les formes d_x^{m-t} apolaires à f, il y en ait $m - t - t'$ qui soient linéairement indépendantes.

Lorsque la forme d_x^{m-t} est apolaire à f, toute forme d'ordre inférieur (ou égal) à m divisible par d_x^{m-t} est aussi apolaire (ou conjuguée) par rapport à f (nº 14). C'est là une remarque fort simple, mais dont nous aurons à faire d'importantes applications par la suite.

Dans l'étude des formes d_x^{m-t} apolaires à $f = a_x^m$, nous devons naturellement comprendre aussi les formes d'ordre m $(t = 0)$ conjuguées à f, dont les propriétés sont en tout point analogues à celles des formes apolaires. Mais, pour éviter les doubles énoncés, *il convient d'étendre la dénomination des formes apolaires au cas des formes conjuguées d'un même ordre.*

19. Les formes polaires $(ac)^t a_x^{m-t}$ coïncident évidemment avec les diverses combinaisons linéaires des $t + 1$ formes

$$\frac{\partial^t f}{\partial x_1^t}, \quad \frac{\partial^t f}{\partial x_1^{t-1}\, \partial x_2}, \quad \ldots, \quad \frac{\partial^t f}{\partial x_2^t}. \tag{7}$$

Lorsque la forme f est quelconque, les $t + 1$ formes (7) doivent être linéairement indépendantes entre elles, tant que $t \leqq \frac{m}{2}$. Ainsi, dans le cas où $t \leqq \frac{m}{2}$, les polaires $(ac)^t a_x^{m-t}$ forment, en général, un système linéaire à t paramètres. Par contre, dans le cas où $t > \frac{m}{2}$, l'expression $(ac)^t a_x^{m-t}$ comprend $2t - m$ formes identiquement nulles, de sorte qu'elle peut représenter toute forme d'ordre $m - t$, et cela pour plusieurs valeurs de c_x^t. Dans le cas intermédiaire où, m étant pair, on a $t = \frac{m}{2}$, la forme $(ac)^t a_x^{m-}$ peut encore représenter toute forme d'ordre $m - t$, mais pour une seule valeur de c_x^t.

De cette manière, parmi les formes involutives symétriques

$$\Phi_{t+1}(x^0, x', \ldots, x^t) = \frac{\Sigma \pm f_0^{(t)}(x^0)\, f_1^{(t)}(x^1) \ldots f_t^{(t)}(x^t)}{\Delta(x^0, x^1, \ldots, x^t)}$$

relatives aux $t+1$ formes

$$f_i^{(t)} = \frac{m-t!}{m!}\,\frac{\partial^t f}{\partial x_1^{t-i}\,\partial x_2^i}, \qquad (i = 0, 1, \ldots, t),$$

il n'y a que celles correspondant à des valeurs de t supérieures à $\frac{m}{2}$, qui soient toujours identiquement nulles. Au contraire, les formes Φ_{t+1}, pour lesquelles on a $t \leqq \frac{m}{2}$, doivent ne pas être identiquement nulles *dans le cas normal,* c'est-à-dire tant que la forme f ne satisfait pas à des conditions particulières.

Le nombre des formes Φ_{t+1} correspondant ainsi à $t \leqq \frac{m}{2}$ est égal à $\mu+1$, aussi bien dans le cas où $m = 2\mu$ que dans le cas où $m = 2\mu+1$.

La première de ces formes Φ_1 n'est autre chose que la forme f. Quant à la dernière $\Phi_{\mu+1}$, elle constitue un invariant de f dans le cas où $m = 2\mu$, tandis que, dans le cas où $m = 2\mu+1$, elle ne contient chacune des variables $x^0, x^1, \ldots, x^\mu$ qu'au premier degré.

L'ordre de la forme $\Phi_{t+1}\,(t \leqq \frac{m}{2})$ par rapport à chacune des séries de variables $x^0, x^1, \ldots, x^t$ est égal à $m - 2t$.

20. Dans le cas où la forme $f = a_x^m$ est quelconque, il ne doit pas exister de formes d_x^{m-t} d'ordre $m - t \leqq \frac{m}{2}$, apolaires à f. Par contre, si $m - t > \frac{m}{2}$, il doit y avoir $m - 2t$ formes apolaires à f linéairement indépendantes entre elles.

Lorsque m est impair, égal par exemple à $2\mu+1$, il n'y a, en général, qu'une seule forme d'ordre $\mu+1$ qui soit apolaire à f; c'est la forme représentée par

$$\Phi_{\mu+1}(x, x, \ldots, x).$$

D'autre part, si $m = 2\mu$, les formes d'ordre $\mu+1$, qui sont apolaires à f, forment, en général, un faisceau; pour que, dans ce cas, il y ait quelque forme d'ordre μ apolaire à f, il faut que l'invariant $\Phi_{\mu+1}$ soit nul.

21. Considérons maintenant la suite des formes involutives symétriques

$$\Omega_{t+1}(x^{t+1}, x^{t+2}, \ldots, x^{m-t}) \qquad (0 \leqq t < \tfrac{m}{2})$$

correspondant aux divers systèmes linéaires composés par les formes d'ordre $m - t$ apolaires par rapport à f. Comme les formes d'un pareil système linéaire sont conjuguées aux formes (7), il est clair (d'après le n° 8) qu'on peut supposer la forme Ω_{t+1} égale à

$$\Omega_{t+1} = \begin{vmatrix} A_0 & A_1 & \ldots & A_t \\ A_1 & A_2 & \ldots & A_{t+1} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ A_t & A_{t+1} & \ldots & A_{2t} \end{vmatrix},$$

étant posé

$$a_{x^{t+1}} a_{x^{t+2}} \ldots a_{x^{m-t}} a_x^{2t} = \Sigma \tbinom{2t}{j} A_j x_1^{2t-j} x_2^j.$$

Il est aisé de voir que cette même forme est égale à

$$\Omega_{t+1} = \frac{1}{(t+1)!} (aa')^2 (aa'')^2 \ldots (a^{(t-1)} (a^{(t)})^2 \Pi a_{x^i} a'_{x^i} \ldots a^{(t)}_{x^i},$$
$$(i = t+1,\ t+2,\ \ldots,\ m-t),$$

où

$$f = a_x^m = a_x'^m = \ldots = a_x^{(t)m}.$$

On remarquera que la forme Ω_1 est égale à

$$\Omega_1 = a_{x^1} a_{x^2} \ldots a_{x^m},$$

tandis que la forme $\Omega_{\mu+1}$ est proportionnelle à

$$\Phi_{\mu+1}(x, x, \ldots, x),$$

dans le cas où $m = 2\mu + 1$.

A côté des formes Ω_{t+1}, il convient de placer, dans le cas où $m = 2\mu$, l'invariant

$$\Omega_{\mu+1} = \frac{1}{(\mu+1)!} (aa')^2 (aa'')^2 \ldots (a^{(\mu-1)} a^{(\mu)})^2,$$

qui est égal, à un facteur numérique près, à $\Phi_{\mu+1}$.

L'ordre de Ω_{t+1}, par rapport à chacune des $m-2t$ séries de variables $x^{t+1}, x^{t+2}, \ldots, x^{m-t}$, est égal à $t+1$.

22. Lorsqu'on pose $x^0 = x^1 = \ldots = x^t = x$ dans la forme Φ_{t+1}, supposée multipliée par un facteur numérique convenable, on obtient le même résultat qu'en posant $x^{t+1} = x^{t+2} = \ldots = x^{m-t} = x$ dans la forme Ω_{t+1} (n° **11**).

La forme, à une seule série de variables,

$$\mathrm{F}_{t+1} = \left[\frac{(m-2t)!}{m!}\right]^{t+1} \begin{vmatrix} \dfrac{\partial^{2t} f}{\partial x_1^{2t}} & \dfrac{\partial^{2t} f}{\partial x_1^{2t-1}\partial x_2} & \cdots & \dfrac{\partial^{2t} f}{\partial x_1^{t}\partial x_2^{t}} \\ \dfrac{\partial^{2t} f}{\partial x_1^{2t-1}\partial x_2} & \dfrac{\partial^{2t} f}{\partial x_1^{2t-2}\partial x_2^{2}} & \cdots & \dfrac{\partial^{2t} f}{\partial x_1^{t-1}\partial x_2^{t+1}} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \dfrac{\partial^{2t} f}{\partial x_1^{t}\partial x_2^{t}} & \dfrac{\partial^{2t} f}{\partial x_1^{t-1}\partial x_2^{t+1}} & \cdots & \dfrac{\partial^{2t} f}{\partial x_2^{2t}} \end{vmatrix}$$

$$= \frac{1}{(t+1)!}(aa')^2(aa'')^2\ldots(a^{(t-1)}a^{(t)})^2 a_x^{m-2t} a_x'^{m-2t} \ldots a_x^{(t)m-2t},$$

qu'on obtient ainsi, n'est autre chose que le déterminant fonctionnel des $t+1$ formes (7).

La forme F_1 est ainsi égale à f, la forme F_2 égale à la hessienne $\frac{1}{2}(f,f)_2$ de f, et ainsi de suite. Enfin la forme $\mathrm{F}_{\mu+1}$ est égale à $\Omega_{\mu+1}$ (si $m = 2\mu$ ou $m = 2\mu+1$).

D'après les propriétés des déterminants fonctionnels, rappelées au n° **13**, l'évanouissement identique de la forme F_{t+1}, qui est d'ordre $(t+1)(m-2t)$, doit constituer la condition nécessaire et suffisante pour que les formes (7) soient liées entre elles par quelque relation linéaire.

Comme l'évanouissement identique de F_{t+1} entraîne l'évanouissement identique des formes Φ_{t+1} et Ω_{t+1}, et réciproquement, on peut, toutes les fois qu'il s'agira de l'évanouissement identique de la forme Φ_{t+1} ou de la forme Ω_{t+1}, parler simplement de l'évanouissement identique de la forme F_{t+1} correspondante.

On remarquera que l'évanouissement identique de la forme F_{t+1} a pour conséquence l'évanouissement identique de toutes les formes F_{t+2}, $\mathrm{F}_{t+3}, \ldots, \mathrm{F}_{\mu+1}$, dont l'indice est supérieur à $t+1$.

VI.

Examen du cas où $F_{k+1} = 0$, $F_k \neq 0$.

23. Tant que le covariant F_{k+1} $\left(k \leqq \frac{m}{2}\right)$ de f ne devient pas identiquement nul, il ne peut exister aucune relation linéaire entre les $k+1$ formes

$$\frac{\partial^k f}{\partial x_1^k}, \quad \frac{\partial^k f}{\partial x_1^{k-1}\,\partial x_2}, \quad \ldots, \quad \frac{\partial^k f}{\partial x_2^k},$$

relation à laquelle correspondrait une forme r_x^k, telle que

$$(ar)^k a_x^{m-k} = 0.$$

De là découlent ces deux conséquences : 1° qu'il n'existe, dans le cas considéré, aucune forme, d'ordre égal (ou inférieur) à k, qui soit apolaire à f; 2° que le nombre des formes d_x^{m-k}, linéairement indépendantes entre elles, qui sont apolaires à f, est égal à $m - 2k$, de même que dans le cas normal.

Maintenant, *s'il arrive que la forme* F_{k+1} *soit identiquement nulle, sans qu'il en soit de même pour la forme* F_k, *il faut qu'il y ait au moins une forme* r_x^k, *d'ordre* k, *apolaire à* f, *mais il ne pourra y avoir aucune forme, d'ordre moindre que* k, *qui soit apolaire à* f (1).

D'autre part, le nombre des formes d_x^{m-t} d'ordre

$$m - t = m - k + 1,\ m - k + 2,\ \ldots,\ m - 1,\ m \qquad (k > t \geqq 0),$$

apolaires à f, doit être, dans ce même cas ($F_{k+1} = 0$, $F_k \neq 0$), le même que dans le cas normal, c'est-à-dire égal à

$$m - 2t = m - 2k + 2,\ m - 2k + 4,\ \ldots,\ m - 2,\ m,$$

respectivement.

---

(1) Réciproquement : pour que, parmi les formes apolaires à f, il y en ait qui soient d'ordre $k \leqq \frac{m}{2}$, sans qu'il y en ait qui soient d'ordre moindre, il faut et il suffit qu'on ait $F_{k+1} = 0$, $F_k \neq 0$.

24. Une fois que l'on admet l'existence d'une forme $r_x^k\left(k \leqq \frac{m}{2}\right)$, apolaire à f, on doit en conclure que toutes les formes d'ordre $m - t \leqq m$,

$$r_x^k \lambda_x^{m-k-t},$$

qui contiennent r_x^k en facteur, sont apolaires à f (n° 18). Or, comme le nombre des formes, linéairement indépendantes entre elles, comprises dans l'expression $r_x^k \lambda_x^{m-k-t}$, est égal à $m - k - t + 1$, on voit que, dans le cas où $t = k - 1$, ce nombre devient égal au nombre des formes d'ordre $m - t = m - k + 1$ qui sont apolaires à f. Cela nous montre que les seules formes d'ordre $m - k + 1$ qui soient apolaires à f dans le cas considéré sont celles qui contiennent en facteur la forme r_x^k.

De là découle la proposition importante suivante :

Dans le cas où la forme F_{k+1} *est identiquement nulle, sans qu'il en soit de même pour* $F_k\left(k \leqq \frac{m}{2}\right)$, *il n'existe qu'une seule forme* r_x^k, *d'ordre* k, *qui soit apolaire à* f. *De plus, les seules formes* d_x^{m-t}, *où*

$$k < m - t \leqq m - k + 1,$$

qui soient, dans ce même cas, apolaires à f, *sont celles divisibles par* r_x^k.

Prenons, en effet, au hasard, une forme d_x^{m-t}, d'ordre $m - t \geqq k$ (où $t \geqq k - 1$), qui soit apolaire à f. Toutes les formes, d'ordre $m - k + 1$, comprises dans l'expression $d_x^{m-t}\lambda_x^{t-k+1}$, seront apolaires à f. Or nous savons que toutes les formes d'ordre $m - k + 1$, apolaires à f, doivent être divisibles par la forme r_x^k; il faut donc que toutes les formes $d_x^{m-t}\lambda_x^{t-k+1}$ précédentes soient divisibles par r_x^k, quelle que soit la forme λ_x^{t-k+1}, ce qui ne peut évidemment avoir lieu que si la forme d_x^{m-t} est divisible par r_x^k.

25. De ce qui précède il résulte que, dans le cas où

$$F_{k+1} = 0, \quad F_k \gtrless 0,$$

les divers systèmes linéaires, composés par des formes d'ordre $m - t \geqq k$ apolaires à f, se classent en trois catégories, suivant que le nombre $m - t$ est inférieur, égal ou supérieur à $m - k + 1$.

Le système linéaire correspondant à $m - t = m - k + 1$ se rapproche, par ses diverses propriétés, plutôt des systèmes linéaires correspondant à $m - t < m - k + 1$. Pourtant, il présente cette propriété commune avec les systèmes linéaires correspondant à $m - t > m - k + 1$ que le nombre des formes linéairement indépendantes qu'il contient est le même que dans le cas normal, propriété qui se traduit en ce que la forme involutive Ω_k correspondante n'est pas identiquement nulle.

Comme le système en question est composé par toutes les formes d'ordre $m - k + 1$ divisibles par r_x^k, on voit que :

Dans le cas où $F_{k+1} = 0$, $F_k \neq 0$, *la forme involutive* Ω_k *est égale à*

$$r(x^k)\,r(x^{k+1})\ldots r(x^{m-k+1}),$$

où $r(x)$ *représente la seule forme d'ordre* k *qui soit apolaire à* f *dans ce cas. La forme* F_k *doit aussi être égale à la puissance* $(m - 2k + 2)^{\text{ième}}$ *de* $r(x)$ (¹).

26. Les systèmes linéaires composés par les formes d'ordre

$$m - t > m - k + 1,$$

apolaires par rapport à f, jouissent de propriétés tout à fait différentes de celles des systèmes linéaires correspondant à $m - t \leq m - k + 1$, que nous venons d'examiner (nos 24 et 25).

Et d'abord nous allons démontrer que :

Dans le cas où $F_{k+1} = 0$, $F_k \neq 0$, *les formes d'ordre* $m - t > m - k + 1$ *apolaires à* f *ne peuvent admettre aucun facteur linéaire en commun.*

Supposons, pour un moment, que toutes les formes d'ordre

$$m - t > m - t + 1,$$

apolaires à f, soient divisibles par (xy). La forme $(xy)^{m-t}$, étant conjuguée par rapport à toutes ces formes, serait égale à la polaire

---

(¹) Je noterai ici que, dans une récente Note, *Zur Theorie der binären Formen* (*Göttinger Nachrichten*, p. 115-121; avril 1883), M. Gundelfinger a énoncé, sans démonstration, une proposition qui revient à ceci : « Lorsque le covariant F_{k+1} de f est identiquement nul, sans que $F_k \left(k - 1 < \frac{m}{2}\right)$ le soit, cette dernière forme F_k est égale à la puissance $(m - 2k + 2)^{\text{ième}}$ d'une forme binaire d'ordre k, apolaire par rapport à f. » Cet énoncé comprend aussi le cas, examiné au n° 20, où $m = 2\mu + 1$, $k = \mu + 1$.

$(ac)^t a_x^{m-t}$ de quelque forme c_x^t par rapport à f (n° 18). De cette manière on aurait

$$(ac)^t a_x^{m-t-1} a_y = 0,$$

quel que soit x, ce qui signifie que la forme $(xy) c_x^t$, qui est d'ordre $t+1 < k$, doit être apolaire à f. Or cela est impossible, puisque la relation $F_k \neq 0$ exclut l'existence de formes apolaires à f dont l'ordre soit inférieur à k (n° 23).

La supposition dont nous sommes parti est donc également impossible.

27. Considérons maintenant, à côté de la forme r_x^k, qui est la seule forme d'ordre k apolaire à f, dans le cas considéré, une autre forme s_x^l, d'ordre $l = m - k + 2$, qui soit apolaire à f, sans être divisible par r_x^k.

On voit, d'abord, que toutes les formes d'ordre l, comprises dans l'expression

$$\sigma_x^{l-k} r - \rho s$$

(où σ_x^{l-k} désigne une forme arbitraire d'ordre $l - k$, et ρ un paramètre arbitraire), sont toutes apolaires à f. Or, comme la forme s n'est point divisible par r, il faut bien que le nombre des formes, linéairement indépendantes entre elles, comprises dans l'expression précédente, soit égal à $l - k + 2$, c'est-à-dire égal au nombre $m - 2k + 4$ des formes d'ordre $l = m - k + 2$ apolaires à f.

L'expression précédente comprend donc toutes les formes d'ordre $l = m - k + 2$ apolaires à f. Cela montre que *la forme s ne peut avoir aucun facteur linéaire en commun avec r*, d'après la proposition du numéro précédent.

Envisageons maintenant, plus généralement, les formes d'ordre $m - t > m - k + 1$ contenues dans l'expression

$$\sigma_x^{m-t-k} r - \rho_x^{m-t-l} s \qquad (k - 2 > t \geqq 0)$$

(où ρ et σ désignent deux formes arbitraires d'ordres $m - t - l$ et $m - t - k$) et qui sont toutes apolaires à f. Puisque les deux formes r et s n'admettent aucun facteur linéaire en commun, il faut bien que le nombre des formes linéairement indépendantes, comprises dans l'expression précédente, soit égal à $m - 2t$ (*voir* le n° 35), c'est-à-dire juste égal au nombre des formes d'ordre $m-t > m-k+2$ qui soient apolaires à f dans le cas considéré (n° **23**).

En résumant ce qui précède, nous obtenons cette proposition :

Si l'on représente par r la seule forme d'ordre k qui soit apolaire à f, dans le cas où $F_{k+1}=0$, $F_k \neq 0 \left(k \leqq \frac{m}{2}\right)$, *et par s une forme d'ordre* $l = m-k+2$ *qui soit apolaire à f, mais qui ne soit pas divisible par r (et qui n'ait, par conséquent, aucun facteur linéaire en commun avec r), l'expression générale des formes d'ordre* $m-t > m-k+1$ $(t \geqq 0)$, *apolaires à f sera*

$$\sigma_x^{m-t-k} r - \rho_x^{m-t-l} s.$$

28. Des faits analogues aux précédents (n$^{\text{os}}$ **26, 27**) ont lieu dans le cas normal où aucune des formes F_2, F_3, ..., $F_{\mu+1}$ n'est nulle. Ainsi, nous avons encore cette propriété fondamentale que *les formes d'ordre* $m-t > \frac{m}{2}$, *apolaires à f, ne peuvent admettre, dans le cas normal* $(F_{\mu+1} \neq 0)$, *aucun facteur linéaire en commun.* De là découlent les propriétés suivantes :

Soit, d'abord, $m = 2\mu+1$ *et* $F_{\mu+1} \neq 0$; *désignons par r la forme* $F_{\mu+1}$ *et prenons pour s une forme d'ordre* $\mu+2$ *qui soit apolaire à f sans être divisible par r (et qui n'ait, par conséquent, aucun facteur linéaire en commun avec r). L'expression générale des formes d'ordre* $m-t > \mu+1$, *apolaires à f, sera*

$$\sigma^{\mu-t} r - \rho^{\mu-t-1} s.$$

Si, au contraire, $m = 2\mu$ *et* $F_{\mu+1} \neq 0$, *nous aurons à prendre r et s parmi les formes d'ordre* $\mu+1$ *apolaires à f, de sorte que, ces deux formes, étant supposées distinctes, ne pourront avoir aucun facteur linéaire en commun. L'expression générale des formes d'ordre* $m-t > \mu$ *apolaires à f sera ainsi*

$$\sigma^{\mu-t-1} r - \rho^{\mu-t-1} s.$$

29. Les formes r et s, considérées dans ce qui précède (n$^{\text{os}}$ **27, 28**), peuvent être deux formes quelconques d'ordres k et l, assujetties seulement à la condition de n'avoir aucun facteur linéaire en commun.

Il est, en effet, aisé de reconnaître que, étant données deux formes r_x^k et s_x^l, n'admettant aucun facteur linéaire en commun, il existe toujours une forme unique $f = a^m$, d'ordre $m = k + l - 2$, qui soit conjuguée à chacune des deux formes r et s (*voir* n° 41). Par la suite, nous aurons l'occasion de nous rendre compte du rôle que joue la forme $f = a_x^m$, ainsi déterminée, dans la théorie de l'élimination. Pourtant il convient de remarquer, dès à présent, que, *si l'on suppose $k \leqq l$, il ne pourra pas y avoir de formes d'ordre moindre que k, qui soient apolaires à la forme $f = a_x^{k+l-2}$ définie par les relations*

$$(ar)^k a_x^{l-2} = 0, \quad (as)^l a_x^{k-2} = 0.$$

En effet, si l'on supposait qu'une forme r', d'ordre moindre que k, fût la forme d'ordre minimum apolaire à f, il faudrait que les deux formes r et s fussent divisibles par r' (n^os^ **23**, **24**), ce qui ne peut pas être.

30. D'après ce qui a déjà été exposé (n^os^ **16**, **17**), l'utilité de la considération des formes d_x^{m-t}, apolaires à une forme donnée $f = a_x^m$, doit être grande dans la question de la représentation de la forme f par une somme de $m - t$ puissances $m^{\text{ièmes}}$, ou, plus généralement, par une expression

$$(8) \qquad (xy^0)^{m-i_0} \lambda_x^{i_0} + (xy^1)^{m-i_1} \lambda_x'^{i_1} + \ldots,$$

où

$$\Sigma(i+1) = m - t,$$

les y^0, y^1, ... étant supposés différents entre eux, et les formes λ, λ', ... satisfaisant aux relations

$$\lambda(y^0) \neq 0, \quad \lambda'(y^1) \neq 0, \quad \ldots.$$

En effet, pour que la forme $f = a_x^m$ puisse être représentée par une expression telle que (8) et satisfaisant aux restrictions indiquées, il faut et il suffit que la forme

$$d_x^{m-t} = (xy^0)^{i_0+1} (xy^1)^{i_1+1} \ldots$$

soit apolaire à f, sans qu'elle soit divisible par aucune forme d'ordre moindre apolaire à f. (Si cette forme n'a que des facteurs linéaires simples, on aura $i_0 = i_1 = \ldots = 0$, et l'expression (8) précédente sera la somme de $m - t$ puissances $m^{\text{ièmes}}$.)

Les développements qui précèdent nous apprennent que dans le cas normal (où $F_{\mu+1} \neq 0$), il y a toujours une infinité $(m-2t-1)^{\text{uple}}$ de formes d'ordre $m-t > \frac{m}{2}$ qui soient apolaires à f sans être divisibles par aucune forme, d'ordre moindre, apolaire à f (nos 20, 28). La représentation de $f = a_x^m$ par une expression telle que (8) est donc toujours possible, dans ce cas, pourvu qu'on ait $m - t > \frac{m}{2}$.

Maintenant, pour le cas où $F_{k+1} = 0$, $F_k \neq 0$ $\left(k \leqq \frac{m}{2}\right)$, nous avons les résultats suivants, relativement aux formes d'ordre $m - t \geqq k$ qui sont apolaires à f, *sans être divisibles par aucune forme d'ordre moindre :* 1° si $m - t > m - k + 1$, il y a une infinité $(m-2t-1)^{\text{uple}}$ de pareilles formes; 2° si

$$k < m - t \leqq m - k + 1,$$

il n'existe aucune forme d'ordre $m - t$ ayant les propriétés requises; et 3° il y a une seule forme d'ordre $m - t = k$ qui soit apolaire à f, mais il n'existe aucune forme d'ordre moindre ayant la même propriété.

Ainsi donc, dans le cas où $F_{k+1} = 0$, $F_k \neq 0$, la forme $f = a_x^m$ n'est susceptible d'une représentation telle que (8), et satisfaisant aux restrictions mentionnées, que si

$$m \geqq m - t > m - k + 1$$

ou bien si

$$m - t = k\ (^1).$$

---

(1) Il serait superflu de citer ici les travaux, très connus, des divers auteurs qui, d'après M. Sylvester, se sont occupés de la représentation de la forme $f = a_x^m$ par une somme de $m - t \geqq \frac{m}{2}$ puissances $m^{\text{ièmes}}$. Je noterai seulement que c'est M. Gundelfinger, dans sa Note citée plus haut, qui a indiqué le premier quelles sont les conditions nécessaires et suffisantes pour qu'une forme $f = a_x^m$ puisse être représentée par une somme de $k \leqq \frac{m}{2}$ puissances $m^{\text{ièmes}}$, et examiné les modifications que subissent les énoncés dans le cas où la forme r, définie par la relation $r^{m-2k+2} = F_k \neq 0$ $(F_{k+1} = 0)$, admet des facteurs linéaires multiples.

VII.

Propriétés ultérieures des systèmes de formes d'ordre $m-t$ apolaires à $f = a_x^m$.

31. Complétons maintenant l'étude des divers systèmes linéaires composés par les formes d'ordre $m-t$ apolaires à $f = a_x^m$.

Nous savons que, dans le cas normal, il n'y a point de formes d'ordre $m - t \leqq \frac{m}{2}$ apolaires à f, tandis que le nombre des formes d'ordre $m - t > \frac{m}{2}$ apolaires à f est égal à $m - 2t$ (n° **20**). Cependant, *lorsque la forme $f = a_x^m$ satisfait à des conditions particulières, il peut se faire que le nombre $m - k - t + 1 \leqq m - t$ des formes d'ordre $m - t$ apolaires à f soit plus grand que dans le cas normal, c'est-à-dire à la fois supérieur à zéro et supérieur à $m - 2t$.*

Les résultats des n^{os} **23** et **24** nous apprennent que, *dans ce cas, on doit avoir* $F_{k+1} = 0$, $F_k \neq 0$, *de sorte que toutes les formes d'ordre $m - t$ apolaires à f seront divisibles par une même forme d'ordre $k > 0$, laquelle doit coïncider avec l'unique forme apolaire à f dont l'ordre soit minimum* (¹). On remarquera que, dans ce cas, on doit avoir $k < \frac{m+1}{2}$.

32. Passons maintenant à l'examen des systèmes linéaires composés par les formes d_x^{m-t}, d'ordre $m - t > \frac{m}{2}$ apolaires à f, dans le cas où, le covariant F_{t+1} de f n'étant pas identiquement nul, le nombre des formes en question, linéairement indépendantes entre elles, est le même que dans le cas normal, c'est-à-dire égal à $m - 2t$.

On voit, tout d'abord, que si l'on considère une forme arbitraire $e_x^{m-m'}$, d'ordre égal ou inférieur à $m - t$, il ne doit exister, en général, aucune forme d_x^{m-t} apolaire à f, qui soit divisible par $e_x^{m-m'}$ dans le cas où $m - m' > m - 2t - 1$, tandis que, dans le cas où $m - m' \leqq m - 2t - 1$,

(¹) Proposition communiquée par l'auteur à la Société mathématique de France dans la séance du 20 décembre 1880.

le nombre des formes d_x^{m-t} apolaires à f et linéairement indépendantes entre elles sera égal à $m' - 2t$.

Au contraire, il peut se faire qu'en choisissant convenablement la forme $e_x^{m-m'}$, le nombre des formes d'ordre $m - t$ apolaires à f et contenant $e_x^{m-m'}$ en facteur soit, à la fois, supérieur à zéro et supérieur à $m' - 2t$.

Comme exemple de pareilles formes $e_x^{m-m'}$ exceptionnelles, nous avons à citer, tout d'abord, les formes $d_x^{m-m'}$, d'ordre égal ou inférieur à $m - t$, apolaires à f. Ainsi, comme toute forme d'ordre $m - t$ divisible par $d_x^{m-m'}$ est apolaire à f, nous aurons un nombre (positif)

$$m' - t + 1 > m' - 2t$$

de formes, linéairement indépendantes entre elles, divisibles par $d_x^{m-m'}$, qui seront apolaires à f.

En partant des formes, d'ordre égal ou inférieur à $m - t$, apolaires à f, on peut trouver d'autres formes $e_x^{m-m'}$, d'ordre inférieur à $m - t$, qui entrent comme facteurs dans un nombre positif et supérieur à $m' - 2t$, de formes d_x^{m-t} apolaires à f.

Considérons, par exemple, une forme

$$er' = e_x^{m-m'} r'^{k'}_x \qquad (k' \leqq m' - t),$$

d'ordre égal ou inférieur à $m - t$, qui soit apolaire à f, et supposons que le facteur $e_x^{m-m'}$ de cette forme soit d'un ordre tel que l'on ait

$$0 < k' < t + 1.$$

Comme toutes les formes d'ordre $m - t$ divisibles par er' doivent être apolaires à f, nous aurons $m' - k' - t + 1 > 0$ formes, linéairement indépendantes entre elles et divisibles par $e_x^{m-m'}$, qui seront apolaires à f. Le nombre positif $m' - k' - t + 1$ étant supérieur à $m' - 2t$, par suite de la relation $k' < t + 1$, on voit que la forme $e_x^{m-m'}$ envisagée est exceptionnelle au même titre que les formes $d_x^{m-m'}$, apolaires à f, considérées d'abord.

Pour arriver à ce résultat, nous avons supposé simplement que la forme $e_x^{m-m'}$ entrait en facteur dans une forme $e_x^{m-m'} r'^{k'}_x$, d'ordre égal ou inférieur à $m - t$, apolaire à f, telle que $0 < k' < t + 1$. Il est maintenant à remarquer que s'il existait une autre forme $e_x^{m-m'} r''^{k''}_x$, telle que

$k'' < k'$, qui soit apolaire à f, le nombre $m' - k'' - t + 1$ des formes d'ordre $m - t$ apolaires à f et divisibles par $e_x^{m-m'} r_x^{\prime\prime k''}$ serait supérieur à $m' - k' - t + 1$.

Cela montre qu'il est tout à fait avantageux de supposer qu'en dehors de la forme $e_x^{m-m'} r_x^{\prime k'}$ il n'existe aucune forme d'ordre moindre, divisible par $e_x^{m-m'}$, qui soit apolaire à f (1).

33. C'est un fait très important qu'en dehors des formes $e_x^{m-m'}$, déjà considérées, et qui entrent en facteur dans quelque forme $e_x^{m-m'} r_x^{\prime k'}$ apolaire à f et de plus telle que

$$k' \leqq m' - t, \quad 0 \leqq k' < t + 1,$$

il n'existe point d'autres formes $e_x^{m-m'}$ qui entrent en facteur dans un nombre positif et supérieur à $m' - 2t$ de formes d'ordre $m - t$ apolaires à f.

Supposons, en effet, que le nombre $m' - k' - t + 1 \leqq m' - t + 1$ des formes d'ordre $m - t$ apolaires à f et divisibles par une forme donnée $e_x^{m-m'}$ (où $m - m' \leqq m - t$), soit tel que

$$0 < m' - k' - t + 1 > m' - 2t,$$

de manière qu'on ait

$$k' \leqq m - t \quad \text{et} \quad 0 \leqq k' < t + 1,$$

et examinons quelle doit être la forme $e_x^{m-m'}$.

Et d'abord il est clair que si $m' - k' - t + 1 = m' - t + 1$, c'est-à-dire $k' = 0$, la forme $e_x^{m-m'}$ doit être apolaire à f, puisque le nombre des formes d'ordre $m - t$ divisibles par $e_x^{m-m'}$ est juste égal à $m' - t + 1$.

Passons maintenant au cas où l'on aurait $k' > 0$.

D'après les suppositions faites, la relation

$$(9) \qquad (ae)^{m-m'} (ad')^{m'-t} a_x^t = 0$$

(1) Du reste, d'après ce que nous verrons par la suite (n° 33), si $e_x^{m-m'} r_x^{\prime k'}$ est la (seule) forme d'ordre minimum qui soit apolaire à f et divisible par $e_x^{m-m'}$, et qu'on suppose $k' \leqq m' - t$, $0 < k' < t + 1$, les seules formes d'ordre $m - t$ apolaires à f et divisibles par $e_x^{m-m'}$ seront celles divisibles par $e_x^{m-m'} r_x^{\prime k'}$.

ne peut être satisfaite que par $m' - k' - t + 1$ formes $d_x^{\prime m-t}$, linéairement indépendantes entre elles. Cela étant, je remarque que la forme

$$b_x^{m'} = (ae)^{m-m'} a_x^{m'}$$

ne saurait être identiquement nulle, puisque, autrement, le nombre $m' - k' - t + 1$ des formes $e_x^{m-m'} d_x^{\prime m'-t}$, satisfaisant à la relation (9) précédente, serait égal à $m' - t + 1$. La relation (9) peut donc être écrite comme il suit :

$$(bd')^{m'-t} b_x^t = 0,$$

d'où nous apprenons que toute forme $d_x^{\prime m'-t}$ satisfaisant à la relation (9) doit être apolaire à $b_x^{m'}$, et réciproquement.

Si la forme $b_x^{m'}$ était arbitraire, le nombre des formes d'ordre $m' - t$ qui lui seraient apolaires serait ou o $\left(\text{dans le cas où } m' - t \leqq \frac{m'}{2}\right)$ ou bien $m' - 2t$ $\left(\text{dans le cas où } m' - t > \frac{m'}{2}\right)$. A présent, les choses se passent autrement, puisque, d'après les suppositions faites, ce nombre (c'est-à-dire $m' - k' - t + 1$) doit être à la fois positif et supérieur à $m' - 2t$.

C'est de ce fait que découlent les résultats que nous avons en vue. En effet, d'après ce que nous avons vu au n° **31**, il faut que, dans le cas actuel, toutes les formes d'ordre $m' - t$, apolaires à $b_x^{m'}$, soient divisibles par une même forme $r_x^{\prime k'}$ $\left(\frac{m'+1}{2} > k' > 0\right)$, laquelle doit constituer la forme d'ordre minimum qui soit apolaire à $b_x^{m'}$.

Les suppositions dont nous sommes parti nous conduisent donc à cette conséquence, que les formes $d_x^{\prime m'-t}$ satisfaisant à la relation (9) sont toutes divisibles par une même forme $r_x^{\prime k'}$ $\left(\frac{m'+1}{2} > k' > 0\right)$, caractérisée par la propriété que la forme $e_x^{m-m'} r_x^{\prime k'}$ coïncide avec celle des formes, d'ordre égal ou inférieur à $m - t$, apolaires à f et divisibles par $e_x^{m-m'}$, dont l'ordre est minimum.

Nous arrivons ainsi à cette proposition importante, dans laquelle nous avons compris aussi le cas où $k' = 0$:

Envisageons le système des formes d_x^{m-t} $\left(m - t > \frac{m}{2}\right)$ *apolaires à* f, *dans le cas où, la forme* F_{t+1} *n'étant pas identiquement nulle, ce système* *contient $m'-2t$ formes linéairement indépendantes entre elles. Si le nombre $m'-k'-t+1 \leqq m'-t+1$ des formes de ce système qui sont divisibles par une forme $e_x^{m-m'}$ (où $0 < m-m' \leqq m-t$) est à la fois positif et supérieur à $m'-2t$, il faut bien qu'il existe une seule forme $r_x'^{k'}\left(\frac{m'+1}{2} > k' \geqq 0\right)$ ayant la propriété que la forme $e_x^{m-m'} r_x'^{k'}$ coïncide avec celle des formes apolaires à f et divisibles par $e_x^{m-m'}$ dont l'ordre est minimum.*

Les seules formes d'ordre $m-t$ apolaires à f et divisibles par $e_x^{m-m'}$ sont alors celles divisibles par $e_x^{m-m'} r_x'^{k'}$.

34. De la proposition que nous venons d'établir il résulte que :

Si, dans le cas où $F_{t+1} \neq 0 \left(m-t > \frac{m}{2}\right)$, il y a, parmi les formes d'ordre $m-t$ apolaires à f, au moins $m'-k'-t+1 > 0$, où $0 \leqq k' < t+1$, qui soient divisibles par une forme $e_x^{m-m'}$, d'ordre égal ou inférieur à $m-t$, il faut bien que la forme $e_x^{m-m'}$ entre en facteur au moins dans une forme $e_x^{m-m'} r_x'^{k'}$, d'ordre $m-m'-k'$, apolaire à f.

Considérons, en particulier, le cas où $m' = 2t+1$.

Si la forme

$$e_x^{m-m'} = e_x^{m-2t-1} = (xy^{t+2})(xy^{t+3})\ldots(xy^{m+t})$$

était quelconque, il n'y aurait qu'une seule forme d'ordre $m-t$, apolaire à f, qui soit divisible par $e_x^{m-m'}$; ce serait la forme représentée par

$$d_x^{m-t} = e_x^{m-m'}\,\Omega_{t+1}(x, y^{t+2}, y^{t+3}, \ldots, y_x^{m-t}).$$

Si, au contraire, on suppose que le nombre des formes d'ordre $m-t > \frac{m}{2}$, apolaires à f et divisibles par $e_x^{m-m'}$, soit au moins égal à 2, on devra en conclure, d'après la proposition précédente, qu'il existe au moins une forme d'ordre $m-t-1$, apolaire à f, qui soit divisible par $e_x^{m-m'}$.

En remarquant maintenant : 1° que la condition nécessaire et suffisante pour que la forme $e_x^{m-m'} = e_x^{m-2t-1}$ entre en facteur au moins dans deux formes d'ordre $m-t$ apolaires à f, consiste dans l'évanouissement de la forme

$$\Omega_{t+1}(x, y^{t+2}, y^{t+3}, \ldots, y^{m-t}),$$

quel que soit x, et 2° que lorsque la forme $e_x^{m-m'}$ entre en facteur dans quelque forme d'ordre $m - t - 1$, apolaire à f, on doit avoir

$$\begin{gathered}
0 = \Omega_{t+2}(y^{t+3}, y^{t+4}, \ldots, y^{m-t}),\\
0 = \Omega_{t+2}(y^{t+2}, y^{t+4}, \ldots, y^{m-t}),\\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,\\
0 = \Omega_{t+2}(y^{t+2}, y^{t+3}, \ldots, y^{m-t-1}),
\end{gathered}$$

on arrive à ce résultat important, que :

Toutes les fois que la forme

$$\Omega_{t+1}(x, y^{t+2}, y^{t+3}, \ldots, y^{m-t})$$

(où les y^{t+2}, y^{t+3}, ... ont des valeurs données) est nulle quel que soit x, on doit avoir les $m - 2t - 1$ relations

$$\begin{gathered}
0 = \Omega_{t+2}(y^{t+3}, y^{t+4}, \ldots, y^{m-t}),\\
0 = \Omega_{t+2}(y^{t+2}, y^{t+4}, \ldots, y^{m-t}),\\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,\\
0 = \Omega_{t+2}(y^{t+2}, y^{t+3}, \ldots, y^{m-t-1}).
\end{gathered}$$

En partant de cette proposition, il est aisé d'établir la proposition plus générale suivante :

Toutes les fois que la forme

$$\Omega_{t+1}(x^{t+1}, x^{t+2}, \ldots, x^{t'}, y^{t'+1}, y^{t'+2}, \ldots, y^{m-t})$$

(où $m - t > t' > t$, et où les $y^{t'+1}$, $y^{t'+2}$, ... ont des valeurs données) est nulle quelles que soient les valeurs des x^{t+1}, x^{t+2}, ..., $x^{t'}$, il se trouve que toutes les formes

$$\Omega_{t+j+1}(x^{t+j+1}, x^{t+j+2}, \ldots, x^{t'}, z^{t'+1}, z^{t'+2}, \ldots, z^{m-t-j}),$$

correspondant aux valeurs

$$j = 1, 2, \ldots, t' - t$$

de j, sont également nulles quelles que soient les valeurs des x^{t+j+1}, ..., $x^{t'}$, aussitôt qu'on suppose que les $z^{t'+1}$, $z^{t'+2}$, ..., z^{m-t-j} qui y figurent sont $m - t - t' - j$ symboles différents pris parmi les $y^{t'+1}$, $y^{t'+2}$, ..., y^{m-t} [1].

---

[1] On peut aussi arriver à ce résultat en partant de la proposition énoncée au commencement du présent numéro, proposition qu'on appliquerait au cas où $m' = t + t'$.

Par suite des propriétés des formes involutives exposées aux nos 7 et 13, on peut aussi énoncer cette proposition comme il suit :

Toutes les fois que la forme

$$\Omega_{t+1}(x, x, \ldots, x, y^{t'+1}, y^{t'+2}, \ldots, y^{m-t})$$

(où $m-t > t' > t'$, etc.) est nulle, quel que soit x, il se trouve que toutes les formes

$$\Omega_{t+j+1}(x, x, \ldots, x, z^{t'+1}, z^{t'+2}, \ldots, z^{m-t-j}),$$

correspondant aux valeurs 1, 2, ..., $t'-t$ *de* j, *sont également nulles quel que soit* x, *aussitôt que l'on suppose, etc.*

Des propositions analogues ont lieu pour les formes

$$\Phi_{t+1}(x^0, x^1, \ldots, x^{t+1}),$$

(considérées au n° 19); mais, comme le plan du présent Mémoire ne s'y prête pas, nous préférons remettre leur étude à une autre occasion.

VIII.

Sur la théorie du plus grand commun diviseur.

35. Soient deux formes binaires

$$r = r_x^k \text{ et } s = s_x^l \qquad (k \leqq l),$$

et considérons le système linéaire composé par les formes d'ordre $k+l-i$ comprises dans l'expression

$$\sigma_x^{l-i} r - \rho_x^{k-i} s \qquad (i = 1, 2, \ldots, k), \tag{10}$$

où ρ_x^{k-i} et σ_x^{l-i} désignent deux formes arbitraires, dont les ordres $k-i$ et $l-i$ sont inférieurs à k.

On sait, d'après une remarque utilisée déjà par Euler pour la théorie d'élimination, que dans le cas où l'on peut trouver deux formes ρ_x^{k-i} et σ_x^{l-i}, telles qu'on ait

$$\sigma_x^{l-i} r - \rho_x^{k-i} s = 0,$$

les deux formes r et s doivent admettre en commun au moins i facteurs linéaires.

De cette manière, dans le cas où les deux formes r et s n'admettent pas plus de $i-1$ facteurs linéaires en commun, aucune forme comprise dans l'expression (10) ne doit être identiquement nulle (nous faisons naturellement abstraction du cas où $\rho = \sigma = 0$). En d'autres termes, les formes comprises dans l'expression (10), et qui sont toutes des combinaisons linéaires de $k+l-2i+2$ formes

$$(11) \qquad \left\{ \begin{array}{l} x_1^{l-i} r, \; x_1^{l-i-1} x_2 r, \; \ldots, \; x_1 x_2^{l-i-1} r, \; x_2^{l-i} r, \\ x_1^{k-i} s, \; x_1^{l-i-1} x_2 s, \; \ldots, \; x_1 x_2^{k-i-1} s, \; x_2^{k-i} s, \end{array} \right.$$

constituent, dans le cas considéré, un système linéaire à $k+l-2i+1$ paramètres. On remarquera que, lorsque les deux formes r et s n'admettent aucun facteur linéaire en commun, l'expression $\sigma_x^{l-1} r - \rho_x^{k-1} s$ est capable de représenter toute forme d'ordre $k+l-1$.

36. On obtient la forme involutive

$$\omega_{i-1}(x^{i-1}, x^i, \ldots, x^{k+l-i}),$$

relative au système linéaire (10), en éliminant les $k+l-2i+2$ coefficients des formes ρ_x^{k-i} et σ_x^{l-i} ainsi que les $i-1$ coefficients de la forme τ_x^{i-2}, entre les $k+l-i+1$ équations de condition auxquelles conduit l'évanouissement identique de la forme

$$\sigma_x^{l-i} r - \rho_x^{k-i} s - \tau_x^{i-2} (x x^{i-1})(x x^i) \ldots (x x^{k+l-i}),$$

(comparez le n° 6) (¹).

La forme ω_{i-1} est d'ordre $i-1$ par rapport à chacune des séries de variables $x^{i-1}, x^{i-2}, \ldots, x^{k+l-i}$, de degré $l-i+1$ par rapport aux coefficients de r et de degré $k-i+1$ par rapport aux coefficients de s.

La forme ω_0, ne contenant pas de variables, constitue le résultant

---

(¹) En dehors de l'expression de ω_{i-1}, par un déterminant d'ordre $k+l-i+1$, qu'on obtient de cette manière, on peut aussi trouver une autre expression par un déterminant d'ordre $i+l-1$. Mais ces questions ne sont que d'une importance secondaire pour le but que nous avons en vue.

des deux formes r et s. L'évanouissement identique de ω_0 exprime, en effet, la condition nécessaire et suffisante pour qu'une des formes comprises dans l'expression

$$\sigma_x^{l-1} r - \rho_x^{k-1} s$$

soit identiquement nulle, c'est-à-dire pour que les deux formes r et s admettent au moins un facteur linéaire en commun.

De même, *l'évanouissement identique de la forme* ω_{i-1} *fournit l'ensemble des relations (fondamentales) qui doivent avoir lieu, entre les deux formes r et s, pour qu'une forme au moins comprise dans l'expression* (10) *soit identiquement nulle, c'est-à-dire pour que les deux formes r et s admettent au moins i facteurs linéaires en commun.*

37. Considérons maintenant le covariant principal

$$R_{i-1}(x) = \omega_{i-1}(x, x, \ldots, x)$$

de la forme ω_{i-1}, covariant qui coïncide avec le déterminant fonctionnel des $k + l - 2i + 2$ formes (11). (Pour $i = 1$, on aura $R_0 = \omega_0$.)

D'après ce que nous savons (n° 13), les $\binom{k+l-i+1}{i-1}$ relations, linéairement indépendantes entre elles, auxquelles conduit l'évanouissement identique de la forme involutive ω_{i-1}, doivent être toutes satisfaites aussitôt que la forme $R_{i-1}(x)$ devient identiquement nulle. Il suit de là que :

Pour que les deux formes $r = r_x^k$ *et* $s = s_x^l$ *admettent au moins i facteurs linéaires en commun, il faut et il suffit que la forme, d'ordre* $(i-1)(k+l-2i+2)$,

$$R_{i-1}(x) = \omega_{i-1}(x, x, \ldots, x)$$

soit identiquement nulle.

Lorsque la forme R_{i-1} *est identiquement nulle, il en est de même pour les formes* $R_{i-2}, R_{i-3}, \ldots, R_0$.

Pour que les deux formes r et s admettent moins de $i+1$ *facteurs linéaires en commun, il faut et il suffit que la forme* R_i *ne soit pas identiquement nulle.*

Pour que le plus grand commun diviseur des deux formes r et s soit une forme d'ordre i, il faut et il suffit que la forme R_{i-1} *soit identiquement nulle sans qu'il en soit de même pour la forme* R_i.

38. Lorsque les formes r et s admettent pour plus grand commun diviseur une forme $p(x)$ d'ordre i, aucune des formes comprises dans l'expression

$$\sigma_x^{l-i-1} r - \rho_x^{k-i-1} s$$

ne peut être identiquement nulle. L'expression précédente est donc, dans ce cas, capable de représenter toute forme d'ordre $k+l-i-1$ divisible par $p(x)$. De là il suit que, dans ce cas, la forme involutive

$$\omega_i(x^i, x^{i+1}, \ldots, x^{k+l-i-1})$$

coïncide avec la forme

$$p(x^i)p(x^{i+1})\ldots p(x^{k+l-i-1}).$$

Ainsi donc :

Dans le cas où la forme R_{i-1} *est identiquement nulle, sans qu'il en soit de même pour* R_i, *la forme involutive* ω_i *devient égale à*

$$\omega_i = p(x^i)p(x^{i+1})\ldots p(x^{k+l-i-1}),$$

$p(x)$ *désignant la forme d'ordre i qui constitue, dans ce cas, le plus grand commun diviseur des deux formes r et s.*

En particulier, lorsque le résultant R_0 *des deux formes r et s est nul, sans que la forme* R_1, *laquelle est d'ordre* $m = k+l-2$, *soit identiquement nulle, on doit avoir*

$$\omega_1 = (x^1 y)(x^2 y)\ldots(x^m y),$$
$$R_1 = (xy)^m,$$

(xy) *désignant le seul facteur linéaire que les deux formes r et s admettent, dans ce cas, en commun* (1).

De cette proposition nous déduisons que, *si le plus grand diviseur*

(1) On sait que Jacobi (*Journal de Crelle*, t. 15) est le premier qui ait considéré les *coefficients* de la forme R_1 pour le cas où $k = l$, lesquels coefficients ne sont autre chose que les premiers mineurs du déterminant qui représente le résultant de Bézout. Jacobi avait fait voir, entre autres, comment, en partant des coefficients en question, on peut déterminer, d'une manière unique (en général), les deux formes r et s, de façon que deux coefficients arbitraires de chacune de ces formes aient des valeurs données. M. Gordan s'est aussi beaucoup occupé de la forme R_1, qu'il représente par la lettre Θ, dans son Mémoire : *Ueber die Bildung der Resultante zweier Gleichungen* (*Mathem. Annalen*, t. III; 1871). *Voir* aussi une Note de l'auteur : *Sur un problème de la théorie de l'élimination* (*Comptes rendus des séances de l'Académie des Sciences*, t. XCVIII, p. 1050; décembre 1883).

des deux formes r et s est une forme $p(x)$, d'ordre i, cette forme $p(x)$ doit être égale, à un facteur constant (différent de zéro) près, à

$$\omega_i(x, y^{i+1}, y^{i+2}, \ldots, y^{k+l-i-1}),$$

où les $y^{i+1}, y^{i+2}, \ldots$ sont des valeurs de y choisies de manière qu'elles n'annulent pas à la fois les deux formes r et s, c'est-à-dire de manière qu'aucune des expressions

$$(xy^{i+1}),\ (xy^{i+2}),\ \ldots,\ (xy^{k+l-i-1})$$

ne constitue un facteur linéaire commun aux deux formes r et s.

39. D'après les propriétés que nous venons d'établir, toutes les fois que la forme ω_{i-1} est identiquement nulle, sans qu'il en soit de même pour ω_i, on doit avoir

$$\omega_i(y^i, y^{i+1}, \ldots, y^{k+l-i-1}) \neq 0,$$

aussitôt qu'aucune des valeurs $y^i, y^{i+1}, \ldots$ de y n'annule à la fois les deux formes r et s. De là découle cette proposition :

Pour que, la forme ω_{i-1} étant identiquement nulle, la même chose ait lieu pour la forme ω_i, il faut et il suffit qu'on ait

$$\omega_i(y^i, y^{i+1}, \ldots, y^{k+l-i-1}) = 0$$

pour des valeurs $y^i, y^{i+1}, \ldots$ de y choisies de manière qu'aucune d'elles n'annule à la fois les deux formes r et s.

Ce résultat est fort remarquable, parce qu'il nous apprend comment, étant supposé que la forme ω_{i-1} soit identiquement nulle, on peut exprimer, *par une seule équation,* la condition nécessaire et suffisante pour que la forme ω_i soit aussi identiquement nulle. En partant maintenant de ce résultat, appliqué successivement aux cas où $i = 1, 2, \ldots$, on arrive à un procédé permettant d'exprimer, *au moyen de i équations seulement,* accompagnées d'un certain nombre d'inégalités, les conditions nécessaires et suffisantes pour que la forme ω_{i-1} soit identiquement nulle.

Ainsi : *Pour que la forme ω_{i-1} soit identiquement nulle, c'est-à-dire pour que les deux formes r et s admettent au moins i facteurs linéaires en com-*

mun, il faut et il suffit qu'on ait

$$\begin{aligned} o &= \omega_0 = R_0, \\ o &= \omega_1(y_1^1, y_1^2, \ldots, y_1^n), \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ o &= \omega_{i-1}(y_{i-1}^{i-1}, y_{i-1}^{i}, \ldots, y_{i-1}^{k+l-i}) \end{aligned}$$

pour des valeurs $y_1^1, y_1^2, \ldots, y_1^n, \ldots, y_{i-1}^{i-1}, y_{i-1}^{i}, \ldots, y_{i-1}^{k+l-i}$ *de* y, *choisies de manière qu'aucune d'elles n'annule à la fois les deux formes* r *et* s.

Si l'on voulait de plus que, avec $\omega_{i-1} = o$, on ait $\omega_i \neq o$, on devrait ajouter, aux i équations de la proposition précédente, l'inégalité

$$o \neq \omega_i(y_i^i, y_i^{i+1}, \ldots, y_i^{k-l-i-1}),$$

les valeurs $y_i^i, y_i^{i+1}, \ldots$ de y étant toujours choisies d'après la même règle.

40. Parmi les cas particuliers de la proposition précédente, il convient de signaler le suivant :

Pour que les deux formes r *et* s *admettent au moins* i *facteurs linéaires en commun, il faut et il suffit qu'on ait*

$$R_0 = o, \quad R_1(y) = o, \quad \ldots, \quad R_{i-1}(y) = o,$$

la valeur y *étant choisie de manière qu'on n'ait pas à la fois* $r(y) = o$ et $s(y) = o$. *Si maintenant on veut que les deux formes* r *et* s *admettent juste* i *facteurs linéaires en commun, il faut et il suffit d'ajouter aux équations précédentes l'inégalité*

$$R_i(y) \neq o.$$

On voit par là que, *dans le cas où les premiers (ou les derniers) termes des deux formes* r *et* s *ne sont pas nuls à la fois, les conditions nécessaires et suffisantes pour que les deux formes* r *et* s *admettent* i *facteurs linéaires en commun consistent dans l'évanouissement des premiers (ou des derniers) termes des formes*

$$R_0, R_1, \ldots, R_{i-1}.$$

Si l'on veut que les deux formes r *et* s *aient juste* i *facteurs linéaires en commun, il faut de plus et il suffit que le premier (ou le dernier) terme de la forme* R_i *soit différent de zéro.*

IX.

Comparaison avec la théorie des formes apolaires.

41. *Propriétés de la forme* R_1. — A côté des formes involutives

$$\omega_{i-1}(x^{i-1}, x^i, \ldots, x^{k+l-i}),$$

relatives aux systèmes linéaires

$$\sigma_x^{l-i} r - \rho^{k-i} s,$$

on pourrait considérer les formes involutives

$$\varphi_{i-1}(x^0, x^1, \ldots, x^{i-2}),$$

relatives aux systèmes linéaires conjugués.

Parmi ces nouvelles formes, la plus intéressante est la forme

$$\varphi_1(x) = \omega_1(x, x, \ldots, x) = R_1(x),$$

laquelle représente, toutes les fois qu'elle n'est pas identiquement nulle, la seule forme qui soit, dans ce cas, conjuguée aux formes comprises dans l'expression

$$\sigma_x^{l-2} r - \rho_x^{k-2} s.$$

Ainsi, en supposant

$$R_1(x) = \alpha_x^m, \quad (m = k + l - 2),$$

on devra avoir

$$\omega_1(x^1, x^2, \ldots, x^m) = \alpha_{x^1}\alpha_{x^2}\ldots\alpha_{x^m}.$$

La forme R_1 est caractérisée par la propriété d'être conjuguée aussi bien par rapport à la forme r que par rapport à la forme s. Aussi est-elle complètement définie, à un facteur numérique près, au moyen des relations

$$(\alpha r)^k \alpha_x^{m-k} = 0, \quad (\alpha s)^l \alpha_x^{m-l} = 0.$$

Nous savons (n° 38) que, dans le cas où $R_0 = 0$, la forme $R_1(x)$ devient égale à $(xy)^m$, (xy) désignant le facteur linéaire que les deux formes r et s admettent en commun dans ce cas. Mais si les deux formes r et s ont $i > 1$ facteurs linéaires en commun, on a $R_1(x) = 0$, le nombre des formes d'ordre $m = k + l - 2$, conjuguées à r et à s et linéairement indépendantes entre elles, étant égal à i.

42. D'après ce que nous avons vu au n° **29**, lorsque les deux formes r et s n'admettent aucun facteur linéaire en commun, et qu'on suppose $k \leqq l$, il ne peut pas y avoir de formes d'ordre moindre à k qui soient apolaires à $R_1 = \alpha_x^m$.

Si $k = l$, les seules formes d'ordre k apolaires à $R_1 = \alpha_x^m$ sont celles comprises dans le faisceau $\varkappa r + \lambda s$.

D'autre part, si $k < l$, la forme r est la seule forme d'ordre k apolaire à R_1, tandis que les seules formes apolaires à R_1, dont l'ordre soit supérieur à k et inférieur à l, sont celles divisibles par r.

De cette manière, les seules formes d'ordre $m - t$ égal ou supérieur à $l (\geqq k)$, apolaires à R_1, sont celles comprises dans le système linéaire

$$\sigma_x^{m-k-t} r - \rho_x^{m-l-t} s, \quad (t = 0, 1, \ldots, k-2).$$

Dans le cas, au contraire, où $R_0 = 0$, $R_1 = (xy)^m$, toutes les formes d'ordre égal ou inférieur à m, qui sont divisibles par (xy) doivent être apolaires à $R_1 = \alpha_x^m$.

On déduit de tout cela que, si l'on considère le covariant

$$\Omega_{t+1}(x^{t+1}, x^{t+2}, \ldots, x^{m-t}) = \frac{1}{(t+1)!} (\alpha\alpha')^2 (\alpha\alpha'')^2 \ldots (\alpha^{(t-1)}\alpha^{(t)})^2 \prod_{t=t+1}^{i=m-t} \alpha_{x^i} \alpha'_{x^i} \ldots \alpha^{(t)}_{x^i}$$

de $R_1 = \alpha_x^m$ (*voir* n° **21**), pour les cas où $0 \leqq t < k - 1$, ce covariant doit être égal, à un facteur numérique près, au produit de la forme

$$\omega_{t+1}(x^{t+1}, x^{t+2}, \ldots x^{m-t})$$

par la $t^{\text{ième}}$ puissance du résultant R_0.

D'autre part, le cas où l'on aurait $t \geqq k - 1$ offre des particularités assez curieuses. Et d'abord, si $k < l$, le covariant Ω_k de R_1 doit être égal, à un facteur numérique près, à

$$R_0^{k-1} r(x^k) r(x^{k+1}) \ldots r(x^{l-1}),$$

tandis que les covariants suivants Ω_{k+1}, Ω_{k+2}, ... de R_1 sont identiquement nuls. Si, au contraire, $k=l$, l'invariant Ω_k de R_1 se réduit à la puissance $(k-1)^{\text{ième}}$ du résultant R_0.

43. Comme les systèmes linéaires

$$\sigma_x^{m-k-t} r - \rho_x^{m-l-t} s \quad (0 \leqq t < k-1)$$

sont composés, dans le cas où $R_0 \neq 0$, par des formes d'ordre $m-t$ apolaires à $R_1(x)$, ces systèmes linéaires doivent posséder toutes les propriétés dont il a été question aux nos **32-34**.

De cette manière nous devons avoir, entre autres, les propositions suivantes (pour le cas où $R_0 \neq 0$) :

Si le nombre des formes du système

$$\sigma_x^{m-k-t} r - \rho_x^{m-l-t} s$$

qui sont divisibles par une forme e_x^{m-2t-1} est égal ou supérieur à 2, il doit exister au moins une forme d'ordre $m-t-1$ apolaire à R_1 qui soit divisible par e_x^{m-2t-1}.

Toutes les fois que la forme

$$\omega_{t+1}(x, y^{t+2}, y^{t+3}, \ldots, y^{m-t}),$$

où les $y^{t+2}, y^{t+3}, \ldots, y^{m-t}$ ont des valeurs données, est nulle, quel que soit x, on doit avoir les $m-2t-1$ relations

$$\begin{aligned}
0 &= \omega_{t+2}(y^{t+3}, y^{t+4}, \ldots, y^{m-t}),\\
0 &= \omega_{t+2}(y^{t+2}, y^{t+4}, \ldots, y^{m-t}),\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,\\
0 &= \omega_{t+2}(y^{t+2}, y^{t+3}, \ldots, y^{m-t-1}).
\end{aligned}$$

44. *Propriétés relatives au cas où $R_{i-1}=0$, $R_i \neq 0$.* — Considérons maintenant de nouveau le cas où les deux formes r et s admettraient, comme plus grand commun diviseur, une forme p_x^i. Comme toutes les formes $R_{i-1}, R_{i-2}, \ldots, R_1, R_0$ sont, dans ce cas, identiquement nulles, nous aurons à envisager seulement les formes involutives

$$\omega_i, \omega_{i+1}, \ldots, \omega_{k-1}.$$

Si l'on suppose

$$r = p(x)\,r'(x), \quad s = p(x)\,s'(x),$$

r' et s' étant deux formes d'ordres $k' = k - i$ et $l' = l - i$ respectivement, les systèmes linéaires auxquels se rapportent les formes involutives précédentes seront

$$\begin{gathered}(\sigma_x^{l-i-1} r' - \rho_x^{k-i-1} s')\,p_x^i,\\ (\sigma_x^{l-i-2} r' - \rho_x^{k-i-2} s')\,p_x^i,\\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots,\\ (\sigma_x^{l-k} r' - \rho s')\,p_x^i.\end{gathered}$$

Cela étant, il est aisé de voir qu'une quelconque des formes involutives

$$\omega_{j-1}(x^{j-1}, x^j, \dots, x^{k+l-j}) \quad (i < j < k+1)$$

en question doit être égale au produit de la forme

$$p(x^{j-1})\,p(x^j)\dots p(x^{k+l-j})$$

par la forme involutive

$$\omega'_{j-i-1}(x^{j-1}, x^j, \dots, x^{k+l-j})$$

relative au système linéaire

$$\sigma_x^{l-j} r' - \rho_x^{k-j} s' \quad (^1).$$

La forme ω_i sera, en particulier, égale, à un facteur constant près, à

$$p(x^i)\,p(x^{i+1})\dots p(x^{k+l-i-1}),$$

comme nous l'avons déjà remarqué (n° **38**).

---

(1) Il est, en effet, clair que si $k+1$ formes binaires $f_0, f_1, \dots, f_k$ d'un même ordre sont toutes divisibles par une même forme $p(x)$, de manière qu'on ait

$$f_0 = pf'_0, \quad f_1 = pf'_1, \quad \dots, \quad f_k = pf'_k,$$

la forme involutive

$$[\Sigma \pm f_0(x^0)\,f_1(x^1)\dots f_k(x^k)] : \Delta(x^0, x^1, \dots, x^k)$$

est égale au produit de la forme $p(x^0)\,p(x^1)\dots p(x^k)$ par la forme involutive

$$[\Sigma \pm f'_0(x^0)\,f'_1(x^1)\dots f'_k(x^k)] : \Delta(x^0, x^1, \dots, x^k).$$

45. Les formes $\omega'_0, \omega'_1, \ldots \omega'_{k-i-1}$ jouent, par rapport aux formes r' et s', le même rôle que les formes $\omega_0, \omega_1, \ldots, \omega_{k-1}$ jouent par rapport aux formes r et s. Ainsi la première de ces formes constitue le résultant R'_0, supposé différent de zéro, des deux formes r' et s'. Quant à la forme

$$\omega'_1(x, x, \ldots, x) = R'_1(x),$$

elle constitue la seule forme d'ordre $m' = k' + l' - 2 = k + l - 2i - 2$ qui soit conjuguée aux deux formes r' et s'; elle jouit, par conséquent, de propriétés tout à fait analogues à celles exposées aux n^{os} **41-43** à propos de la forme $R_1(x)$. Parmi les diverses propriétés auxquelles conduit la considération de la forme $R'_1(x)$, il importe d'envisager ici la suivante (comparez le n° **43**) :

Toutes les fois que la forme

$$\omega'_{j-i-1}(x, y^j, y^{j+1}, \ldots, y^{k+l-j}),$$

où les $y^j, y^{j+1}, \ldots, y^{k+l-j}$ ont des valeurs données, est nulle, quel que soit x, on doit avoir les $k + l - 2j + 1$ relations suivantes :

$$\begin{aligned}
&\omega'_{j-i}(y^{j+1}, y^{j+2}, \ldots, y^{k+l-j}) &&= 0,\\
&\omega'_{j-i}(y^j, \quad y^{j+2}, \ldots, y^{k+l-j}) &&= 0,\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots &&,\\
&\omega'_{j-i}(y^j, \quad y^{j+1}, \ldots, y^{k+l-j-1}) &&= 0.
\end{aligned}$$

Si l'on passe maintenant à la considération de la forme

$$\begin{aligned}
&\omega_{j-1}(x, y^j, y^{j+1}, \ldots, y^{k+l-j})\\
&\quad = \omega'_{j-i-1}(x, y^j, y^{j+1}, \ldots, y^{k+l-j}) \times p(x)\, p(y^j)\, p(y^{j+1}) \ldots p(y^{k+l-j})
\end{aligned}$$

(où $i < j < k + 1$), on remarque, d'après la proposition précédente, que :

Si la forme

$$\omega_{j-1}(x, y^j, y^{j+1}, \ldots, y^{k+l-j})$$

est nulle, quel que soit x, sans que la forme R_{j-1} soit identiquement nulle, on doit avoir

$$(11)\qquad \left\{\begin{aligned}
&\omega_j(y^{j+1}, y^{j+2}, \ldots, y^{k+l-j}) &&= 0,\\
&\omega_j(y^j, \quad y^{j+2}, \ldots, y^{k+l-j}) &&= 0,\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots &&,\\
&\omega_j(y^j, \quad y^{j+1}, \ldots, y^{k+l-j-1}) &&= 0,
\end{aligned}\right.$$

toutes les fois que les valeurs y^j, y^{j+1}, ..., y^{k+l-j} de y sont telles qu'aucune d'elles n'annule à la fois les deux formes r et s.

Voyons maintenant ce qui se passe lorsque la forme R_{j-1} est identiquement nulle. Et d'abord, si $R_j = 0$, on aura aussi $\omega_j = 0$, de sorte que toutes les relations (11) précédentes seront satisfaites identiquement. Si maintenant $R_{j-1} = 0$, $R_j \neq 0$, on devra avoir (d'après les n^{os} 38, 39)

$$\omega_j(y^j, y^{j+1}, \ldots y^{k+l-j-1}) \neq 0,$$

toutes les fois qu'aucune des valeurs y^j, y^{j+1}, ... de y n'annule à la fois les deux formes r et s. En combinant ces remarques avec la proposition précédente, on arrive à ce résultat très remarquable, que :

Pour que la forme R_{i-1} soit identiquement nulle, sans qu'il en soit de même pour R_i, c'est-à-dire pour que le plus grand commun diviseur des deux formes r et s soit une forme d'ordre i, il faut et il suffit que la forme

$$\omega_{i-1}(x, y^i, y^{i+1}, \ldots, y^{k+l-i})$$

(où les y^i, y^{i+1}, ..., y^{k+l-i} désignent des valeurs données de y, choisies de manière qu'aucune d'elles n'annule à la fois les deux formes r et s) soit nulle, quel que soit x, pourvu qu'en même temps ait lieu une quelconque des inégalités

$$\begin{array}{l}\omega_i(y^{i+1}, y^{i+2}, \ldots, y^{k+l-i}) \neq 0,\\ \omega_i(y^i, \quad y^{i+2}, \ldots, y^{k+l-i}) \neq 0,\\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,\\ \omega_i(y^i, \quad y^{i+1}, \ldots, y^{k+l-i-1}) \neq 0.\end{array}$$

En supposant, en particulier,

$$y^i = y^{i+1} = \ldots = y^{k+l-i} = y,$$

nous avons cette proposition :

Pour que le plus grand commun diviseur des deux formes r et s soit une forme d'ordre i, il faut et il suffit que la forme

$$\omega_{i-1}(x, y, y, \ldots, y)$$

(y ayant une valeur qui n'annule pas à la fois les deux formes r et s)

soit nulle, quel que soit x, pourvu qu'on ait en même temps

$$\omega_i(y, y, \ldots, y) = \mathrm{R}_i(y) \neq 0.$$

46. D'après ce qui précède, il est clair que l'évanouissement pur et simple de la forme

$$\omega_{i-1}(x, y^i, y^{i+1}, \ldots, y^{k+l-i}),$$

quel que soit x, ne peut fournir aucune indication sur le nombre des facteurs linéaires que les deux formes r et s peuvent avoir en commun, même si l'on suppose que les y^i, y^{i+1}, ... soient choisis de manière qu'aucune des expressions (xy^i), (xy^{i+1}) ... ne constitue un facteur linéaire commun aux deux formes r et s.

Ainsi, par exemple, on peut démontrer que, *pour qu'on puisse trouver une valeur de y qui n'annule pas à la fois les deux formes r et s, et qui soit telle que la forme*

$$\omega_{i-1}(x, y, y, \ldots, y)$$

soit nulle quel que soit x, il faut et il suffit (*en général, p. e. dans le cas où* $\mathrm{R} \neq 0$) *qu'un invariant des deux formes r et s soit nul. Cet invariant est d'ordre* $(i-1)(k+l-2i+1)$ *par rapport aux coefficients de la forme ω_i et son évanouissement constitue la condition nécessaire et suffisante pour que, parmi les formes du système linéaire*

$$\sigma_x^{l-i-1}\, r - \rho_x^{k-i-1}\, s,$$

il y en ait une qui admette un facteur de la forme $(xy)^{k+l-2i+1}$ (*voir* n° **11**).