

ANNALES SCIENTIFIQUES
DE L'UNIVERSITÉ DE CLERMONT-FERRAND 2
Série Probabilités et applications

RADKO MESIAR

La convergence presque sûre des T -moyennes de Césaro

Annales scientifiques de l'Université de Clermont-Ferrand 2, tome 85, série *Probabilités et applications*, n° 3 (1985), p. 31-43

http://www.numdam.org/item?id=ASCFPA_1985__85_3_31_0

© Université de Clermont-Ferrand 2, 1985, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Annales scientifiques de l'Université de Clermont-Ferrand 2 » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

LA CONVERGENCE PRESQUE SURE DES T-MOYENNES DE CESARO

Radko MESIAR

Résumé :

Le but du présent travail est de donner les conditions, sous lesquelles la suite $(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i \circ T^i)$ des T-moyennes de Césaro d'une suite p.s. convergente $(X_n), X_n \in L^1$, converge. La condition $\inf_{Z \in L^1} \sum_n P(|X_n| \geq Z) = 0$ est suffisante pour assurer la convergence p.s. des T-moyennes de Césaro. Nous étudions la nécessité de cette condition. Le présent travail fait apparaître de nouvelles analogies entre la théorie ergodique et la théorie des espérances conditionnelles.

Summary :

We investigate the following problem : if $X_n \rightarrow 0$, a.e., $X_n \in L^1$, $n = 1, 2, \dots$, what can we say about the a.s. convergence of the sequence $(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i \circ T^i)$ of the T-Cesaro averages. The condition $\inf_{Z \in L^1} \sum_n P(|X_n| \geq Z) = 0$ is a sufficient condition for the a.s. convergence of the mentioned T-Cesaro averages. We study the necessity of this condition. We present some new analogies between the ergodic theory and the theory of the conditional expectations.

(Ce travail a été fait durant le stage de l'auteur au Laboratoire de Probabilités).

Définition. - Etant donné une transformation mesurable T de l'espace de probabilité (Ω, α, P) qui préserve P , pour une suite $(X_n, n \in \mathbb{N})$ dans

$L^1(\Omega, \alpha, P)$ nous appelons la suite $(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i \circ T^i, n \in \mathbb{N})$ la suite des T -moyennes de Césaro. $\square$

Nous nous occuperons de suites de v.a. nonnégatives intégrables, convergeant p.s. vers zéro, car le cas général s'en déduit facilement. Dans le présent travail, T est toujours une transformation mesurable de l'espace de probabilité qui préserve la mesure. Dans tous exemples, $\Omega =]0,1]$, $\alpha = \mathcal{B}$, $P = \lambda$.

Théorème 1. - Soit $(X_n, n \in \mathbb{N})$ une suite de v.a. nonnégative intégrables, $X_n \xrightarrow[n]{p.s.} 0$, vérifiant la condition

$$\inf_{Z \in L^1} \sum_n P(X_n \geq Z) = 0.$$

Alors pour tout T la suite des T -moyennes de Césaro converge p.s. vers zéro.

Démonstration. - Il existe une v.a. $Z_0 \in L^1$, pour lequel $\sum_n P(X_n \geq Z_0) < \infty$.

Soit $Y_n = X_n I_{\{X_n < Z_0\}}$, $Q_n = X_n - Y_n = X_n I_{\{X_n \geq Z_0\}}$, $n = 1, 2, \dots$

Car $0 \leq Y_n \in L^1$, $Y_n \xrightarrow[n]{p.s.} 0$, $\sup_n Y_n \leq Z_0 \in L^1$, d'après MESIAR [3] nous avons

pour tout T

$$\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n Y_i \circ T^i \xrightarrow[n]{p.s.} 0, \text{ (voir aussi MAKER [5]).}$$

Car $0 \leq Q_n \in L^1$, $\sum_n P(Q_n > 0) \leq \sum_n P(X_n \geq Z_0) < \infty$, nous avons pour tout T

$Q_n \circ T^n \xrightarrow[n]{p.s.} 0$, alors

$$\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n Q_i \circ T^i \xrightarrow[n]{p.s.} 0, \text{ d'où}$$

$$\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i \circ T^i = \left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n Y_i \circ T^i + \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n Q_i \circ T^i \right) \xrightarrow[n]{} 0, \text{ p.s. } \square$$

Remarque 1. - Le point essentiel de MESIAR [3] est dans la démonstration de l'affirmation suivante : soit $(A_n, n \in \mathbb{N})$ une suite d'ensemble mesurables, telle que $A_n \xrightarrow[n]{} A$, $P(A) = 0$; alors pour tout T nous avons

$$\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n I_{A_i} \circ T^i \xrightarrow[n]{} 0, \text{ p.s.}$$

La seule conditions $P(A) \rightarrow 0$ est trop faible pour assurer la convergence p.s. des T -moyennes de Césaro de la suite (I_{A_n}) .

Par exemple, soit $(B_m, m \in \mathbb{N})$ une suite d'ensemble mesurables mutuellement indépendants, $P(B_m) \xrightarrow[m]{} 0$, $\sum_m P(B_m) = \infty$. Soit $A_1 = B_1$, $A_2 = B_2$,

$A_{2^{k-1}+1} = A_{2^{k-1}+2} = \dots = A_{2^k} = B_{k+1}$, $k = 2, 3, \dots$. Alors $\lim_n \sup \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n I_{A_i} \geq \frac{1}{2}$, p.s. $\square$

En général, la condition $\inf_{Z \in L^1} \sum_n P(|X_n| \geq Z) = 0$ est suffisante pour la convergence p.s. des T -moyennes de Césaro de la suite $(X_n \in L^1, n \in \mathbb{N})$ convergente p.s. Il est naturel de se demander si c'est aussi une condition nécessaire, c'est-à-dire que si $0 \leq X_n \in L^1$, $X_n \xrightarrow[n]{} 0$, p.s., $\inf_{Z \in L^1} \sum_n P(X_n \geq Z) > 0$, alors il existe T pour lequel la convergence p.s. des T -moyennes de Césaro vers zéro n'a pas lieu. Nous montrerons que l'énoncé est trop fort sous cette forme. Nous pouvons seulement affirmer que si $\inf_{Z \in L^1} \sum_n P(X_n \geq Z) > 0$, dans un certain sens la convergence p.s. des T -moyennes de Césaro n'a pas lieu.

Lemme 1. - Soit $(X_n, n \in \mathbb{N})$ une suite dans L^1 . Alors

$$\inf_{Z \in L^1} \sum_n P(|X_n| \geq Z) = \begin{matrix} 0 \\ \infty \end{matrix}.$$

Démonstration. - S'il existe au moins une v.a. $Z_0 \in L^1$, pour laquelle

$\sum_n P(|X_n| \geq Z_0) < \infty$, soit $Z_k = \sup(|X_1|, \dots, |X_k|, Z_0) + 1$, $k=1, 2, \dots$. Alors

$Z_k \in L^1$, $\sum_n P(|X_n| \geq Z_k) \leq \sum_{n > k} P(|X_n| \geq Z_0) \xrightarrow{k} 0$, donc $\inf_{Z \in L^1} \sum_n P(|X_n| \geq Z) = 0$ $\square$

D'après le lemme 1. les conditions $\inf_{Z \in L^1} \sum_n P(|X_n| \geq Z) = \infty$ et

$\inf_{Z \in L^1} \sum_n P(|X_n| \geq Z) > 0$ sont équivalentes. La vérification de la condition

$\inf_{Z \in L^1} \sum_n P(|X_n| \geq Z) = \infty$ peut être trop compliquée, car le tribu L^1 peut être

très riche.

Lemme 2. - Soit $\inf_{Z \in L^1} \sum_n P(|X_n| \geq Z) = \infty$. Alors

$$1) \sup_n |X_n| \notin L^1$$

$$2) \inf_{k \in \mathbb{N}} \sum_n P(|X_n| \geq k) = \infty \quad \square$$

En général, l'implication inverse n'est pas correct, ni pour les suites (X_n) dans L^1 , $X_n \xrightarrow{n} 0$, p.s., comme montre l'Exemple 1. d'U. KRENGEL.

Exemple 1. - Soient $A_0, A_1, \dots, B_1, B_2, \dots$ une partition de l'espace Ω avec

$$P(A_i) = \frac{1}{3^{i+1}}, \quad i=0, 1, \dots, \quad P(B_j) = \frac{1}{2^{j+1}}, \quad j=1, 2, \dots$$

Soit $Z_0 = \sum_{i=0}^{\infty} (i+2) I_{A_i} + I_B$, ou $B = \bigcup_{j=1}^{\infty} B_j$. Alors $Z_0 \in L^1$.

Soit $n_k = 3^k$, $k=0, 1, \dots$, $c_i = 2^i$, $i=1, 2, \dots$,

Quand existe-t-il T pour lequel les T -moyennes de Césaro d'une suite p.s. convergente ne convergent pas ? Etant donné une suite $(X_n, n \in \mathbb{N})$, $0 \leq X_n \in L^1$, $X_n \xrightarrow[n]{p.s.} 0$, nous supposons, que notre espace de probabilité (Ω, α, P) est assez riche pour qu'il existe d'une transformation mesurable T_* qui préserve P , et pour laquelle les v.a. $(X_n \circ T_*^n, n \in \mathbb{N})$ sont indépendantes. Sinon, nous nous occuperons d'une suite (X'_n) avec les mêmes distributions conjointes sur un espace produit. Sous ces conditions le lemme suivant donne une condition suffisante de non-convergence (p.s.) des T_* -moyennes de Césaro.

Lemme 3. - Soit $0 \leq X_n \in L^1$, $\sum_n P(X_n \geq n\varepsilon) = \infty$ pour un certain $\varepsilon > 0$. Alors

$$P\left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i \circ T_*^i \xrightarrow[n]{p.s.} 0\right) = 0.$$

Démonstration. - Nous avons $\sum_n P\left(\frac{X_n \circ T_*^n}{n} \geq \varepsilon\right) = \sum_n P(X_n \geq n\varepsilon) = \infty$.

Car les évènements $(\{\frac{X_n \circ T_*^n}{n} \geq \varepsilon\}, n \in \mathbb{N})$ sont indépendants, le lemme de

Borel-Cantelli donne $P(\frac{X_n \circ T_*^n}{n} \xrightarrow[n]{p.s.} 0) = 0$, ce qui implique le résultat. $\square$

Lemme 4. - Soit $0 \leq X_n \in L^1$, $\sum_n P(X_n \geq n\varepsilon) < \infty$ pour tout $\varepsilon > 0$. Alors pour tout T ,

$$\frac{X_n \circ T^n}{n} \xrightarrow[n]{p.s.} 0, \text{ p.s.}$$

Démonstration. - Si $\sum_n P(\frac{X_n \circ T^n}{n} \geq \varepsilon) < \infty$, pour p.t. $\omega \in \Omega$ le nombre des n ,

pour lesquels $\frac{X_n \circ T^n}{n}(\omega) \geq \varepsilon$, est fini. Donc pour tout $\varepsilon > 0$ nous avons

$$\limsup_n \frac{X_n \circ T^n}{n} \leq \varepsilon, \text{ p.s., et par conséquent } \frac{X_n \circ T^n}{n} \xrightarrow[n]{} 0, \text{ p.s. } \square$$

Grâce aux Lemmes 3. et 4. nous pouvons nous occuper de la condition "il existe $\varepsilon > 0$, pour lequel $\sum_n P(X_n \geq n\varepsilon) = \infty$ " plutôt que de la non-convergence des T-moyennes de Césaro (plus précisément, nous pouvons éviter l'étude de la non-convergence de la suite $(\frac{X_n \circ T^n}{n})$).

Exemple 2. - Soit $X_{2^{m-1}} = m I_{]0, \frac{1}{m}]}$, $X_{2^{m-1}+k} = 0$, $m = 1, 2, \dots$; $k = 1, 2, \dots, 2^{m-1}-1$.

Alors $0 \leq X_n \in L^1$, $X_n \xrightarrow[n]{} 0$, p.s., $\inf_{Z \in L^1} \sum_n P(X_n \geq Z) = \infty$, mais pour chaque $\varepsilon > 0$ nous avons

$$\sum_n P(X_n \geq n\varepsilon) = \sum_n \frac{1}{m} < \infty \quad \square$$

$$\frac{2^{m-1}}{m} \leq \frac{1}{\varepsilon}$$

Soit

(a) " $0 \leq X_n \in L^1$, $X_n \xrightarrow[n]{} 0$, p.s., $\inf_{Z \in L^1} \sum_n P(X_n \geq Z) = \infty$ ";

(b) "il existe $\varepsilon > 0$, pour lequel $\sum_n P(X_n \geq n\varepsilon) = \infty$ ".

L'Exemple 2. montre, que (a) $\not\Rightarrow$ (b). L'insertion de zéros dans la suite (X_n) conserve la propriété (a), mais elle peut rendre la propriété (b) fausse.

Notons (c) la propriété

(c) "il existe $\varepsilon > 0$ et une suite d'entiers $\{n_i\}^\uparrow$, pour lesquelles

$$\sum_i P(X_{n_i} \geq i\varepsilon) = \infty$$

En remplaçant (b) par (c) cette difficulté est éliminée. Nous allons voir que c'est insuffisant.

Exemple 3. - Soit $X_{2^{m-1}+k} = m I_{] \frac{k}{m2^{m-1}}; \frac{k+1}{m2^{m-1}}]}$, $m = 1, 2, \dots$, $k = 0, 1, \dots, 2^{m-1}-1$.

Alors $0 \leq X_n \in L^1$, $X_n \xrightarrow[n]{p.s.} 0$, $\inf_{Z \in L^1} \sum_n P(X_n \geq Z) = \infty$, mais pour chaque $\varepsilon > 0$, $\{n_i\}^\uparrow$, nous avons

$$\sum_i P(X_{n_i} \geq i\varepsilon) < \left[\frac{1}{\varepsilon} + 1 \right] \cdot \sum_m \frac{1}{m2^{m-1}} < \infty \quad \square$$

L'Exemple 3. montre, que (a) $\not\Rightarrow$ (c). Les v.a. X_n sont des "morceaux" des v.a. $Y_m = m I_{[0, \frac{1}{m}]}$ $= \sum_k X_{2^{m-1}+k} = \sup_k X_{2^{m-1}+k}$. Et pour la suite (Y_n) nous avons $\sum_m P(Y_m \geq m) = \infty$! Le "découpage" des variables de la suite (X_n) conserve la propriété (a), mais en général il rend la propriété (c) fausse. De façon à éliminer cette nouvelle difficulté, affaiblissons (c) en

(d) " il existe une suite d'entiers $\{n_i\}^\uparrow$, $n_0 = 0$, pour laquelle, pour les

$$v.a. Y_i = \sup_{n_{i-1} < n \leq n_i} X_n, \quad i=1,2,\dots, \text{ nous avons}$$

$$\sum_i P(Y_i \geq i) = \infty "$$

Grâce au Lemme 5., s'il existe pour un certain $\varepsilon > 0$ une suite $\{m_j\}^\uparrow$, $m_0 = 0$, telle que $\sum_j P(\sup_{m_{j-1} < m \leq m_j} X_m \geq j\varepsilon) = \infty$, alors il existe une suite $\{n_i\}^\uparrow$ vérifiant (d).

Lemme 5. - Soit $0 \leq X_n \in L^1$, $X_n \xrightarrow[n]{p.s.} 0$, $\sum_n P(X_n \geq n\varepsilon) = \infty$ pour un certain $\varepsilon > 0$. Alors pour des v.a. $Z_n = \sup_{m \leq k} X_{nk+m}$, $n=1,2,\dots$, $k = [\frac{1}{\varepsilon} + 1]$, nous avons $0 \leq Z_n \in L^1$, $Z_n \xrightarrow[n]{p.s.} 0$, $\sum_n P(Z_n \geq n) = \infty$.

Démonstration. - Il existe $m \in \{1, \dots, k\}$, tel que $\sum_n P(X_{nk+m} \geq (nk+m)\varepsilon) = \infty$.

Puisque $(nk+m)\varepsilon > n$, ceci implique le résultat. $\square$

Exemple 4. - Soit $Q_n = m I_{[\frac{1}{m+1}; \frac{1}{m}]}$, $m=1,2,\dots$, alors $0 \leq Q_m \in L^1$, $Q_m \xrightarrow[m]{p.s.} 0$,

p.s., $\sup_m Q_m \notin L^1$, mais $\sum_m P(Q_m > 0) = 1 < \infty$.

Soit $X_n = Q_i$ pour $m_{i-1} < n \leq m_i$, $i = 1, 2, \dots$, $m_i = \frac{i(i+1)(i+2)}{3}$. Alors

$0 \leq X_n \in L^1$, $X_n \xrightarrow[n]{\text{p.s.}} 0$, p.s., $\inf_{Z \in L^1} \sum_n P(X_n \geq Z) = \infty$, mais pour chaque $\{n_i\} \uparrow$

nous avons $\sum_i P(Y_i \geq i) \leq 2 \sum_m P(Q_m \geq m) = 2 < \infty$, où $Y_i = \sup_{n_{i-1} < n \leq n_i} X_n$ $\square$

L'Exemple 4. montre, que (a) $\not\Rightarrow$ (d). La "répétition" des v.a. permet d'obtenir la réalisation de (a) à partir d'une suite arbitraire (X_n) de départ vérifiant $0 \leq X_n \in L^1$, $X_n \xrightarrow[n]{\text{p.s.}} 0$, p.s., $\sup_n X_n \notin L^1$ (cf. Lemme 6.).

Cette répétition ne garantit pas en général la réalisation de (d). Nous espérons, que la propriété (e) élimine enfin toutes les difficultés.

(e) " il existe une transformation injective $f : N \rightarrow N$ et une suite d'entiers

$\{n_i\} \uparrow$, telles que pour les v.a. $Y_i = \sup_{n_{i-1} < n \leq n_i} X_{f(n)}$, nous avons

$$\sum_i P(Y_i \geq i) = \infty$$

Le théorème suivant résume les résultats.

Théorème 2. - Soit $0 \leq X_n \in L^1$, $X_n \xrightarrow[n]{\text{p.s.}} 0$, p.s., et

(1) il existe une transformation injective $f : N \rightarrow N$ et une suite d'entiers

$\{n_i\} \uparrow$, telles que pour les v.a. $Y_i = \sup_{n_{i-1} < n \leq n_i} X_{f(n)}$, $i = 1, 2, \dots$

nous avons $\sum_i P(Y_i \geq i) = \infty$;

(2) il existe une transformation injective $f : N \rightarrow N$, une suite d'entiers

$\{n_i\} \uparrow$ et $\varepsilon > 0$, tels que pour les v.a. $Y_i = \sup_{n_{i-1} < n \leq n_i} X_{f(n)}$,

$i = 1, 2, \dots$ nous avons $\sum_i P(Y_i \geq i\varepsilon) = \infty$;

(3) il existe (dans un espace de probabilité convenable) une suite (X'_n) avec les mêmes distributions conjointes que la suite (X_n) , une transformation mesurable T qui préserve la mesure, une transformation injective $f : N \rightarrow N$

et une suite d'entiers $\{n_i\}^\uparrow$, telles que pour les v.a.

$$Y_i = \sup_{n_{i-1} < n \leq n_i} X'_{f(n)}, \quad i=1,2,\dots \text{ nous avons } 0 \leq Y_i \in L^1, \quad Y_i \xrightarrow{i} 0,$$

$$p.s., \quad P\left(\frac{Y_i \circ T^i}{i} \xrightarrow{i} 0\right) = 0;$$

(4) comme (3), en remplaçant la dernière convergence par

$$P\left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n Y_i \circ T^i \xrightarrow{n} 0\right) = 0:$$

$$(5) \quad \inf_{Z \in L^1} \sum_n P(X_n \geq Z) = \infty;$$

$$(6) \quad \text{pour chaque } A \in \alpha, \text{ soit } \sup X_n I_A \notin L^1, \quad \inf_{k \in \mathbb{N}} \sum_n P(X_n I_A \geq k) = \infty,$$

$$\text{soit } \sup X_n I_A \notin L^1, \quad \inf_{k \in \mathbb{N}} \sum_n P(X_n I_A \geq k) = \infty;$$

(7) pour chaque $A \in \alpha$ il existe une suite de réels $\alpha_n \searrow 0$, telle que

$$\text{soit } \sup X_n I_A \notin L^1, \quad \sum_n P(\alpha_n X_n I_A \geq 1) = \infty,$$

$$\text{soit } \sup X_n I_A \notin L^1, \quad \sum_n P(\alpha_n X_n I_A \geq 1) = \infty.$$

Alors (1) $\Leftrightarrow$ (2) $\Leftrightarrow$ (3) $\Rightarrow$ (4) $\Rightarrow$ (5) $\Rightarrow$ (6) $\Leftrightarrow$ (7).

Démonstration. - L'implication (4) $\Rightarrow$ (5) est une conséquence du Théorème 1.

(notre espace de probabilité convenable, c'est soit l'espace d'origine, soit l'espace produit).

L'implication (5) $\Rightarrow$ (6) est une conséquence du Lemme 2. La démonstration de l'équivalence (6) $\Leftrightarrow$ (7) est simple. $\square$

Pour achever de résoudre le problème de la convergence p.s. des T-moyennes de Césaro, il resterait à démontrer l'implication (5) $\Rightarrow$ (4). Les autres résultats seraient la réciproque du Lemme 2. (l'implication (6) $\Rightarrow$ (5) où (7) $\Rightarrow$ (5)) est la réciproque du Lemme 3. (l'implication (4) $\Rightarrow$ (3), où (4) $\Rightarrow$ (2)).

Le lemme suivant est fondamental pour une nouvelle analogie entre la théorie ergodique et la théorie des espérances conditionnelles.

Lemme 6. - Soit $(X_n, n \in \mathbb{N})$ une suite dans L^1 , $0 \leq X_n$, $X_n \xrightarrow{n} 0$, p.s., $\sup_n X_n \notin L^1$. Alors il existe une transformation injective $f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ et une transformation $g: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$, $g(m) = j$ si $m_{j-1} < m \leq m_j$ pour une suite d'entiers $\{m_i\}_i^{\uparrow}$ convenable, et une suite d'entiers $\{n_i\}_i^{\uparrow}$ telles que pour les v.a.

$$Y_i = \sup_{n_{i-1} < n \leq n_i} X_{g(f(n))}, \quad i = 1, 2, \dots$$

nous avons $0 \leq Y_i \in L^1$, $Y_i \xrightarrow{i} 0$, p.s., $\sum_i P(Y_i \geq i) = \infty$.

Démonstration. - Puisque $\sup_{n \geq 1} X_n \notin L^1$, il existe $r_1 \in \mathbb{N}$, tel que

$\sum_{k=1}^{r_1} P(\sup_{n \geq 1} X_n \geq k) \geq 1$. Par induction, si nous avons déjà $r_1 < \dots < r_{i-1}$, il

existe $r_i > r_{i-1}$, tel que $\sum_{k=r_{i-1}+1}^{r_i} P(\sup_{n \geq i} X_n \geq k) \geq 1$.

D'après le théorème d'Egoroff (et par induction), il existe une suite d'entiers $\{s_i\}$, telle que

$$\sum_{k=r_{i-1}+1}^{r_i} [P(\sup_{n \geq i} X_n \geq k) - P(\sup_{i \leq n \leq s_i+i-1} X_n \geq k)] < \frac{1}{2^i}, \quad i = 1, 2, \dots$$

Soit $r_0 = 0$, $p_0 = 0$, $p_i = r_i - r_{i-1}$, $i = 1, 2, \dots$, $m_0 = 0$, $m_j = \sum_{i=1}^j p_i I_{\{j, j+1, \dots\}}(i + s_{i-1})$.

Tout $n \in \mathbb{N}$ s'écrit de manière unique sous la forme

$$n = \sum_{i=0}^{k-1} p_i s_i + s_k a + b - k + 1, \quad \text{où } a \in \{0, \dots, p_k - 1\}, \\ b \in \{k, \dots, k + s_k - 1\}.$$

Egalement, tout $i \in \mathbb{N}$ s'écrit de manière unique sous la forme

$$i = \sum_{j=0}^{\ell-1} p_j + C, \quad \text{où } C \in \{1, \dots, p_\ell\}.$$

Il suffit de poser

$$f(n) = \sum_{j=0}^{b-1} m_j + \sum_{i=0}^{k-1} p_i I_{\{b, b+1, \dots\}}(i + s_i - 1) + a + 1,$$

$$n_0 = 0, \quad n_i = \sum_{j=0}^{\ell-1} p_j s_j + s_\ell C.$$

$$\text{Donc } Y_i = \sup_{n_{i-1} < n \leq n_i} X_{g(f(n))} = \sup_{\ell \leq n \leq s_\ell + \ell - 1} X_n,$$

$$\sum_i P(Y_i \geq i) = \sum_{\ell=1}^{\infty} \sum_{k=r_{\ell-1}+1}^{r_\ell} P\left(\sup_{\ell \leq n \leq s_\ell + \ell - 1} X_n \geq k\right) = \infty.$$

Notons, que les transformations f et g conservent la convergence p.s. de la suite (X_n) , alors $X_{g(f(n))} \xrightarrow[n]{} 0$, p.s. $\square$

Le corollaire suivant complète les résultats de MESIAR [4].

Corollaire. - Soit $0 \leq X_n \in L^1$, $X_n \xrightarrow[n]{} 0$, p.s.. Alors

I. Si $\sup_n X_n \in L^1$, nous avons

$$A) \quad \forall \mathcal{F} \subset \alpha, \quad E(X_n | \mathcal{F}) \xrightarrow[n]{} 0, \text{ p.s.} \quad (\text{DOOB [2]});$$

$$A') \quad \forall T, \quad \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i \circ T^i \xrightarrow[n]{} 0, \text{ p.s.} \quad (\text{MESIAR [3]}).$$

II. Si $\sup_n X_n \notin L^1$, nous avons

B) En un certain sens la convergence p.s. des espérances conditionnelles n'a pas lieu. Plus précisément, il existe (dans un espace de probabilité convenable) une suite (X'_n) avec les mêmes distributions conjointes que la suite (X_n) , et une σ -algebra $\mathcal{E}$, telles que $P(E(X'_n/\mathcal{E}) \longrightarrow 0) = 0$ (BLACKWELL et DUBINS [1]) ;

B') En un certain sens la convergence p.s. des T-moyennes de Césaro n'a pas lieu. Plus précisément, il existe (dans un espace de probabilité convenable) une suite (X'_n) avec les mêmes distributions conjointes que la suite (X_n) , une transformation mesurable T qui préserve la mesure, une transformation injective $f : N \rightarrow N$, une transformation $g : N \rightarrow N$, $g(m) = j$ si $m_{j-1} < m \leq m_j$ pour une suite d'entiers convenable. $\{m_j\} \uparrow$ et une suite d'entiers $\{n_i\} \uparrow$, telles que pour les v.a. $Y_i = \sup_{n_{i-1} < n \leq n_i} X_{g(f(n))}$, $i = 1, 2, \dots$, nous avons

$$0 \leq Y_i \in L^1, Y_i \xrightarrow{i} 0, \text{ p.s.}, P\left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n Y_i \circ T^i \xrightarrow{n} 0\right) = 0 \quad \square$$

BIBLIOGRAPHIE.

- [1] D. BLACKWELL - L.E. DUBINS : A converse to the dominated convergence theorem. Illinois J. Math., 7, 1963, p.508-514.
- [2] J.L. DOOB : Stochastic processes. Willey, New-York, 1953.
- [3] R. MESIAR : A generalisation of the individual ergodic theorem. Math. Slovaca 30, 1980, p.327-330.
- [4] R. MESIAR : Martingales theorems in the ergodic theory. Circ. Math. di Palermo, Serie II, 2, 1982, p.187-191.
- [5] P.T. MAKER : The ergodic theorem for a sequence of functions. Duke Math. J., 6, 1940, p.27-30.

Radko MESIAR
Université Paris VI
Laboratoire de Probabilités
4, Place Jussieu
Tour 56, Couloir 56/46, 3ème étage
75230 PARIS CEDEX 05

Radko MESIAR
Katedra matematiky SvFSVŠT
Radlinského 11
81368 BRATISLAVA
Tchécoslovaquie

Reçu en Mai 1984