ANNALES SCIENTIFIQUES
DE L'UNIVERSITÉ DE CLERMONT-FERRAND 2
Série Mathématiques

GÉRARD COLLOMB

Estimation non paramétrique de la régression par la méthode du noyau : propriété de convergence asymptotiquememt normale indépendante

Annales scientifiques de l'Université de Clermont-Ferrand 2, tome 65, série *Mathématiques*, n° 15 (1977), p. 24-46

<http://www.numdam.org/item?id=ASCFM_1977__65_15_24_0>

© Université de Clermont-Ferrand 2, 1977, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Annales scientifiques de l'Université de Clermont-Ferrand 2 » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (http://www.numdam.org/conditions). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM
Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
http://www.numdam.org/

ESTIMATION NON PARAMETRIQUE DE LA REGRESSION PAR LA METHODE DU NOYAU : PROPRIETE DE CONVERGENCE ASYMPTOTIQUEMENT NORMALE INDEPENDANTE

Gérard COLLOMB

Université Paul Sabatier, Toulouse

-:-:-:-:-:-:-:-:-:-:-:-:-:-:-:-:-:-:-

RÉSUMÉ

Soient X un vecteur aléatoire de $\mathbb{R}^p$, $p \in \mathbb{N}_*$, et Y une v.a.r.. On considère l'estimateur de la régression de Y en X défini par

$$\forall x \in \mathbb{R}^p \qquad \varphi_n(x) = \frac{\sum_{i=1}^{n} Y_i \, K\left(\frac{x-X_i}{h_n}\right)}{\sum_{i=1}^{n} K\left(\frac{x-X_i}{h_n}\right)}$$

où (X_i, Y_i), $i = 1, n$ sont n couples aléatoires indépendants ayant même distribution que le couple (X,Y), $(h_n)_N$ est une suite réelle strictement positive de limite nulle et K est un noyau de R^p (si $p = 1$ et pour $K = 1_{(-0.5,0.5)}$, il s'agit de la méthode de la fenêtre mobile).

On étudie la loi limite du v.a. de R^m

$$^t[\varphi_n(x_j), j=1,m]$$

où x_j, $j = 1, m$, sont m points fixés dans R^p et distincts.

1 - Introduction

Soient X un vecteur aléatoire (v.a.) de $\mathbb{R}^p$ ($p \in \mathbb{N}_*$), Y une v.a.r. et (X_i, Y_i), i = 1, n, n couples aléatoires indépendants et ayant même distribution que le couple (X,Y). L'estimateur non paramétrique de la régression de Y en X que nous considérons ici est φ_n défini par

$$\forall x \in \mathbb{R}^p \qquad \varphi_n(x) = \frac{\sum_{i=1}^{n} Y_i K\left(\frac{x-X_i}{h_n}\right)}{\sum_{i=1}^{m} K\left(\frac{x-X_i}{h_n}\right)} \quad \text{si} \quad \sum_{i=1}^{n} K\left(\frac{x-X_i}{h_n}\right) \neq 0 \text{ , 0 sinon}$$

où $(h_n)_{\mathbb{N}}$ est une suite réelle strictement positive de limite nulle et K est un noyau de $\mathbb{R}^p$, c'est-à-dire selon [Cacoullos 66] , une fonction de $L_1(\mathbb{R}^p)$, bornée et vérifiant $\lim_{z \to \infty} |z|^p K(z) = 0$, dont nous supposons de plus ici, sans restriction de généralité, qu'il vérifie $\int K(Z)\, dz = 1$. Si p = 1 et $K = 1_{[-0.5,0.5]}$, il s'agit de la méthode de la fenêtre mobile.

Dans [Collomb 76] nous avons donné des résultats sur le biais et la variance (limite, évaluation asymptotique) de l'estimateur $\varphi_n(x)$, x fixé (voir également [Collomb 77a]) ainsi que sur les propriétés de convergence uniforme presque sûre ou presque complète et en moyenne uniforme de l'estimateur fonctionnel φ_n (voir également [Collomb 77b]). Nous nous intéressons ici uniquement à la propriété de convergence asymptotiquement normale indépendante conjointement en un nombre fini de points.*

Dans le paragraphe 2 nous donnons l'énoncé des propositions que nous avons obtenues à propos de cette propriété (ainsi que la définition de cette propriété), le paragraphe 3 contient leurs démonstrations et le paragraphe 4 est constitué de remarques relatives à ces résultats : en particulier nous les comparons à ceux déjà obtenus par Nadaraya 64 et Schuster 72. Dans le paragraphe 5 nous donnons quelques exemples d'applications de nos résultats.

---

* A propos du problème général de l'estimation non paramétrique de la régression, il nous semble utile de mentionner ici [Stone 77] .Cet article récent traite de la consistance d'un autre estimateur de la régression et contient des remarques et références bibliographiques (à compléter par certaines de [Collomb 77a]) concernant les propriétés de la méthode du noyau.

2 - Propositions

On désigne par P la loi de probabilité du couple (X, Y) et par P_Y^X une version régulière de la probabilité conditionnelle de Y par rapport à X. Les propriétés de φ_n sont étudiées en tant que propriétés d'un estimateur de la (détermination de la) régression de Y en X définie par

$$\varphi(x) = \int y \, p_Y^{X=x} \, (dy) \qquad \forall \, x \in \mathbb{R}^p$$

On désigne par v la (détermination de la) variance conditionnelle de Y par rapport à X définie par

$$v(x) = \int (y - \varphi(x))^2 \, p_Y^{X=x} \, (dy) \qquad \forall \, x \in \mathbb{R}^p$$

et on suppose à priori que la loi marginale P_X du v.a.X admet, par rapport à la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}^p$, une densité f.

Afin de mieux situer les résultats que nous avons obtenus à propos de la propriété de convergence asympotiquement normale indépendante de φ_n , nous donnons d'abord un résultat relatif à la propriété de convergence en probabilité de φ_n (x), x fixé.

proposition 2-0

Soit x fixé dans $\mathbb{R}^p$. Si

- la fonction v est bornée sur un voisinage de x
- on a "$EY^2 < \infty$" ou "le support de K est borné"
- la suite $(h_n)_{\mathbb{N}}$ vérifie $\lim_{n \to \infty} n h_n^p = \infty$
- les fonctions φ et f sont continues au point x, avec $f(x) \neq 0$

alors on a

$$\varphi_n(x) \xrightarrow[n \to \infty]{P} \varphi(x)$$

On considère maintenant m points x_ℓ = 1, m < ∞ fixés dans $\mathbb{R}^p$ et distincts. On s'intéresse aux propriétés du v.a. ${}^t[\varphi_n(x_\ell), \ell=1,m]$ de $\mathbb{R}^m$. Nous désignerons par N la fonction de répartition de la loi $\mathcal{N}(0, 1)$

et utiliserons les quatre hypothèses definies ci-dessous* :

(A)
- il existe $\delta > 0$ pour lequel la fonction $x \to \int |y|^{2+\delta} p_Y^{X=x}(dy)$ est bornée sur un voisinage des points x_ℓ, $\ell = 1, m$ et on a " $E|Y|^{2+\delta} < \infty$ " ou "le support de K est borné".
- la suite $(h_n)_{\mathbb{N}}$ vérifie

$$\lim_{n \to \infty} n h_n^p = \infty$$

(B)
il existe $\delta > 0$ pour lequel la v.a.r. Y vérifie $E|Y|^{2+\delta} < \infty$ et la suite $(h_n)_{\mathbb{N}}$ vérifie

$$\lim_{n \to \infty} \frac{n h_n^p}{n^{1/(1+\delta/2)}} = \infty$$

(C)
pour tout $x = x_\ell$, $\ell = 1, m$, les fonctions φ, v et f sont continues au point x et vérifient $v(x) \neq o$, $f(x) \neq 0$.

(D)
Il existe $\nu \in \mathbb{N}$ tel que
- $(h_n)_{\mathbb{N}}$ vérifie $\lim_{n \to \infty} n h_n^{p+2\nu} = 0$ et K vérifie

$$\int z_{i_1} z_{i_2} \ldots z_{i_\lambda} K(z) dz \neq 0 \qquad \forall\, i_1, i_2, \ldots i_\lambda = 1, p \quad \forall \lambda = 1, \nu - 1$$

- φ (resp. f) est dérivable à l'ordre ν (resp $\nu - 1$) au point $x = x_\ell$, $\ell = 1, m$, si le support de K est borné ; ou
- φ (resp. f) possède des dérivées partielles jusqu'à l'ordre ν (resp. $\nu - 1$) bornées et on a $\int |z|^{2\nu-1} |K(z)| dz < \infty$

(L)
φ est Lipschitzienne d'ordre α au point $x = x_\ell$, $\ell = 1, m$ sur un voisinage de x, le support de K est borné et $(h_n)_{\mathbb{N}}$ vérifie $\lim_{n \to \infty} n h_n^{p+2\alpha} = 0$.

* par ailleurs, dans la présente publication, pour toute fonction u définie sur $\mathbb{R}^p$, nous désignons par $\int u(z)\, dz$ ou $\int u$ l'intégrale de u par rapport à la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}^p$.

Les divers résultats que nous avons obtenus à propos de la convergence asymptotiquement normale indépendante conjointement en un nombre fini de points pour l'estimateur φ_n sont :

Lemme 2-1

Si (A) ou (B) est vérifiée, ainsi que (C), on a, pour tout t fixé dans $\mathbb{R}^m$

$$(2\text{-}0)\quad \lim_{n\to\infty} P\left(\sqrt{n\,h_n^p}\left(\varphi_n(x_\ell) - \frac{E\,Y\,K\left(\frac{x_\ell - X}{h_n}\right)}{E\,K\left(\frac{x_\ell - X}{h_n}\right)}\right) \leqslant t_\ell,\ \ell = 1,\ m\right) = \prod_{\ell=1}^{m} N\left(\frac{t_\ell}{\sqrt{\frac{v(x_\ell)}{f(x_\ell)}\int K^2}}\right)$$

proposition 2 - 1

Si l'une des trois hypothèses ci-dessous est vérifiée

(A') | la v.a.r. Y est bornée et la suite $(h_n)_{\mathbb{N}}$ vérifie $\lim_{n\to\infty} n\,h_n^p = \infty$

(A") |- $\exists\ \delta > 0$ pour lequel la fonction $x \to \int |y|^{2+\delta} p_Y^{X=x}\,dy$ est bornée sur un voisinage des points x_ℓ, $\ell = 1, m$ et on a $E|Y|^{2+\delta} < \infty$

|-la suite $(h_n)_{\mathbb{N}}$ vérifie

$$\exists\ W > 0 \text{ tq } \lim_{n\to\infty} \frac{n\,h_n^p}{W} = \infty \quad (W \text{ indépendant de } \delta)$$

(B') | (B) et la fonction $x \to \int |y|\ p_Y^{X=x}\ (dy)$ est bornée sur un voisinage des points $x_\ell, \ell = 1, m$

et si (C) est également vérifiée, alors, pour tout t fixé dans $\mathbb{R}^m$, on a.

$$(2\text{-}1)\quad \lim_{n\to\infty} P\left(\sqrt{n\,h_n^p}\left(\varphi_n(x_\ell) - E\varphi_n(x_\ell)\right) \leqslant t_\ell,\ \ell = 1,\ m\right) = \prod_{\ell=1}^{m} N\left(\frac{t_\ell}{\sqrt{\frac{v(x_\ell)}{f(x_\ell)}\int K^2}}\right)$$

proposition 2 - 2

Si (A) ou (B) est vérifiée, ainsi que (C) et (D) (ou (L)), on a, pour tout t fixé dans $\mathbb{R}^m$,

$$(2\text{-}2)\quad \lim_{n\to\infty} P\left(\sqrt{n\,h_n^p}\left(\varphi_n(x_\ell) - \varphi(x_\ell)\right) \leqslant t_\ell, \ell = 1,\ m\right) = \prod_{\ell=1}^{m} N\left(\frac{t_\ell}{\sqrt{\frac{v(x_\ell)}{f(x_\ell)}\int K^2}}\right)$$

proposition 2 - 3

Soit $W_n(x)$ la v.a.r. définie pour tout x fixé dans $\mathbb{R}^p$ par

$$W_n(x) = \begin{cases} \dfrac{\sum_{i=1}^{n} \left(Y_i - \varphi_n(x)\right)^2 K\left(\dfrac{x - X_i}{h_n}\right)}{\left(\sum_{i=1}^{n} K\left(\dfrac{x - X_i}{h_n}\right)\right)^2} \int K^2 & \text{si } \sum_{i=1}^{n} K\left(\dfrac{x - X_i}{h_n}\right) \neq 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Si les hypothèses (A), avec $\delta \geqslant 2$, (C) et (D) (ou (L)) sont vérifiées, alors, pour tout t fixé dans $\mathbb{R}^m$, on a

$$(2-3) \qquad \lim_{n \to \infty} P\left(\frac{\varphi_n(x_\ell) - \varphi(x_\ell)}{\sqrt{W_n(x_\ell)}} \leqslant t_\ell, \ell = 1, m\right) = \prod_{\ell=1}^{m} N(t_\ell)$$

3 - Démonstrations

Pour prouver les propositions 2 - 1 → 2-3, on utilise le lemme 2 - 1, dont la démonstration constitue l'objet principal du présent paragraphe.

On définit d'abord, en 3 .0 , un ensemble de notations simplificatrices. On donne ensuite, en 3.1 un théorème général dont les divers corollaires rendent évidente, en 3.2, la proposition 2-0, et permettent d'établir, en 3.3, les lemmes préliminaires à la démonstration, en 3.4, du lemme 2-1.

En 3.5 (resp. 3.6) on donne des résultats qui nous permettent d'utiliser le lemme 2-1 pour prouver la proposition 2-1 (resp. 2-2). La démonstration, en 3.7, de la proposition 2-3 utilise seulement les propositions 2-0 et 2-2.

3.0 Notations

On pose pour tout x de $\mathbb{R}^p$

$$\forall\, n \in \mathbb{N}_* \quad \begin{cases} K_n(x,z) = \dfrac{1}{h_n^p} K\left(\dfrac{x - z}{h_n}\right) & \forall\, z \in \mathbb{R}^p \\ \varphi_n(x) = \dfrac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} Y_i \, K_n(x, X_i) \\ f_n(x) = \dfrac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} K_n(x, X_i) \end{cases}$$

et , sous réserve d'existence

$$\forall\, a \in \mathbb{N} \quad \begin{cases} \varphi^{(a)}(x) = \int y^a \, p_Y^{X=x}(dy) & \left(\varphi^{(2)}(x) = \varphi^2(x) + v(x)\right) \\ \varphi^{(a)}(x) = \varphi^{(a)}(x) \, f(x) \\ \varphi(x) = \varphi^{(1)}(x) = \varphi(x) \, f(x) \end{cases}$$

$$\forall\, n \in \mathbb{N}_* \quad \left| \begin{array}{l} \overline{\varphi}_n(x) = E\,\varphi_n(x) \left(= E\,Y\,K_n(x,X)\right) \\ \overline{f}_n(x) = E\,f_n(x) \left(= E\,K_n(x,X)\right) \\ \rho_n^{\alpha,\beta}(x) = E\,|Y|^{\alpha}\,|K_n|^{\beta}(x,X) \qquad \forall \alpha \in \mathbb{R}^+,\ \forall \beta \in \mathbb{R}^+ \end{array} \right.$$

$$\left| \begin{array}{ll} \forall\, n \in \mathbb{N}_* & \overline{r}_n^{a,b}(x) = E\left(Y\,K_n(x,X) - \overline{\varphi}_n(x)\right)^a \left(K_n(x,X) - \overline{f}_n(x)\right)^b \\ \forall\, a \in \mathbb{N} & r_n^{a,b}(x) = E\,Y^a\,K_n^b(x,X) \\ \forall\, b \in \mathbb{N} & \tilde{r}_n^{a,b}(x,x') = E\left\{Y^a\,K_n(x,X) - r_n^{a,1}(x)\right\}\left\{Y^b\,K_n(x',X) - r_n^{b,1}(x')\right\}, \forall x' \in \mathbb{R}^p. \end{array} \right.$$

On désigne par $\mathcal{K}_B$ l'ensemble des noyaux à support borné et on utilise les notations de Landau : $\circ$ et O.

3.1 Théorème fondamental et corollaires

Nous donnons d'abord le théorème fondamental sur lequel repose notre étude de la méthode du noyau. La démonstration de ce théorème, omise ici, utilise une méthode dûe à Bochner.

Théorème 3-1

Soit k un noyau de $\mathbb{R}^p$ et u une fonction réelle mesurable définie sur $\mathbb{R}^p$.

Pour tout x de $\mathbb{R}^p$ et n de $\mathbb{N}$, on pose, sous réserve d'existence

$$u_n(x) = \int u(z)\,\frac{1}{h_n^p}\,k\left(\frac{x-z}{h_n}\right) dz$$

Si u est intégrable ou $k \in \mathcal{K}_B$, alors

T-1 lorsque u est bornée sur un voisinage de x, on a

$$u_n(x) = O(1)$$

T-2 lorsque u est continue au point x on a

$$\lim_{n \to \infty} u_n(x) = u(x) \int k(z)\,dz$$

T-3 lorsque u est continue aux points x et $x' \neq x$, la suite $\tilde{u}_n(x,x')_{\mathbb{N}}$ définie par

$$\tilde{u}_n(x,x') = \frac{1}{h_n^p} \int u(z)\, k\left(\frac{x-z}{h_n}\right) k\left(\frac{x'-z}{h_n}\right) dz \qquad \forall n \in \mathbb{N}$$

vérifie

$$\lim_{n \to \infty} \tilde{u}_n(x,x') = 0$$

Démonstration cf [Collomb 76 p. 20 - 27]

Nous donnons maintenant des corollaires qui nous permettent d'utiliser ce théorème dans une formulation statistique adaptée à notre problème. On suppose à priori que f est continue au point x, fixé dans $\mathbb{R}^p$.

Corollaire 3-1

Soient α et β fixés dans $\mathbb{R}^+$. Si on a $E|Y|^{\alpha} < \infty$ ou $K \in \mathcal{K}_B$, et si la fonction $z \to \int |y|^{\alpha} p_Y^{X=z}(dy)$ est bornée sur un voisinage de x, on a

$$h_n^{p(\beta-1)} \rho_n^{\alpha,\beta}(x) = O(1)$$

Corollaire 3-2

On a

$$\lim_{n \to \infty} \bar{f}_n(x) = f(x)$$

et, si φ est continue au point x, avec $E|Y| < \infty$ ou $K \in \mathcal{K}_B$, on a

$$\lim_{n \to \infty} \bar{\emptyset}_n(x) = \emptyset(x)$$

Corollaire 3-3 (resp. 3-3')

Soient a et b fixés dans $\mathbb{N}$, $a + b = 2$. Si les fonctions φ et ν sont continues au point x (resp. bornées sur un voisinage de x), avec $E\gamma^2 < \infty$ ou $K \in \mathcal{K}_B$, on a

$$\lim_{n \to \infty} h_n^p \bar{r}_n^{a,b}(x) = \emptyset^{(a)} \int K^2 \qquad (\text{resp. } h_n^p \bar{r}_n^{a,b}(x) = O(1))$$

Corollaire 3-4

Soient a et b fixés dans $\mathbb{N}$, $a + b \leq 2$, et x' fixé dans $\mathbb{R}^p$, $x' \neq x$, et également point de continuité pour f. Si les fonctions φ et ν sont continues aux points x et x', avec $EY^2 < \infty$ ou $K \in \mathcal{K}_B$, on a

$$\lim_{n\to\infty} h_n^p \; r_n^{=a,b}(x, x') = 0$$

Démonstrations

On utilise le théorème de Fubini et le théorème 3-1, en notant que la continuité de φ (resp ψ et χ) au point x implique celle de $\phi^{(1)} = \phi$ (resp $\phi^{(2)}$) et en utilisant le fait que si k est un noyau positif alors, pour tout $\beta > 0$, k^β est également un noyau.

. corollaire 3-1 : on applique T-1 à $k = K^\beta$ et $u : z \to f(z) \int |y|^\alpha p^{X=x}_Y(dz)$

. corollaire 3-2 : on remarque que $\bar{f}(x) = r_n^{0,1}(x)$ (resp $\bar{\phi}_n(x)\ r_n^{1,1}(x)$) et on applique T2 à $k = K$ et $u = f^n$ (resp $u = \phi$), en tenant compte de l'hypothèse $\int K = 1$.

. corollaire 3-3 (resp 3-3') : en appliquant T2 (resp T1) à $k = K^\beta$ et $u = \phi^{(\alpha)}$, $\alpha = 0,1,2$ et $\beta = 1,2$, on obtient

$$(*1) \qquad \lim_{n\to\infty} h_n^{p(\beta-1)} r_n^{\alpha,\beta}(x) = \phi^{(\alpha)}(x) \int K^\beta$$

$$\left(\text{resp } (*1') \qquad \lim_{n\to\infty} h_n^{p(\beta-1)} r_n^{\alpha,\beta}(x) = 0(1)\right)$$

En appliquant deux fois la formule du binôme à la partie [droite] de l'égalité définissant $\bar{r}_n^{a,b}(x)$, et en utilisant $(*1)$ (resp. $*$ 1') on achève la démonstration du corollaire 3-3 (resp. 3-3').

. corollaire 3-4 : il suffit de remarquer que

$$h_n^p \; \bar{r}_n^{a,b}(x) = h_n^p \; E\left(Y^{a+b} K_n(x,X) K_n(x',X)\right) - h_n^p \; r_n^{a,1}(x) \; r_n^{b,1}(x)$$

et de voir que les deux termes de cette somme ont une limite nulle : le second en utilisant $(*\ 1)$ avec $\alpha = a$ et b et $\beta = 1$, le premier en appliquant T3 à $k = K$ et $u = \phi^{(2)}$.

3-2 Démonstration de la proposition 2-0

On a

$$\varphi_n(x) = \frac{\phi_n(x)}{f_n(x)} \text{ si } f_n(x) \neq 0,\ 0 \text{ sinon}$$

Un résultat général bien connu montre alors que pour prouver (2-0) il suffit de prouver

$$(*\ 1) \qquad \begin{cases} \phi_n(x) \xrightarrow[n\to\infty]{P} \phi(x) \\ f_n(x) \xrightarrow[n\to\infty]{P} f(x) \end{cases}$$

Si nous remarquons que l'hypothèse d'indépendance des couples (Xi, Yi), i = 1, n permet d'écrire

$$E\left(\phi_n(x) - \phi(x)\right)^2 = \frac{1}{n}\,\overline{r}_n^{2,0}(x) + \left(\overline{\phi}_n(x) - \phi(x)\right)^2$$

$$E\left(f_n(x) - f(x)\right)^2 = \frac{1}{n}\,\overline{r}_n^{0,2}(x) + \left(\overline{f}_n(x) - f(x)\right)^2$$

et utilisons les corollaires 3-2 et 3-3', nous voyons que l'hypothèse $\lim_{n\to\infty} nh_n^p = \infty$ entraine

$$\begin{cases} \phi_n(x) \xrightarrow[n\to\infty]{\text{m.q.}} \phi(x) \\ f_n(x) \xrightarrow[n\to\infty]{\text{m.q.}} f(x) \end{cases}$$

qui implique (* 1).

3-3 Résultats préliminaires à la démonstration du lemme 2-1 .

Nous donnons d'abord deux lemmes qui résultent de l'application à une suite de v.a.r. définie par le noyau K et la suite $(h_n)_{n\in\mathbb{N}}$ du théorème (central limite) de Liapounov.

lemme 3-1

Soit Z_n le v.a. de $\mathbb{R}^{2m}$ défini par

$${}^t Z_n = \left[\left\{\left(\phi_n(x_\ell) - \overline{\phi}_n(x_\ell)\right), \ell = 1,m\right\} \;,\; \left\{\left(f_n(x_\ell) - \overline{f}_n(x_\ell)\right) \;,\; \ell = 1,m\right\}\right]$$

Si les hypothèses (A) et (C) sont vérifiées, on a

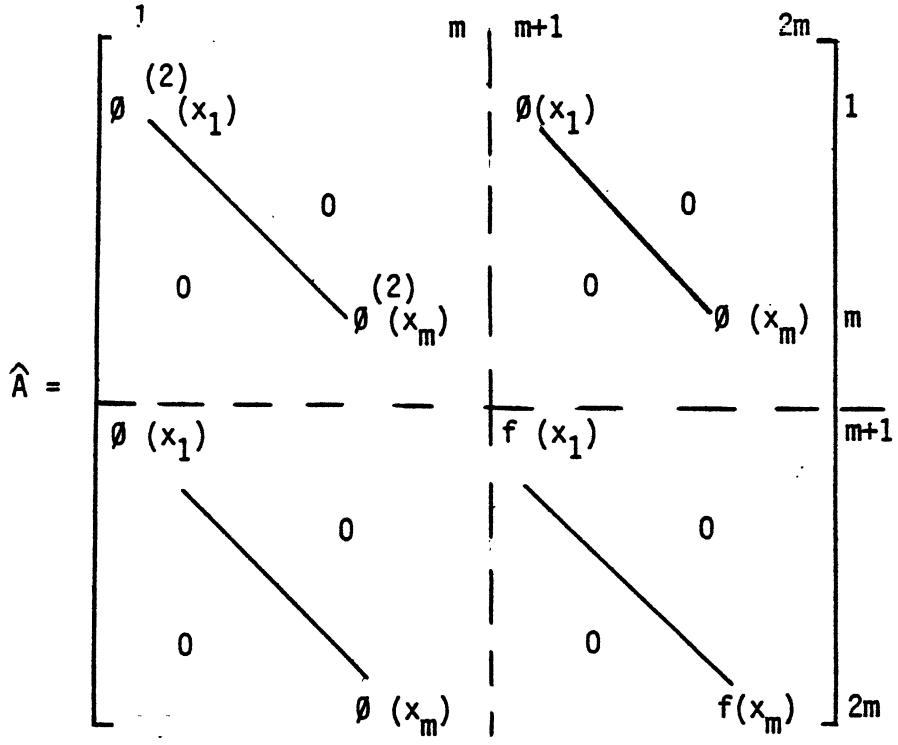
$$(3\text{-}1) \qquad \sqrt{n h_n^p}\; {}^t\lambda Z_n \xrightarrow[n\to\infty]{\mathcal{L}} {}^t\lambda Z \qquad \forall \lambda \in \mathbb{R}^{2m}$$

où Z est un v.a. de $\mathbb{R}^{2m}$ qui suit la loi $\mathcal{N}(0,A)$, la matrice A étant définie par $A = \hat{A} \cdot \int K^2$, avec

$$\left.\begin{aligned} \hat{A}_{ii} &= \phi^{(2)}(x_i) \\ \hat{A}_{m+i,\,m+i} &= f(x_i) \\ \hat{A}_{i,\,m+i} &= \hat{A}_{m+i,i} = \phi(x_i) \end{aligned}\right\} \quad i = 1, m$$

$$\hat{A}_{\ell,k} = 0 \qquad \ell = 1,2m \quad k = 1, 2m \quad k \neq \ell \;,\; |k-\ell| \neq m$$

i.e.



Démonstration

Nous prouvons d'abord que la matrice A est définie positive. Pour tout vecteur b de $\mathbb{R}^{2m}$ on a

$$ {}^t b \hat{A} b = \sum_{\ell=1}^{m} B_\ell $$

avec pour tout $\ell = 1, m$

$$ B_\ell = b_\ell^2 \hat{A}_{\ell\ell} + b_{\ell+m}^2 \hat{A}_{\ell+m,\ell+m} + 2 b_\ell b_{\ell+m} \hat{A}_{\ell,\ell+m} $$

qui peut aussi s'ecrire

$$ B_\ell = f(x_\ell) \left[\varphi^{(2)}(x_\ell) b_\ell^2 + 2 \varphi(x_\ell) b_\ell b_{\ell+m} + b_{\ell+m}^2 \right] $$

On a

$$ B_\ell = f(x_\ell) \left[(\varphi(x_\ell) b_\ell + b_{\ell+m})^2 + v(x_\ell) b_\ell^2 \right] $$

d'ou il vient , en tenant compte de l'hypothèse (C) ,

$$\forall \ell = 1,m \qquad B_\ell > 0 \text{ si } |b_\ell| + |b_{\ell+m}| \neq 0 \quad (=0 \text{ sinon})$$

Il s'en suit que

$$\forall b \in R^{2m} \qquad b \neq 0 \qquad {}^t b \hat{A} b > 0$$

La matrice $\hat{A}$ est donc définie positive, et il en est de même pour la matrice A.

Nous montrons maintenant que pour tout vecteur λ fixé dans $\mathbb{R}^{2m}$, $\lambda \neq 0$, la v.a.r. ${}^t\lambda Z_n$ vérifie

$$(*1) \qquad \frac{{}^t\lambda Z_n}{\sigma({}^t\lambda Z_n)} \xrightarrow[n\to\infty]{\mathcal{L}} \mathcal{N}(0,1)$$

Si nous écrivons

$${}^t\lambda Z_n = \sum_{i=1}^{n} \tilde{Z}_{n,i}$$

avec pour tout i =1,n

$$\tilde{Z}_{n,i} = \frac{1}{n} \sum_{\ell=1}^{m} \left[\lambda_\ell \left(Y_i K_n(x_\ell, x_i) - \bar{\varphi}_n(x_\ell) \right) + \lambda_{\ell+m} \left(K_n(x_\ell, X_i) - \bar{f}_n(x_\ell) \right) \right]$$

et remarquons que les v.a.r. $\tilde{Z}_{n,i}$ i=1,n sont indépendantes et centrées , théorème de Liapounov (cf Loève Théorème 20.1.B, p. 275, en tenant compte de la remarque relative au lemme 20.1.a, p. 278) montre que pour prouver (*1) il suffit de prouver que

$$(*2) \qquad \lim_{n\to\infty} \frac{\sum_{i=1}^{n} E\left|\tilde{Z}_{n,i}\right|^{2+\delta}}{\sigma^{2+\delta}({}^t\lambda Z_n)} = 0$$

Puisque d'autre part les v.a.r. $\tilde{Z}_{n,i}$ ont même distribution que la v.a.r. $\frac{1}{n}\tilde{Z}_n$ avec

$$\tilde{Z}_n = \sum_{\ell=1}^{m} \lambda_\ell \left(Y K_n(x_\ell, X) - \bar{\varphi}_n(x_\ell) \right) + \sum_{\ell=1}^{m} \lambda_{m+\ell} \left(K_n(x_\ell, X) - \bar{f}_n(x_\ell) \right)$$

un calcul simple montre que pour prouver (*2) et par conséquent (*1) il suffit de prouver

$$(*3) \qquad \lim_{n\to\infty} \frac{\left(n h_n^p\right)^{1+\frac{\delta}{2}} n^{-(1+\delta)} E\left|\tilde{Z}_n\right|^{2+\delta}}{\left(h_n^p E \tilde{Z}_n^2\right)^{1+\delta/2}} = 0$$

L'inégalité de Minkowski permet d'écrire

$$(*4) \qquad \left(E\left|\tilde{Z}_n\right|^{2+\delta} \right)^{\frac{1}{2+\delta}} \leq \sum_{\ell=1}^{m} \left\{ |\lambda_\ell| \left[\left(\rho_n^{2+\delta,2+\delta}(x_\ell) \right)^{\frac{1}{2+\delta}} + |\bar{\varphi}_n(x_\ell)| \right] + |\lambda_{m+\ell}| \left[\left(\rho_n^{0,2+\delta}(x_\ell) \right)^{\frac{1}{2+\delta}} + |\bar{f}_n(x_\ell)| \right. \right.$$

d'où il vient, en utilisant des hypothèses relatives aux fonctions $\int |y|^{2+\delta} P_Y^{X=x}(dy)$, φ et f, ainsi que les corollaires 3-1 et 3-2

$$(*5) \qquad n^{-(1+\delta)} E\,|\tilde{Z}_n|^{2+\delta} = O\left(\frac{1}{n\,h_n^p}\right)^{1+\delta}$$

Les hypothèses $\delta>0$ et $\lim_{n\to\infty} n\,h_n^p = \infty$ montrent que pour prouver (*3), il suffit maintenant de prouver

$$\lim_{n\to\infty} h_n^p \; E\;\tilde{Z}_n^2 > 0$$

On a

$$E\,\tilde{Z}_n^2 = \sum_{\ell=1}^{m}\left[\lambda_\ell^2\,\bar{r}_n^{2,0}(x_\ell) + \lambda_{m+\ell}^2\,\bar{r}_n^{0,2}(x_\ell) + 2\,\lambda_\ell\,\lambda_{m+\ell}\,\bar{r}_n^{1,1}(x_\ell)\right]$$

$$+ \sum_{i=1}^{m}\sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{m}\left[\lambda_i\,\lambda_j\,\overset{=1,1}{r_n}(x_i,x_j) + \lambda_{m+i}\,\lambda_{m+j}\,\overset{=0,0}{r_n}(x_i,x_j) + 2\lambda_i\lambda_{m+j}\,\bar{\bar{r}}_n^{1,0}(x_i,x_j)\right]$$

Les hypothèses relatives aux fonctions v, φ et f et les corollaires 3-3 et 3-4 montrent que

$$(*6) \qquad \lim_{n\to\infty} h_n^p \; E\;\tilde{Z}_n^2 = {}^t\lambda\,A\,\lambda$$

Puisque la matrice A est définie positive et nous avons supposé $\lambda \neq 0$, on a ${}^t\lambda A \lambda \neq 0$ donc (*3) et par suite (*1).

Le résultat (*6) permet aussi d'écrire (*1) sous la forme

$$\frac{\sqrt{n h_n^p}\;{}^t\lambda Z_n}{{}^t\lambda A \lambda} \xrightarrow[n\to\infty]{\mathcal{L}} \mathcal{N}(0,1)$$

d'où il vient

$$\sqrt{n\,h_n^p}\;\; {}^t\lambda Z_n \xrightarrow[n\to\infty]{\mathcal{L}} {}^t\lambda Z$$

Il suffit alors de remarquer que ce résultat a été établi pour un vecteur λ non nul quelconque dans $\mathbb{R}^{2m}$ et qu'il est trivial lorsque $\lambda = 0$ pour obtenir finalement (3-1)

Si nous reconsidérons cette démonstration, nous voyons que l'hypothèse formulée sur la fonction $\int |y|^{2+\delta} P_Y^{X=x}(dy)$ peut être remplacée par toute autre hypothèse impliquant (*3).

lemme 3-2

Dans le lemme 3-1, l'hypothèse (A) peut être remplacée par l'hypothèse (B).

Démonstration

Si nous supposons seulement $E|Y|^{2+\delta} < \infty$, il est possible d'utiliser pour

$\rho_n^{2+\delta,2+\delta}(x_\ell)$, $\ell = 1, m$ la majoration grossière

$$\rho_n^{2+\delta,2+\delta}(x_\ell) \leq \frac{E|Y|^{2+\delta}\,\bar{K}^{2+\delta}}{(h_n^p)^{2+\delta}} \qquad \ell = 1, m$$

où $\bar{K}$ est une constante positive bornant le noyau K.
En ce qui concerne les autres termes de la partie droite de l'inégalité (* 4), il n'y a pas de modification du comportement asymptotique, et l'inégalité (* 4) permet d'obtenir au lieu de (* 5) la majoration asymptotique

$$n^{-(1+\delta)}\, E\, \tilde{Z}_n^{2+\delta} = \left(\frac{1}{n\, h_n^p}\right)^{1+\delta} O\left(\frac{1}{h_n^p}\right)$$

Pour prouver (* 3) il suffit donc de prouver

$$\lim_{n\to\infty} \left(\frac{1}{n\, h_n^p}\right)^{\frac{\delta}{2}} \left(\frac{1}{h_n^p}\right) = 0$$

qui est une conséquence immédiate de l'hypothèse (B) sur $(h_n)_{\mathbb{N}}$.

Nous rappelons maintenant un résultat général bien connu.

lemme 3-3

Soit C un vecteur aléatoire de $\mathbb{R}^q$, $o \leq q \leq p$ dont la fonction de distribution conjointe est G.
Soit C_n n = 1,2,... une suite de vecteurs aléatoires de $\mathbb{R}^q$.
Si on a

$$\forall \lambda \in \mathbb{R}^q \qquad {}^t\lambda\, C_n \xrightarrow[n\to\infty]{\mathcal{L}} {}^t\lambda\, C$$

alors la fonction de distribution conjointe asymptotique de C_n existe et est égale à G.

Démonstration

voir [Rao, p. 103 proposition (X)] . Ce résultat est également une application d'un théorème plus général, dû à Varadarajan (cf [Rao p. 108 proposition (IV)]).

Les trois lemmes ci-dessus nous permettent d'aborder enfin la

3•4 Démonstration du lemme 2-1

Nous notons d'abord que les lemmes 3-1 et 3-2 montrent que les hypothèses

du lemme 2-1 permettent d'utiliser le résultat 3-1.

Si nous remarquons qu'il existe une fonction ξ, définie sur $\mathbb{R}^{2m}$ et à valeurs dans $\mathbb{R}^m$ telle que

$$ {}^t\left[\varphi_n(x_\ell),\ \ell=1,m\right] = \xi\left({}^t\left[\emptyset_n(x_\ell),\ \ell = 1,m\ ;\ f_n(x_\ell),\ \ell = 1,m\right]\right) $$

nous voyons qu'il est naturel d'utiliser dans cette démonstration un raisonnement analogue à celui qui permet de prouver le théorème de Mann-Wald dans le cas multivarié (cf. Rao, proposition 6-a-2 (III), p. 322. Le terme multiplicatif $\sqrt{n}$ correspond dans ce qui suit à $\sqrt{n\ h_n^p}$).

Soit $\mathcal{L}$ un vecteur de $\mathbb{R}^m$.

Nous désignons par g la fonction réelle définie sur $\mathbb{R}^{2m}$ par

$$ (*\ 1)\quad \forall\ y \in \mathbb{R}^{2m}\quad g(y) = \sum_{k=1}^{m} \mathcal{L}_k \frac{y_k}{y_{m+k}} $$

avec la convention

$$ (*\ 2)\qquad \forall\ x \in \mathbb{R}\quad \frac{x}{0} = 0 $$

Pour tous vecteurs y et $\bar{y}$ de $\mathbb{R}^{2m}$, $\bar{y}_{m+k} \neq 0$, $k = 1,m$, on a

$$ (*\ 3)\ g(y) - g(\bar{y}) = {}^t g'(\bar{y})\left[y - \bar{y}\right] + \left|y - \bar{y}\right| \varepsilon (y - \bar{y}) $$

où

$$ (*\ 4)\ {}^t g'(\bar{y}) = \left[\left\{\left(\mathcal{L}_k \frac{1}{\bar{y}_{m+k}}\right),\ k = 1,\ m\right\}\ ,\ \left\{\left(-\mathcal{L}_k \frac{\bar{y}_k}{\bar{y}_{m+k}^2}\right),\ k = 1,\ m\right\}\right] $$

et où ε est une fonction réelle définie sur $\mathbb{R}^{2m}$, continue au point 0 et vérifiant $\varepsilon(0) = 0$.

Soit u le vecteur de $\mathbb{R}^{2m}$ défini par

$$ {}^t u = \left[\left\{\emptyset\ (x_k),\ k = 1,m\right\}\ ,\ \left\{f(x_k)\ ,\ k = 1,\ m\right\}\right] $$

et pour tout n de $\mathbb{N}$, soient U_n le vecteur aléatoire de $\mathbb{R}^{2m}$ défini par

$$ {}^t U_n = \left[\left\{\emptyset_n(x_k),\ k = 1,m\right\}\ ,\ \left\{f_n(x_k)\ ,\ k = 1,m\right\}\right] $$

et $\bar{U}_n$ le vecteur de $\mathbb{R}^{2m}$ défini par

$$ \bar{U}_n = E\ U_n $$

Les hypothèses de continuité des fonctions φ et f aux points x_k, $k = 1,\ m$

et le corollaire 3-2 permettent d'écrire

$$(*\ 5) \qquad \lim_{n\to\infty} \overline{U}_n = U$$

et, en utilisant le fait que $f(x_i) \neq 0$, $i = 1, m$, prouvent l'existence d'un entier positif n_0 tel que

$$(*\ 6)\ \forall\ n \geq n_0 \quad \overline{U}_{n,\ m+k} \neq 0 \quad \forall\ k = 1,m$$

Pour tout $n \geq n_0$, il est donc possible de remplacer dans la formule ($*$ 3), y par U_n et $\bar{y}$ par $\overline{U}_n$, et nous obtenons

$$\sqrt{n\ h_n^p}\left[g(U_n) - g(\overline{U}_n)\right] = {}^t g'(U)\left[\sqrt{n\ h_n^p}\quad Z_n\right] + R_n$$

avec

$$R_n = {}^t\left[g'(\overline{U}_n) - g'(U)\right]\ \sqrt{nh_n^p}\quad |Z_n|\ \varepsilon\ (U_n - \overline{U}_n)$$

L'égalité $E(U_n - \overline{U}_n)^2 = \frac{1}{n}\ \sum_{\ell=1}^{m}\left[\bar{r}_n^{2,0}(x_\ell) + \bar{r}_n^{0,2}(x_\ell)\right]$,

l'hypothèse $\lim_{n\to\infty} n\ h_n^p = \infty$ et la continuité de φ, v et f aux points x_ℓ, $\ell = 1, m$ impliquent (corollaire 3-3) la convergence en moyenne quadratique vers 0 de $U_n - \overline{U}_n$. On a donc $U_n - \overline{U}_n \xrightarrow[n\to\infty]{P} 0$, d'où il vient, en utilisant la définition de la fonction ε et un résultat général bien connu

$$\varepsilon(U_n - \overline{U}_n) \xrightarrow[n\to\infty]{P} 0$$

Par ailleurs, en utilisant ($*$ 4), ($*$ 5), et ($*$ 6), nous obtenons

$$g'(\overline{U}_n) - g'(U) \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$$

Il suffit alors d'utiliser un autre résultat général (cf. Rao résultat 2.6.4 (X), p. 102) pour obtenir d'abord

$$R_n \xrightarrow[n\to\infty]{P} 0$$

et ensuite, en tenant compte du résultat (3-1)

$$(*\ 7)\quad \sqrt{n\ h_n^p}\left[g(U_n) - g(\overline{U}n)\right] \xrightarrow[n\to\infty]{\mathcal{L}} {}^t g'(U)\ Z$$

Si nous désignons par W un vecteur aléatoire normal centré de R^m, dont la matrice de covariance B et diagonale et vérifie

$$^{t}\text{diag } B = \left[\frac{v(x_\ell)}{f(x_\ell)}, \ell = 1,m \right]$$

le résultat (* 7) peut s'écrire

$$(* 8) \quad \sqrt{n\, h_n^p} \left[g(U_n) - g(\bar{U}_n) \right] \xrightarrow[n\to\infty]{\mathcal{L}} {}^{t}\mathcal{L}\, W$$

Il suffit, pour s'en rendre compte, d'utiliser (* 4), (3-1') et les égalités $v(x_\ell) = \varphi^{(2)}(x_\ell) - \varphi(x_\ell)^2$, $\ell = 1, m$, qui montrent que

$$^{t} g'(U)\, A g'(U) = {}^{t}\mathcal{L}\, B\, \mathcal{L} .$$

Si nous considérons maintenant la définition (* 1) de la fonction g (en tenant compte de la convention (* 2)), nous voyons que le résultat (* 8) peut aussi s'écrire

$$\sum_{\ell=1}^{m} \sqrt{n h_n^p} \left(\varphi_n(x) - \frac{\bar{\varphi}_n(x_\ell)}{f_n(x_\ell)} \right) \xrightarrow[n\to\infty]{\mathcal{L}} \sum_{\ell=1}^{m} \mathcal{L}_\ell\, W_\ell$$

Il suffit alors de remarquer que ce résultat est vrai pour tout vecteur $\mathcal{L}$ de R^m et d'utiliser le lemme 3-3 pour achever la démonstration du lemme 2-1, en tenant compte du fait que

$$\frac{E\, Y\, K\left(\frac{x_\ell - X}{hn}\right)}{E\, K\left(\frac{x_\ell - X}{h_n}\right)} = \frac{\bar{\varphi}_n(x_\ell)}{\bar{f}_n(x_\ell)} , \forall \ell = 1, m.$$

Nous remarquons, à propos du résultat (* 7) que

- on constate, à postériori, qu'on retrouve le résultat de Mann-Wald [Rao, proposition 6-a-2 (III) p. 322] lorsqu'on remplace dans ce dernier n par $n\, h_n^p$

- mais que rien ne permet à priori d'obtenir (* 7) à partir du théorème de Mann-Wald.

3-5 Démonstration de la proposition 2-1

Il suffit de reparquer que

(A') $\Rightarrow$ (A), (A") $\Rightarrow$ (A) et (B') $\Rightarrow$ (B)

pour voir que sous les hypothèses de la proposition 2 - 1 on a le résultat de la proposition 2-0.

On utilise ensuite un résultat donné en [Collomb 76 proposition 4.1', p.80] qui montre que si (A), (A"), ou (B') est vérifiée on a pour tout $x = x_\ell$, $\ell = 1,m$

$$\left(\frac{E\,Y\,K\left(\frac{x-X}{h_n}\right)}{E\,K\left(\frac{x-X}{h_n}\right)} =\right) \quad \frac{\overline{\varphi}_n(x)}{\overline{f}_n(x)} = E\varphi_n(x) + \circ\left(\frac{1}{n\,h_n^p}\right)$$

et un résultat général bien connu pour obtenir (2-1) à partir de (2-0).

3-6 Démonstration de la proposition 2-2

Pour prouver (2-2) à partir de (2-0) et en tenant compte de l'hypothèse (D) (resp(L)) sur $(h_n)_{\mathbb{N}}$, il suffit de prouver que pour tout $x = x_\ell$, $\ell = 1, m$,

$$R_n(x) = \frac{r_n^{1,1}(x)}{r_n^{0,1}(x)} - \varphi(x)$$

verifie

$(*1)$ $\quad (D) \Rightarrow R_n(x) = O(h_n^\beta)$

(resp. $(*1')$ $(L) \Rightarrow R_n(x) = O(h_n^\alpha)$)

Si nous écrivons

$$R_n(x) = \frac{\varphi(x) + \Gamma_n(x)}{f(x) + C_n(x)} - \varphi(x) \text{ avec } \begin{cases} \Gamma_n(x) = r_n^{1,1}(x) - \varphi(x) \\ C_n(x) = r_n^{0,1}(x) - f(x) \end{cases}$$

et remarquons que $R_n(x) = \frac{\Gamma_n(x) - \varphi(x)\,C_{n(x)}}{f(x) + C_n(x)}$, nous obtenons, puisque

$\lim_{n\to\infty} C_n(x) = 0$ de part la continuité de f au point x,

$$R_n(x) = O\left(\Gamma_n(x) - \varphi(x)\,C_{n(x)}\right)$$

Il suffit alors de remarquer que $\Gamma_n(x) - \varphi(x)\,C_n(x) = a_n(x) + f(x)\,b_n(x)$ avec

$$(*2)\begin{cases} a_n(x) = \int\left[\varphi(x - zh_n) - \varphi(x)\right]\left[f(x - z\,h_n) - f(x)\right] K(z)\,dz \\ b_n(x) = \int\left[\varphi(x - z\,h_n) - \varphi(x)\right] K(z)\,dz \end{cases}$$

pour voir que $(*1)$ (resp. $(*1')$ est vérifié dès qu'on a

$(*3)$ $\quad (D) \Rightarrow a_n(x) = O(h_n^\beta)$, $b_n(x) = O(h_n^\beta)$

(resp. $(*3')$ $(L) \Rightarrow a_n(x) = O(H_n^\alpha)$, $b_n(x) = O(h_n^\alpha)$).

Nous montrons d'abord $(*3)$. Si (D_1) ou (D_2) est vérifiée, on a pour tout z de $\mathbb{R}^p$ et n de $\mathbb{N}^*$

$$(*4)\quad \begin{cases} \varphi(x-zh_n) - \varphi(x) = \sum_{\lambda=1}^{\nu-1} \frac{h_n^\lambda}{\lambda!} \sum_{i_1=1}^{p} \cdots \sum_{i_\lambda=1}^{p} z_{i_1} \cdots z_{i_\lambda} \frac{\partial f(x)}{\partial x_{i_1} \cdots \partial x_{i_\lambda}} + h_n^\nu |z|^\nu \varepsilon_x(z\,h_n) \\ f(x-zh_n) - f(x) = \sum_{\lambda=1}^{\nu-2} \frac{h_n^\lambda}{\lambda!} \sum_{i_1=1}^{p} \cdots \sum_{i_\lambda=1}^{p} z_{i_1} \cdots z_{i_\lambda} \frac{\partial^\lambda f(x)}{\partial x_{i_1} \cdots \partial x_{i_\lambda}} + h_n^{\nu-1} |z|^{\nu-1} e_x(z\,h_n) \end{cases}$$

où les fonctions ε_x et e_x sont bornées sur un voisinage de x lorsque (D_1) est vérifiée (resp. bornées sur $\mathbb{R}^p$ tout entier lorsque (D_2) est vérifiée). En tenant compte de l'hypothèse (D_1) (resp. (D_2)) sur K, on obtient

$$(*5)\ \exists M<\infty\ \exists n_0 \in \mathbb{N}\ \text{ tq } \forall n \in \mathbb{N},\ n>n_0 \quad \begin{cases} \int |z|^{2\nu-2}\, \varepsilon_x(z\,h_n)\, K(z)\, dz < M \\ \int |z|^{2\nu-2}\, e_x(z\,h_n)\, K(z)\, dz < M \\ \int |z|^{2\nu-1}\, \varepsilon_x(z\,h_n)\, e_x(zh_n)\, K(z)\, dz < M \end{cases}$$

(en général $n_0 > 1$ si (D_1) est vérifiée)
Il suffit alors de porter $(*4)$ dans $(*2)$ en tenant compte de l'hypothèse (D_0) sur K et de $(*5)$ pour obtenir $(*3)$.

Nous montrons maintenant $(*3')$. Soit γ le rayon d'une boule de centre x contenue dans le voisinage de x sur lequel φ est lipschizienne au point x, d'ordre α et de constante c; soit δ une constante bornant le support de K et n_0 un entier tel que $\forall n > n_0$ on ait $h_n \leq \frac{\gamma}{\delta}$. Pour tout $n > n_0$ on a

$$|a_n(x)| \leq h_n^\alpha\, c\, \delta^\alpha \sup_{|z|\leq\delta} |f(x-zh_n) - f(x)|\ K$$
$$|b_n(x)| \leq h_n^\alpha\, c\, \delta^\alpha\ K$$

où K est une constante positive bornant K. Il suffit de tenir compte de la continuité de f au point x pour obtenir $(*3')$, ce qui achève la démonstration de la proposition 2-2.

3-7 Démonstration de la proposition 2-3

Un résultat général bien connu (voir par exemple Rao p. 102, X a) montre que pour obtenir (2-3) à partir de (2-2) il suffit de prouver que la v.a.r.

$$A_n(x) = n\, h_n^p\, W_n(x) / \int K^2$$

vérifie pour tout $x = x_\ell$, $\ell = 1, m$

$$(*1)\quad A_n(x) \xrightarrow[n\to\infty]{p} \frac{v(x)}{f(x)}$$

Si nous remarquons que la v.a.r. $A_n(x)$ s'écrit

$$A_n(x) = \frac{\varphi_n^{(2)}(x) - \varphi_n^2(x)}{f_n(x)}$$

avec

$$\varphi_n^{(2)}(x) = \frac{\sum_{i=1}^{n} Y_i^2 \, K_n(x,X_i)}{\sum_{i=1}^{n} K_n(x,X_i)}$$

et ensuite que la proposition 2-0, appliquée au couple (X,Y) (resp (X,Y^2)) montre que

$$\varphi_n(x) \xrightarrow[n\to\infty]{P} \varphi(x) \qquad (\text{resp. } \varphi_n^{(2)}(x) \xrightarrow[n\to\infty]{P} \varphi^{(2)}(x))$$

(on montre aisément que si les hypothèses de la proposition 2-3 sont vérifiées, alors les hypothèses de la proposition 2-0 sont vérifiées par les couples (X,Y) et (X,Y^2)), nous obtenons la convergence en probabilité vers $v(x)$ du numérateur de $A_n(x)$. Nous avons déjà vu (démonstration de la proposition 2-0) que $f_n(x) \xrightarrow[n\to\infty]{P} f(x)$, ce qui prouve (*1) et achève la démonstration de la proposition 2-3.

4 - Remarques (sur les propositions du paragraphe 2)

A propos de l'hypothèse $\lim_{n\to\infty} n\, h_n^p = \infty$, qui apparait dans toutes les propositions, et notamment la proposition 2-0, nous notons qu'il est possible de prouver que cette condition est également nécessaire pour la convergence en probabilité de $\varphi_n(x)$, en ce sens que, elle est impliquée par :

$$\forall\, P \in \mathfrak{D} \qquad \varphi_n(x) \xrightarrow[n\to\infty]{P} \varphi(x),$$

où $\mathfrak{D}$ est l'ensemble des probabilités p vérifiant les hypothèses de la proposition 2-0.

A propos des hypothèses (A) ou (B), dont la formulation est assez complexe, nous notons qu'elles sont vérifiées dès qu'on a respectivement :

"$\forall k \in \mathbb{N}$, $E|Y|^k < \infty$ et $\exists\, w > 0$ tq $\lim_{n\to\infty} \frac{n\, h_n^p}{n^w} = \infty$" ou (A').

A propos le l'hypothèse (D), nous notons qu'elle est vérifiée par un noyau K positif seulement si on a $\gamma < 4$.

En ce qui concerne les résultats (2-0) - (2-3), nous notons qu'ils impliquent en particulier que pour deux points x_1 et $x_2 \neq x_1$ fixés dans $\mathbb{R}^p$, les v.a. d'écart

$$\varphi_n(x_1) - \mu_n(x_1) \text{ et } \varphi_n(x_2) - \mu_n(x_2)$$

avec pour $x = x_1$ ou x_2

$$\mu_n(x) = \frac{E\, Y\, K(\frac{x - X}{h_n})}{EK\ (\frac{x - X}{h_n})} \quad , \qquad E\,\varphi_n(x) \quad \text{et} \quad \varphi(x)$$

sont asymptotiquement indépendantes, en ce sens que leur loi limite est une probabilité produit. Cette propriété est à rapprocher de la non corrélation asymptotique de $\varphi_n(x_1)$ et $\varphi_n(x_2)$, établie dans [Collomb 76] (proposition 4-5).

A propos des précédents travaux concernant la loi limite de $t\,[\varphi_n(x_\ell),\ \ell = 1,\ m]$, à savoir (1) = [Nadaraya 64] et (2) = [Schuster 72], nous notons d'abord que

- (1) traite seulement le cas m = 1 et est erroné en ce qui concerne la variance de la loi limite de $\varphi_n(x)$ ($\varphi^{(2)}(x)$ au lieu de $v(x)$ dans la formule (2-0))
- (1) et (2) traitent seulement le cas p =1

Pour comparer nos résultats à ceux de (1) et (2) nous supposons p =1.
Dans (1), on a seulement (2-0) avec l'hypothèse "Y borné et $\lim n\, h_n^2 = \infty$". Le lemme 2-1 montre que l'hypothèse $\lim_{n\to\infty} n\, h_n = \infty$ est suffisante.
Dans (2), on obtient (2-0) (resp. 2-2) avec l'hypothèse (B) où $\delta = 1$ (resp. et (D) avec $\gamma = 2$). Le lemme 2-1 (resp. la proposition 2-2) montre que lorsqu'on peut faire sur le couple (X,Y) des hypothèses plus restrictives, on a alors le même résultat avec sur la suite $(h_n)_{\mathbb{N}}$ des hypothèses moins restrictives.
En outre, dans le cas particulier (usuel d'un point de vue pratique) où le support de K est borné, les hypothèses sur (X,Y) sont beaucoup moins restrictives.

Par ailleurs, dans (1) et (2) on ne trouve pas de résultats analogues aux propositions 2-1 et 2-3, ce dernier résultat étant très intéressant d'un point de vue pratique, comme nous allons le voir ci-après.

5 - Applications de la proposition 2-3

5.1 Le résultat permet de définir (asymptotiquement) une région de confiance pour le point $[\varphi(x_\ell),\ \ell = 1,m]$ dans R^m. En effet, si on désigne par Z_n la v.a.r. $\sum_{\ell=1}^{m} \frac{(\varphi_n(x_\ell) - \varphi(x_\ell))^2}{W_n(x_\ell)}$, on voit que le résultat (2-3) peut s'écrire $Z_n \xrightarrow[n\to\infty]{\mathcal{L}} Z$, où Z suit une loi du chi deux à m degrés de liberté.

Pour n grand, on peut donc considérer que Z_n suit cette loi et est donc supérieure avec une probabilité α à un nombre $c(\alpha,m)$ donné par les tables.

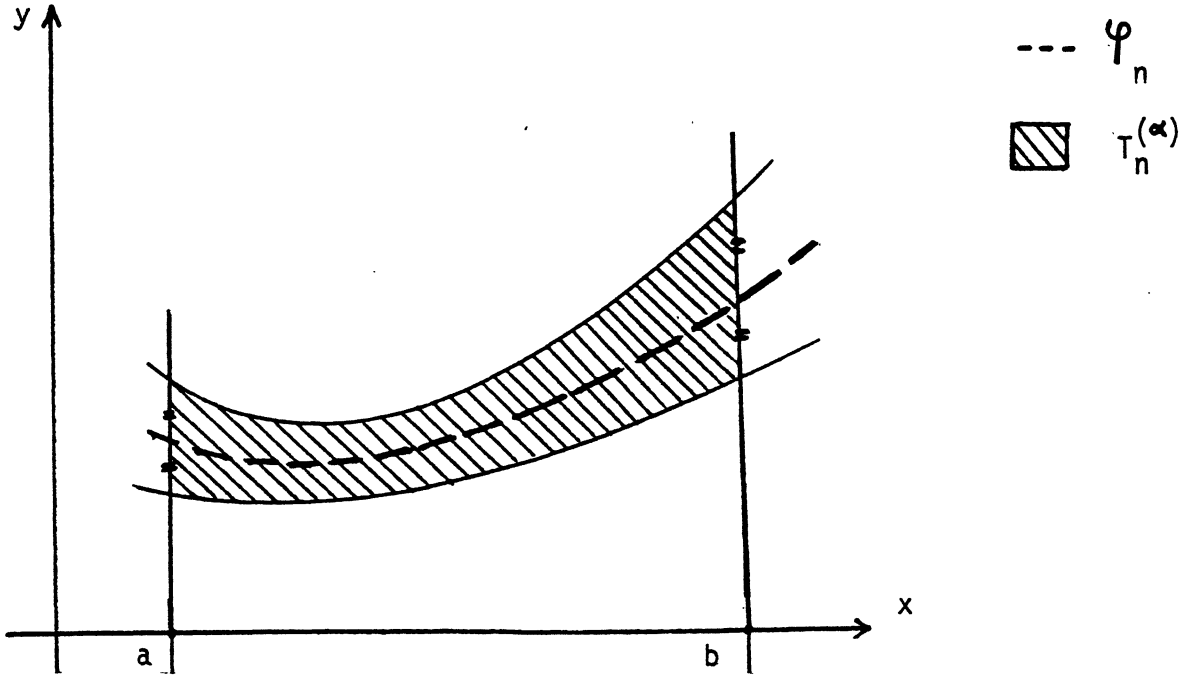
L'intérieur de l'ellipsoïde $\left\{ y \in \mathbf{R}^m \text{ tq } \sum_{\ell=1}^{m} \frac{(\varphi_n(x_\ell) - y_\ell)^2}{W_n(x_\ell)} \leqslant c(\alpha,m) \right\}$ est donc une région de confiance de sécurité $1-\alpha$ pour le point $[\varphi(x_\ell),\ \ell=1,m]$.

5.2 On suppose maintenant que les hypothèses de la proposition 2-3 sont vérifiées pour tout $x = x_1$ ($m = 1$) d'une partie non vide G de $\mathbf{R}^p$.

La région $T_n^{(\alpha)} = \bigcup_{x\in G} \{x\} \times \left\{ y \text{ tq } |\varphi_n(x) - y| \leqslant \sqrt{C_\alpha}\sqrt{W_n(x)} \right\}$, $C_\alpha = c(\alpha,1)$, est asymptotiquement une région de confiance de sécurité $1-\alpha$ pour la courbe φ point par point, en ce sens que

$$\forall x \in G \quad \lim_{n\to\infty} P\left((x,\varphi(x)) \in T_n^{(\alpha)} \right) = 1 - \alpha$$

La figure ci-dessous donne la forme de cette région dans le cas $p = 1$, $G = [a,b]$, K continu : $T_n^{(\alpha)}$ est la zone grisée.



BIBLIOGRAPHIE

BOCHNER (S.) "Harmonic analysis and the theory of probability" University of California Press 1955

CACOULLOS (T.) 1966 "Estimation of a multivariate density" Annals of the Inst. of Stat. Math. 18 p. 178-189

COLLOMB (G.) 1976 "Estimation non paramétrique de la régression par la méthode du noyau "Thèse Docteur Ingénieur, Université Paul Sabatier TOULOUSE

COLLOMB (G.) 1977 a "Quelques propriétés de la méthode du noyau pour l'estiation non paramétrique de la régression en un point fixé" C.R.Acad.Sc.Paris t. 285 Série A p. 289-292

COLLOMB (G.) 1977 b "Estimation de la régression pour la méthode du noyau : quelques propriétés de convergence uniforme " C.R.Acad.Sc.Paris ,parution prochaine

LOEVE (M.) "Probability theory" 3ème édition, Princeton Van Nostrand 1963

NADARAYA (E. A.) 1964 "On estimating regression" Theor. Prob. Appl., 9, p 141 - 142

RAO (C. R.) "Linar statistical inference and its applications" Wiley New York 1965

SCHUSTER (E. F.) 1972 "Joint asymptotic distribution of the estimated regression fonction at a finite number of distinct points" Annals of Statistics, 43, p 84-88.

STONE (C.J.) 1977 "Consistent nonparametric regression" Annals of Statistics,Vol.5,N°4,p.595-645.