

ANNALES SCIENTIFIQUES
DE L'UNIVERSITÉ DE CLERMONT-FERRAND 2
Série Mathématiques

A. TORTRAT

Equation (1) $Ee^{\alpha X - \frac{\alpha^2}{2} Y} = 1$ et mélanges de lois normales

Annales scientifiques de l'Université de Clermont-Ferrand 2, tome 51, série *Mathématiques*, n° 9 (1974), p. 47-50

http://www.numdam.org/item?id=ASCFM_1974__51_9_47_0

© Université de Clermont-Ferrand 2, 1974, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « *Annales scientifiques de l'Université de Clermont-Ferrand 2* » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

$$\text{EQUATION (1) } E e^{\alpha X - \frac{\alpha^2}{2} Y} = 1 \text{ et MELANGES}$$

DE LOIS NORMALES

A. TORTRAT

Dans (1), (X, Y) est un couple de variables aléatoires réelles, et α un nombre au plus complexe.

Lemme 1

Si (1) est vérifiée par des α réels arbitrairement grands, des deux signes, on a $Y > 0$ (p.s.), après suppression d'un éventuel atome en $(0, 0)$ (et normalisation, cela est loisible).

Lemme 2

$\phi_Y(z) = E e^{zY}$ est une fonction entière

- a) si tout $\alpha = it$ vérifie (1) et Y est bornée d'un côté ;
- b) si tout α réel vérifie (1) et $Y \leq T$.

$\phi_X(z)$ est entière dans le cas b), ou lorsque tout α complexe vérifie (1),

Théorème 1

On suppose $Y \leq T$. Alors il est équivalent que tout α réel, ou tout $\alpha = it$ vérifie (1), car cela signifie qu'il existe une désintégration de la loi normale $\nu = \mathcal{N}_b(0, T)$, centrée de variance T , en lois normales $\mathcal{N}_b(X, T-Y)$ (centrées en X , de variances $T - Y$) :

$$(2) \quad \nu = \int_{\Omega} \nu_{X,Y} P(d\omega).$$

Alors $\bar{X} = 0$, $\overline{X^2} = \bar{Y}$ (et tout α complexe $\in (1)$).

Tout temps d'arrêt borné τ , du mouvement brownien X_t , fournit une solution $X_\tau = X$, $\tau = Y$ de (1) ; pour α réel et le couple (x_τ, τ) , (1) caractérise les temps d'arrêt réguliers de X_t (alors Y non borné).

$\phi_Y(z)$ s'annule si Y n'est pas constante, et ϕ_X si X n'est pas normale. En particulier X et Y ne peuvent être indépendants (si $Y \leq T$, (1) vaut pour tout α complexe si (2) est vrai).

Questions

1. Toute désintégration (2) de $\mathcal{M}_b(0, T)$ est-elle du type (x_τ, τ) ? Lorsque Y n'est pas bornée en est-il de même de toute solution (α réel) de (1) ?
2. Quelles sont les lois pour X , ou pour le couple (X, Y) qui ne peuvent satisfaire (1), pour $Y \leq T$. On sait (cf. [1]) que toute loi pour X (admettant une espérance) est réalisable par un temps d'arrêt vrai x_τ (i.e. $\{\tau \leq t\} \in$ la tribu engendrée par les $x_{t'}, t' \leq t$). Ces τ sont non bornés, sont-ils réguliers ? (oui au moins si ϕ_X est entière).

Théorème 2

Les solutions de (1) avec $Y \leq T$ excluent les lois à un nombre fini de valeurs pour X , et plus généralement les couples (X, Y) tels que Y_x désignant la variable aléatoire $(Y | x)$ (Y conditionnée par x),

il existe un $b \in]0, T[$ tel que (pour un $\eta > 0$ et une suite $t_n \uparrow \infty$)

(3) $A = \{x : P(Y_x > b) > 0\}$ satisfasse

$$P(A) > 0 \text{ et (3')} \quad \left\{ \text{tous } \cos t_n x \geq e^{-\frac{t^2}{2} \eta}, x \in A, n \geq 1. \right\}$$

Preuve

(1) pour $\alpha = it$, donne

$$(4) e^{-\frac{t^2}{2}b} = E \cos t X e^{\frac{t^2}{2}(Y-b)} = \int_A \cos t x E e^{\frac{t^2}{2}(Y_x-b)^+} + \text{un terme en } | \leq 1.$$

Mais $E e^{\frac{t^2}{2}(Y_x-h)^+} \cos t x \geq e^{\frac{t^2}{2}(m_x^+ - \eta)}$, pour $x \in A$ et tout t_n , suivant (3), et le second membre de (4) augmenterait indéfiniment avec t_n .

Théorème 3

Si le couple (X, Y) avec $Y \leq T \in (1)$ (tout α réel, donc tout α complexe), la loi de X est p.s. sans atomes, au sens suivant : si a est l'abscisse d'un atome p pour X , et qu'on fixe Y_a , ainsi que tous les autres éléments de définition de la loi (X, Y) , a doit appartenir à un ensemble de mesure de Jordan nulle.

On notera que s'il existe des ensembles A infinis dénombrables qui ne satisfont pas à (3') pour aucune suite $t_n \uparrow \infty$, X pourrait, à priori, être purement atomique, porté par A , donc le p.s. de cet énoncé serait indispensable (mais l'existence d'un tel A ne suffit pas pour assurer celle d'un couple $(X, Y) \in (1)$ avec X portée par A).

Preuve

Ecrivant (1), pour $\alpha = ic$ sous la forme :

$$E e^{i(tX+c) + \frac{t^2}{2} Y} = e^{ic} \quad c \in \Delta =]-\pi, \pi[,$$

et posant

$$\theta(t, x) = E e^{\frac{t^2}{2} Y_x} \geq e^{\frac{t^2}{2} m_x} , \text{ avec } m_x = E \{Y \mid x\},$$

on a

$$p \cos (ta+c) \theta(t, a) + S(t, c) = \cos c, \text{ avec}$$

$$S(t, c) = \int_{x \neq a} \cos (tx + c) \theta(t, x) P(dx).$$

Mais $0 \leq \theta(t, x) \leq e^{Tt^2/2}$ entraîne que $S(t, c)$ est fonction continue de c , et $S(t, c) = -S(t, c + \pi)$. Si $c(t)$ désigne un zéro de $S(t, .)$ sur Δ ,

on a donc

$$(5) \quad p \cos (ta + c \cdot (t)) \theta (t, a) = \cos c (t), \text{ avec } \theta (a, t) \geq e^{\frac{t^2}{2} m_a}, m_a > 0.$$

(5) impose à a d'appartenir à un ensemble d'intervalles égaux de mesure, relativement à celle de Lebesgue, $\sim 4 / 2 \pi \theta (t, a)$ lorsque t est grand, d'où la conclusion.

[1] DUBINS L.E. On a theorem of Skorohod, Ann. of Math. Stat. (1968) 39-6 (2094-7).