ANNALES SCIENTIFIQUES DE L'UNIVERSITÉ DE CLERMONT-FERRAND 2
Série Mathématiques

L. SCHMETTERER

Plongement de lois indéfiniment divisibles

Annales scientifiques de l'Université de Clermont-Ferrand 2, tome 51, série *Mathématiques*, n° 9 (1974), p. 1-4

<http://www.numdam.org/item?id=ASCFM_1974__51_9_1_0>

PLONGEMENT DE LOIS INDEFINIMENT DIVISIBLES

L. SCHMETTERER

Université de Vienne (Autriche)

Soit G un groupe localement compact. On désigne par $\mathcal{B}$ les Boréliens de G. Soit μ une loi indéfiniment divisible définie sur $\mathcal{B}$, c'est-à-dire : pour tout $n \geq 1$ existe une loi $\mu_{1/n}$ telle que $\mu_{1/n}^n = \mu$ (où multiplication désigne la convolution). Soit Q_+ le monoïde de nombres rationnels positifs et soit $P(G)$ le monoïde de mesures de probabilités définies sur $\mathcal{B}$ (avec la convolution comme opération associative). On considère des homomorphismes φ de Q_+ dans $P(G)$ tels que $\varphi(1) = \mu$. L'existence d'un tel homomorphisme n'est pas trivial. Au contraire : soit F_1 le groupe libre abélien qui est engendré par les éléments $\{e, x_1, x_2, \ldots\}$ où e est l'élément neutre de F_1. En introduisant dans F_1 les relations $x_1 = x_n^n$ $n \geq 1$ on obtient un groupe G_1. Il est facile à voir que la loi de Dirac δ_{x_1} (définie par $\delta_{x_1}(\{x_1\}) = 1$) qui est indéfiniment divisible ne peut pas être plongée dans un homomorphisme φ de Q_+ dans $P(G_1)$ (satisfaisant à la condition $\varphi(1) = \delta_{x_1}$.

Par une analyse plus soigneuse on obtient le résultat suivant : (voir [1]) : la condition nécessaire et suffisante pour que δ_x pour un $x \in G_1$ soit indéfiniment divisible est que x appartient au groupe cyclique engendré par x_1. Aucune loi δ_x peut être plongée dans un homomorphisme φ de Q_+ dans $P(G_1)$.

Le monoïde Q_+ est un monoïde sous monogène engendré par $1, \frac{1}{2!}, \frac{1}{3!}, \ldots$. En considérant des autres semi-groupes sous monogènes S_+ engendrés par de éléments de la forme $1, \frac{1}{q_1}, \frac{1}{q_1 q_2}, \ldots$ où $q_i \geqslant 1$ sont des nombres entiers on est conduit dans une manière tout à fait naturelle au problème qu'il est possible de plonger les mesures de Dirac δ_x, $x \in G$ dans un homomorphisme ψ de S_+ dans $P(G_1)$ tel que $\psi(1) = \delta_x$. Dans cette direction on a obtenu dans le travail [1] le résultat suivant :

Il existe des monoïdes S_+ tels que toutes les mesures de Dirac δ_x, $x \in G_1$ peuvent être plongées dans un homomorphisme ψ de S_+ dans $P(G_1)$ satisfaisant à $\psi(1) = \delta_x$.

Sans donner des détails, je voudrais mentionner que le plongement des lois indéfiniment divisibles définies sur les Boréliens $\mathcal{B}$ d'un groupe G localement compact dans un homomorphisme d'un monoïde sousmonogène dans P (G) a quelque intérêt en ce qui concerne la caractérisation des lois de Poisson sur $\mathcal{B}$ (Voir [2]).

Le problème, s'il est possible de plonger toute la loi indéfiniment divisible définie sur les Boréliens $\mathcal{B}$ d'un groupe abélien G dans un homomorphisme d'un monoïde sousmonogène S_+ convenablement choisi dans P (G) n'est pas encore résolu.

En considérant la version non-commutative du groupe G_1 il est possible de montrer qu'il existe des lois indéfiniment **divisibles** qui ne peuvent jamais être plongées dans un tel homomorphisme [1].

Maintenant on considère un problème qui se trouve dans le cadre de cette idée que nous venons d'étudier. Soit $r \to \mu_r$ un homomorphisme non injectif de Q_+ dans P (G) où G est un groupe localement compact. Alors il est facile à voir qu'il existe un sous-groupe compact H de G et un nombre rationnel $r_0 > 0$ tel que $\mu_{r_0} = e_H$ où e_H est la mesure normée de Haar restreinte sur H. Il s'ensuit de plus que le support de μ_r, $r \in Q_+$ est contenu dans une classe conjuguée $x_r H$ de H où x_r appartient au normalisateur $n(H)$ de H. On peut conjecter que $\mu_r = \delta_{x_r} e_H$ pour tout $r > 0$. Cette conjecture est vraie pour les groupes abéliens et pour les groupes compacts (voir [3]). En utilisant la méthode développée dans [3] on obtient le résultat suivant : soit A_r l'automorphisme de H sur H défini par $h \to x_r h x_r^{-1}$, $x_r \in n(H)$. S'il existe pour tout $r > 0$ un $y_r \in H$ tel que A_r est aussi donné par $h \to y_r h y_r^{-1}$, c'est-à-dire si A_r est un automorphisme intérieur alors la conjecture est vraie.

D'autre part M. CARNAL a construit un groupe localement compact qui montre que la conjecture n'est pas vraie en général. Cet exemple ainsi que d'autres résultats ont été traités dans le travail [4] que nous venons de citer.

BIBLIOGRAPHIE

[1] W. HAZOD und L. SCHMETTERER : "Uber einige mit der Wahrscheinlichkeitstheorie zusammenhängende Probleme der Gruppentheorie. A paraître dans le Journal f.reine und angew. Mathematik 1973.

[2] L. SCHMETTERER : On Poisson laws and related questions. Proc. Sixth Berkeley Symp. Math. Stat. Probab., Vol. II, Part One, 169-185, 1971

[3] L. SCHMETTERER : Sur les lois de Poisson des probabilités sur les structures algébriques, Paris C.N.R.S., 311-318, 1969

[4] W. HAZOD : Uber Faltungshalbgruppen von Wahrscheinlichkeitsmaßen. A paraître dans Sitzungsber. d. Osterr. Akademie der Wissenschaften 1974