Annales scientifiques de l'Université de Clermont-Ferrand 2
Série Mathématiques

S. D. Chatterji

Un théorème de Banach et Saks et un principe de sous-suites dans la théorie des probabilités

Annales scientifiques de l'Université de Clermont-Ferrand 2, tome 51, série *Mathématiques*, nº 9 (1974), p. 11-21
<http://www.numdam.org/item?id=ASCFM_1974__51_9_11_0>

UN THEOREME DE BANACH ET SAKS ET UN PRINCIPE DE SOUS-SUITES DANS LA THEORIE DES PROBABILITES

S.D. CHATTERJI

Ecole Polytechnique Fédérale de Lausanne (Suisse)

En 1930 Banach et Saks [2] ont démontré que pour toute suite $\{x_n\}$ de L^p $(1<p<\infty)$ faiblement convergente vers un élément x_0, il existe une sous-suite $\{x_{n(j)}\}$ telle que $y_N = \frac{1}{N} \sum_{j=1}^{N} x_{n(j)}$, converge fortement vers x_0. Dans le même article, les auteurs affirmaient que cette propriété était en défaut pour L^1. Or, leur contre-exemple était erroné car la suite $x_n \in L^1$ choisie ne convergeait pas faiblement vers une limite.

En fait, la propriété en question est valable pour L^1 ce qui semble être démontré pour la première fois par Szlenk [6] en 1965. Dans mon travail [3a] de 1970, j'ignorais l'article de Szlenk et je remarquais qu'un résultat remarquable de Komlós [4] (cf.[3c] ch.IX) entraînait très facilement la propriété en question pour L^1. C'est ce théorème de Komlós qui m'a amené à formuler un principe général de sous-suites dans la théorie des probabilités: (cf.[3b]) soit Π une propriété quantitative asymptotique valable pour toute suite des variables aléatoires indépendantes, également réparties, appartenant à une classe d'intégrabilité L déterminée par la finitude d'une norme

$\|\cdot\|_L$; alors pour toute suite $\{f_n\}$ des variables aléatoires quelconques assujetties à la seule condition $\sup_n \|f_n\|_L < \infty$, on peut choisir une sous-suite $\{f_{n(j)}\}$ de telle manière qu'une propriété $\tilde{\Pi}$ tout à fait analogue à Π est vérifiée pour $\{f_{n(j)}\}$ et pour toute autre sous-suite de $\{f_{n(j)}\}$. Par exemple, le théorème de Komlós est le résultat qui correspond selon ce principe au théorème de Kolmogorv concernant la loi forte des grands nombres pour une suite des variables aléatoires X_n indépendantes et de même répartition telle que $\|X_n\|_1 < \infty$. En effet, le théorème de Komlos dit que pour toute suite $\{f_n\}$ de L^1 avec $\sup\|f_n\|_1 < \infty$, on peut choisir une sous-suite $\{f_{n(j)}\}$ telle que $\lim\limits_{N\to\infty} \frac{1}{N} \sum\limits_{j=1}^{N} f_{n(j)} = \bar{f}$ existe p.p.;

aussi la sous-suite peut être choisie de sorte que la même chose soit vraie pour toute autre sous-suite de celle-ci. Evidemment, si la suite f_n converge vers $\bar{f}$ faiblement dans L^1, les sous-suites de théorème de Komlós seront telles que les moyennes arithmétiques convergent à la fois p.p. et faiblement ce qui entraîne après une propriété bien connue de L^1 (cf.[11]p.295) que ces moyennes arithmétiques convergent fortement. Dans la suite nous donnerons une autre démonstration simple de ce fait suivant la méthode de mon article [3a]. D'autres exemples importants du principe se trouvent, dans [3d].

L'article de Banach et Saks a sucsité plusieurs études dans les dernières années. {[1,5,6,7,8,9]}. En vue du théorème de Banach et Saks il est naturel de formuler les propriétés suivantes pour un espace de Banach E:

(BS1) Toute suite faiblement convergente $\{x_n\}$ contient une sous-suite qui converge fortement (C,1) c.à.d. il existe une sous-suite $\{x_{n(j)}\}$ telle que $\lim\limits_{N\to\infty} \frac{1}{N} \sum\limits_{j=1}^{N} x_{n(j)}$ existe fortement.

(BS2) Toute suite $\{x_n\}$ faiblement convergente vers o contient une sous-suite $\{x_{n(j)}\}$ telle que $\lim\limits_{p\to\infty} \sup\limits_{i_1<\cdots<i_p} \|\frac{1}{p} \sum\limits_{k=1}^{p} x_{n(i_k)}\| = o$; autrement dit, il existe une sous-suite fortement (C,1) convergente dans un sens uniforme.

(BS3) Toute suite $\{x_n\}$ faiblement convergente vers o contient une sous-suite telle que toute sous-suite de celle-ci converge vers o fortement (C,1).

(BS1b) Toute suite bornée $\{x_n\}$ (c.à.d. $\sup\limits_n \| x_n\| < \infty$) contient une sous-suite qui converge fortement (C,1).

(BS2b) Toute suite bornée $\{x_n\}$ contient une sous-suite $\{x_{n(j)}\}$ telle que il existe un $\overline{x} \in E$ avec

$$\lim_{p\to\infty} \sup_{i_1 \cdots i_p} \| \frac{1}{p} \sum_{j=1}^{p} x_{n(j)} - \overline{x}\| = o$$

(BS3b) Toute suite bornée $\{x_n\}$ contient une sous-suite telle que toute sous-suite de celle-ci converge vers un même élément $\overline{x}$ fortement (C,1).

(BS1bω) Toute suite bornée $\{x_n\}$ contient une sous-suite qui converge faiblement (C,1).

On peut aussi considérer (BS2bω) et (BS3bω) qui généralise (BS2b) et (BS3b) respectivement en remplaçant la convergence (C,1) forte par la convergence (C,1) dans la topologie faible. Il est aussi utile de considérer les mêmes propriétés par rapport aux autres méthodes de sommabilités comme par exemple dans [7,8,9,5].

On peut démontrer le théorème suivant:

THEOREME 1:

(A) Pour un espace de Banach E, (BS1),(BS2) et (BS3) sont équivalentes.

(B) Une quelconque des propriétés (BS1b), (BS2b) (BS3b) et (BS1bω) entraîne que l'espace E est reflexive.

(C) Si E est reflexive, on a la propriété (BS1b) par rapport à une méthode de sommabilité positive.

DEMONSTRATION:

(BS1) => (BS2) par une remarque de Pelczyński (cf.[6]p.341). Les implications (BS2) => (BS3) => (BS1) sont évidentes.

Pour établir (B) il suffit de montrer que (BS1bω) entraîne réflexivité. On peut aussi supposer sans perte de généralité que E soit séparable. Nous montrons que la boule fermée $B = \{x \in E : \|x\| \leq 1\}$ est faiblement compact ce qui montre la reflexivité de E. Pour cela on utilise un critère dû à Smulian ([11]p.433) qui dit que si pour toute suite décroissante d'ensembles convexes, fermés et non-vides $K_n \subset B$, on a $\bigcap K_n \neq \phi$ alors B est faiblement compact. Choisissons un $x_n \in K_n$; donc $\|x_n\| \leq 1$. Par (BS1bω) il existe une sous-suite

$$\{x_{n(j)}\} \text{ telle que } y_k = \frac{1}{k} \sum_{j=1}^{k} x_{n(j)} \longrightarrow \bar{x} \text{ faiblement.}$$

Mais $x_{n(j)} \in K_{n(1)}$ pour $j \geq 1$ d'où $y_k \in K_{n(1)}$. Un ensemble convexe fermé est aussi faiblement fermé; donc $\bar{x} \in K_{n(1)}$. Il est aisé de voir que $\frac{1}{(k-1)} \sum_{j=2}^{k} x_{n(j)} \longrightarrow \bar{x}$ faiblement aussi d'où par le même raisonnement $\bar{x} \in K_{n(2)}$. Par récurrence donc $\bar{x} \in K_{n(j)}$ pour tout j et donc $\bar{x} \in \bigcap K_n$. Q.E.D.

La démonstration de (C) est évidente après un théorème bien connu de Mazur ([11]Cor.14,p.422).

THEOREME 2:

Les espaces L^p $(1 \leq p < \infty)$ possèdent la propriété (BS1). Plus généralement tous les espaces d'Orlicz aussi ont la propriété (BS1).

L'espace $C[o,1]$ n'a pas la propriété (BS1) mais sont dual $M[o,1]$ jouit de (BS1).

DEMONSTRATION:

Démontrons seulement que L^1 possède la propriété (BS1). Pour cela il suffit de considérer que l'espace de mesure concerné est σ-fini ou même un espace de probabilité. Supposons donc qu'il s'agit d'une mesure de probabilité μ.

Nous utiliserons le lemme suivant:

LEMME:

Soit $\{x_n\}$ une suite de L^1 telle que $\sup_n \| x_n \|_2 = M < \infty$. Alors il existe une sous-suite $\{x_{n(j)}\}$ qui converge fortement (C,1) dans L^2 (et donc dans L^1) vers un élément $\overline{x} \in L^2$, où $\overline{x}$ est une limite faible dans L^2 de $\{x_n\}$.

Ce lemme est connu ([2]). Une démonstration courte d'un résultat plus fort se trouve dans [3a],p.244. Un énoncé général pour L^p, $1<p<\infty$, est donné dans théorème 3.

Supposons maintenant que $x_n \in L^1$ et $x_n \longrightarrow o$ faiblement. La suite $\{x_n\}$ est donc uniformément intégrable. Pour $\varepsilon>o$, il existe une constante M telle que $\int |x''_n| \, d\mu \leq \varepsilon$ où

$x''_n = x_n \cdot \varphi\{|x_n|>M\}$, $x'_n = x_n - x''_n$. Comme $\| x'_n \|_2 \leq M$, il existe d'après le lemme une sous-suite $\{n(j,\varepsilon)\}$ telle $x'_{n(j,\varepsilon)}$ converge fortement (C,1) dans L^2 et L^1 vers un élément $\overline{x}_\varepsilon$ tel que $x'_{n(j,\varepsilon)} \longrightarrow \overline{x}_\varepsilon$ faiblement dans L^2 et L^1. Donc

$x''_{n(j,\varepsilon)} \longrightarrow -\overline{x}_\varepsilon$ faiblement dans L^1 d'où $\| \overline{x}_\varepsilon \|_1 \leq \varepsilon$. Ainsi

$$\lim_{N\to\infty} \sup \| \frac{1}{N} \sum_{j=1}^{N} x_{n(j,\varepsilon)} \| \leq \varepsilon$$

Laissant varier ε par la suite $1/k$, $k\geq 1$, et appliquant le procédé diagonal, on obtient immédiatement une sous-suite $\{n(j)\}$ telle que

$$\lim_{N\to\infty} \| \frac{1}{N} \sum_{j=1}^{N} x_{n(j)} \| = o.$$

Le même type de démonstration est applicable à un espace d'Orlicz quelconque. Le résultat sur $C[o,1]$ est contenu dans l'article [10] de Schreier. Celui sur $M[o,1]$ est une conséquence facile de la même propriété pour L^1.

THEOREME 3:

Soit $\{f_n\}$ une suite dans L^p, $1<p<\infty$. Il existe une sous-suite et un $\overline{f} \in L^p$ telle que pour toute autre sous-suite $\{f_{n(j)}\}$ de cette dernière et pour toute suite de nombre complexe $\{a_k\}$, on a

$$\| \sum_{k=1}^{\infty} a_k \, (f_{n(k)} - \overline{f}) \|_p \leq M \cdot (\sum_k |a_k|^p)^{1/p}$$

dans le cas $1<p\leq 2$; dans le cas $2\leq p<\infty$ on a

$$\| \sum_{k=1}^{\infty} a_k \, (f_{n(k)} - \overline{f}) \|_p \leq M \cdot (\sum_k |a_k|^2)^{1/2} ;$$

la constante M dans chaque cas dépend seulement de $\sup \| f_n \|_p$

(de p et de l'espace de mesure; M peut être choisie la même pour tous les espaces de probabilité).

La démonstration suit la méthode de [3] et elle se base sur les inégalités de Burkholder dans la théorie des martingales.

REMARQUES:

Notons que tous les espaces uniformément convexes possèdent la propriété (BS1) (Kakutani [12]) donc la propriété (BS1b). Il existe des espaces non-uniformément convexe qui satisfont à (BS1b) ([9]).

Récemment Baernstein [1] a montré qu'il existe un espace reflexive qui n'a pas la propriété (BS1) (et donc n'a pas la propriété (BS1b) non plus).

B I B L I O G R A P H I E

****

[1] BAERNSTEIN, A.

On reflexivity and summability.
Studia Math. 52, 91 - 94 (1972).

[2] BANACH, S. et SAKS, S.

Sur la convergence forte dans les champs L^p.
Studia Math. 2, 51 - 57 (1930).

[3] CHATTERJI, S.D.

a. A general strong low.
Inventiones Math. 9, 235 - 245 (1970).

b. Un principe de sous-suites dans la théorie des probabilités.
Séminaire de probabilités VI, Strasbourg,
Lecture Notes 258, Springer-Verlag (1972).

c. Les martingales et leurs applications analytiques.
Lecture Notes 307, Springer-Verlag (1973).

d. A principle of subsequences in probability theory.
(The central limit theorem)
à apparaître dans Advances in Mathematics.

[4] KOMLÓS, J.

A generalization of a problem of Steinhaus.
Acta Math. Acad. Sci. Hung. 18, 217 - 229 (1967).

[5] SINGER, I.

A remark on reflexivity and summability
Studia Math. 26, 113 - 114 (1965).

[6] SZLENK, W.

Sur les suites faiblement convergentes dans l'espace L.
Studia Math. 25, 337 - 341 (1965).

[7] NISHIURA, T. and WATERMAN, D.

Reflexivity and summability.
Studia Math. 23, 53 - 57 (1963).

[8] WATERMAN, D.

Reflexivity and summability, II.
Studia Math. 32, 61 - 63 (1969).

[9] BARBER, F.; ITO, T.; RATTI, J.; WATERMAN, D.

Reflexivity and summability: the Nakano $\ell(p_i)$ spaces.
Studia Math. 33, 141 - 146 (1969).

[10] SCHREIER, J.

Ein Gegenbeispiel zur Theorie der schwachen Konvergenz.
Studia Math. 2, 58 - 62 (1930).

[11] DUNFORD, N. et SCHWARTZ, J.T.

Linear Operators I. Interscience, N.Y. (1958).

[12] KAKUTANI, S.

Weak convergence in uniformly convex spaces.
Tôhoku Math. J. 45, 188 - 193 (1938).

****