ANNALES DE MATHÉMATIQUES PURES ET APPLIQUÉES.

VALLÈS

Questions résolues. Solution de quatre des problèmes de géométrie énoncés à la pag. 315 du précédent volume

Annales de Mathématiques pures et appliquées, tome 21 (1830-1831), p. 65-72
<http://www.numdam.org/item?id=AMPA_1830-1831__21__65_1>

QUESTIONS RÉSOLUES.

Solution de quatre des problèmes de géométrie énoncés à la pag. 315 du précédent volume ;

Par M. Vallès, ingénieur des ponts et chaussées, ancien élève de l'Ecole polytechnique.

PROBLÈME I. *Étant données les longueurs des droites qui joignent les trois sommets d'un triangle au centre du cercle inscrit ; construire le triangle ?*

Solution. Soient a, b, c les trois longueurs données, r le rayon du cercle inscrit au triangle, et 2α, 2β, 2γ les angles que forment autour du centre de ce cercle les droites qui joignent ce centre aux trois points de contact. En observant que ces angles sont partagés en deux parties égales par les droites données a, b, c, on aura

$$\mathrm{Cos}.\alpha=\frac{r}{a}\ ,\quad \mathrm{Cos}.\beta=\frac{r}{b}\ ,\quad \mathrm{Cos}.\gamma=\frac{r}{c}\ ;$$

d'où

$$\mathrm{Sin}.\alpha=\frac{\sqrt{a^2-r^2}}{a}\ ,\quad \mathrm{Sin}.\beta=\frac{\sqrt{b^2-r^2}}{b}\ ,\quad \mathrm{Sin}.\gamma=\frac{\sqrt{c^2-r^2}}{c}\ ,$$

or, puisque $2\alpha+2\beta+2\gamma$ vaut quatre angles droits, $\alpha+\beta+\gamma$ doit en valoir deux ; ce qui revient à dire que γ est supplément de $\alpha+\beta$, et donne

$$\text{Cos.}\gamma=-\text{Cos.}(\alpha+\beta)=\text{Sin.}\alpha\text{Sin.}\beta-\text{Cos.}\alpha\text{Cos.}\beta\ ,$$

ou, en transposant,

$$\text{Cos.}\gamma+\text{Cos.}\alpha\text{Cos.}\beta=\text{Sin.}\alpha\text{Sin.}\beta\ ;$$

on aura donc, en substituant,

$$\frac{r}{c}+\frac{r^2}{ab}=\frac{\sqrt{(a^2-r^2)(b^2-r^2)}}{ab}\ ;$$

d'où en quarrant, chassant les dénominateurs, transposant, réduisant et ordonnant,

$$2abcr^3+(b^2c^2+c^2a^2+a^2b^2)r^2-a^2b^2c^2=0\ .$$

Si présentement on représente par X, Y, Z les trois angles du triangle demandé, en remarquant que ces angles sont divisés en deux parties égales par les droites données a, b, c, et que leurs moitiés sont les complémens respectifs des angles α, β, γ, on aura

$$\text{Sin.}\tfrac{1}{2}X=\text{Cos.}\alpha=\frac{r}{a}\ ,\quad \text{Sin.}\tfrac{1}{2}Y=\text{Cos.}\beta=\frac{r}{b}\ ,\quad \text{Sin.}\tfrac{1}{2}Z=\text{Cos.}\gamma=\frac{r}{c}\ ,$$

d'où

$$1-\text{Cos.}X=\frac{2r^2}{a^2}\ ,\qquad 1-\text{Cos.}Y=\frac{2r^2}{b^2}\ ,\qquad 1-\text{Cos.}Z=\frac{2r^2}{c^2}\ ;$$

et, par suite,

$$\text{Cos.}X=\frac{a^2-2r^2}{a^2}\ ,\qquad \text{Cos.}Y=\frac{b^2-2r^2}{b^2}\ ,\qquad \text{Cos.}Z=\frac{c^2-2r^2}{c^2}\ ,$$

il en résultera

$$\text{Sin}.X=\frac{2r\sqrt{a^2-r^2}}{a^2}\,,\quad \text{Sin}.Y=\frac{2r\sqrt{b^2-r^2}}{b^2}\,,\quad \text{Sin}.Z=\frac{2r\sqrt{c^2-r^2}}{c^2}\,.$$

Si l'on représente par x, y, z les trois côtés de ce même triangle, on aura

$$x=b\text{Sin}.\beta+c\text{Sin}.\gamma\,,$$

$$y=c\text{Sin}.\gamma+a\text{Sin}.\alpha\,,$$

$$z=a\text{Sin}.\alpha+b\text{Sin}.\beta\,;$$

c'est-à-dire,

$$x=\sqrt{b^2-r^2}+\sqrt{c^2-r^2}\,,$$

$$y=\sqrt{c^2-r^2}+\sqrt{a^2-r^2}\,,$$

$$z=\sqrt{a^2-r^2}+\sqrt{b^2-r^2}\,;$$

mais des valeurs des sinus des angles, données ci-dessus, on tire

$$\sqrt{a^2-r^2}=\frac{a^2\text{Sin}.X}{2r}\,,\quad \sqrt{b^2-x^2}=\frac{b^2\text{Sin}.Y}{2r}\,,\quad \sqrt{c^2-x^2}=\frac{c^2\text{Sin}.Z}{2r}\,,$$

ce qui donnera, en substituant,

$$x=\frac{b^2\text{Sin}.Y+c^2\text{Sin}.Z}{2r}\,;$$

$$y=\frac{c^2\text{Sin}.Z+a^2\text{Sin}.X}{2r}\,;$$

$$z=\frac{a^2\text{Sin}.X+b^2\text{Sin}.Y}{2r}\,.$$

Toutes ces valeurs étant fonction de r, qui est donné par une équation du troisième degré, il s'ensuit que le problème sera toujours possible, quels que soient les trois longueurs données a, b, c. En mettant l'équation en r sous cette forme

$$\left(\frac{1}{r}\right)^3-\left(\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}\right)\left(\frac{1}{r}\right)-\frac{2}{abc}=0\,,$$

elle sera sans second terme, et on en déduira que le problème doit avoir une, deux ou trois solutions, suivant que la fonction

$$\frac{27}{a^2b^2c^2}-\left(\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}\right)^3,$$

est positive, nulle ou négative.

PROBLÈME II. Etant données les longueurs des perpendiculaires abaissées sur les directions des trois côtés d'un triangle du centre du cercle circonscrit ; construire le triangle ?

Solution. Soient a, b, c les trois longueurs données, R le rayon du cercle circonscrit, et 2α, 2β, 2γ les angles formés autour de son centre par les droites qui joignent ce centre à ses trois sommets. En considérant que ces angles sont divisés en deux parties égales par les droites données a, b, c, on aura

$$\text{Cos}\alpha=\frac{a}{R}\,,\qquad \text{Cos}.\beta=\frac{b}{R}\,,\qquad \text{Cos}.\gamma=\frac{c}{R}\,;$$

et, par suite,

$$\text{Sin}.\alpha=\frac{\sqrt{R^2-a^2}}{R}\,,\quad \text{Sin}.\beta=\frac{\sqrt{R^2-b^2}}{R}\,,\quad \text{Sin}.\gamma=\frac{\sqrt{R^2-c^2}}{R}\,;$$

on aura d'ailleurs, comme ci-dessus,

$$\text{Cos}.\gamma+\text{Cos}.\alpha\text{Cos}.\beta=\text{Sin}.\alpha\text{Sin}.\beta\,;$$

ce qui donnera, en substituant,

$$\frac{c}{R}+\frac{ab}{R^2}=\frac{\sqrt{(R^2-a^2)(R^2-b^2)}}{R^2}\;;$$

d'où en quarrant, chassant les dénominateurs, réduisant, transposant et ordonnant,

$$R^3-(a^2+b^2+c^2)R-2abc=0\;;$$

Si présentement on représente par x, y, z les trois côtés du triangle demandé, en remarquant que ces côtés sont divisés en deux parties égales par les droites données a, b, c, on aura

$$x=2\sqrt{R^2-a^2}\;,\qquad y=2\sqrt{R^2-b^2}\;,\qquad z=2\sqrt{R^2-c^2}\;.$$

Si X, Y, Z sont les trois angles du triangle, en remarquant que ces angles sont les moitiés respectives des angles 2α, 2β, 2γ, on aura

$$\mathrm{Cos}.X=\mathrm{Cos}.\alpha=\frac{a}{R}\;,\quad \mathrm{Cos}.Y=\mathrm{Cos}.\beta=\frac{b}{R}\;,\quad \mathrm{Cos}.Z=\mathrm{Cos}.\gamma=\frac{c}{R}\;;$$

Toutes ces valeurs étant des fonctions de R, qui est donné par une équation du troisième degré, il s'ensuit que le problème est toujours possible quelles que soient les trois longueurs données a, b, c; et, comme cette équation est sans second terme, on voit, sur-le-champ, que le problème aura une, deux ou trois solutions, suivant que la fonction

$$27a^2b^2c^2-(a^2+b^2+c^2)^3\;,$$

sera positive, nulle ou négative.

PROBLÈME III. Étant données les longueurs des arcs de grands cercles qui joignent les trois sommets d'un triangle sphérique au pôle du cercle inscrit ; contruire le triangle ?

Solution. Soient a, b, c les trois arcs donnés, r le rayon sphérique du cercle inscrit, et 2α, 2β, 2γ les angles que forment, autour de son pôle, les arcs de grands cercles qui joignent ce pôle aux trois points de contact. En observant que ces angles sont partagés en deux parties égales par les arcs a, b, c, on aura

$$\mathrm{Cos}.\alpha=\frac{\mathrm{Cot}.a}{\mathrm{Cot}.r}\ ,\quad \mathrm{Cos}.\beta=\frac{\mathrm{Cot}.b}{\mathrm{Cot}.r}\ ,\quad \mathrm{Cos}.\gamma=\frac{\mathrm{Cot}.c}{\mathrm{Cot}.r}\ ;$$

d'où

$$\mathrm{Sin}.\alpha=\frac{\sqrt{\mathrm{Cot}.^2r-\mathrm{Cot}.^2a}}{\mathrm{Cot}.r},\ \mathrm{Sin}.\beta=\frac{\sqrt{\mathrm{Cot}.^2r-\mathrm{Cot}.^2b}}{\mathrm{Cot}.r},\ \mathrm{Sin}.\gamma=\frac{\sqrt{\mathrm{Cot}.^2r-\mathrm{Cot}.^2c}}{\mathrm{Cot}.r}\ ;$$

or, on a ici, comme dans le *Problème I*,

$$\mathrm{Cos}.\gamma+\mathrm{Cos}.\alpha\mathrm{Cos}.\beta=\mathrm{Sin}.\alpha\mathrm{Sin}.\beta\ ;$$

il viendra donc, en substituant,

$$\frac{\mathrm{Cot}.c}{\mathrm{Cot}.r}+\frac{\mathrm{Cot}.a\mathrm{Cot}.b}{\mathrm{Cot}.^2r}=\frac{\sqrt{(\mathrm{Cot}.^2r-\mathrm{Cot}.^2a)(\mathrm{Cot}.^2r-\mathrm{Cot}.^2b)}}{\mathrm{Cot}.^2r}\ ;$$

ce qui donnera

$$\mathrm{Cot}.^3r-(\mathrm{Cot}.^2a+\mathrm{Cot}.^2b+\mathrm{Cot}.^2c)\mathrm{Cot}.r-2\mathrm{Cot}.a\mathrm{Cot}.b\mathrm{Cot}.c=0\ .$$

Si présentement on représente par X, Y, Z les trois angles du triangle demandé ; en remarquant que ces angles sont divisés en deux parties égales par les arcs donnés a, b, c, on aura

$$\mathrm{Sin}.\tfrac{1}{2}X=\frac{\mathrm{Sin}.r}{\mathrm{Sin}.a}\ ,\quad \mathrm{Sin}.\tfrac{1}{2}Y=\frac{\mathrm{Sin}.r}{\mathrm{Sin}.b}\ ,\quad \mathrm{Sin}.\tfrac{1}{2}Z=\frac{\mathrm{Sin}.r}{\mathrm{Sin}.c}\ ;$$

et une fois les trois angles du triangle connus, il sera facile d'en conclure les trois côtés.

Ces angles et ces côtés étant des fonctions de r, dont la cotangente est donnée par une équation du troisième degré, on peut en conclure que le problème est toujours possible. Il admettra d'ailleurs une, deux ou trois solutions, suivant que la fonction

$$27\text{Cot.}^2a\text{Cot.}^2b\text{Cot.}^2c-(\text{Cot.}^2a+\text{Cot.}^2b+\text{Cot.}^2c)^3 \ ,$$

sera positive, nulle ou négative.

PROBLÈME IV. Étant données les longueurs des arcs perpendiculaires abaissés sur les directions des trois côtés d'un triangle sphérique du pôle du cercle circonscrit ; construire le triangle ?

Solution. Soient a, b, c les trois longueurs données, R le rayon sphérique du cercle circonscrit, et 2α, 2β, 2γ les angles formés autour de son pôle par les arcs de grands cercles qui joignent ce pôle aux trois sommets. En considérant que ces angles sont divisés en deux parties égales par les arcs donnés a, b, c, on aura

$$\text{Cos.}\alpha=\frac{\text{Tang.}a}{\text{Tang.}R} \ , \quad \text{Cos.}\beta=\frac{\text{Tang.}b}{\text{Tang.}R} \ , \quad \text{Cos.}\gamma=\frac{\text{Tang.c}}{\text{Tang.}R} \ ;$$

d'où

$$\text{Sin.}\alpha=\frac{\sqrt{\text{Tang.}^2R-\text{Tang.}^2a}}{\text{Tang.}R} \ , \quad \text{Cos.}\beta=\frac{\sqrt{\text{Tang.}^2R-\text{Tang.}^2b}}{\text{Tang.}R} \ , \quad \text{Cos.}\gamma=\frac{\sqrt{\text{Tang.}^2R-\text{Tang.}^2c}}{\text{Tang.}R} \ ;$$

mais on aura encore ici, comme dans le *Problème II*,

$$\text{Cos.}\gamma+\text{Cos.}\alpha+\text{Cos.}\beta=\text{Sin.}\alpha\text{Sin.}\beta \ ;$$

ce qui donnera, en substituant,

$$\frac{\text{Tang.}c}{\text{Tang.}R}+\frac{\text{Tang.}a\text{Tang.}b}{\text{Tang.}^2R}=\frac{\sqrt{(\text{Tang.}^2R-\text{Tang.}^2a)(\text{Tang.}^2R-\text{Tang.}^2b)}}{\text{Tang.}^2R} \ ;$$

c'est-à-dire,

$$\text{Tang.}^3R-(\text{Tang.}^2a+\text{Tang.}^2b+\text{Tan.}^2c)\text{Tang.}R-2\text{Tang.}a\text{Tang.}b\text{Tang.}c=0\,.$$

Si ensuite on représente par x, y, z les trois côtés du triangle ; en remarquant que ces côtés sont divisés en deux parties égales par les arcs a, b, c, on aura

$$\text{Cos.}\tfrac{1}{2}x=\frac{\text{Cos.}R}{\text{Cos.}a}\,,\quad \text{Cos.}\tfrac{1}{2}y=\frac{\text{Cos.}R}{\text{Cos.}b}\,,\quad \text{Cos.}\tfrac{1}{2}z=\frac{\text{Cos.}R}{\text{Cos.}c}\,;$$

et, une fois les trois côtés du triangle connus, il sera facile d'en conclure les trois angles.

Ces côtés et ces angles étant ainsi des fonctions de R, dont la tangente est donnée par une équation du troisième degré, il en résulte que le problème est toujours possible. Il admettra d'ailleurs une, deux ou trois solutions, suivant que la fonction

$$27\text{Tang.}^2a\text{Tang.}^2b\text{Tang.}^2c-(\text{Tang.}^2a+\text{Tang.}^2b+\text{Tang.}^2c)^3\,,$$

sera positive, nulle ou négative.

Si, dans les deux derniers problèmes, on suppose le rayon de la sphère infini, ils deviendront respectivement les deux premiers, que nous aurions pu ainsi nous dispenser de traiter en particulier.