ANNALES DE MATHÉMATIQUES PURES ET APPLIQUÉES.

LE BARBIER

Analyse transcendante. Méthode pour la transformation d'une série quelconque, ou du rapport entre deux séries, en une fraction continue équivalente

Annales de Mathématiques pures et appliquées, tome 21 (1830-1831), p. 262-279

<http://www.numdam.org/item?id=AMPA_1830-1831__21__262_1>

ANALYSE TRANSCENDANTE.

Méthode pour la transformation d'une série quelconque, ou du rapport entre deux séries, en une fraction continue équivalente;

Par M. LE BARBIER.

POUR rendre plus facile à saisir la méthode de transformation que nous nous proposons ici de faire connaître, nous l'appliquerons d'abord à une suite d'exemples de choix.

Soit d'abord la série

$$1-3x+5x^2-7x^3+9x^4-11x^5+13x^6-\ldots\ldots; \qquad (1)$$

en lui donnant l'unité pour dénominateur, on en fera une fraction ordinaire que l'on pourra ensuite, par un procédé analogue à celui qu'on enseigne en arithmétique, convertir en fraction continue, de la manière suivante :

Divisant le dénominateur 1 par la série, on obtiendra le quotient 1 et le reste

$$3x-5x^2+7x^3-9x^4+11x^5-\ldots\ldots;$$

divisant ensuite la série par ce reste, on obtiendra le quotient $\frac{1}{3x}$ et le reste

$$-\frac{4}{3}x+\frac{8}{3}x^2-\frac{12}{3}x^3+\frac{16}{3}x^4-\frac{20}{3}x^5+\ldots\ldots$$

Divisant le premier reste par celui-ci, on obiendra le quotient $-\frac{9}{4}$ et le nouveau reste

$$x^2-2x^3+3x^4-4x^5+5x^6-6x^7+\ldots\ldots$$

Divisant enfin l'avant-dernier reste par celui-ci, on obtiendra le quotient $-\frac{4}{3x}$, avec un reste nul. En conséquence la série proposée pourra être remplacée par la fraction continue

$$\cfrac{1}{1}+\cfrac{1}{\cfrac{1}{3x}+\cfrac{1}{-\cfrac{9}{4}+\cfrac{1}{-\cfrac{4}{3x}}}},$$

qu'on réduira facilement à celle-ci

$$\cfrac{1}{1}+\cfrac{3x}{1}-\cfrac{4x}{3}+\cfrac{x}{1};$$

laquelle revient à la fraction ordinaire

$$\frac{1-x}{(1+x)^2},$$

dont la série proposée est en effet le développement.

Soit, pour second exemple, la série

$$1-2x+3x^2-4x^3+5x^4-6x^5+7x^6-\ldots\ldots\,; \qquad (2)$$

en la traitant comme la précédente on obtiendra les quotiens et les restes successifs dont le tableau suit :

$$\begin{array}{c|l}
 & 1 \\
1 & 1-2x+3x^2-4x^3+5x^4-6x^5+7x^6-8x^7+\ldots\ldots\,, \\
\dfrac{1}{2x} & \quad 2x-3x^2+4x^3-5x^4+6x^5-7x^6+8x^7-\ldots\ldots\,, \\
-4 & -\frac{1}{2}x+\frac{2}{2}x^2-\frac{3}{2}x^3+\frac{4}{2}x^4-\frac{5}{2}x^5+\frac{6}{2}x^6-\frac{7}{2}x^7+\ldots\ldots\,, \\
-\dfrac{1}{2x} & \qquad x^2-2x^3+3x^4-4x^5+5x^6-6x^7+\ldots\ldots\,, \\
 & \qquad 0\,;
\end{array}$$

ce qui donnera, pour la fraction continue équivalente,

$$\frac{1}{1+\cfrac{1}{\cfrac{1}{2x}+\cfrac{1}{-4+\cfrac{1}{-\cfrac{1}{2x}}}}}\,;$$

ou bien

$$\frac{1}{1+\cfrac{2x}{1-\cfrac{x}{2+\cfrac{x}{1}}}}\,;$$

laquelle revient à la fraction ordinaire

$$\frac{1}{(1+x)^2}\,,$$

dont la série proposée est en effet le développement.

Soit, pour troisième exemple, la série

$$1+5x+9x^2+13x^3+17x^4+21x^5+25x^6+\ldots\ldots\,; \qquad (3)$$

en la traitant comme les précédentes, on obtiendra les quotiens et les restes successifs dont le tableau suit :

$$\begin{array}{r|l}
 & 1 \\
1 & 1+5x+9x^2+13x^3+17x^4+21x^5+25x^6+29x^7+\ldots,\ldots\,, \\
-\frac{1}{5x} & -5x-9x^2-13x^3-17x^4-21x^5-25x^6-29x^7-\ldots\ldots\,, \\
-\frac{25}{17} & +\frac{16}{5}x+\frac{32}{5}x^2+\frac{48}{5}x^3+\frac{64}{5}x^4+\frac{80}{5}x^5+\frac{96}{5}x^6+\frac{112}{5}x^7+\ldots\,, \\
+\frac{16}{5x} & \qquad x^2+2x^3+3x^4+4x^5+5x^6+6x^7+\ldots\ldots\,, \\
 & \qquad 0
\end{array}$$

ce qui donnera, pour la fraction continue équivalente,

$$\frac{1}{1}+\cfrac{1}{-\frac{1}{5x}+\cfrac{1}{-\frac{25}{16}+\cfrac{1}{\frac{16}{5x}}}}\;;$$

qu'on réduira facilement à celle-ci

$$\frac{1}{1}-\cfrac{5x}{1+\cfrac{16x}{5-\cfrac{x}{1}}}\;;$$

laquelle revient à la fraction ordinaire

$$\frac{1+3x}{(1-x)^2}\,,$$

dont la série proposée est en effet le développement.

Soit encore la série

$$4x+15x^2+40x^3+85x^4+156x^5+259x^6+400x^7+585x^8+\ldots\ ; \quad (4)$$

en la traitant exactement comme les précédentes, on trouvera pour sa fonction génératrice la fraction rationnelle

$$\frac{x(1+x^2)(4-x)}{(1-x)^4}\ .$$

Ces exemples suffisent pour faire voir que ce procédé, fondé sur la recherche du plus grand commun diviseur entre l'unité et une série proposée, offre une méthode directe et très-élémentaire pour sommer toute suite infinie dont la fonction génératrice est rationnelle; méthode différente de celle d'Euler, indiquée par M. LACROIX dans son *Traité de calcul différentiel et de calcul intégral.* (Deuxième édition, tom. III, pag. 344).

Le même procédé peut être également employé à transformer une série quelconque en fraction continue.

Soit d'abord la série

$$1+\tfrac{1}{2}x+\frac{1.3}{2.4}x^2+\frac{1.3.5}{2.4.6}x^3+\frac{1.3.5.7}{2.4.6.8}x^4+\frac{1.3.5.7.9}{2.4.6.8.10}x^5+\ldots, \quad (5)$$

que l'on sait être le développement de la fonction

$$\frac{1}{\sqrt{1-x}}\ ;$$

si l'on cherche le plus grand commun diviseur entre l'unité et cette série, les quotiens et les restes successifs seront tels qu'on les voit dans le tableau suivant :

$$
\begin{array}{r|l}
 & 1 \\
1 & 1+\frac{1}{2}x+\frac{1.3x^2}{2.4}+\frac{1.3.5x^3}{2.4.6}+\frac{1.3.5.7x^4}{2.4.6.8}+\ldots\ldots, \\
-\frac{2}{x} & -\frac{1}{2}x-\frac{1.3x^2}{2.4}-\frac{1.3.5x^3}{2.4.6}-\frac{1.3.5.7.x^4}{2.4.6.8}+\ldots\ldots, \\
2 & +\frac{1.2}{2.4}x-\frac{12x^2}{2.4.6}-\frac{90x^3}{2.4.6.8}-\frac{840x^4}{2.4.6.8.10}+\ldots\ldots, \\
-\frac{2}{x} & \qquad +\frac{6x^2}{2.4.6}+\frac{60x^3}{2.4.6.8}+\frac{630x^4}{2.4.6.8.10}+\ldots\ldots, \\
2 & \qquad +\frac{24x^2}{2.4.6.8}+\frac{360x^3}{2.4.6.8}+\frac{5040x^4}{2.4.6.8.10.12}+\ldots\ldots, \\
-\frac{2}{x} & \qquad\qquad -\frac{120x^3}{2.4.6.8.10}-\frac{2520x^4}{2.4.6.8.10.12}+\ldots\ldots, \\
2 & \qquad\qquad -\frac{720x^3}{2.4.6.8.10.12}-\frac{20160x^4}{2.4.6.8.10.12.14}-\ldots., \\
-\frac{2}{x} & \qquad\qquad\qquad +\frac{5040x^4}{2.4.6.8.10.12.14}+\ldots.; \\
\ldots & \qquad\qquad\qquad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots;
\end{array}
$$

d'où résultera

$$
\frac{1}{\sqrt{1-x}}=\frac{1}{1}+\cfrac{1}{-\frac{2}{x}+\frac{1}{2}+\cfrac{1}{-\frac{2}{x}+\frac{1}{2}+\cfrac{1}{-\frac{2}{x}+\frac{1}{2}+\ldots.}}};
$$

ou bien encore

$$\frac{1}{\sqrt{1-x}}=\cfrac{1}{1-\cfrac{x}{2-\cfrac{x}{2-\cfrac{x}{2-\cfrac{x}{2-\ldots\ldots}}}}}$$

En changeant le signe de x, cela donnera

$$\frac{1}{\sqrt{1+x}}=\cfrac{1}{1+\cfrac{x}{2+\cfrac{x}{2+\cfrac{x}{2+\ldots\ldots}}}}$$

Si, par exemple, on suppose $x=2$, cette dernière formule donnera

$$\frac{1}{\sqrt{3}}=\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{2+\ldots\ldots}}}}}}}\,;$$

Soit la série très-divergente

$$1-1.2x+1.2.3x^2-1.2.3.4x^3+1.2.3.4.5x^4-1.2.3.4.5.6x^5+\ldots \quad (6)$$

que l'on a vu, à la pag. 81 du présent volume, être le développement de la fonction

$$\frac{\sqrt[x]{e}}{x^2}\int\frac{dx}{\sqrt[x]{e}}\;;$$

en la traitant de la même manière, on trouvera

$$\frac{\sqrt[x]{e}}{x^2}\int\frac{dx}{\sqrt[x]{e}}=\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{\cfrac{1}{1.2x}+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{\cfrac{1}{2.3x}+\cfrac{1}{3+\cfrac{1}{\cfrac{1}{3.4x}+\cfrac{1}{4+\ldots\ldots}}}}}}}\,;$$

ou bien encore

$$\frac{\sqrt[x]{e}}{x^2}\int\frac{dx}{\sqrt[x]{e}}=\cfrac{1}{1+\cfrac{2x}{1+\cfrac{x}{1+\cfrac{3x}{1+\cfrac{2x}{1+\cfrac{4x}{1+\cfrac{3x}{1+\dots}}}}}}}$$

Si, dans la série, on pose $x=1$, il viendra

$$1-1.2+1.2.3-1.2.3.4+1.2.3.4.5-1.2.3.4.5.6+1.2.3.4.5.6.7-\dots\dots$$

$$=\cfrac{1}{1+\cfrac{2}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{3}{1+\cfrac{2}{1+\cfrac{4}{1+\cfrac{3}{1+\cfrac{5}{1+\cfrac{4}{1+\dots}}}}}}}}};$$

fraction continue qui est convergente ; car, en formant les réduites successives, on trouve

$$1\,,\ \frac{1}{3}\,,\ \frac{1}{2}\,,\ \frac{5}{13}\,,\ \frac{5}{9}\,,\ \frac{17}{37}\,,\ \frac{7}{17}\,,\ \frac{67}{167}\,,\ \frac{85}{209}\,,\ \dots\dots;$$

fractions alternativement trop grandes et trop petites, mais qui convergent vers la véritable valeur de la série, qui est comme l'on sait (Voy. l'ouvrage cité de M. Lacroix, tom. III, pag. 348),

$$0,40365263\dots\dots$$

Pour transformer la série

$$x-1.x^2+1.2x^3-1.2.3x^4+1.2.3.4x^5-1.2.3.4.5x^5+\dots\dots \quad (9)$$

en fraction continue, Euler, en représentant cette série par A, pose $A=\frac{x}{1+B}$, il en conclut

$$B=\frac{x-2x^2+1.2.3x^3-1.2.3.4x^4+1.2.3.4.5x^5+\ldots\ldots}{1-x+1.2x^2-1.2.3x^3+1.2.3.4x^4-1.2.3.4.5x^5+\ldots\ldots}\;;$$

il pose de nouveau $B=\frac{x}{1+C}$, d'où il tire

$$C=\frac{x-4x^2+18x^3-96x^4+600x^5-4320x^6+\ldots\ldots}{1-1.2x+1.2.3x^2-1.2.3.4x^3+1.2.3.4.5x^4-\ldots\ldots}\;;$$

il pose ainsi successivement

$$A=\frac{x}{1+B}\;,\quad B=\frac{x}{1+C}\;,\quad C=\frac{x}{1+D}\;,\quad D=\frac{x}{1+E}\;,\quad E=\frac{x}{1+F}\;,\ldots$$

ce qui lui donne finalement, comme on peut le voir dans l'ouvrage cité (pag. 392) où tout le calcul est développé,

$$x-1.x^2+1.2x^3-1.2.3x^4+1.2.3.4x^5-1.2.3.4.5x^6+\ldots\ldots$$

$$=\cfrac{x}{1+\cfrac{x}{1+\cfrac{x}{1+\cfrac{2x}{1+\cfrac{2x}{1+\cfrac{3x}{1+\cfrac{3x}{1+\cfrac{4x}{1+\cfrac{4x}{1+\cfrac{5x}{1+\cfrac{5x}{1+\ldots}}}}}}}}}}}$$

En posant $x=1$, on a

$$1-1+1.2-1.2.3+1.2.3.4-1.2.3.4.5+\ldots\ldots$$

$$=\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{x}{1+\cfrac{2}{1+\cfrac{3}{1+\cfrac{3}{1+\cfrac{4}{1+\cfrac{4}{1+\ldots}}}}}}}}}\;,$$

ce qui donne les réduites successives

$$\frac{1}{1}\,,\quad \frac{1}{2}\,,\quad \frac{2}{3}\,,\quad \frac{4}{7}\,,\quad \frac{8}{13}\,,\quad \frac{10}{17}\quad \frac{44}{73}\,,\quad \frac{124}{209}\,,\;\ldots\ldots,$$

fractions alternativement plus grande et plus petite que la valeur de la série, mais convergent sans cesse vers cette valeur.

On sait que, e étant la base du système de logarithmes de Néper, on a

$$e^x = 1 + \frac{x}{1} + \frac{x^2}{1.2} + \frac{x^3}{1.2.3} + \frac{x^4}{1.2.3.4} + \frac{x^5}{1.2.3.4.5} + \ldots\ldots$$

On en conclut

$$\frac{e^x+1}{e^x-1} = \frac{2 + \frac{x}{1} + \frac{x^2}{1.2} + \frac{x^3}{1.2.3} + \frac{x^4}{1.2.3.4} + \ldots\ldots}{\frac{x}{1} + \frac{x^2}{1.2} + \frac{x^3}{1.2.3} + \frac{x^4}{1.2.3.4} + \ldots\ldots}.$$

En opérant sur la fraction qui forme le second membre de cette équation, comme on le fait dans la recherche du plus grand commun diviseur, on trouvera successivement les quotiens et les restes contenus dans le tableau suivant :

$$\begin{array}{c|l}
\frac{2}{x} & \frac{x}{1} + \frac{x^2}{1.2} + \frac{x^3}{1.2.3} + \frac{x^4}{1.2.3.4} + \frac{x^5}{1.2.3.4.5} + \ldots\ldots \\
\frac{6}{x} & \qquad \frac{x^2}{1.2.3} + \frac{2x^3}{1.2.3.4} + \frac{3x^4}{1.2.3.4.5} + \frac{4x^5}{1.2.3.4.5.6} + \ldots\ldots \\
\frac{10}{x} & \qquad\qquad + \frac{2x^3}{1.2.3.4.5} + \frac{6x^4}{1.2.3.4.5.6} + \frac{12x^5}{1.2.3.4.5.6.7} + \ldots \\
\frac{14}{x} & \qquad\qquad\qquad + \frac{6x^4}{1.2.3.4.5.6.7} + \frac{24x^5}{1.2.3.4.5.6.7.8} + \ldots \\
\frac{18}{x} & \qquad\qquad\qquad\qquad \frac{24x^5}{1.2.3.4.5.6.7.8.9} + \ldots \\
\ldots\ldots & \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad + \ldots\ldots
\end{array}$$

d'où on conclura le développement que voici :

$$\frac{e^x+1}{e^x-1}=\frac{2}{x}+\cfrac{1}{\cfrac{6}{x}+\cfrac{1}{\cfrac{10}{x}+\cfrac{1}{\cfrac{14}{x}+\cfrac{1}{\cfrac{18}{x}+\cfrac{1}{\cfrac{22}{x}+\ldots}}}}}\;;$$

et, par suite,

$$\frac{e^x-1}{e^x+1}=\cfrac{1}{\cfrac{2}{x}+\cfrac{1}{\cfrac{6}{x}+\cfrac{1}{\cfrac{10}{x}+\cfrac{1}{\cfrac{14}{x}+\cfrac{1}{\cfrac{18}{x}+\cfrac{1}{\cfrac{22}{x}+\ldots}}}}}}\;;$$

ou bien encore

$$x.\frac{e^x-1}{e^x+1}=\cfrac{x^2}{2+\cfrac{x^2}{6+\cfrac{x^2}{10+\cfrac{x^2}{14+\cfrac{x^2}{18+\cfrac{x^2}{22+\ldots}}}}}}$$

En posant $x=1$, on tire de là

$$\frac{e-1}{e+1}=\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{6+\cfrac{1}{10+\cfrac{1}{14+\cfrac{1}{18+\cfrac{1}{22+\ldots}}}}}}\;;$$

ce qui donne les réduites successives

$$\frac{1}{2},\quad \frac{6}{13},\quad \frac{61}{132},\quad \frac{860}{1861},\quad \frac{15541}{33630},\quad \frac{342762}{741721},\ \ldots$$

dont la dernière donne la valeur de $\frac{e-1}{e+1}$ avec douze chiffres décimaux exacts. Il est facile ensuite d'en conclure la valeur de e.

Appliquons encore notre procédé au développement de Tang.x en fraction continue. On a

$$\text{Tang.}x=\frac{\text{Sin.}x}{\text{Cos.}x}=\frac{\frac{x}{1}-\frac{x^3}{1.2.3}+\frac{x^5}{1.2.3.4.5}-\frac{x^7}{1.2.3.4.5.6.7}+\ldots}{1-\frac{x^2}{1.2}+\frac{x^4}{1.2.3.4}-\frac{x^6}{1.2.3.4.5.6}+\ldots}\,.$$

En cherchant, comme ci-dessus, le plus grand commun diviseur des deux termes de la fraction, on trouvera les quotiens et les restes successifs tels qu'ils se présentent dans le tableau suivant :

$$\begin{array}{r|l}
 & 1+\frac{x^2}{1.2}+\frac{x^4}{1.2.3.4}-\frac{x^6}{1.2.3.4.5.6}+\frac{x^8}{1.2.3.4.5.6.7.8}-\ldots \\
+\frac{1}{x} & x-\frac{x^3}{1.2.3}+\frac{x^5}{1.2.3.4.5}-\frac{x^7}{1.2.3.4.5.6.7}+\frac{x^9}{1.2.3.4.5.6.7.8.9}-\ldots \\
-\frac{3}{x} & -\frac{2x^3}{1.2.3}+\frac{4x^4}{1.2.3.4.5}-\frac{6x^6}{1.2.3.4.5.6.7}+\frac{8x^8}{1.2.3.4.5.6.7.8.9}-\ldots \\
+\frac{5}{x} & -\frac{x^3}{1.3.5}+\frac{x^5}{5.6.7}-\frac{2x^7}{5.6.7.8.9}+\ldots \\
-\frac{7}{x} & +\frac{2x^4}{5.6.7}-\frac{x^6}{5.6.7.9}+\ldots \\
+\frac{9}{x} & +\frac{2x^5}{5.6.7.9}-\ldots \\
\ldots\ldots & \ldots\ldots\ldots\ldots
\end{array}$$

d'où on conclura

$$\text{Tang.}x = \cfrac{1}{\cfrac{1}{x} + \cfrac{1}{-\cfrac{3}{x} + \cfrac{1}{\cfrac{5}{x} + \cfrac{1}{-\cfrac{7}{x} + \cfrac{1}{\cfrac{9}{x} + \dots\dots\dots}}}}}$$

ou bien encore

$$x\text{Tang.}x = \cfrac{x^2}{1 - \cfrac{x^2}{3 - \cfrac{x^2}{5 - \cfrac{x^2}{7 - \cfrac{x^2}{9 - \cfrac{x^2}{11 - \dots}}}}}}$$

Il ne faut pas perdre de vue, dans les applications de ce développement, qu'ici le rayon est pris pour unité.

M. Legendre, dans les notes de sa Géométrie, parvient à un pareil résultat par une méthode fort élégante, mais qui est particulière à ce genre de série.

Pour dernier exemple, prenons la formule

$$\text{Log}\,(1+x) = \frac{x}{1} - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^6}{6} + \dots\dots$$

En opérant sur la série qui forme le second membre, comme nous l'avons fait dans les autres exemples, c'est-à-dire, en cherchant son plus grand commun diviseur avec l'unité, les quotiens et les restes successifs seront tels qu'on les voit ici

$$
\begin{array}{c|l}
 & 1 \\
\frac{1}{x} & \frac{x}{1} - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^6}{6} + \ldots\ldots \\
\frac{2}{1} & \frac{x}{2} - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{4} - \frac{x^4}{5} + \frac{x^5}{6} - \frac{x^6}{7} + \ldots\ldots \\
\frac{3}{x} & \quad \frac{x^2}{6} - \frac{x^3}{7} + \frac{3x^4}{20} - \frac{2x^5}{15} + \frac{5x^6}{42} - \ldots \\
\frac{2}{2} & \quad \frac{x^2}{6} - \frac{x^3}{5} + \frac{x^4}{5} - \frac{4x^5}{21} + \frac{5x^6}{28} - \ldots \\
\frac{5}{x} & \qquad + \frac{x^3}{30} - \frac{x^4}{20} + \frac{2x^5}{35} - \frac{5x^6}{84} + \ldots \\
\frac{2}{3} & \qquad + \frac{x^3}{20} - \frac{3x^4}{35} + \frac{9x^5}{84} - \ldots\ldots \\
\frac{7}{x} & \qquad\quad + \frac{x^4}{140} - \frac{x^5}{70} + \ldots\ldots \\
\ldots & \qquad\quad + \frac{x^4}{70} - \ldots\ldots
\end{array}
$$

ce qui donnera

$$
\mathrm{Log.}(1+x) = \cfrac{1}{\cfrac{1}{x} + \cfrac{1}{\cfrac{2}{1} + \cfrac{1}{\cfrac{3}{x} + \cfrac{1}{\cfrac{2}{2} + \cfrac{1}{\cfrac{5}{x} + \cfrac{1}{\cfrac{2}{3} + \cfrac{1}{\cfrac{7}{x} + \cfrac{1}{\cfrac{2}{4} + \ldots}}}}}}}} ;
$$

ou bien encore

$$\text{Log.}(1+x)=\frac{x}{1}+\frac{x}{2}+\frac{x}{3}+\frac{2x}{2}+\frac{2x}{5}+\frac{3x}{2}+\frac{3x}{7}+\frac{4x}{2}+\frac{4x}{9}+\frac{5x}{2}+\frac{5x}{11}+\ldots$$

Si, dans cette formule, sous sa première forme, on change x en $\frac{1}{x}$, elle deviendra

$$\text{Log}\left(\frac{1+x}{x}\right)=\frac{1}{x}+\frac{\frac{1}{2}}{1}+\frac{1}{3x}+\frac{\frac{1}{2}}{2}+\frac{1}{5x}+\frac{\frac{1}{2}}{3}+\frac{1}{7x}+\frac{\frac{1}{2}}{4}+\ldots\,;$$

ou bien encore

$$\text{Log.}\left(\frac{1+x}{x}\right)=\frac{1}{x}+\frac{1}{2}+\frac{1}{3x}+\frac{2}{2}+\frac{2}{5x}+\frac{3}{2}+\frac{3}{7x}+\frac{4}{2}+\frac{4}{9x}+\ldots$$

Il nous sera présentement facile de généraliser le procédé dont nous venons de donner des exemples. Soit la fraction

$$\frac{a+a'+a''x^2+a'''x^3+a''''x^4+\ldots}{b+b'x+b''x^2+b'''x^3+b''''x^4+\ldots}\;;$$

en divisant le numérateur par le dénominateur, ne prenant que le premier terme du quotient, et posant, pour abréger,

$$\frac{ba'-ab'}{b}=c\ ,$$

$$\frac{bc''-ab''}{b}=c'\ ,$$

$$\frac{ba''-cb'''}{b}=c''\ ;$$

$$.\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ ,$$

on aura

$$\frac{a+a'x+a''x^2+a'''x^3+\ldots\ldots}{b+b'x+b''x^2+b'''x^3+\ldots\ldots}=\frac{a}{b}+\frac{x}{\dfrac{b+b'x+b''x^2+b'''x^3+\ldots\ldots}{c+c'x+c''x^2+c'''x^3+\ldots\ldots}}\ .$$

Par un semblable calcul, en posant, pour abréger,

$$\frac{cb'-bc'}{c}=d\ ,$$

$$\frac{cb''-bc''}{c}=d'\ ,$$

$$\frac{cb'''-bc'''}{b}=d''\ ,$$

$$.\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ ;$$

on aura

$$\frac{b+b'x+b''x^2+b'''x^3+\ldots\ldots}{c+c'x+c''x^2+c'''x^3+\ldots\ldots}=\frac{b}{c}+\frac{x}{\dfrac{c+c'x+c''x^2+c'''x^3+\ldots\ldots}{d+d'x+d''x^2+a'''x^3+\ldots\ldots}}\ ;$$

En posant semblablement

$$\frac{dc'-cd'}{d}=e\ ;$$

$$\frac{dc''-cd''}{d}=e' \,,$$

$$\frac{dc'''-cd'''}{d}=e'' \,,$$

$$\cdots\cdots\cdots ,$$

on trouvera

$$\frac{c+c'x+c''x^2+c'''x^3+\ldots\ldots}{d+d'x+d''x^2+d'''x^3+\ldots\ldots}=\frac{c}{d}+\cfrac{x}{\cfrac{d+d'x+d''x^2+d'''x^3+\ldots\ldots}{e+e'x+e''x^2+e'''x^3+\ldots\ldots}} \,,$$

et ainsi de suite ; ce qui donnera finalement

$$\frac{a+a'x+a''x^2+a'''x^3+\ldots\ldots}{b+b'x+b''x^2+b'''x^3+\ldots\ldots}=\frac{a}{b}+\cfrac{x}{\cfrac{b}{c}+\cfrac{x}{\cfrac{c}{d}+\cfrac{x}{\cfrac{d}{e}+\cfrac{x}{\cfrac{e}{f}+\ldots\ldots}}}} ;$$

et, par suite,

$$\frac{b+b'x+b''x^2+b'''x^3+\ldots\ldots}{a+a'x+a''x^2+a'''x^3+\ldots\ldots}=\cfrac{1}{\cfrac{a}{b}+\cfrac{x}{\cfrac{b}{c}+\cfrac{x}{\cfrac{c}{d}+\cfrac{x}{\cfrac{d}{e}+\cfrac{x}{\cfrac{e}{f}+\ldots\ldots}}}}} ;$$

ce qui revient encore à

$$ax.\frac{b+b'x+b''x^2+b'''x^3+\ldots\ldots}{a+a'x+a''x^2+a'''x^3+\ldots\ldots}=\cfrac{abx}{a+\cfrac{bcx}{b+\cfrac{cdx}{c+\cfrac{dex}{d+\cfrac{efx}{e+\ldots}}}}}$$

Pour montrer, par un exemple, l'application de cette formule générale, nous reprendrons la série (9), traitée par Euler, c'est-à-dire, la série

$$x-1.x^2+1.2x^3-1.2.3x^4+1.2.3.4x^5-1.2.3.4.5x^6+1.2.3.4.5.6x^7-\dots\dots$$

Nous aurons ici

$$a=1\,,\quad a'=0\,,\quad a''=0\,,\quad a'''=0\,,\quad a''''=0\,,\quad \dots\dots\dots\,,$$
$$b=1\,,\quad b'=-1\,,\quad b''=2\,,\quad b'''=-6\,,\quad b''''=24\,,\quad \dots\dots\dots\,;$$

il en résultera

$$c=\frac{ba'-ab'}{b}=+1\,,\qquad d=\frac{cb'-bc'}{c}=+1\,,\qquad e=\frac{dc'-cd'}{d}=+2\,,$$
$$c'=\frac{ba''-ab''}{b}=-2\,,\qquad d'=\frac{cb''-bc''}{c}=-4\,,\qquad e'=\frac{dc''-cd''}{d}=-12\,,$$
$$c''=\frac{ba'''-ab'''}{b}=+6\,,\qquad d''=\frac{cb'''-bc'''}{c}=+18\,,\qquad e''=\frac{dc'''-cd'''}{d}=+72\,,$$
$$c'''=\frac{ba''''-ab''''}{b}=-22\,,\qquad d'''=\frac{cb''''-bc''''}{c}=-36\,;\qquad e'''=\frac{dc''''-cd''''}{d}=-480\,,$$
$$\dots\dots\dots\dots\,,\qquad \dots\dots\dots\dots\,,\qquad \dots\dots\dots\dots$$

ce qui donnera, en substituant,

$$x-1x^2+1.2x^3+1.2.3x^4+1.2.3.4x^5-\dots\dots=\cfrac{x}{1+\cfrac{x}{1+\cfrac{x}{1+\cfrac{2x}{1+\cfrac{2x}{1+\cfrac{3x}{1+\cfrac{3x}{1+\dots}}}}}}}\,;$$

comme Euler l'avait trouvé.

Nous nous proposons, dans un second mémoire, de revenir de nouveau sur ce sujet.