ANNALES
DE MATHÉMATIQUES
PURES ET APPLIQUÉES.

HENRI GERNER SCHMIDTEN

Analise transcendante. Mémoire sur l'intégration des équations linéaires

Annales de Mathématiques pures et appliquées, tome 11 (1820-1821), p. 269-316
<http://www.numdam.org/item?id=AMPA_1820-1821__11__269_0>

© Annales de Mathématiques pures et appliquées, 1820-1821, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Annales de Mathématiques pures et appliquées » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (http://www.numdam.org/conditions). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM
Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
http://www.numdam.org/

ANALISE TRANSCENDANTE.

Mémoire sur l'intégration des équations linéaires;

Par M. Henri Gerner Schmidten.

L'intégration d'une équation différentielle ne consiste, à proprement parler, qu'à trouver la fonction la plus générale qui satisfasse à l'équation proposée ; et des cas particuliers peuvent seuls donner naissance à des questions relatives à l'évaluation de cette fonction. Pour résoudre ce dernier problème, il faut, en effet, absolument connaître la valeur arithmétique de chacune des quantités dont se compose la fonction dont il s'agit ; et alors il faut avoir autant de méthodes d'évaluation différentes qu'il peut y avoir de relations différentes entre ces mêmes quantités.

De là naît l'impossibilité de donner des méthodes d'évaluation qui soient propres à des équations générales, ainsi que celle de parcourir l'infinie variété des équations particulières qui peuvent s'y trouver implicitement comprises ; d'où il paraît naturel de conclure que l'unique moyen d'avancer cette partie de l'analise et de surmonter les difficultés qu'elle présente, est de trouver des méthodes propres à développer la même fonction sous plusieurs formes différentes, parmi lesquelles on puisse choisir celle qui conviendra le mieux à chaque cas particulier. Ces fonctions doivent d'ailleurs être aussi simples que la nature des équations qui leur donnent naissance peut le comporter ; et les séries qu'elles forment doivent en outre offrir une loi facile à saisir. La méthode qu'offre la série de Taylor (jusqu'ici la seule générale que nous ayons) n'étant d'ailleurs applicable qu'à des cas très-particuliers ; comme il est naturel que les intégrales se compliquent, de plus en plus, à mesure que les équations sont plus générales : on se trouve fondé à considérer l'intégration des équations non linéaires comme surpassant, généralement parlant, les forces de l'analise.

Soit, en effet, y une fonction d'un certain nombre de variables indépendantes, donnée par l'*équation différentielle*

$$\varphi . y = \mathrm{f} . y \; ;$$

$\varphi . y$ étant une fonction qui contient les coefficiens différentiels ou aux différences de l'ordre le plus élevé qui soient dans l'équation proposée, et $\mathrm{f}y$ étant une autre fonction quelconque des variables indépendantes des coefficiens differentiels ou aux différences ; on aura l'*équation intégrale*

$$y = X + \frac{1}{\varphi} \mathrm{f} . y \; ;$$

$\frac{1}{\varphi}$ signifiant la fonction inverse de φ ; et X étant la fonction la plus générale qui satisfasse à l'équation $\varphi . X = 0$.

Au moyen de cette relation implicite, on trouvera facilement la valeur explicite de y, par des substitutions successives ; ce sera

$$y = X + \frac{1}{\varphi} \mathrm{f}(X + \frac{1}{\varphi} \mathrm{f}(X + \frac{1}{\varphi} \mathrm{f}(X + \ldots\ldots$$

Maintenant, il se peut que chaque substitution rapproche cette série de la véritable valeur de y ; mais il se peut aussi qu'elle l'en éloigne ; et alors on devra donner une autre forme à la série ; ce qui est toujours possible d'autant de manières differentes qu'il y en aura de partager l'équation entre les deux termes $\varphi . y$ et $\mathrm{f} . y$.

On voit cependant que la valeur de y restera ; en général, très-compliquée, à moins que $\varphi.y$ et $f.y$ ne soient linéaires par rapport à y, ce qui embrasse déjà une classe d'équation très-étendue et très-importante : celle des *équations linéaires*.

On a, dans ce cas,

$$y = X + \frac{1}{\varphi} fX + \frac{1}{\varphi} f\left(\frac{1}{\varphi} fX\right) + \frac{1}{\varphi} f\left(\frac{1}{\phi} f\left(\frac{1}{\varphi} fX\right)\right) + \ldots\ldots ;$$

et je me propose d'en exposer les principales conséquences, en commençant par la partie la plus simple, qui sert en même temps de base au reste.

§. I.

Des équations différentielles à deux variables.

Le résultat le plus général qu'on ait obtenu sur ces équations, est le théorême de Lagrange, au moyen duquel on sait ramener l'équation la plus générale à une autre qui ne renferme pas de terme indépendant de la fonction inconnue. De plus, on intègre sans difficulté, par des fonctions exponentielles ou algébriques les équations de la forme

$$\frac{d^n y}{dx^n} + a\,\frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}} + b\,\frac{d^{n-2} y}{dx^{n-2}} + \ldots + g\,\frac{dy}{dx} + hy = 0 ;$$

$$\frac{d^n y}{dx^n} + \frac{a}{x} \cdot \frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}} + \frac{b}{x^2} \cdot \frac{d^{n-2} y}{dx^{n-2}} + \ldots + \frac{g}{x^{n-1}}\,\frac{dy}{dx} + \frac{h}{x^n} = 0 ;$$

et par des intégrales définies celles de la forme

$$(a_0 + b_0 x)\,\frac{d^n y}{dx^n} + (a_1 + b_1 x)\,\frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}} + (a_2 + b_2 x)\,\frac{d^{n-2} y}{dx^{n-2}} + \ldots + (a_n + b_n x) = 0 ;$$

mais les méthodes qu'a donné Euler pour intégrer les équations, par l'introduction d'une nouvelle variable, ne s'emploient avec succès que lorsque les intégrales en sont déjà données par des séries; et l'on n'a pas de moyen direct de trouver la forme de la série qui satisfait à une équation proposée.

D'ailleurs, on voit facilement qu'en général il doit être impossible d'intégrer une équation sous forme finie, puisqu'il n'y a qu'une suite infinie qui puisse embrasser, dans sa généralité, toutes les sortes de transcendantes que l'intégrale peut comporter, et dont un petit nombre seulement a été introduit dans le langage analitique.

Si l'on savait transformer l'équation proposée en une différentielle complète, on la ramenerait ainsi à une autre d'un ordre moins élevé; et, en continuant de la même manière, on parviendrait enfin à l'expression générale de la fonction inconnue. Il s'agirait donc de mettre l'équation proposée

$$\frac{d^n y}{dx^n} + P\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}} + Q\frac{d^{n-2}y}{dx^{n-2}} + \ldots + My = N,$$

dans laquelle P, Q, ... M, N sont des fonctions de x, sous la forme

$$\frac{1}{X_n}\frac{d.}{dx}\left(\frac{X^n}{X^{n-1}}\frac{d.}{dx}\left(\ldots\frac{X_3}{X_2}\frac{d.}{dx}\left(\frac{X_2}{X_1}\frac{d.}{dx}\left(X_1 y\right)\right)\ldots\right)\right) = N;$$

X_1, X_2, X_3, ...X_n étant des fonctions de x qu'il faut déterminer en effectuant les différentiations, et comparant ensuite les coefficiens à ceux de l'équation proposée. Cette méthode conduit à un système de n équations simultanées, et toutes non linéaires, à l'exception de celle-ci

$$P = \frac{dX_1}{X_1 dx} + \frac{dX_2}{X_2 dx} + \ldots + \frac{dX_n}{X_n dx},$$

et par conséquent beaucoup plus difficiles à résoudre que l'équation proposée. Ces opérations ont quelque analogie avec celles que l'on fait, avec tout aussi peu de succès, sur les équations algébriques des degrés supérieurs, à une seule inconnue, dans le dessein de les résoudre. Cependant on est parvenu, par des considérations particulières, à présenter, sous forme finie, les racines des quatre premiers degrés de celles-ci ; mais il faut observer que cela ne s'exécute qu'au moyen de transcendantes particulières pour chaque degré, auxquelles, à raison du fréquent usage qu'on en fait, on a cru devoir affecter des symboles particuliers, qui leur donnent, du moins, quant aux notations, l'apparence de fonctions finies. Ainsi, par exemple, la racine quarrée est déjà une transcendante à l'égard de la racine de l'équation du premier degré ; de sorte que l'on ne doit chercher, par aucune analogie, à présenter l'intégrale de l'équation du second ordre sous forme finie, au moyen des fonctions exponentielles qui représentent, en général, celle du premier ordre. En effet, si l'on compare les quantités X_1, X_2 avec P, Q, dans l'équation du second ordre, on aura

$$P=\frac{dX_2}{X_2 dx}+\frac{dX_1}{X_1 dx}\,,\qquad Q=\frac{d.}{dx}\,\frac{dX_1}{X_1 dx}+\frac{dX_1}{X_1 dx}\cdot\frac{dX_2}{X_2 dx}\;;$$

en posant donc

$$\frac{dX_1}{X_1 dx}=z\,,$$

ce qui donne

$$\frac{dz}{dx}+zP-z^2=Q\,,$$

si l'on fait ensuite

$$z=-\frac{dy}{y dx}\,,$$

il viendra

$$\frac{d^2y}{dx^2}+P\frac{dy}{dx}+Qy=0\ , \quad (1)$$

c'est-à-dire l'équation proposée. En faisant, au contraire,

$$\frac{dX_2}{X_2 dx}=z\ ,$$

on aurait

$$\frac{dz}{dx}-Pz+z^2=\frac{dP}{dx}-Q\ ;$$

d'où, en posant,

$$z=\frac{dy}{y dx}\ ,$$

on conclurait

$$\frac{d^2y}{dx^2}-P\frac{dy}{dx}+\left(Q-\frac{dP}{dx}\right)y=0\ . \qquad (2)$$

Ainsi l'on fait dépendre l'équation (1) de (2) ; mais ce résultat n'est que très-particulier, et ne donne pas lieu à d'autres tranformations, attendu que le même procédé, appliqué à (2), reconduit à (1).

On pourrait encore former des équations par les quantités données X_1, X_2, X_3 ......, comme on forme des équations algébriques au moyen de leurs racines ; mais ces recherches ne conduisent qu'à des cas particuliers et peu utiles. Cependant, il nous sera facile de découvrir les cas les plus généraux ou la détermination des quantités X_1, X_2, X_3 ...., dépend seulement d'opérations algébriques. Il nous suffit pour cela de considérer l'equation du troisième ordre, pour laquelle on aura, en employant les notations de Lagrange, les relations suivantes :

$$P=\frac{X'_1}{X_1}+\frac{X'_2}{X_2}+\frac{X'_3}{X_3};$$

$$Q=\frac{1}{X_3}\left(\frac{X_3 X'_1}{X_1}\right)+\frac{1}{X_3}\left(\frac{X_3 X'_2}{X_2}\right)+\frac{1}{X_2}\left(\frac{X_2 X'_1}{X_1}\right)',$$

$$R=\frac{1}{X_3}\left(\frac{X_3}{X_2}\left(\frac{X_2}{X_1}X'_1\right)'\right)'.$$

Il faut donc, par exemple, qu'on ait

$$\frac{X'_3}{X_3}=c_3\frac{X'_1}{X_1}, \quad \text{d'où} \quad X_3=b_3 X_1^{c_3};$$

on aura de même

$$X_2=b_2 X_1^{c_2};$$

b_3, c_3, b_2, c_2, ... étant des constantes. On doit encore avoir l'équation

$$\frac{1}{X_3}\left(X_3\frac{X'_1}{X_1}\right)'=\frac{c_4}{X_2}\left(\frac{X_2 X'_1}{X_1}\right)',$$

qui revient à

$$\frac{X''_1}{X'_1}+\frac{c_4(c_2-1)-(c_3-1)}{1-c_4}\frac{X'_1}{X_1}=0;$$

c_4 étant une nouvelle constante. Posant donc

$$\frac{c_4(c_2-1)-(c_3-1)}{1-c_4}=\delta,$$

on aura

$$X_1^{\delta}X'_1=h, \quad \text{et} \quad X_1=(g+(\delta+1)x)^{\frac{1}{\delta+1}},$$

forme qui devient exponentielle, lorsque $\delta=-1$.

Cette forme est seulement deduite de la considération des deux coefficiens; mais on trouvera facilement que, pour un ordre quelconque, la relation entre les quantites X_1, X_2, X_3, ..., que nous avons établie, réduira chaque coefficient à une quantité algébrique, multipliee ou non par une puissance de la variable indépendante telle que l'exposant est toujours $-m$, celui de la différentielle correspondante étant $n-m$. La détermination des quantités inconnues dependra, en tous cas, d'une équation du degré n; et, si l'on sait résoudre celle-ci, on a l'integrale de l'équation

$$\frac{d^n y}{dx^n}+\frac{a}{x}\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}}+\frac{b}{x^2}\frac{d^{n-2}y}{dx^{n-2}}+\ldots+\frac{gy}{x^n}=X,$$

ou de celle-ci

$$\frac{d^n y}{dx^n}+a\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}}+b\frac{d^{n-2}y}{dx^{n-2}}+\ldots+gy=X,$$

comme on le sait depuis long-temps.

On voit ainsi que l'introduction des quantités X_1, X_2, X_3, ...; auxquelles, par analogie, on pourrait donner le nom de *racines*, ne facilite l'intégration que dans des cas particuliers, et qu'il faut modifier le procédé pour obtenir des résultats généraux. En observant que la determination d'un nombre m de ces quantités que nous appellerons pour un moment *racines*, conduit à une équation de l'ordre m; on pourrait partager l'équation proposée en deux parties, à chacune desquelles on donnerait la forme de différentielle parfaite, par le moyen d'équations des deux ordres m et $n-m$. En effet, soit l'équation proposée

$$\frac{d^n y}{dx_n}+P\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}}+Q\frac{d^{n-2}y}{dx^{n-2}}+\ldots+My=N,$$

on lui donnera la forme

$$\frac{1}{X_m}\frac{d.}{dx}\left(\frac{X_m}{X_{m-1}}\frac{d.}{dx}\left(\ldots\frac{d.}{dx}\left(\frac{X_2}{X_1}\frac{d.}{dx}\left(\frac{X_1 d^{n-m}y}{dx^{n-m}}\right)\right)\ldots\right)\right)$$

$$=N+\frac{1}{Z_{n-m}}\frac{d.}{dx}\left(\frac{Z_{n-m}}{Z_{n-m-1}}\frac{d.}{dx}\left(\ldots\ldots\frac{d.}{dx}\left(Z_1 y\right)\ldots\right)\right);$$

et faisant, pour abréger, le second membre $=\mathrm{f}(y)$, on aura l'intégrale générale.

$$y=a_n+a_{n-1}x+a_{n-2}x^2+\ldots\ldots+a_{m+1}x^{n-m-1}$$

$$+a_m\int^{n-m}\frac{1}{X_1}dx^{n-m}+a_{m-1}\int^{n-m}\frac{1}{X_1}\int\frac{X_1}{X_2}dx^{n-m+1}+\ldots\ldots$$

$$+a_1\int^{n-m}\frac{1}{X_1}\int\frac{X_1}{X_2}\int\ldots\int\frac{X_{m-1}}{X_m}\int X_m\mathrm{f}(y)dx^n\ ;$$

a_n, a_{n-1}, a_{n-2}, ... a_1 étant des constantes; de sorte que, si l'on représente par ω la partie indépendante de y, on aura

$$y=\omega+\int^{n-m}\frac{1}{X_1}\int\frac{X_1}{X_2}\int\ldots\int\frac{X_{m-1}}{X_m}\int X_m\mathrm{f}(\omega)dx^n$$

$$+\int^{n-m}\frac{1}{X_1}\int\frac{X_1}{X_2}\int\ldots\int X_m\mathrm{f}\left(\int^{n-m}\frac{1}{X_1}\int\frac{X_1}{X_2}\int\ldots\int X_m\mathrm{f}(\omega)\right)dx^{2n}$$

$$+\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

Comme on peut choisir m à son gré, on peut trouver un grand nombre de formes différentes, par le seul changement de cette quantité; et l'on trouverait une infinité de formes différentes, en partageant autrement l'équation proposée. Par exemple, si l'on savait la partager en deux du même ordre, dont chacune fût facilement intégrable, on lui donnerait la forme

$$\frac{1}{X_n}\frac{d.}{dx}\left(\frac{X_n}{X_{n-1}}\frac{d.}{dx}\left(\ldots\frac{d.}{dx}\left(\frac{X_2}{X_1}\frac{d.}{dx}\left(X_1 y\right)\right)\ldots\right)\right)$$

$$=N+\frac{1}{Z_n}\frac{d.}{dx}\left(\frac{Z_n}{Z_{n-1}}\frac{d.}{dx}\left(\ldots\frac{d.}{dx}\left(\frac{Z_2}{Z_1}\frac{d.}{dx}\left(Z_1 y\right)\right)\ldots\right)\right);$$

et l'on en trouverait l'intégrale complète de deux manières. Ces recherches n'ont, comme l'on voit, aucune difficulté; et c'est pour cette raison que je ne m'arrête pas à discuter les formules générales, dont l'usage s'entendra beaucoup mieux par des exemples particuliers.

Quoique l'on ait, dans ce qui précède, une méthode générale et directe pour trouver, d'une infinité de manières différentes, l'intégrale d'une équation proposée; on trouve encore de grandes difficultés relativement à l'évaluation de cette intégrale, sur-tout lorsque l'équation est d'un ordre un peu élevé.

Toutefois cette méthode embrasse sous un seul point de vue toutes celles qui ont été données jusqu'ici, et résout, d'une manière satisfaisante, un grand nombre d'équations qu'on ne saurait intégrer sans son secours, ou du moins dont on n'obtiendrait l'intégration que par des tâtonnemens plus ou moins heureux. Au surplus, après avoir présenté les intégrales sous la forme de séries, on peut tenter d'employer la méthode d'Euler, pour les ramener à des intégrales définies, mais ces recherches étant de leur nature très-particulières, ce ne saurait être ici le lieu de s'en occuper.

Je vais maintenant appliquer ces principes généraux à l'équation du premier ordre, dont la forme est

$$\frac{dy}{dx}+Py=Q,$$

d'où l'on formera celle-ci :

$$\frac{1}{X_1}\frac{d.}{dx}(X_1 y)=Q\ ;$$

en comparant; on aura

$$\frac{dX_1}{dx}=PX_1\ ;$$

dont l'intégrale est

$$X_1=a+\int PX_1 dx\ ;$$

c'est-à-dire,

$$X_1=a(1+\int Pdx+\int P\int Pdx^2+\int P\int P\int Pdx^3+\ldots\ldots\ldots)\ ;$$

a étant une constante arbitraire; et, après avoir trouvé X_1, on aura

$$y=\frac{c}{X_1}+\frac{1}{X_1}\int X_1 Q dx\ ;$$

c étant une nouvelle constante; mais l'intégrale n'en contient pourtant qu'une, attendu que a disparaît dans le second terme.

Telle est donc l'intégrale complète la plus simple de l'équation du premier ordre, et l'on voit qu'elle se présente nécessairement sous la forme d'une série infinie, à moins que l'on n'adopte quelque nouveau symbole pour représenter la valeur de X_1. On trouve, en effet,

$$X_1=a\left\{1+\frac{\int Pdx}{1}+\frac{(\int Pdx)^2}{1.2}+\frac{(\int Pdx)^3}{1.2.3}+\ldots\right\}\ ;$$

ce qui revient à

$$ae^{\int Pdx},$$

suivant le signe qu'on a adopté pour la fonction exponentielle, qui est la transcendante la plus simple qui, en général, puisse représenter l'intégrale de l'équation du premier ordre. Malgré cette forme, qu'on a employée avec beaucoup de succès, on trouve encore des difficultés très-grandes, et même insurmontables, à évaluer les intégrales de cet ordre; et si l'on observe combien ces fonctions, que l'on connaît sous le nom de *quadratures*, sont limitées vis-à-vis des intégrales des ordres supérieurs, l'on doit s'attendre à d'autant moins de succès pour l'évaluation de ces dernières formes. Aussi, je ne m'occuperai presque pas des équations supérieures au second ordre qui ne conduiraient à des résultats satisfaisans que dans des cas très-particuliers; et d'ailleurs les applications les plus importantes de l'analise ne conduisent, en général, qu'à des équations du premier ou tout au plus du second ordre.

L'intégrale générale de l'équation du second ordre doit être regardée comme une transcendante irréductible, qui ne s'abaisse aux quadratures que dans des cas très-particuliers; mais ici je me propose seulement de développer quelques-unes des formes générales les plus remarquables qu'on peut lui donner; et alors les cas où elles sont susceptibles de simplification se montrent facilement. Soit l'équation

$$\frac{d^2y}{dx^2}+P\frac{dy}{dx}+Qy=R\ ;$$

on peut lui donner la forme

$$\frac{1}{X_2}\frac{d.}{dx}\left(\frac{X_2}{X_1}\frac{d.}{dx}\left(X_1y\right)\right)=R\ .$$

Mais nous avons déjà observé que, dans ce cas, la détermination des racines X_1, X_2 mène à une équation de la forme

$$\frac{d^2y}{dx^2}-P\frac{dy}{dx}+\left(Q-\frac{dP}{dx}\right)y=0\ ;$$

ou à une autre qui est ce que devient la proposée, dans le cas de de $R=0$. Nous avons donc très-peu gagné, et par conséquent, nous mettrons de préférence l'équation sous cette forme

$$\frac{1}{X_1}\frac{d.}{dx}\left(\frac{dy}{dx}X_1\right)=R-Qy\ ,$$

qui donne

$$X_1=e^{\int P dx}\ ,$$

et ensuite

$$y=a_0+a_1\int\frac{dx}{X_1}+\int\frac{1}{X_1}\int X_1 R dx^2-\int\frac{1}{X_1}\int X_1 Q y dx^2\ ;$$

a_0 et a_1 étant des constantes arbitraires. En posant donc

$$a_0+a_1\int\frac{dx}{X_1}+\int\frac{1}{X_1}\int R X_1 dx^2=U\ ,$$

il viendra

$$y=U-\int\frac{1}{X_1}\int X_1 Q U dx^2+\int\frac{1}{X_1}\int X_1 Q\int\frac{1}{X_1}\int X_1 Q U dx^4-\ldots\ldots$$

On trouve une forme qui est quelquefois plus simple en posant l'équation

$$\frac{1}{X_1}\frac{d^2.}{dx^2}(X_1 y)+X_2 y=R\ ;$$

d'où, en comparant,

$$\frac{dX_1}{X_1 dx}=\frac{P}{2}\ ,\quad X_2+\frac{d^2X_1}{X_1 dx^2}=Q\ ;$$

ou

$$X_1=e^{\int\frac{Pdx}{2}}\ ;\qquad X_2=Q-\frac{P^2}{4}-\frac{dP}{2dx}\ .$$

En intégrant, on aura

$$X_1 y = a_0 + a_1 x + \int^2 X_1 R \mathrm{d}x^2 - \int^2 X_2 X_1 y \mathrm{d}x^2 ;$$

d'où, en posant

$$a_0 + a_1 x + \int^2 X_1 R \mathrm{d}x^2 = U ,$$

on tirera

$$y = \frac{1}{X_1} (U - \int^2 X_2 U \mathrm{d}x^2 + \int^2 X_2 \int^2 X_2 U \mathrm{d}x^4 - \int^2 X_2 \int^2 X_2 \int^2 X_2 U \mathrm{d}x^6 + \ldots)$$

Si les fonctions P, Q sont soumises à la seule condition de rendre X_2 égale à une constante c^2, on trouve facilement

$$y = \frac{1}{X_1} \left\{ \mathrm{Sin.}(\alpha x + \beta) + \mathrm{Sin.}cx \int \frac{1}{\mathrm{Sin.}^2 cx} \int \mathrm{Sin.}cx . X_1 R \mathrm{d}x^2 \right\}$$

α et β étant de nouvelles constantes arbitraires.

On pourrait encore parvenir à un grand nombre d'autres formules; mais, ces recherches n'ayant aucune difficulté, d'après ce qui précède, je ne donnerai plus qu'un seul exemple, dont l'emploi devient nécessaire dans des cas particuliers, comme je le ferai voir ensuite. En mettant l'equation proposée sous la forme

$$\frac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}x^2} + p \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} + qy = r + s \left(\frac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}x^2} + p_1 \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} + q_1 y \right) ,$$

et supposant d'ailleurs que chacun des deux membres s'intègre facilement, on fera

$$\frac{1}{X_2} \frac{\mathrm{d}.}{\mathrm{d}x} \left(\frac{X_2}{X_1} \frac{\mathrm{d}.}{\mathrm{d}x} \left(X_1 y \right) \right) = r + \frac{s}{Z_2} \frac{\mathrm{d}.}{\mathrm{d}x} \left(\frac{Z_2}{Z_1} \frac{\mathrm{d}.}{\mathrm{d}x} \left(Z_1 y \right) \right) ;$$

d'où

$$y=\frac{a_0}{X_1}+\frac{a_1}{X_1}\int\frac{X_1}{X_2}\,\mathrm{d}x+\frac{1}{X_1}\int\frac{X_1}{X_2}\int X_2 r\,\mathrm{d}x^2$$

$$+\frac{1}{X_1}\int\frac{X_1}{X_2}\int\frac{X_2 s}{Z_2}\,\frac{\mathrm{d.}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{Z_2}{Z_1}\,\frac{\mathrm{d.}}{\mathrm{d}x}\left(Z_1 y\right)\right)\mathrm{d}x^2\ ;$$

représentant ensuite par U la partie indépendante de y, on aura

$$y=U+\frac{1}{X_1}\int\frac{X_1}{X_2}\int\frac{X_2 s}{Z_2}\,\frac{\mathrm{d.}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{Z_2}{Z_1}\,\frac{\mathrm{d.}}{\mathrm{d}x}\left(Z_1 U\right)\right)\mathrm{d}x^2+\ldots\ldots$$

On verra facilement que les grandes difficultés attachées à cette méthode tiennent principalement aux signes d'intégration, lorsque les fonctions X_1, X_2, X_3, ... sont un peu générales ; mais on trouvera, en même temps, qu'il doit nécessairement y avoir de ces signes dans l'intégrale complète, qui ne saurait sans cela contenir des constantes arbitraires. Donc, s'il y avait des questions où l'on n'eût besoin que d'une intégrale particulière, on parviendrait bien plus aisément à l'expression de la fonction inconnue, en mettant l'équation sous la forme

$$y=\frac{R}{Q}-\frac{1}{QX_1}\,\frac{\mathrm{d.}}{\mathrm{d}x}\left(X_1\,\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right),$$

dans laquelle

$$X_1=e^{\int P\mathrm{d}x}\ ;$$

en employant alors les notations de Lagrange, on aurait

$$y=\frac{R}{Q}-\frac{1}{QX_1}\left(X_1\left(\frac{R}{Q}\right)'\right)'+\frac{1}{QX_1}\left(X_1\left(\frac{1}{QX_1}\left(X_1\left(\frac{R}{Q}\right)'\right)'\right)'\right)'-\ldots$$

Il serait facile aussi de présenter un grand nombre de formes pour les intégrales des équations supérieures; mais les raisons que j'ai données plus haut me les font passer sous silence; et je vais m'occuper de quelques exemples particuliers qui sont plus propres à montrer l'usage et l'esprit de la méthode.

Nous avons vu quelles sont les équations les plus générales qui s'intègrent immédiatement, sous forme finie, par des fonctions exponentielles ou par des puissances; je vais faire voir maintenant quelle est l'équation la plus générale dont l'intégrale se développe par une ou plusieurs séries de puissances ascendantes ou descendantes de la variable indépendante.

Pour cela, il faut que l'équation soit réductible à la forme

$$x^{-\alpha_n}(x^{\alpha_n-\alpha_{n-1}}(\ldots\ldots(x^{\alpha_2-\alpha_1}(x^{\alpha_1}y)')'\ldots\ldots)')'$$

$$=ax^{b}+\delta x^{\varepsilon-\beta_n}(x^{\beta_n-\beta_{n-1}}(\ldots\ldots(x^{\beta_2-\beta_1}(x^{\beta_1}y)')'\ldots)')' ;$$

d'où l'on trouvera facilement

$$y=c_n x^{-\alpha_1}+c_{n-1}x^{-\alpha_2+1}+c_{n-2}x^{-\alpha_3+2}+\ldots+c_1{}^{-\alpha_n+n-1}$$

$$+\frac{ax^{b+n}}{(b+\alpha_n+1)\ldots\ldots(b+\alpha_n+n)}$$

$$+\delta x^{-\alpha_1}\int x^{\alpha_1-\alpha_2}\int\ldots\int x^{\varepsilon+\alpha_n-\beta_n}(x^{\beta_n-\beta_{n-1}}(\ldots(x^{\beta_1}y)'\ldots)')'dx^{n} ;$$

par des substitutions successives, on aura $n+1$ séries, dont chacune, divisée par une certaine puissance, procède seulement suivant les puissances ascendantes de x^{ε}. Pour abréger, et attendu que toutes ont la même forme, je n'en développe qu'une seule, savoir:

$$c_n x^{-\alpha_1}\left\{1+\frac{\delta(\beta_n-\alpha_1-n+1)(\beta_{n-1}-\alpha_1-n+2)\ldots(\beta_1-\alpha_1)}{(\alpha_n-\alpha_1+\varepsilon-n+1)(\alpha_{n-1}-\alpha_1+\varepsilon-n+2)\ldots\varepsilon}x^{\varepsilon}\right.$$

$$+\frac{\delta^{2}(\beta_{n}+\varepsilon-\alpha_{1}-n+1)\ldots(\beta_{1}+\varepsilon-\alpha_{1})(\ldots\ldots)\ldots\ldots}{(\alpha_{n}+2\varepsilon-\alpha_{1}-n+1)\ldots 2\varepsilon(\alpha_{n}-\alpha_{1}+\varepsilon-n+1)\ldots}x^{2\varepsilon}$$

$$+\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \Big\}$$

En commençant l'intégration par rapport au second membre de l'équation, on obtiendrait $n+1$ séries semblables, qui procèderaient suivant les puissances descendantes de x^{ε}. On trouvera d'ailleurs facilement que l'équation revient à celle-ci :

$$(a_{0}+B_{0}x^{\varepsilon})\frac{d^{n}y}{dx^{n}}+\frac{A_{1}+B_{1}x^{\varepsilon}}{x}\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}}$$

$$+\frac{A_{2}+B_{2}x^{\varepsilon}}{x^{2}}\frac{d^{n-2}y}{dx^{n-2}}+\ldots+\frac{A_{n}+B_{n}x^{\varepsilon}}{x^{n}}y=ax^{b}\ ;$$

A_{0}, A_{1}, A_{2}, ... A_{n}, B_{0}, B_{1}, B_{2} ...... B_{n} étant des constantes.

Pour le cas où $n=2$, on a présenté l'intégrale de cette équation par un procédé qu'il ne serait pas difficile d'étendre à celle-ci ; mais encore, dans ce cas, la méthode directe a des avantages, comme je le ferai voir par un exemple. Soit l'équation très-simple

$$\frac{d^{2}y}{dx^{2}}+\frac{\alpha}{x}\frac{dy}{dx}+\beta x^{\gamma}y=\varepsilon x^{\delta}\ ,$$

on aura

$$y=a_{1}-\frac{a_{0}}{1-\alpha}x^{1-\alpha}+\frac{\varepsilon x^{\delta+2}}{(\delta+2)(\delta+\alpha+1)}-\beta\int x^{-\alpha}\int x^{\gamma+\alpha}y\,dx^{2}\ ;$$

d'où

$$y=a_{1}\Big\{1-\frac{\beta x^{\gamma+2}}{(\gamma+2)(\gamma+\alpha+1)}+\frac{\beta x^{2\gamma+4}}{(\gamma+2)(2\gamma+4)(\gamma+\alpha+1)(2\gamma+\alpha+3)}-\ldots\Big\}$$

$$+\frac{a_{0}x^{1-\alpha}}{1-\alpha}\Big\{1-\frac{\beta x^{\gamma+2}}{(\gamma+2)(\gamma+3-\alpha)}+\frac{\beta^{2}x^{2\gamma+4}}{(\gamma+2)(2\gamma+4)(\gamma+3-\alpha)(2\gamma+5-\alpha)}-\ldots\Big\}$$

$$+\frac{\varepsilon x^{\delta+2}}{(\delta+2)(\delta+\alpha+1)}\left\{1-\frac{\beta x^{\gamma+2}}{(\delta+\gamma+4)(\delta+\gamma+3+\alpha)}\right.$$

$$\left.+\frac{\beta^2 x^{2\gamma+4}}{(\gamma+\delta+4)(2\gamma+\delta+6)(\delta+\gamma+\alpha+3)(\delta+2\gamma+\alpha+5)}-\ldots\right\};$$

ce qu'on trouverait aussi par la méthode des coefficiens indéterminés; mais, dans le cas où $\alpha=1$, on n'y reussirait pas; car alors il s'introduit des quantités infinies dans la serie, ce qui annonce un changement de forme (*Calcul des fonctions*, leçon XVIII); il s'agit donc de savoir quelle est la forme de la valeur de y qui répond à ce cas; or, on trouve alors

$$y=a_1-a_0\text{Log.}x+\frac{\varepsilon x^{\delta+2}}{(\delta+2)^2}-\beta\int\frac{1}{x}\int x^{\gamma+1}y\,dx^2,$$

c'est-à-dire,

$$y=(a_1+a_0\text{Log}\,x)\left\{1-\frac{\beta x^{\gamma+2}}{(\gamma+2)^2}+\frac{\beta^2 x^{2\gamma+4}}{1.2^2.(\gamma+2)^4}-\frac{\beta^3 x^{3\gamma+6}}{1.2^2.3^2(\gamma+2)^6}+\ldots\right\}$$

$$-a_0\left\{\frac{A_1\beta x^{\gamma+2}}{(\gamma+2)^3}-\frac{A_2\beta^2 x^{2\gamma+4}}{2.1.2^2(\gamma+2)^6}+\frac{A_3\beta^3 x^{3\gamma+6}}{3.1.2^2.5\,(\gamma+2)^7}-\ldots\right\}$$

$$+\frac{\varepsilon x^{\delta+2}}{(\gamma+2)^2}\left\{1-\frac{\beta x^{\gamma+2}}{(\delta+\gamma+4)^2}+\frac{\beta^2 x^{2\gamma+4}}{(\delta+\gamma+4)^2(\delta+\gamma+6)^2}-\ldots\right\}.$$

A_1, A_2, ... étant des constantes qui se déterminent par l'équation

$$A_{n+1}=\frac{n+1}{n}A_n+2,$$

d'où

$$A_n=n\Sigma\frac{2}{n+1};$$

ce qui donne.

$$A_1=2\,,\quad A_2=6\,,\quad A_3=11\,;\quad A_4=\tfrac{50}{3}\,,\ldots\ldots;$$

Cette équation se recommande particulièrement à raison de l'application à la physique qu'elle peut offrir. Si, en effet, on y suppose $\gamma=0$, $\delta=0$, on obtient celle qui détermine la figure d'une large goutte de mercure abandonnée à elle-même sur un disque de verre horizontal (Voyez le *Supplément à la théorie de l'action capillaire*), et à laquelle M. Laplace satisfait par une intégrale définie, sans constante arbitraire, qui revient à la dernière des séries que nous venons de présenter. L'on voit que la difficulté consiste seulement à trouver la forme que prend l'intégrale cherchée; car, après cela, les coefficiens se déterminent aisement par la méthode des différences, comme M. Lacroix l'a présenté (*Traité des différences et des séries*, pag. 216 et suiv.).

Je n'ajouterai plus qu'un seul exemple qui suffira pour éclaircir les principes, qui n'ont d'ailleurs aucune difficulté; et l'on verra qu'en général les équations, qui ne sont pas trop compliquées, ont déjà des intégrales très-prolixes; c'est pourquoi je me bornerai seulement à faire voir les formes que celles-ci doivent avoir, et à indiquer la marche qu'il faut suivre pour déterminer les coefficiens.

Soit donc l'équation

$$\frac{d^2y}{dx^2}+\alpha\frac{dy}{dx}=(be^{\beta x}+ce^{\gamma x})y\ ;$$

on aura

$$y=a_0+a_1e^{-\alpha x}+\int e^{-\alpha x}\int e^{\alpha x}(be^{\beta x}+ce^{\gamma x})y\,dx^2\,,$$

d'où

$$y=a_0\left\{\begin{array}{l}1+\dfrac{be^{\beta x}}{\beta(\beta+\alpha)}+\dfrac{b^2e^{2\beta x}}{\beta\,2\beta(\beta+\alpha)(2\beta+\alpha)}+\ldots\ldots\ldots\ldots+b^mA_{m,0}e^{m\beta x}+\ldots\\ +\dfrac{ce^{\gamma x}}{\gamma(\gamma+\alpha)}+\left\{\dfrac{1}{\beta(\beta+\alpha)}+\dfrac{1}{\gamma(\gamma+\alpha)}\right\}\dfrac{bce^{(\beta+\gamma)x}}{(\beta+\gamma)(\beta+\gamma+\alpha)}+\ldots+b^{m-1}cA_{n,1}e^{[(m-1)\beta+\gamma]x}+\ldots\\ \qquad+\dfrac{c^2e^{2\gamma x}}{\gamma.2\gamma(\gamma+\alpha)(2\gamma+\alpha)}+\ldots\ldots\ldots\ldots+\ldots\ldots\ldots\ldots\\ \qquad\qquad+b^{m-n}c^nA_{m,n}e^{[(m-n)\beta+n\gamma]x}+\ldots\\ \qquad\qquad+\ldots\ldots\ldots\ldots\\ \qquad\qquad+c^mA_{m,m}e^{m\gamma x}+\ldots\end{array}\right\}$$

$$+a_1e^{-\alpha}\left\{\begin{array}{l}1+\dfrac{be^{\beta x}}{\beta(\beta-\alpha)}+\dfrac{b^2e^{2\beta x}}{\beta.2\beta(\beta-\alpha)(2\beta-\alpha)}+\ldots\ldots\ldots\ldots\\ +\dfrac{ce^{\gamma x}}{\gamma(\gamma-\alpha)}+\left\{\dfrac{1}{\beta(\beta-\alpha)}+\dfrac{1}{\gamma(\gamma-\alpha)}\right\}\dfrac{bce^{(\beta+\gamma)x}}{(\beta+\gamma)(\beta+\gamma-\alpha)}+\ldots\ldots\ldots\ldots\\ \qquad+\dfrac{c^2e^{2\gamma x}}{\gamma.2\gamma(\gamma-\alpha)(2\gamma-\alpha)}+\ldots\ldots\ldots\ldots\end{array}\right\};$$

où il faut remarquer que chacun des termes de la dernière série se deduit de son correspondant dans la premiere, par le simple changement du signe de α. Quant aux coefficiens $A_{m,0}$, $A_{m,1}$, ... $A_{m,m}$, ils se déterminent, en general, au moyen de l'equation

$$A_{m+1,n+1}=\frac{A_{m,n}+A_{m,n+1}}{[(m-n)\beta+(n+1)\gamma+\alpha][(m-n)\beta+(n+1)\gamma]},$$

dont l'integration entraîne déja des calculs assez longs. On pourrait maintenant tenter de ramener les series obtenues à une forme finie, par des intégrales définies ; mais ces recherches, comme je l'observerai, sont d'une nature très-particulière ; d'autant plus que la méthode d'Euler exige toujours que les constantes satisfassent à certaines conditions arithmétiques, au défaut desquelles elles ne sont pas applicables.

Il faut observer que l'intégrale précédente devient incomplète lorsque $\alpha=0$; car alors les deux series sont identiques, et l'intégrale doit par conséquent changer de forme. En effet, on trouve pour ce cas

$$y=a_0+a_1x+\int\int(be^{\beta x}+ce^{\gamma x})y\,\mathrm{d}x^2 ,$$

ce qui introduit nécessairement des puissances de la variable indépendante. Le cas de $\beta=0$ ou de $\gamma=0$ annonce aussi un changement de forme ; car alors l'équation proposée prend la forme très-simple

$$\frac{\mathrm{d}\{e^{mx}\mathrm{d}(e^{(n-m)x}y)\}}{\mathrm{d}x^2}=ce^{(\gamma+m)x}y ;$$

ce qui réduit l'intégrale à des séries à simple entrée.

Mais un autre cas donne lieu à des calculs très-compliqués ; savoir : celui de $\beta+\gamma=0$ ou $\gamma=-\beta$, pour lequel il s'introduit dans l'intégrale des puissances de la variable indépendante, dont les coefficiens ne se déterminent que par des équations aux différences finies à trois variables. En effet, pour ce cas qui se présente aussi sous la forme.

$$y=a_0+a_1e^{-\alpha x}+b\int e^{-\alpha x}\int e^{\alpha x}\mathrm{Sin.}(\varepsilon x+\delta)y\,\mathrm{d}x^2 ,$$

la première des séries que nous avons trouvées devient, abstraction faite du multiplicateur a_0,

$$1+\frac{be^{\beta x}}{\beta(\beta+\alpha)}+\frac{b^2e^{2\beta x}}{\beta.2\beta(\beta+\alpha)(2\beta+\alpha)}+\ldots\ldots+b^{2m}A_{2m,0,0}e^{2m\beta x}$$

$$+\frac{ce^{-\beta x}}{\beta(\beta+\alpha)}+\frac{2bcx}{\alpha(\beta^2-\alpha^2)}+\ldots+b^{2m-1}c(A_{2m,1,0}+A_{2m,1,1}x)e^{2(m-1)\beta x}$$

$$+\frac{c^2e^{-2\beta x}}{\beta.2\beta(\beta-\alpha)(2\beta-\alpha)}+\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$+b^mc^m(A_{2m,m,0}+A_{2m,m,1}x+\ldots+A_{2m,m,m}x^m)$$

$$+b^{m-1}c^{m+1}(A_{2m,m+1,0}+A_{2m,m+1,1}x+\ldots+A_{2m,m+1,m-1})e^{-2\beta x}$$

$$+\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$+c^{2m}A_{2m,2m,0}e^{-2m\beta x}$$

$$+b^{2m+1}A_{2m+1,0,0}e^{(2m+1)\beta x}+\ldots\ldots\ldots$$

$$+b^{2m}c(A_{2m+1,1,0}+A_{2m+1,1,1}x)e^{(2m-1)\beta x}+\ldots\ldots\ldots$$

$$+\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$+b^{m+1}c^m(A_{2m+1,m,0}+A_{2m+1,m,1}x+\ldots+A_{2m+1,m,m}x^m)e^{\beta x}+\ldots$$

$$+b^mc^{m+1}(A_{2m+1,m+1,0}+A_{2m+1,m+1,1}x+\ldots+A_{2m+1,m+1,m}x^m)e^{-\beta x}+\ldots$$

$$+\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$+bc^{2m}(A_{2m+1,2m,0}+A_{2m+1,2m,1}x)e^{(1-2m)\beta x}+\ldots\ldots\ldots$$

$$+c^{2m+1}A_{2m+1,2m+1,0}e^{-(2m+1)\beta x}+\ldots\ldots\ldots$$

On trouvera que l'équation aux différences finies, d'où dépend la détermination des coefficiens, devient assez compliquée, quoiqu'elle ne soit pas difficile à former ; et que les difficultés de son intégration, qui tiennent sans doute à la nature du problème, consistent principalement dans l'extrême longueur des calculs. C'est pourquoi je me dispense d'entrer ici dans le détail de ces opérations, qui n'offriraient d'ailleurs aucun principe ou artifice de calcul digne d'être remarqués, et qui ne pourraient conséquemment mériter de l'intérêt que par les applications.

Les principes que j'ai exposés au commencement de ce mémoire, et que je viens d'appliquer à l'intégration des équations différentielles, conduisent aussi à celle des équations aux différences finies, ainsi que je vais présentement le faire voir.

§. II.

Des équations aux différences finies à deux variables.

Les équations aux différences finies à deux variables peuvent être envisagées sous deux points de vue, dont l'un répond proprement au nom qu'on leur donne, tandis que l'autre les représente comme exprimant les relations entre des valeurs successives d'une même variable. C'est sous ce dernier point de vue que Lagrange (*Calcul des fonctions*, leçon XVIII) les a considérées comme étant d'une nature tout-à-fait différente de celle des équations différentielles. Aussi cette forme conduit-elle aux résultats les plus généraux et les plus utiles qu'on puisse obtenir. Cependant, il ne sera peut-être pas inutile d'exposer ceux qu'offre la première forme ; soit pour choisir, dans des cas particuliers, celui qui convient le mieux à l'objet qu'on a en vue, soit pour réunir sous un point de vue unique des méthodes qui, au premier aspect, pourraient sembler différentes.

Dans ce cas, on peut envisager la différence et l'intégrale finie comme des fonctions linéaires de la différentielle et de l'intégrale qui y répond ; et cette relation a donné lieu à une infinite de formes créées par l'analogie, et puis rigoureusement vérifiées par des considérations générales. Mais, comme ces recherches sortent de mon sujet, je me permets seulement d'exposer ici une liaison entre la différentielle et la différence, qui correspond parfaitement à celle qui existe entre les fonctions exponentielles et les puissances, indépendamment des expressions en séries.

En effet, si l'on observe que l'équation

$$\frac{d^n(e^{nx}y)}{dx^n}=n^n e^{nx}\left\{y+\frac{n}{1.n}\,\frac{dy}{dx}+\frac{n(n-1)}{1.2n^2}\,\frac{d^2y}{dx^2}+\ldots\right\},$$

par la supposition de $n=\infty$, se change dans celle-ci :

$$\frac{1}{n^n.e^{nx}}\cdot\frac{d^n(e^{nx}y)}{dx^n}=y+\frac{dy}{dx}+\frac{1}{1.2}\,\frac{d^2y}{dx^2}+\frac{1}{1.2.3}\,\frac{d^3y}{dx^3}+\ldots$$

qui revient à

$$\frac{1}{n^n.e^{nx}}\cdot\frac{d^n(e^{nx}y)}{dx^n}=y+\Delta y\ ,$$

on trouve que la génération de cette dernière quantité à beaucoup d'analogie avec celle de $e^x=\frac{(n+z)^n}{n^n}$, n étant $=\infty$.

Comme les intégrations aux différences finies sont, en général, beaucoup plus difficiles à effectuer que celles aux différentielles ; on verra que la méthode générale exposée au commencement de ce mémoire s'applique, avec d'autant moins de succès, aux équations qui nous occupent présentement, que la considération des valeurs successives, qui réduit l'intégration à des éliminations, offre des résultats plus simples et plus généraux. c'est pourquoi je ne traiterai que brièvement de cette espèce d'équations.

Soit donc l'équation

$\Delta^n y$

$$\Delta^n y+P\Delta^{n-1}y+Q\Delta^{n-2}y+\ldots\ldots+My=N\ ;$$

on en aurait l'intégrale complète, si l'on pouvait trouver n quantités X', X'', X''', ... $X^{(n)}$, qui satisfissent à l'équation

$$\Delta(X^{(n)}\Delta(X^{(n-1)}\Delta(\ldots\Delta(X'y)\ldots)))=X_1{}^{(n)}X_2{}^{(n-1)}\ldots X''_{n-1}X'_nN\ ;$$

X_m étant $=(1+\Delta)^m X_0$ suivant les notations adoptées. Mais on s'assurera facilement que la comparaison entre les coefficiens respectifs de $\Delta^{m-1}y$, $\Delta^{m-2}y$, ... conduiraient, en général, à des équations très compliquées, et par conséquent, qu'il faut laisser un ou plusieurs coefficiens indéterminés suivant le même procédé que nous avons employé plus haut.

L'équation du premier ordre s'intègre, en général, sans difficulté. Soit, en effet,

$$\Delta y+P_x y=Q_x\ ;$$

en faisant

$$\Delta(X'y)=X'_1Q_x\ ;$$

on aura, pour déterminer X', l'équation

$$\Delta X'=(\Delta X'+X')P_x\ , \quad \text{ou} \quad X'_1=\frac{X'}{1-P_x}\ ;$$

d'où l'on tire, en prenant les logarithmes et intégrant ;

$$X'=e^{-\Sigma \text{Log.}(1-P_x)}\ ;$$

ce qui revient à

$$X'=[1-P_{x-1}]^{x-1}\ ;$$

suivant la notation de Vaudermonde.

Maintenant, on trouve aisément

$$y=\frac{\alpha}{\overline{[1-P_{x-1}]}^{x-1}}+\frac{\Sigma.Q_x\overline{[1-P_{x-1}]}^{x-1}}{\overline{[1-P_{x-1}]}^{x-1}},$$

α étant une fonction dont la différence $=0$.

L'équation du second ordre ne s'intègre que sous la forme d'une série infinie ; et, pour les raisons que j'ai développées plus haut, je me bornerai à un seul exemple. Il faut d'ailleurs observer que cette équation s'intègre d'une manière très-élégante par les fractions continues.

Soit donc la proposée

$$\Delta^2 y+P_x\Delta y+Q_x y=R_x\,;$$

on fera

$$\frac{\Delta(X'\Delta y)}{X'_1}+Q_x y=R_x\,,$$

ce qui donnera

$$\frac{\Delta X'}{X'_1}=P_x\,,\quad\text{ou}\quad X'=\overline{[1-P_{x-1}]}^{x-1}\,;$$

et l'on aura

$$y=\beta+\Sigma\frac{\alpha}{X'}+\Sigma\frac{1}{X'}\Sigma X'_1 R_x-\Sigma\frac{1}{X'}\Sigma X'_1 Q_x y\,.$$

Faisant donc la partie indépendante de y égale à Z, on trouvera

$$y=Z-\Sigma\frac{1}{X'}\Sigma X'_1 Q_x Z+\Sigma\frac{1}{X'}\Sigma X'_1 Q_x\Sigma\frac{1}{X'}\Sigma X'_1 Q_x Z-\ldots\ldots$$

Un exemple très-simple est

$$\Delta^2 y=(a-1)\Delta y+cb^x y\,;$$

on a, pour ce cas,

$$y=\beta+\Sigma\alpha a^{x-1}+c\Sigma a^{x-1}\Sigma\frac{b^x}{a^x}\,y\,,$$

et, en supposant α et β constantes,

$$y=\beta\left\{1+\frac{cb^x}{(b-a)(b-1)}+\frac{c^2b^{2x}}{(b^2-a)(b^2-1)(b-a)(b-1)}+\ldots\right\}$$

$$+\frac{\alpha a^x-1}{a-1}\left\{1+\frac{cb^x}{a(ab-1)(b-1)}+\frac{c^2b^{2x}}{a^2(b^2a-1)(b^2-1)(ba-1)(b-1)}+\ldots\right\}.$$

Cette intégrale change de forme lorsque $b=a$, $a=1$ ou $b=1$; et, dans ce dernier cas, on s'assurera aisément qu'elle se réduit à la forme finie, comme toute équation linéaire à coefficiens constans.

Il faut encore jeter un coup-d'œil sur les équations qui renferment à la fois des differences et des différentielles par rapport à la même variable.

§. III.

Des équations aux différences mêlées à deux variables.

L'équation aux différences mêlées de l'ordre n renfermant en général $(n+1)^2+1$ termes, je ne considère ici que celle du premier ordre, dont l'intégration comporte encore de grandes difficultés. Il est d'ailleurs facile de s'assurer que l'intégration d'une équation quelconque, à coefficiens constans, dépend seulement d'opérations algébriques.

Soit donc l'équation du premier ordre

$$\Delta\frac{dy}{dx}+P_x\Delta y+Q_x\frac{dy}{dx}+R_xy=S_x\ ;$$

il faut tâcher de la rendre en différences ou en différentielles complètes ; mais on verra qu'en général cela est impossible ; car la forme la plus générale qu'on puisse lui donner est

$$\Delta\left(M_x\frac{d(N_xy)}{dx}\right),$$

par laquelle on ne saurait satisfaire à trois conditions. En effet ; en comparant, on trouve

$$\frac{dN_{x+1}}{N_{x+1}dx}=P_1\;;\qquad \frac{\Delta(M_xN_x)}{M_{x+1}N_{x+1}}=Q_x\;\frac{\Delta\left(M_x\frac{dN_x}{dx}\right)}{M_{x+1}N_{x+1}}=R_x\,.$$

On tire des deux premières

$$N_{x+1}=e^{\int P dx},\quad M_xN_x=\frac{1}{[1-Q_{x-1}]^{x-1}},$$

et, pour satisfaire à la dernière relation, il faut mettre l'équation sous la forme

$$\Delta\left\{M_x\frac{d(N_xy)}{dx}\right\}=M_{x+1}N_{x+1}\{P_x+(Q_x-1)P_{x-1}-R_x\}y\,,$$

d'où on tire, en représentant par T_x le coefficient de y dans le second membre,

$$y=\frac{c}{N_x}+\frac{1}{N_x}\int\frac{\alpha dx}{M_x}+\frac{1}{N_x}\int\frac{dx}{M_x}\Sigma M_{x+1}N_{x+1}S_x+\frac{1}{N_x}\int\frac{dx}{M_x}\Sigma T_xy\,;$$

c étant une constante, et α une fonction telle que $\Delta\alpha=0$. Si ensuite on représente par Z la partie indépendante de y, on aura, en sous-entendant les indices,

$$y=Z+\frac{1}{N}\int\frac{1}{M}\Sigma TZdx+\frac{1}{N}\int\frac{1}{M}\Sigma\frac{T}{N}\int\frac{1}{M}\Sigma TZdx^2+\ldots\ldots$$

On trouve facilement une seconde forme générale, en mettant l'équation proposée sous la forme d'une différentielle complète ; mais, dans tous les cas, la succession alternative des signes $\int$ et Σ soumet ces formules générales à des difficultés qui font ressortir les avantages des travaux de MM. Biot et Poisson sur le même sujet.

Après avoir développé les principales conséquences des principes généraux, relativement aux équations à deux variables, il me reste maintenant à traiter des équations aux différences partielles.

§. IV.

Des équations linéaires aux différences partielles.

Parmi le petit nombre des résultats généraux auxquels on est parvenu, relativement à l'intégration des équations linéaires, il faut principalement remarquer celui qui ramène l'intégration d'une équation quelconque à ne dépendre que de celle d'une équation qui ne contient pas de terme indépendant de la fonction inconnue. Cependant, on ne sait que rarement intégrer immédiatement, sous forme finie, une équation à plusieurs variables, pas même dans les cas analogues à ceux où l'on intègre les équations à deux variables, par des fonctions connues, comme, par exemple, lorsque les coefficiens sont constans. L'introduction de nouvelles variables conduit quelquefois à des résultats satisfaisans, qui sont pourtant très-particuliers, et exigent le plus souvent que l'intégrale soit donnée en série infinie, seule forme à laquelle toute intégrale soit réductible. On sait que la série de Taylor donne le moyen d'intégrer les équations, soit à deux, soit à plusieurs variables; mais nous avons vu qu'en général elle est inapplicable à celles-là, et à plus forte raison à celles-ci. C'est pourquoi on a formé des séries qui procèdent suivant des différentielles ascendantes, forme beaucoup plus avantageuse et toujours possible, à l'exception de quelques cas particuliers, analogues à ceux où la série de Taylor se trouve en défaut; mais, quelque élégans que soient les résultats obtenus par cette méthode, on peut se demander si elle conduit toujours aux formes les plus simples des intégrales, qui se développent, comme on sait, d'une infinité de manières différentes. Il est donc important d'avoir une méthode générale et directe pour cet objet, et c'est une telle méthode que je me propose d'exposer suivant les principes établis au commencement de ce mémoire ; mais il faut commencer par la discussion du cas où l'équation s'intègre immédiatement sous forme finie, ou du moins par celui où son intégrale se ramène à celle d'une équation du premier ordre ; et l'on verra ainsi pourquoi on ne peut obtenir cet avantage que dans des cas particuliers.

Supposons, pour abréger, qu'une équation de l'ordre m, à n variables indépendantes, contienne les variables indépendantes dans tous ses termes ; elle renfermera, en général, un nombre de coefficiens exprimé par

$$\frac{m+1}{1}\cdot\frac{m+2}{2}\cdot\frac{m+3}{3}\cdots\cdots\frac{m+n}{n}-1\ ;$$

et il s'agira de lui donner telle forme que l'on parvienne à l'intégrale complète par l'intégration de m équations du premier ordre ; mais chacune de ces équations ne renfermant, en général, que n coefficiens, il n'est pas possible d'introduire, de cette manière, plus de mn quantités indéterminées dans l'équation proposée ; et, à moins qu'on n'ait

$$mn > \frac{m+1}{1}\cdot\frac{m+2}{2}\cdot\frac{m+3}{3}\cdots\cdots\frac{m+n}{n}-2,$$

il devient impossible d'y satisfaire, en général. En effet, si l'on fait, pour abréger,

$$\frac{dz}{dx}+P_{m,1}\frac{dz}{dy}+P_{m,2}\frac{dz}{dt}+\ldots+P_{m,n}z=\mathrm{D}[P_{m,n},z]\ ,$$

$P_{m,1}$, $P_{m,2}$, ... $P_{m,n}$ étant des fonctions quelconques des variables indépendantes ; on formera l'équation

$$\mathrm{D}[P_{m,n},\mathrm{D}[P_{m-1,n},\mathrm{D}[\ldots\mathrm{D}[P_{1,n},z]\ldots]]]=0\ ,$$

qui renferme mn quantités indéterminées. Dans tous les cas particuliers où elles satisfont aux coefficiens de l'équation proposée, on sait ramener celle-ci à des équations du premier ordre. Il est d'ailleurs facile de voir qu'un terme indépendant de z ne changerait en rien ce procédé. Mais l'équation à deux variables est la seule qu'on puisse toujours mettre sous cette forme, quoique la détermination des quantités $P_{m,1}$, $P_{m-1,1}$, ... mène, en général à des équations plus difficiles à traiter que la proposée elle-même, ainsi que nous l'avons déjà vu; mais l'équation générale du second ordre a déjà $\frac{n}{1}\cdot\frac{n-1}{2}$ conditions de trop; et plus les ordres sont élevés, et plus aussi le nombre des conditions surpasse celui des quantités à déterminer. Pour satisfaire à toutes les conditions, on introduit souvent avec succès de nouvelles variables, par rapport auxquelles on obtient alors des intégrales définies on indéfinies; mais, le plus souvent, ces recherches conduisent à des équations plus difficiles que celles qu'on s'était d'abord proposées. Il faut d'ailleurs observer que, pour le cas des coefficiens constans, les quantités $P_{m,1}$, $P_{m-1,1}$, ... prennent les mêmes propriétés que de simples facteurs, comme l'a fait voir M. Brisson.

Maintenant, après avoir observé combien sont particuliers les cas où une équation s'intègre immédiatement sous forme finie, je vais reprendre le principe général, pour exposer les principales modifications qu'il doit subir pour devenir applicable aux équations partielles, et, en particulier, à celles qui ne renferment que deux variables indépendantes. Il s'agit seulement de partager l'équation de la manière la plus avantageuse, et pour cela, ce qui paraît le plus simple est de déterminer autant de coefficiens que possible, par des équations du premier ordre, comme nous venons de l'exposer, et puis de transporter les termes indéterminés de l'autre côté, ce qui donne à l'équation proposée la forme

$$\mathrm{D}[P_{m,n}, \mathrm{D}[P_{m-1,n}, \mathrm{D}[\ldots\mathrm{D}[P_{1,n}, z]\ldots]]] = fz\,,$$

fz étant une fonction quelconque linéaire de z, et le premier membre étant du premier ordre par rapport à

$$\mathrm{D}[P_{m-1,n}, \mathrm{D}[\ldots\mathrm{D}[P_{1,n}, z]\ldots]] .$$

On trouve facilement celle-ci, en fonction de fz, avec une fonction arbitraire de $n-1$ variables; et, en continuant ainsi, on parvient à la valeur de z en fonction de fz, avec m fonctions arbitraires. Soit alors

$$z=N+\varphi(z) ,$$

on trouvera

$$z=N+\varphi(N)+\varphi^2(N)+\ldots\ldots$$

Il est facile de voir que les quantités $P_{m,n}$, $P_{m-1,n}$, ... se déterminent d'une infinité de manières différentes, et, par conséquent, donnent lieu à autant de formes différentes; mais il est impossible de donner des règles générales pour le partage de l'équation, et chaque cas particulier indique, sans difficulté, le parti le plus avantageux que l'on puisse tirer du principe général. Cependant, il existe, dans tous les ordres, une classe d'équations qui donne lieu à des considérations trop étendues pour ne pas les exposer ici.

Soit donc l'équation

$$\mathrm{f}z=\varphi z ;$$

fz et φz étant des fonctions quelconques linéaires de z, telles seulement que les coefficiens différentiels et les variables indépendantes qui sont contenues dans la première ne doivent pas se trouver dans la seconde. Alors on trouvera facilement qu'il est toujours possible de satisfaire à l'équation par une série de la forme

$$A_1B_1+A_2B_2+A_3B_3+\ldots\ldots\ldots$$

A_1;

A_1, A_2, A_3, ... étant seulement fonctions des variables indépendantes renfermées dans fz, et B_1, B_2, B_3, ... des fonctions des variables indépendantes renfermées dans φz; mais on voit, en même temps, que cette forme ne peut être générale que lorsque fz ou φz ne contient qu'une seule variable indépendante; car l'intégrale générale doit contenir des fonctions arbitraires de toutes les variables indépendantes moins une, ce qui n'est possible ici que dans le cas que nous avons indiqué. C'est pourquoi je suppose que fz ne contient qu'une seule variable independante, et alors l'intégrale peut être générale, comme on s'en assurera facilement par le principe des substitutions successives; mais aussi je ferai voir qu'on peut satisfaire à l'équation proposée de beaucoup d'autres manières. En effet, pour déterminer les quantités A_1, A_2, A_3, ... B_1, B_2, B_3, ..., on n'a que la condition

$$A_1\varphi B_1+A_2\varphi B_2+\ldots+A_m\varphi B_m+\ldots=B_1 fA_1+B_2 fA_2+\ldots+B_m fA_m+\ldots$$

Or, pour avoir l'intégrale complète, il faut avoir m fonctions arbitraires, m étant l'ordre de l'équation proposée; il faut donc absolument qu'un nombre m des quantités B_1, B_2, ... soient indéterminées, A_1, A_2, ... étant seulement fonctions d'une variable, ce qui est impossible, à moins qu'on n'ait

$$fA_1=0\ ,\ fA_2=0\ ,\ldots\ldots\ldots\ldots fA_m=0\ ;$$

conditions qui introduisent m constantes arbitraires, assujetties seulement à ne pas rendre égales entre elles deux des quantités A_1, A_2, ... Il s'agit donc seulement de satisfaire aux équations

$$A_1\varphi B_1=B_{m+1} fA_{m+1}\ ,\quad A_2\varphi B_2=B_{m+2} fA_{m+2}\ ,\ldots\ldots$$

ce à quoi on parvient facilement en supposant

$$B_{m+1}=\varphi B_1\ ,\quad B_{m+2}=\varphi B_2\ ,\quad B_{m+3}=\varphi B_3\ ,\ldots\ldots$$

et $$\mathrm{f}A_{m+1}=A_1\ ,\quad \mathrm{f}A_{m+2}=A_2\ ,\quad \mathrm{f}A_{m+3}=A_3\ ,\ \ldots\ldots$$

les relations entre A_1, A_2, A_3, ... étant des équations ordinaires de l'ordre m, pour lesquelles il s'agit seulement d'avoir une intégrale particulière ; désignant donc par $\frac{1}{\mathrm{f}}$ la fonction inverse de f, on aura ainsi

$$A_{m+1}=\frac{1}{\mathrm{f}}A_1\ ,$$

et l'intégrale complète

$$\begin{aligned}z=&A_1B_1+A_2B_2+\ldots\ldots\ldots+A_mB_m\\ &+\varphi B_1\,.\,\frac{1}{\mathrm{f}}A_1+\varphi B_2\,.\,\frac{1}{\mathrm{f}}A_2+\ldots\ldots+\varphi B_m\,.\,\frac{1}{\mathrm{f}}A_m\\ &+\varphi^2B_1\,.\,\frac{1}{\mathrm{f}^2}A_1+\varphi^2B_2\,.\,\frac{1}{\mathrm{f}}A_2+\ldots\ldots\ldots\\ &+\varphi^3B_1\,.\,\frac{1}{\mathrm{f}^3}A_1+\ldots\ldots\\ &+\ldots\ldots\ldots\ldots\end{aligned}$$

φ^2 et $\frac{1}{\mathrm{f}^2}$ étant la même chose que $\varphi\varphi$ et $\frac{1}{\mathrm{f}}\,\frac{1}{\mathrm{f}}$, et ainsi des autres.

Par le théorème de Parseval, on peut encore ramener chacune des séries

$$A_1B_1+\varphi B_1\,.\,\frac{1}{\mathrm{f}}A_1+\varphi^2B_1\,.\,\frac{1}{\mathrm{f}^2}B_1+\ldots\ldots,$$

$$A_2B_2+\varphi B_2\,.\,\frac{1}{\mathrm{f}}A_2+\varphi^2B_2\,.\,\frac{1}{\mathrm{f}^2}B_2+\ldots\ldots,$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

à ne dépendre que de celles-ci :

$$A_1+\frac{1}{\mathrm{f}}A_1+\frac{1}{\mathrm{f}^2}A_1+\ldots\ldots,$$

$$B_1+\varphi B_1+\varphi^2 B_1+\ldots\ldots\ldots,$$

dont la dernière conduit à une équation à $n-1$ variables indépendantes, la proposée en renfermant n; mais les imaginaires que cette méthode introduit la rendent peu susceptible d'application.

On peut encore satisfaire à la forme

$$A_1B_1+A_2B_2+A_3B_3+\ldots\ldots\ldots$$

de beaucoup d'autres manières; ainsi, si l'on ne veut pas de fonctions arbitraires, la manière la plus simple de satisfaire à l'equation

$$B_1\mathrm{f}A_1+B_2\mathrm{f}A_2+\ldots\ldots=A_1\varphi B_1+A_2\varphi B_2+\ldots\ldots$$

sera de faire

$$B_1\mathrm{f}A_1=A_1\varphi B_1\ ,\qquad B_2\mathrm{f}A_2=A_2\varphi B_2\ ,\ldots\ldots$$

or, ces équations étant toutes semblables, il suffira de considérer celle-ci:

$$B_r\mathrm{f}A_r=A_r\varphi B_r\ ,$$

à laquelle on satisfera de la manière la plus générale, en posant

$$B_r=c_r\varphi B_r\ ,\qquad \mathrm{f}A_r=\frac{1}{c_r}A_r\ ,$$

c_r étant une constante arbitraire; et l'on trouvera, en intégrant ces équations,

$$B_r=\Gamma(c_r)\ ,\qquad A_r=\Pi(c_r)\ .$$

Soient donc c_1, c_2, ... des constantes arbitraires, et C_1, C_2, ... des fonctions quelconques de celles-ci; on peut faire

$$z=C_1\Gamma(c_1).\Pi(c_1)+C_2\Gamma(c_2).\Pi(c_2)+\ldots\ldots;$$

ou, si l'on veut,

$$z=SC\Gamma(c).\Pi(c) \quad \text{ou} \quad \int\Gamma(c).\Pi(c)\varphi(c)\mathrm{d}c,$$

$\varphi(c)$ étant une fonction arbitraire de c.

Il est sans doute superflu de faire voir la variété infinie qu'on pourrait donner aux intégrales de l'équation proposée, en laissant indéterminées deux ou un plus grand nombre de quantités A_1, B_1, ..., et en comparant de différentes manières les autres termes de la série.

Il faut encore observer qu'il n'est pas nécessaire que les fonctions $\mathrm{f}z$ et φz contiennent seulement des différentielles pour que les méthodes précédentes soient applicables; elles le sont encore, lorsque ces fonctions contiennent des différentielles négatives, c'est-à-dire, des intégrales; mais ce cas donne lieu à des observations qui ne s'exposent pas d'une manière assez claire lorsqu'on demeure dans les généralités, ainsi que je le fais ici; et, comme elles se présentent d'ailleurs d'elles-mêmes assez facilement, je n'en parlerai qu'en traitant, en particulier, des équations à trois variables; et alors je ferai voir l'usage des facteurs pour ramener une équation à cette forme, lorsque cela est possible. Je parlerai aussi, plus bas, du cas où les coefficiens sont des fonctions quelconques de la somme des variables indépendantes. Je ne ferai ici qu'une seule observation sur l'équation à coefficiens constans. Elle consiste en ce que si l'on pose l'équation

$$\mathrm{f}z=M,$$

$\mathrm{f}z$ étant une fonction linéaire quelconque de z, à coefficiens constans, et M une fonction quelconque des variables indépendantes; en représentant par N la fonction la plus générale qui satisfasse à l'équation

$$\mathrm{f}N=0\ ;$$

on aura, par les principes qui ont été suffisamment développés par M. Servois,

$$z=N+\frac{1}{\mathrm{f}}M\ ,$$

, qui a la forme d'un polynome, pourra être développée par toutes les méthodes connues pour le développement des fonctions purement algébriques; et l'on parviendra ainsi directement, d'après ces principes, à tous les résultats de M. Français.

Je vais présentement m'occuper de l'équation à deux variables indépendantes, et, en particulier, de celle du second ordre, afin d'éclaircir mieux les considérations générales que je viens d'exposer. En général, toutes les équations du premier ordre se ramènent à des équations ordinaires, et il serait ainsi inutile d'y appliquer immédiatement le principe des substitutions successives, quoiqu'il devienne nécessaire pour intégrer celle-ci.

Soit donc l'équation

$$\frac{\mathrm{d}^2z}{\mathrm{d}x^2}+\alpha\frac{\mathrm{d}^2z}{\mathrm{d}x\mathrm{d}y}+\beta\frac{\mathrm{d}^2z}{\mathrm{d}y^2}+\gamma\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}y}+\delta\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x}+\varepsilon z=\theta\ ,$$

α, β, γ, δ, ε, θ étant des fonctions quelconques de x et y; il s'agit de lui donner la forme

$$\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}+P\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}y}+Qu=\theta\ ,$$

en supposant

$$v=\frac{dz}{dx}+P_1\frac{dz}{dy}+Q_1 z\;.$$

Pour cela, on trouvera les conditions

$$\alpha=P+P_1\;,\quad \beta=PP_1\;,\quad \gamma=\frac{dP_1}{dx}+P\frac{dP_1}{dy}+PQ_1+P_1Q\;,$$

$$\delta=Q+Q_1\;,\quad \varepsilon=\frac{dQ_1}{dx}+P\frac{dQ_1}{dy}+QQ_1\;.$$

Or, comme, en général, il est impossible de satisfaire à toutes ces conditions, il est nécessaire de mettre l'équation sous une autre forme.

Faisons, par exemple,

$$\frac{d^2z}{dx^2}+\alpha\frac{d^2z}{dxdy}+\beta\frac{d^2z}{dy^2}+\gamma\frac{dz}{dy}+\delta\frac{dz}{dx}+\varepsilon z=\theta+\eta z\;;$$

on pourra toujours déterminer η, de manière que toutes ces conditions soient remplies. Après avoir intégré les deux équations du premier ordre, on aura un résultat

$$z=U+\mathrm{f}z\;,$$

U renfermant deux fonctions arbitraires, et $\mathrm{f}z$ étant une fonction linéaire qui contient des signes d'intégration par rapport à x et y; on aura, en conséquence,

$$z=U+\mathrm{f}U+\mathrm{f}^2U+\mathrm{f}^3U+\ldots\;;$$

mais on tombe souvent sur des difficultés insurmontables, sur tout lorsque l'intégration des équations du premier ordre conduit à des équations non linéaires; c'est pourquoi je considère encore l'équation générale du second ordre sous un autre point de vue. Par la methode que M. Laplace a indiquée, on sait ramener toute equation du second ordre à l'une des formes suivantes :

$$\frac{d^2z}{dx\,dy}+p\frac{dz}{dx}+q\frac{dz}{dy}+rz=s\,, \qquad \text{(A)}$$

$$\frac{d^2z}{dx^2}+p\frac{dz}{dx}+q\frac{dz}{dy}+rz=s\,; \qquad \text{(B)}$$

où p, q, r, s sont des fonctions quelconques de x et y qui se deduisent des variables independantes de l'equation proposee par l'intégration de deux équations du premier ordre.

Je commence par la premiere ; et, en faisant

$$e^{\int p\,dy}=n\,,\ e^{\int q\,dy}=mn\,,\ pq+\frac{dp}{dx}-r=v\,,$$

je lui donne la forme

$$\frac{d\left\{m\,\frac{d(nz)}{dy}\right\}}{dx}=mns+mnvz.$$

On voit que cette équation s'intègre immédiatement sous forme finie lorsque $v=0$. En supposant respectivement ψ et φ fonctions arbitraires de x et y, et faisant

$$\frac{\psi}{n}+\frac{1}{n}\int\frac{\varphi}{m}\,dy+\frac{1}{m}\int\frac{1}{m}{}^{x}\!\!\int mns\,dy\,dx=T\,,$$

on trouvera

$$z=T+\frac{1}{n}{}^{y}\!\!\int\frac{1}{m}{}^{x}\!\!\int mnvz\,dy\,dx\,,$$

c'est-à-dire,

$$z = T + \frac{1}{n}\int^{y}\frac{1}{m}\int^{x} mn\nu T\,dy\,dx$$

$$+\frac{1}{n}\int^{y}\frac{1}{m}\int^{x} m\nu\int^{y}\frac{1}{m}\int^{x} mn\nu T\,dy^2\,dx^2 + \ldots \qquad (1)$$

Il est facile de trouver, pour cette intégrale, une infinité d'autres formes plus ou moins simples ; mais je n'en présenterai qu'une seule, qui est quelquefois préférable à celle-ci.

En faisant

$$m = e^{-\int p\,dy}\ , \quad n = e^{\int \frac{r}{q}\,dy}\ , \quad U = \psi + \int m\varphi\,dx + \int^{x} m\int^{y}\frac{s}{m}\,dx\,dy\ ,$$

ψ et φ étant des fonctions arbitraires de y et de x respectivement, on aura

$$\frac{m\,d\left(\frac{1}{m}\frac{dz}{dx}\right)}{dy} = s - \frac{q}{n}\ \frac{d(nz)}{dy}\ ,$$

d'où

$$z = U - \int^{x} m\int^{y}\frac{q}{mn}\ \frac{d(nU)}{dy}\,dx\,dy + \ldots . \qquad (2)$$

La forme la plus simple qui intègre l'équation (B) s'obtient de la manière suivante : faisant

$$n = e^{-\int p\,dx}\ , \quad m = e^{\int \frac{r}{p}\,dy}\ , \quad U = \frac{\varphi}{m} + \frac{1}{m}\int sm\,dy\ ,$$

φ étant fonction arbitraire de x on aura

$$\frac{1}{m}\ \frac{d\,mz}{dy} = s - n\frac{d.\ \frac{1}{n}\ \frac{dz}{dx}}{dx}\ ,$$

d'où

$z = U$

$$z = U - \frac{1}{m}\int \frac{mn}{q}\left(\frac{1}{n}U'\right)' \mathrm{d}y$$

$$+\frac{1}{m}\int \frac{mn}{q}\left(\frac{1}{n}\left(\frac{1}{m}\int \frac{mn}{q}\left(\frac{1}{n}U'\right)'\right)'\right)' \mathrm{d}y^2 - \ldots\ldots$$

les dérivations se rapportant à x. Cette forme, quoiqu'elle contienne seulement une fonction arbitraire n'en est pas moins générale, comme l'on sait; et il était facile de trouver une autre forme qui en contînt deux. Pour cela, il fallait commencer l'intégration par rapport à x.

Maintenant, après avoir présenté des formes générales, pour l'intégration des équations à trois variables, il peut être intéressant de discuter les cas les plus étendus qui soient susceptibles de simplification. Les méthodes dont on se sert pour cet effet consistent à introduire de nouvelles variables, par rapport auxquelles on obtient des intégrales, définies ou indéfinies; et les plus générales sont celle de Parceval et celle qui conduit à l'intégrale complète par une somme indéfinie d'intégrales particulières. Cependant, ces méthodes en laissent toujours à désirer d'autres, dans le cas où il est possible d'en avoir; aussi connaît-on, pour certains cas particuliers, plusieurs autres méthodes fort élégantes.

Prenons l'équation

$$\frac{\mathrm{d}^2 z}{\mathrm{d}x\mathrm{d}y} + p\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x} + q\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}y} + rz = 0 ;$$

p, q, r étant des fonctions quelconques de $x+y$; alors on trouvera facilement, pour la forme (1), et en observant qu'en général

$$\int M e^{ty}\mathrm{d}y = e^{-tx}\int M e^{t(x+y)}\mathrm{d}y ,$$

qu'une valeur $z = ue^{tx}$ satisfait à l'équation proposée, de même que

$z=\varpi e^{ty}$; u et ϖ étant des fonctions indéterminées de $x+y$. Faisant, pour abréger, $x+y=\nu$, et observant que

$$\frac{du}{dx}=\frac{du}{dy}=\frac{du}{d\nu}\ ; \qquad \frac{d\varpi}{dx}=\frac{d\varpi}{dy}=\frac{d\varpi}{d\nu}\ ,$$

on aura, pour déterminer u et ϖ, les équations à deux variables

$$\frac{d^2u}{d\nu^2}+(t+p+q)\frac{du}{d\nu}+(tp+r)u=0\ ,$$

$$\frac{d^2\varpi}{d\nu^2}+(t+p+q)\frac{d\varpi}{d\nu}+(tq+r)\varpi=0\ :$$

En faisant

$$u=F(\nu\,,t)\ ,\qquad \varpi=f(\nu\,,t)\ ,$$

et représentant par T, T_1 des fonctions arbitraires de t, on aura

$$z=\int e^{tx}TF(\nu\,,t)dt+\int e^{ty}T_1f(\nu\,,t)dt\ .$$

Si la quantité s, de la forme générale, était une fonction quelconque de ν, on trouverait aisément que la série qui la renferme se ramenerait à l'intégrale de l'équation

$$\frac{d^2z}{d\nu^2}+(p+q)\frac{dz}{d\nu}+rz=s\ ;$$

sans constantes arbitraires. Il faut observer que ces principes s'appliquent à une équation d'un ordre quelconque, entre un nombre quelconque de variables.

Soit l'équation

$$\frac{d^2z}{dxdy}=\nu\frac{dz}{dx}+\xi\omega\frac{dz}{dy}+\xi\varpi z\ , \qquad (b)$$

υ, ω, ϖ étant des fonctions quelconques de y, et ξ une fonction quelconque de x. Quoiqu'elle n'ait pas la forme $fz = \varphi z$, que nous avons traitée plus haut, il est facile de la lui donner par des facteurs. En effet, on a, par la formule (2),

$$\frac{dz}{\xi dx} = m\int \frac{\omega}{mn}\frac{d(nz)}{dy}dy ,$$

m et n étant des fonctions de y; et, par l'introduction des fonctions arbitraires et par les substitutions successives, on en trouve facilement l'intégrale complète

$$z = \psi + \int \xi dx . m\int \frac{\omega}{mn}\frac{d(ny)}{dy}dy + \int \xi \int \xi dx^2 . m\int \frac{\omega}{mn}\frac{d.}{dy}\left(mu\int \frac{\omega}{mn}\frac{d.}{dy}(n\psi)dy^2\right.$$

$$+ m\int \varphi dx + \int \xi \int \varphi dx^2 . m\int \frac{\omega}{mn}d(mn) + \ldots\ldots$$

séries qui se ramènent à la forme finie, par le théorème de Parseval et l'intégration des deux équations du premier ordre à deux variables.

On peut encore intégrer l'équation proposée par une infinité d'intégrales particulières, comme nous l'avons dit plus haut. En effet, si l'on fait

$$z = XY , \quad \text{on aura} \quad Y\frac{dX}{\xi dx} = Xm\int \frac{\omega}{mn} . d(nY) ,$$

d'où

$$cXdx = \frac{dX}{\xi} \; ; \quad cd\left(\frac{Y}{m}\right) = \frac{\omega}{mn}d(nY) \; ;$$

de là on conclura facilement, en substituant les valeurs de m et n,

$$X = e^{c\int \xi dx} , \quad Y = e^{\int \frac{c\upsilon + \varpi}{c - \omega}dy} , \quad z = \int e^{c\int \xi dx + \int \frac{c\upsilon + \varpi}{c - \omega}dy}\varphi(c)dc .$$

On ne peut, que dans un cas particulier, savoir, lorsque $\alpha = 1$; appliquer à (b) la méthode par laquelle nous avons réduit (a) à une equation du second ordre à deux variables.

Pour donner un exemple de l'intégration par d'autres méthodes, il faut nécessairement choisir une équation moins générale. Je vais employer les principes donnés par Euler, pour intégrer les équations à deux variables et par lesquels on peut aussi intégrer quelques équations partielles, sans les réduire auparavant à des équations ordinaires du second ordre. Soit donc l'equation

$$\frac{\mathrm{d}z^2}{\mathrm{d}y\mathrm{d}x} = \frac{\alpha}{y}\,\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x} + \xi y^{\beta}\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}y} + \gamma\xi y^{\beta-1} z = 0\ ;$$

α, β, γ étant des constantes, et ξ une fonction de x. Alors on a

$$z = \psi + \int \xi \mathrm{d}x . y^{\alpha} \int y^{\beta-\alpha-\gamma} (y^{\gamma}\psi)' \mathrm{d}y$$

$$+ \int \xi \int \xi \mathrm{d}x^2 . y^{\alpha} \int y^{\beta-\alpha-\gamma}\, y^{\alpha+\gamma} \int y^{\beta-\alpha-\gamma} (y^{\gamma}\psi)')' \mathrm{d}y^2$$

$$+ y^{\alpha}\varphi + \frac{\alpha+\gamma}{\beta} y^{\alpha+\beta} \int \xi\varphi \mathrm{d}x + \frac{(\alpha+\gamma)(\alpha+\gamma+\beta)}{1.2.\beta^2} y^{\alpha+2\beta} \int \xi \int \xi\varphi \mathrm{d}x^2 + \ldots.$$

Maintenant il faut observer qu'entre les limites 0 et 1, on a

$$\int (1-t^n)^{\frac{p-n}{n}} t^{\gamma+(i+1)n-1} \mathrm{d}t = \frac{\gamma(\gamma+n)\ldots\ldots(\gamma+in)}{(\gamma+p)(\gamma+p+n)\ldots.(\gamma+p+in)} \int (1-t^n)^{\frac{p-n}{n}} t^{\gamma-1} \mathrm{d}t$$

en supposant que les constantes sont telles que l'intégrale ne devienne pas infinie entre ces limites, et que les mêmes conditions sont remplies dans le présent problème. En faisant

$$u = \varphi + t^{\beta} y^{\beta} \int \xi\varphi \mathrm{d}x + t^{2\beta} y^{2\beta} \int \xi \int \xi\varphi \mathrm{d}x^2 + \ldots.. ,$$

on aura, entre ces limites,

$$G \int (1-u^{\beta})^{-\frac{\alpha+\gamma}{\beta}} t^{\alpha+\gamma-1} u \mathrm{d}t = \varphi + \frac{\alpha+\gamma}{\beta} y^{\beta} \int \xi\varphi \mathrm{d}x$$

$$+ \frac{(\alpha+\gamma)(\alpha+\gamma+\beta)}{1.2.\beta^2} y^{2\beta} \int \xi \int \xi\varphi \mathrm{d}x^2 + \ldots.$$

en supposant

$$G=\frac{1}{\int(1-t^\beta)^{-\frac{\alpha+\gamma}{\beta}}t^{\alpha+\gamma-1}\,\mathrm{d}t}\ ,\quad u=e^{t^\beta y^\beta\int\xi\mathrm{d}x}\int e^{-t^\beta y^\beta\int\xi\mathrm{d}x}\varphi'\mathrm{d}x\ ,$$

où φ' est la fonction dérivée de φ. pour trouver la valeur de la première serie, on fera

$$\psi=\Sigma.A_m y^m\ ;$$

d'où l'on conclura

$$\Sigma.A_m\left\{y^m+\frac{\gamma+m}{m-\alpha+\beta}y^{\beta+m}\int\xi\mathrm{d}x+\frac{(\gamma+m)(\gamma+m+\beta)}{(m-\alpha+\beta)(m-\alpha+2\beta)}\int\xi\int\xi\mathrm{d}x^2+\ldots\right\};$$

et, en observant que

$$e^{t^\beta y^\beta\int\xi\mathrm{d}x}=1+t^\beta y^\beta\int\xi\mathrm{d}x+t^{2\beta}y^{2\beta}\int\xi\int\xi\mathrm{d}x^2+\ldots\ldots$$

et faisant de plus

$$\frac{A_m}{\int(1-t^\beta)^{-\frac{\alpha+\gamma}{\beta}}t^{\gamma+m-1}\mathrm{d}t}=B_m\ ,$$

on aura

$$\Sigma.B_m y^m\int(1-t^\beta)^{-\frac{\alpha+\gamma}{\beta}}t^{\gamma+m-1}e^{t^\beta y^\beta\int\xi\mathrm{d}x}=\Sigma.A_m\left\{y^m+\frac{\gamma+m}{m-\alpha+\beta}y^{m+\beta}\int\xi\mathrm{d}x+\ldots\right\}$$

et en faisant

$$\Sigma.B_m y^m=\Gamma(y),\qquad \varphi'=\Pi(x)\ ,$$

on aura ensuite

$$z=\int(1-t^\beta)^{-\frac{\alpha+\gamma}{\beta}}t^{\gamma-1}e^{t^\beta y^\beta\int\xi\mathrm{d}x}\left\{\Gamma(ty)+t^\alpha y^\alpha\int e^{-t^\beta y^\beta\int\xi\mathrm{d}x}\Pi(x)\mathrm{d}x\right\}\mathrm{d}t\ ;$$

l'intégrale étant prise entre $t=0$ et $t=1$.

Prenons encore l'équation

$$\frac{d^2z}{dx^2}=\xi\frac{dz}{dx}+\varpi\upsilon\frac{dz}{dy}+\varpi\omega z,$$

ξ, ϖ; υ; ω étant des fonctions quelconques, les deux premières de x et les deux dernières de y. Alors, en faisant

$$m=e^{\int\frac{\omega}{\upsilon}dy},\quad n=e^{\int\xi dx},$$

on aura

$$z=\frac{1}{m}\left\{\varphi+\int\frac{dy}{\upsilon}\cdot\frac{n}{\varpi}\left(\frac{\varphi'}{n}\right)'+\int\frac{1}{\upsilon}\int\frac{dy^2}{\upsilon}\cdot\frac{n}{\varpi}\left(\frac{1}{n}\left(\frac{n}{\varpi}\left(\frac{\varphi'}{n}\right)'\right)'\right)'+\ldots\right\}$$

Par le théorème de Parseval, et par la méthode générale exposée plus haut, on réduit cette série à l'intégrale d'une équation ordinaire du second ordre; mais, dans un cas assez étendu, elle se réduit à la forme finie, par la méthode qu'a indiqué M. Laplace (*Journal polytechnique*, cahier VIII).

En effet, lorsque $\varpi=n^2$, on a

$$z=\frac{1}{m}\left\{\varphi+\int\frac{dy}{\upsilon}\cdot\frac{1}{n}\left(\frac{\varphi'}{n}\right)'+\int\frac{1}{\upsilon}\int\frac{dy^2}{\upsilon}\cdot\frac{1}{n}\left(\frac{1}{n}\left(\frac{1}{n}\left(\frac{\varphi'}{n}\right)'\right)'\right)'+\ldots\right\}$$

et, si l'on donne à la série

$$\varphi+\alpha\frac{1}{n}\varphi'+\frac{\alpha^2}{1.2}\frac{1}{n}\left(\frac{1}{n}\varphi'\right)'+\frac{\alpha^3}{1.2.3}\frac{1}{n}\left(\frac{1}{n}\left(\frac{1}{n}\varphi'\right)'\right)'+\ldots$$

la forme

$$f\left(\int n dx+\alpha\right),$$

c'est-à-dire d'une fonction arbitraire de $\int n dx+\alpha$; en observant que, entre $\alpha=-\infty$ et $\alpha=+\infty$, on a

$$\int e^{-\alpha^2}\alpha^{2\gamma}d\alpha=\frac{1.3(2\gamma-1)}{2^\gamma}\sqrt{\varpi},\quad \int e^{-\alpha^2}\alpha^{2\gamma-1}d\alpha=0,$$

on trouvera facilement que l'intégrale de l'équation

$$\frac{d^2z}{dx^2} = \frac{n^3}{n}\ \frac{dz}{dx} + n^2 v\ \frac{dz}{dy} + n^2 \omega z\ ;$$

où n est une fonction quelconque de x, devient

$$z = e^{-\int \frac{\omega}{v} dy} \int e^{-\alpha^2} f\left(\int n dx + 2\alpha \sqrt{\int \frac{dy}{\omega}}\right) d\alpha\ ;$$

l'intégrale étant prise entre $\alpha = -\infty$ et $\alpha = +\infty$.

Dans ce qui précède, je crois en avoir dit assez pour éclaircir le principe duquel je suis parti ; et il me paraît superflu d'y ajouter plus d'exemples et de développemens, sur-tout pour les ordres supérieurs, qui doivent naturellement avoir des intégrales très-compliquées ; à moins que les équations ne soient très-particulières ; les raisons que j'ai déduites plus haut me dispensent également de traiter des équations aux différences finies à plusieurs variables. Il est d'ailleurs impossible de donner des règles pour les cas particuliers qui admettent des simplifications dans les méthodes générales ; mais ces simplifications se présentent d'elles-mêmes sans difficulté. Depuis long-temps on se sert du principe des substitutions successives, comme d'une méthode d'approximation, fondée sur des valeurs particulières des quantités qui entrent dans l'équation proposée ; et on l'a employée, faute de méthodes plus rigoureuses ; c'est pourquoi je me suis sur-tout attaché à l'exposer sous un point de vue qui doit la faire considérer comme la seule méthode générale qui existe pour l'intégration des équations ; j'ai tâché ensuite d'en déduire les principales conséquences, indépendamment de la nature particulière des fonctions qu'on a introduites dans la langue analitique, par des motifs le plus souvent étrangers à cette branche de l'analise ; et, conformément aux idées de M. Lacroix (*Calc. diff. et intég.*, tom. II, pag. 576), j'ai indiqué les classes qui ont des propriétés communes, et qui jouissent de l'avantage de se ramener à d'autres plus simples. J'ai, plus d'une fois, observé que, dans certains cas, on parvient plus brièvement au but par des considérations particulières ; mais il n'en est pas pour cela moins nécessaire, suivant la remarque de l'illustre Lagrange, de généraliser et de réduire les théories, à mesure que la science s'étend et s'enrichit de procédés nouveaux.