
ANNALES DE MATHÉMATIQUES PURES ET APPLIQUÉES.

KRAMP

**Analyse transcendante. Intégration par approximation de
toute équation différentielle quelconque**

Annales de Mathématiques pures et appliquées, tome 10 (1819-1820), p. 317-340

http://www.numdam.org/item?id=AMPA_1819-1820__10__317_0

© Annales de Mathématiques pures et appliquées, 1819-1820, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Annales de Mathématiques pures et appliquées » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

ANALISE TRANSCENDANTE.

Intégration par approximation de toute équation différentielle quelconque ;

Par M. le professeur KRAMP, correspondant de l'académie royale des sciences, doyen de la faculté des sciences de Strasbourg, Chevalier de l'Ordre royal de la Légion d'honneur.



1. **L**E mémoire actuel sera destiné à intégrer, par approximation, l'équation différentielle qui suit :

$$y + A \frac{dy}{dt} = T ;$$

dans laquelle la lettre A désigne un coefficient quelconque constant, et la lettre T une fonction quelconque de t . L'approximation sera semblable à celle que nous avons employée pour intégrer la différentielle Xdx , dans divers mémoires déjà publiés dans ce recueil. Ainsi elle doit, dans les cas ordinaires, savoir, dans ceux qui sont sans asymptotes, sans points d'inflexion ni de rebroussement, faire connaître, dès le premier essai, l'intégrale demandée, jusqu'à cinq, et dès le second jusqu'à dix ou douze décimales. Il sera facile ensuite d'appliquer la méthode à des cas plus compliqués. Ainsi, l'équation plus générale

$$y + A \frac{dy}{dt} + B \frac{d^2y}{dt^2} + C \frac{d^3y}{dt^3} + \dots = T ,$$

dans laquelle A, B, C, \dots sont des constantes, rentrera dans celle de l'équation qui va nous occuper, et s'exécutera par des moyens analogues.

2. Il est bon de remarquer que l'équation

$$y + A \frac{dy}{dt} = T,$$

se réduit presque d'elle-même à

$$y + \frac{dy}{dx} = Q,$$

en posant simplement $t = Ax$. Si, au contraire, la proposée est

$$y - A \frac{dy}{dt} = T,$$

en posant également $t = Ax$, elle deviendra

$$y - \frac{dy}{dx} = Q;$$

Q étant, dans l'une et l'autre, une fonction connue de x . Nous nous occuperons donc uniquement, dans tout ce qui va suivre, des deux équations

$$y + \frac{dy}{dx} = Q, \quad y - \frac{dy}{dx} = Q;$$

ce qui introduira dans nos calculs des simplifications notables.

3. La valeur rigoureuse de y est

$$y = e^{-x} \int e^x Q dx = e^{-x} (C + X) = Ce^{-x} + Xe^{-x};$$

en désignant par C une *constante* arbitraire, et par X une certaine fonction de x , que le calcul nous fera connaître, et dont la détermination est précisément l'objet principal qui doit nous occuper. L'autre

partie Ce^{-x} , appartient généralement à toutes les équations différentielles de cette classe; de sorte qu'après avoir trouvé l'intégrale particulière Xe^{-x} , il ne s'agira, pour la rendre complète, que de lui ajouter le terme Ae^{-x} . La méthode que nous allons enseigner suppose qu'avant tout on soit instruit des *limites* entre lesquelles l'intégrale doit être prise. En supposant qu'il faille la prendre entre $x=a$ et $x=b$, il faudra partager l'intervalle entier $b-a$ en un certain nombre de *parties égales*. Le nombre en est arbitraire; mais, plus il sera grand, et plus on approchera de l'intégrale demandée. Il faut cependant bien se garder de croire qu'en prenant les nombres arbitraires en *progression arithmétique*, et en supposant, par exemple, x successivement égal à 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, la suite des erreurs qui en résultent soit constamment *décroissante*: la courbe qui aurait ces erreurs pour ordonnées irait en *serpenteant* des deux côtés de l'axe, mais en se rapprochant toujours de cet axe, avec lequel elle coïnciderait *à l'infini*; ce qui est conforme à la nature de la chose, et ce que j'ai bien directement prouvé d'ailleurs, par la table des erreurs de $\frac{\pi}{4}$ (*Annales*, tom. VI, pag. 379, 387). Il faut savoir de plus qu'en excluant complètement les *asymptotes*, les *points d'inflexion* et les *points de rebroussement*, les résultats commencent à devenir incertains, lorsque les limites sont trop voisines des points où ces circonstances se rencontrent; c'est ainsi, par exemple, qu'en appliquant les formules à la *logistique*, et en employant les coordonnées ordinaires, on trouve des erreurs assez considérables, mais qui disparaissent pourtant en prenant d'autres coordonnées, plus éloignées de la direction de l'asymptote. Les courbes qui s'intègrent le mieux par cette méthode, sont les courbes rentrantes sur elles-mêmes; ce sont les plus employées dans la pratique, et ce sont en même temps celles auxquelles la nouvelle méthode est le plus applicable. Il est possible, au reste, que le mémoire actuel paraisse inutile à bien des personnes; attendu que, puisque nous avons ici

$$y = e^{-x} \int e^x Q dx ,$$

il s'ensuit que l'intégration à effectuer n'est autre que celle de la formule générale $\int X dx$, dans laquelle X a pris la forme particulière $e^x Q$; et qu'ainsi tout se réduit, pour avoir y , à diviser par e^x cette même intégrale que nous avons déjà enseignée à déterminer dans nos précédents mémoires. Mais d'abord le produit $e^x Q$ diffère considérablement de la simple fonction Q , et doit, par suite, introduire une différence notable dans l'intégrale. En outre, l'intégration de $e^x Q dx$ est un passage nécessaire pour parvenir à l'intégration de l'équation

$$y + P \frac{dy}{dx} = Q ,$$

ainsi qu'à celles d'autres équations d'une forme plus compliquée.

4. Commençons par supposer le nombre arbitraire égal à *cinq unités* ; ce qui donne

$$y = A + Bx + Cx^2 + Dx^3 + Ex^4 + Fx^5 ,$$

d'où

$$\frac{dy}{dx} = B + 2Cx + 3Dx^2 + 4Ex^3 + 5Fx^4 ;$$

et par conséquent

$$Q = y + \frac{dy}{dx} = (A+B) + (B+2C)x + (C+3D)x^2 \\ + (D+4E)x^3 + (E+5F)x^4 + Fx^5 .$$

En supposant successivement ici à la variable x les valeurs entières et positives 0, 1, 2, 3, 4, 5; et en désignant par q_0 , q_1 , q_2 , q_3 , q_4 , q_5 , celles qui en résultent pour Q , nous aurons

$$q_0 = A + B,$$

$$q_1 = A + 2B + 3C + 4D + 5E + 6F,$$

$$q_2 = A + 3B + 8C + 20D + 48E + 112F,$$

$$q_3 = A + 4B + 15C + 54D + 189E + 648F,$$

$$q_4 = A + 5B + 24C + 112D + 512E + 2304F,$$

$$q_5 = A + 6B + 35C + 200D + 1125E + 6250F.$$

En ôtant chacune de ces équations de celle qui la suit immédiatement et dénotant par Δq_0 , Δq_1 , Δq_2 , Δq_3 , Δq_4 , les différences qui en résultent, on aura

$$\Delta q_0 = B + 3C + 4D + 5E + 6F,$$

$$\Delta q_1 = B + 5C + 16D + 43E + 106F,$$

$$\Delta q_2 = B + 7C + 34D + 141E + 536F,$$

$$\Delta q_3 = B + 9C + 58D + 323E + 1656F,$$

$$\Delta q_4 = B + 11C + 88D + 613E + 3946F;$$

Dénotant de même par $\Delta^2 q_0$, $\Delta^2 q_1$, $\Delta^2 q_2$, $\Delta^2 q_3$, les différences consécutives de celles-ci, divisées par *deux*, il viendra

$$\Delta^2 q_0 = C + 6D + 19E + 50F,$$

$$\Delta^2 q_1 = C + 9D + 49E + 215F,$$

$$\Delta^2 q_2 = C + 12D + 91E + 560F,$$

$$\Delta^2 q_3 = C + 15D + 145E + 1145F.$$

322 INTÉGRATION APPROCHÉE

Dénotant en outre par Δ^3q_0 , Δ^3q_1 , Δ^3q_2 les différences consécutives de celles-ci, divisées par *trois*, nous aurons

$$\Delta^3q_0 = D + 10E + 55F,$$

$$\Delta^3q_1 = D + 14E + 115F;$$

$$\Delta^3q_2 = D + 18E + 195F.$$

Dénotant encore par Δ^4q_0 , Δ^4q_1 les différences consécutives de ces dernières, divisées par *quatre*, il viendra

$$\Delta^4q_0 = E + 15F,$$

$$\Delta^4q_1 = E + 20F,$$

Dénotant enfin par Δ^5q_0 la différence de ces deux-ci, divisées par *cinq*, on aura

$$\Delta^5q_0 = F.$$

5. En prenant seulement la première équation de chaque série, et supprimant les indices, désormais inutiles, nous aurons, pour le diviseur *cinq*,

$$\Delta^5q = F;$$

$$\Delta^4q = E + 15F,$$

$$\Delta^3q = D + 10E + 55F;$$

$$\Delta^2q = C + 6D + 19E + 50F,$$

$$\Delta q = B + 3C + 4D + 5E + 6F,$$

$$q = A + B.$$

Si, au lieu du nombre *cinq*, nous eussions pris tout autre nombre, le nombre *douze*, par exemple, nous aurions trouvé, par un semblable calcul,

$$\Delta^{12}q = N,$$

$$\Delta^{11}q = M + 78N,$$

$$\Delta^{10}q = L + 66M + 2365N,$$

$$\Delta^9q = K + 55L + 1650M + 36135N,$$

$$\Delta^8q = I + 45K + 1110L + 20130M + 301587N,$$

$$\Delta^7q = H + 36I + 714K + 10500L + 128667M + 1595240N,$$

$$\Delta^6q = G + 28H + 434I + 5040K + 49287L + 430584M \\ + 3477496N,$$

$$\Delta^5q = F + 21G + 245H + 2170I + 16401K + 112035L \\ + 764505M + 4340160N,$$

$$\Delta^4q = E + 15F + 125G + 805H + 4501I + 25079K \\ + 111805L + 520905M + 2360501N;$$

$$\Delta^3q = D + 10E + 55F + 240G + 931H + 3374I \\ + 11719K + 39580L + 131131M + 428538N$$

$$\Delta^2q = C + 6D + 19E + 50F + 121G + 280H \\ + 631I + 1398K + 3061L + 6644M \\ + 24323N,$$

$$\Delta q = B + 3C + 4D + 5E + 6F + 7G \\ + 8H + 9I + 10K + 11L \\ + 12M + 13N,$$

$$q = A + B.$$

Cette table n'est pas seulement applicable au nombre douze ; elle l'est également à tous les diviseurs inférieurs, en s'arrêtant dans chacune des formules à la lettre qui marque la limite de la division ; à la lettre *G*, par exemple, si le diviseur est *six* ; à la lettre *I*, si ce diviseur est *huit* ; et ainsi des autres.

6. Il reste donc à déterminer, à l'aide de ces équations, les valeurs de *N*, *M*, *L*, *K*, *I*, *A*, pour les substituer dans celle de *y*, afin de présenter cette intégrale sous la forme d'une série disposée suivant les différences des differens ordres de la quantité *q*. Comme le calcul est très-facile, il suffira d'en offrir ici les résultats. Ces résultats sont

$$N = \Delta^{12} q,$$

$$M = \Delta^{11} q - 78 \Delta^{12} q,$$

$$L = \Delta^{10} q - 66 \Delta^{11} q + 2783 \Delta^{12} q,$$

$$K = \Delta^9 q - 55 \Delta^{10} q + 1980 \Delta^{11} q - 60500 \Delta^{12} q,$$

$$I = \Delta^8 q - 45 \Delta^9 q + 1365 \Delta^{10} q - 35970 \Delta^{11} q + 901923 \Delta^{12} q,$$

$$H = \Delta^7 q - 36 \Delta^8 q + 906 \Delta^9 q - 20370 \Delta^{10} q + 445533 \Delta^{11} q \\ - 9852942 \Delta^{12} q,$$

$$G = \Delta^6 q - 28 \Delta^7 q + 574 \Delta^8 q - 10878 \Delta^9 q + 205863 \Delta^{10} q \\ - 4020786 \Delta^{11} q + 82310129 \Delta^{12} q,$$

$$F = \Delta^5 q - 21 \Delta^6 q + 343 \Delta^7 q - 5404 \Delta^8 q + 87717 \Delta^9 q \\ - 150450 \Delta^{10} q + 27541646 \Delta^{11} q - 539856504 \Delta^{12} q$$

$$E = \Delta^4 q - 15 \Delta^5 q + 190 \Delta^6 q - 2450 \Delta^7 q + 33789 \Delta^8 q \\ - 505869 \Delta^9 q + 8246195 \Delta^{10} q - 146117730 \Delta^{11} q \\ + 2804540596 \Delta^{12} q,$$

$$D = \Delta^3$$

$$D = \Delta^3 q - 10\Delta^4 q + 95\Delta^5 q - 985\Delta^6 q + 11424\Delta^7 q - 148288\Delta^8 q \\ + 2141600\Delta^9 q - 34157480\Delta^{10} q + 597224496\Delta^{11} q \\ - 11369080360\Delta^{12} q ,$$

$$C = \Delta^2 q - 6\Delta^3 q + 41\Delta^4 q - 335\Delta^5 q + 3229\Delta^6 q - 36036\Delta^7 q \\ + 457932\Delta^8 q - 6534384\Delta^9 q + 103499016\Delta^{10} q \\ - 1802302128\Delta^{11} q + 34227784920\Delta^{12} q ,$$

$$B = \Delta q - 3\Delta^2 q + 14\Delta^3 q - 88\Delta^4 q + 694\Delta^5 q - 6578\Delta^6 q \\ + 72792\Delta^7 q - 920904\Delta^8 q + 13109088\Delta^9 q \\ - 207360912\Delta^{10} q + 3608233056\Delta^{11} q \\ - 68495486640\Delta^{12} q ,$$

$$A = q - \Delta q + 3\Delta^2 q - 14\Delta^3 q + 88\Delta^4 q - 694\Delta^5 q \\ + 6578\Delta^6 q - 72792\Delta^7 q + 920904\Delta^8 q \\ - 13109088\Delta^9 q + 207360912\Delta^{10} q \\ - 3608233056\Delta^{11} q + 68495486640\Delta^{12} q .$$

7. La loi que suivent les coefficients de Δq , $\Delta^2 q$, $\Delta^3 q$, ... de la table précédente est extrêmement remarquable ; et ils ont avec ceux des *facultés numériques*, dont j'ai traité dans mon *Analyse des réfractions* (pag. 71) une analogie singulière, dont je n'ai pu encore me rendre compte. Voici en quoi cette analogie consiste. Supposons, par exemple, que l'on demande les coefficients de $\Delta^6 q$ dans les valeurs de A , B , C , D , E , F , G ? On rassemblera les coefficients de la faculté à exposant *six*, que l'on trouvera être 1, 15, 85, 225, 274, 120 ; on les multipliera respectivement par les facultés 6!, 5!, 4!, 3!, 2!, 1! ou 720, 120, 24, 6, 2, 1 ; ce qui donnera les produits

$$720, 1800, 2040, 1350, 548, 120 ;$$

326 I N T E G R A T I O N A P P R O C H É E

prenant successivement le premier *seul*, puis la somme *deux* premiers, puis celle des *trois* premiers, et ainsi de suite, jusqu'au dernier, on formera la nouvelle suite

$$720, 2520, 4560, 5910, 6458, 6578,$$

dont les termes, divisés respectivement par les mêmes facultés $6!$, $5!$, $4!$, $3!$, $2!$, $1!$, donneront les quotiens

$$1, 21, 190, 985, 3229, 6578,$$

qui sont précisément les coefficients de $\Delta^6 q$.

Supposons encore que l'on demande les coefficients de $\Delta^{12} q$? Il faudra d'abord écrire ceux de la faculté à exposant 12; ce sont

$$\begin{aligned} 1 & \dots\dots\dots 1, \\ 2 & \dots\dots\dots 66, \\ 3 & \dots\dots\dots 1925, \\ 4 & \dots\dots\dots 32670, \\ 5 & \dots\dots\dots 357423, \\ 6 & \dots\dots\dots 2637558, \\ 7 & \dots\dots\dots 13339535, \\ 8 & \dots\dots\dots 45995730, \\ 9 & \dots\dots\dots 105258076, \\ 10 & \dots\dots\dots 150917976, \\ 11 & \dots\dots\dots 120543840, \\ 12 & \dots\dots\dots 39916800; \end{aligned}$$

on les multipliera respectivement par les facultés

DES ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES. 327

$$\begin{aligned}
 12! &= 479001600 , \\
 11! &= 39916800 , \\
 10! &= 3628800 , \\
 9! &= 362880 , \\
 8! &= 40320 , \\
 7! &= 5040 , \\
 6! &= 720 , \\
 5! &= 120 , \\
 4! &= 24 , \\
 3! &= 6 , \\
 2! &= 2 , \\
 1! &= 1 ;
 \end{aligned}$$

ce qui donnera les produits

$$\begin{aligned}
 1.^{\text{er}} \dots\dots\dots &: 479001600 , \\
 2. \dots\dots\dots &: 2630508800 ; \\
 3. \dots\dots\dots &: 6980440000 ; \\
 4. \dots\dots\dots &: 11855289600 , \\
 5. \dots\dots\dots &: 14411295360 , \\
 6. \dots\dots\dots &: 13293292320 , \\
 7. \dots\dots\dots &: 9604465200 ; \\
 8. \dots\dots\dots &: 5519487600 ; \\
 9. \dots\dots\dots &: 2526193824 , \\
 10. \dots\dots\dots &: 905807856 ; \\
 11. \dots\dots\dots &: 242087680 ; \\
 12. \dots\dots\dots &: 39916800 ;
 \end{aligned}$$

328 INTÉGRATION APPROCHÉE

prenant ensuite le premier, puis la somme des deux premiers, puis celle des trois premiers, et ainsi de suite, il viendra

1. ^{er}	479001600 ,
2.	3113510400 ,
3.	10098950400 ,
4.	21954240000 ,
5.	36365535360 ,
6.	49658827680 ,
7.	59263292880 ,
8.	64782780480 ,
9.	67308974304 ,
10.	68214482160 ,
11.	68455569840 ,
12.	68495486640 ;

divisant enfin ces sommes par les mêmes facultés qui avaient d'abord été employées comme multiplicateurs, on obtiendra, pour la série des coefficients de $\Delta^{12}q$, dans nos formules,

<i>N</i> ,	1 ;
<i>M</i> ,	78 ,
<i>L</i> ,	2783 ,
<i>K</i> ,	60570 ;
<i>I</i> ,	901923 ,
<i>H</i> ,	9852942 ,
<i>G</i> ,	82310129 ;

$$F, \dots\dots\dots 539856504,$$

$$E, \dots\dots\dots 2804540596,$$

$$D, \dots\dots\dots 11369080360,$$

$$C, \dots\dots\dots 34227784920,$$

$$B, \dots\dots\dots 68495486640.$$

8. Un second théorème, qui n'est pas moins digne de remarque, quoiqu'il n'ait point encore pour lui une démonstration rigoureuse, mais qui est fondé sur une induction plus que suffisante, et duquel d'ailleurs je me propose de m'occuper encore, c'est que toutes ces séries de coefficients qui multiplient les différences d'un même ordre dans nos formules (6) jouissent sensiblement de la propriété de se reproduire eux-mêmes en les divisant respectivement par les nombres naturels 1, 2, 3, 4,; et se rapprochent en cela des termes de la série hypergéométrique ordinaire $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{6}, \frac{1}{24}, \frac{1}{120}, \frac{1}{720}, \dots$ qui multiplient respectivement les termes $1, x, x^2, x^3, x^4, \dots$ dans le développement de e^x , et qui jouissent rigoureusement de cette propriété.

Prenons, par exemple, du plus grand au plus petit, les coefficients de $\Delta^i q$, et divisons-les respectivement par 1, 2, 3, 4,; nous aurons

$$\frac{1}{5} \cdot 72792 = 72792,$$

$$\frac{1}{2} \cdot 72792 = 36396,$$

$$\frac{1}{3} \cdot 36036 = 12012,$$

$$\frac{1}{4} \cdot 11424 = 2856,$$

$$\frac{1}{7} \cdot 2450 = 490,$$

$$\dots\dots\dots$$

qui sont à peu près ces mêmes coefficients, le premier excepté.

En opérant de la même manière sur les coefficients de $\Delta^{10}q$; nous trouverons

$$\frac{1}{2} \cdot 207360912 = 207360912 ;$$

$$\frac{1}{4} \cdot 207360912 = 103680456 ;$$

$$\frac{1}{8} \cdot 103499016 = 34499672 ;$$

$$\frac{1}{16} \cdot 34157480 = 8539370 ,$$

$$\frac{1}{32} \cdot 8246195 = 164239 ;$$

.....

qui sont à peu près ces mêmes coefficients.

Enfin , en opérant encore ainsi sur les coefficients de $\Delta^{12}q$, nous aurons

$$\frac{1}{2} \cdot 68495486640 = 68495486640 ,$$

$$\frac{1}{4} \cdot 68495486640 = 34247743320 ,$$

$$\frac{1}{8} \cdot 34227784920 = 11409261640 ,$$

$$\frac{1}{16} \cdot 11367080360 = 2842270090 ,$$

$$\frac{1}{32} \cdot 2804540596 = 560908119 ,$$

$$\frac{1}{64} \cdot 539856504 = 89976084 ;$$

..... ;

où la même loi se manifeste également. La démonstration rigoureuse de ce théorème serait sans doute difficile ; mais en attendant, nous l'adopterons , avec d'autant plus de fondement qu'il nous conduira à des résultats exacts et décisifs.

9. L'intégration complète de l'équation $y + \frac{dy}{dx} = Q$, équation dans laquelle la lettre Q désigne une fonction quelconque de x , suppose deux choses : d'abord la nouvelle fonction de x dont la différentiation nous ramènera à l'équation proposée, et ensuite la *constante*, multipliée par une certaine autre fonction de x . Nous avons vu que ce dernier produit restait le même quelle que pût être la fonction Q ; en conséquence, pour le déterminer, il n'y a qu'à voir ce qu'il deviendra dans la supposition la plus simple qu'on puisse adopter pour Q , qui est celle de $Q=0$. L'équation sera alors

$$y + \frac{dy}{dx} = 0;$$

puis donc que nous avons supposé

$$y = A + Bx + Cx^2 + Dx^3 + Ex^4 + Fx^5 + \dots,$$

d'où

$$\frac{dy}{dx} = B + 2Cx + 3Dx^2 + 4Ex^3 + 5Fx^4 + \dots;$$

il faudra résoudre l'équation

$$0 = (A+B) + (B+2C)x + (C+3D)x^2 + (D+4E)x^3 + \dots$$

Cela conduira aux équations déjà trouvées (6) avec cette seule différence qu'ici q , Δq , $\Delta^2 q$, $\Delta^3 q$, seront *zéro*.

Il en faudra seulement rejeter la première équation $N = \Delta^2 q$ qui devenant, dans le cas actuel, $N = 0$, donnerait *zéro* pour valeur de tous les autres coefficients, tandis qu'il faut nécessairement laisser du jeu à la *constante* qu'on se propose d'ajouter. Cette légère attention nous met dans la position d'avoir cette *constante*, qu'il eût été bien difficile de trouver d'une autre manière quelconque.

11. Avec cette attention, les équations trouvées (6) nous donneront

$$\begin{aligned}
 M &= -78N, \\
 L &= +2783N; \\
 K &= -60500N, \\
 I &= +901923N, \\
 H &= -9852942N, \\
 G &= +82310129N, \\
 F &= -539856504N, \\
 E &= +2804540596N, \\
 D &= -11369080360N, \\
 C &= +34227784920N, \\
 B &= -68495486640N, \\
 A &= +68495486640N.
 \end{aligned}$$

Il ne restera plus qu'à diviser la dernière de ces équations par chacune de celles qui la précèdent, pour avoir tous ces coefficients l'un après l'autre. Le premier terme A sera arbitraire; il formera la constante du problème; et l'on aura pour les autres

$$\begin{aligned}
 68495486640B &= -68495486640A, \\
 68495486640C &= +34227784920A, \\
 68495486640D &= -11369080360A, \\
 68495486640E &= +2804540596A, \\
 68495486640F &= -539856504A; \\
 68495486640G &= +82310129A; \\
 68495486640H &= -9852942A.
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 68495486640I &= +901923A , \\
 68495486640K &= -60500A , \\
 68495486640L &= +2783A , \\
 68495486640M &= -78A , \\
 68495486640N &= +A .
 \end{aligned}$$

En conséquence du théorème énoncé ci-dessus (8) , on voit fort bien ce que ces rapports compliqués deviendraient dans l'infini ; on aurait alors

$$\begin{aligned}
 B &= -A , \\
 2C &= +A , \\
 6D &= -A , \\
 24E &= +A , \\
 120F &= -A , \\
 &\dots \dots \dots
 \end{aligned}$$

ce qui donnerait

$$y = A \left(1 - \frac{x}{1} + \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{6} + \frac{x^4}{24} - \frac{x^5}{120} + \dots \right) = Ae^{-x} ,$$

conformément aux vrais principes du calcul intégral. On voit en même temps l'identité absolue entre le coefficient constant A et le premier terme de la série , qui répond à $x=0$.

12. Reste donc à trouver l'autre fonction de x , dont la différentiation nous conduit proprement à l'équation proposée

$$y + \frac{dy}{dx} = Q,$$

Comme on a supposé

$$y = A + Bx + Cx^2 + Dx^3 + Ex^4 + Fx^5 + \dots,$$

on a, en mettant à la place de A, B, C, D, \dots les valeurs trouvées (6),

$$\begin{aligned} y = & q \\ & + (x-1)\Delta q \\ & + (x^2-3x+3)\Delta^2 q \\ & + (x^3-6x^2+14x-14)\Delta^3 q \\ & + (x^4-10x^3+41x^2-88x+88)\Delta^4 q \\ & + (x^5-15x^4+95x^3-335x^2+694x-694)\Delta^5 q \\ & + (x^6-21x^5+190x^4-985x^3+3229x^2-6578x+6578)\Delta^6 q \\ & + \dots \end{aligned}$$

Mettant ici, à la place de x , les valeurs successives 2, 3, 4, on aura

Pour $x=2, y = q + \Delta q + \Delta^2 q,$

3, $y = q + 2\Delta q + 3\Delta^2 q + \Delta^3 q,$

4, $y = q + 3\Delta q + 7\Delta^2 q + 10\Delta^3 q + 8\Delta^4 q;$

5 $y = q + 4\Delta q + 13\Delta^2 q + 31\Delta^3 q + 48\Delta^4 q + 26\Delta^5 q,$

6, $y = q + 5\Delta q + 21\Delta^2 q + 70\Delta^3 q + 172\Delta^4 q + 266\Delta^5 q + 194\Delta^6 q,$

$$7, y = q + 6\Delta q + 31\Delta^2 q + 133\Delta^3 q + 452\Delta^4 q + 1126\Delta^5 q + 1796\Delta^6 q + 1142\Delta^7 q ,$$

$$8, y = q + 7\Delta q + 43\Delta^2 q + 226\Delta^3 q + 984\Delta^4 q + 3386\Delta^5 q + 8546\Delta^6 q + 13672\Delta^7 q + 9736\Delta^8 q ,$$

$$9, y = q + 8\Delta q + 57\Delta^2 q + 355\Delta^3 q + 1888\Delta^4 q + 8366\Delta^5 q + 28862\Delta^6 q + 73494\Delta^7 q + 119112\Delta^8 q ,$$

.....

13. En mettant ici, à la place des différences successives de q leurs valeurs en $q_0, q_1, q_2, q_3, \dots$ savoir ;

$$\begin{aligned} \Delta q &= q_1 - q_0 , \\ 2\Delta^2 q &= q_2 - 2q_1 + q_0 , \\ 6\Delta^3 q &= q_3 - 3q_2 + 3q_1 - q_0 , \\ 24\Delta^4 q &= q_4 - 4q_3 + 6q_2 - 4q_1 + q_0 , \\ 120\Delta^5 q &= q_5 - 5q_4 + 10q_3 - 10q_2 + 5q_1 - q_0 , \\ &\dots \end{aligned}$$

on trouvera

$$\begin{aligned} \text{Pour } x=2\dots \quad 2y &= q_0 + q_1 , \\ 3\dots \quad 6y &= 2q_0 - 3q_1 + 6q_2 + q_3 , \\ 4\dots \quad 6y &= q_0 - 2q_1 + 3q_2 + 2q_3 + 2q_4 , \\ 5\dots \quad 60y &= 7q_0 - 25q_1 + 50q_2 - 40q_3 + 65q_4 + 13q_5 , \\ 6\dots \quad 360y &= 19q_0 - 72q_1 + 135q_2 - 80q_3 + 45q_4 + 216q_5 + 97q_6 \dots \end{aligned}$$

$$7.... 2520y = 108q_0 - 623q_1 + 1764q_2 - 2835q_3 + 3220q_4 - 1953q_5 + 2268q_6 \\ + 5719q_7 ,$$

$$8.... 20160y = 300q_0 - 1536q_1 + 3416q_2 - 2688q_3 - 1680q_4 + 8960q_5 - 7224q_6 \\ + 15744q_7 + 48689q_8 ,$$

$$9.... 15120y = 260q_0 - 2115q_1 + 8218q_2 - 19278q_3 + 30744q_4 - 34030q_5 \\ + 28560q_6 - 14778q_7 + 14148q_8 + 3391q_9 ,$$

..... t

Dans le cas particulier où les quantités $q_0, q_1, q_2, q_3, \dots$ seraient égales entre elles, on aurait, dans toutes ces équations, $y = q$; ce qui pourra servir au besoin à vérifier l'exactitude de nos formules.

14. *Exemple I.* Soit l'équation

$$y + \frac{dy}{dx} = a ,$$

On aura, dans ce cas, $Q = a$; ainsi $q_0, q_1, q_2, q_3, \dots$ sont ici tous égaux à a ; en conséquence, toutes les formules donnent pour intégrale complète

$$y = Ae^{-x} + a .$$

15. *Exemple II.* Soit l'équation

$$y = \frac{dy}{dx} = x .$$

On aura $Q = x$; donc $q_0 = 0, q_1 = 1, q_2 = 2, q_3 = 3, \dots$; et toutes les formules s'accordent également à donner

$$y = Ae^{-x} + x - 1 ;$$

ce qui est rigoureusement conforme aux principes du calcul ; on tire, en effet,

De $x=2$, $2y=q_0+q_2=2$; donc $y=1=2-1=x-1$;

De $x=3$, $6y=2q_0-3q_1+6q_2+q_3=12$; donc $y=2=3-1=x-1$;

De $x=4$, $6y=q_0-2q_1+3q_2+2q_3+2q_4=18$; donc $y=3=4-1=x-1$;

De $x=5$, $60y=7q_0-25q_1+50q_2-40q_3+55q_4+13q_5=240$; donc $y=4=5-1=x-1$;

il en sera de même des suivans , de sorte qu'on aura généralement et rigoureusement

$$y = Ae^{-x} + x - 1 .$$

16. *Exemple III.* Soit l'équation

$$y + \frac{dy}{dx} = x^2 .$$

On aura $Q=x^2$ donc

$$q_0=0 , q_1=1 , q_2=4 , q_3=9 , q_4=16 , \dots$$

cela donne

Pour $x=2$;	$2y= 4$,	donc $y= 2=x^2-2x+2$,
	$3 , \quad 6y= 30$,	$5=x^2-2x+2$;
	$4 , \quad 6y= 60$,	$10=x^2-2x+2$;
	$5 , \quad 60y=1020$,	$17=x^2-2x+2$,
	$6 , \quad 360y=9360$,	$26=x^2-2x+2$,
	\dots	\dots

on aura donc généralement

$$y = Ae^{-x} + x^2 - 2x + 2 ;$$

valeur qui en effet est rigoureuse.

17. *Exemple IV.* Soit l'équation

$$y + \frac{dy}{dx} = x^3 :$$

On aura ici $Q = x^3$, d'où

$$q_0 = 0, \quad q_1 = 1, \quad q_2 = 8, \quad q_3 = 27, \quad q_4 = 64, \dots$$

donc à commencer par la valeur 3

Pour $x=3$,	$y=12$,
4,	34,
5,	74,
6,	138,
7,	362,
.	

Ces nombres étant tous compris sous la formule $x^3 - 3x^2 + 6x - 6$;
on aura généralement

$$y = Ae^{-x} + x^3 - 3x^2 + 6x - 6,$$

intégrale qui, en effet, est rigoureusement exacte.

18. *Exemple V.* Soit l'équation

$$y + \frac{dy}{dx} = x^4 .$$

Ayant ici $Q = x^4$, on aura

$$q_0 = 0, \quad q_1 = 1, \quad q_2 = 16, \quad q_3 = 81, \quad q_4 = 256, \dots;$$

donc, en commençant par la valeur 4,

$$\begin{array}{r} \text{Pour } x=4, \quad y=120, \\ \quad \quad \quad 5, \quad \quad \quad 329, \\ \quad \quad \quad 6, \quad \quad \quad 744, \\ \quad \quad \quad \dots \end{array}$$

valeurs comprises dans la formule $x^4 - 4x^3 + 12x^2 - 24x + 24$, en sorte qu'on aura

$$y = Ae^{-x} + x^4 - 4x^3 + 12x^2 - 24x + 24;$$

ce qui est rigoureusement exact.

19. Soit plus généralement l'équation

$$y + \frac{dy}{dx} = a + bx + cx^2 + dx^3 + ex^4;$$

on aura

$$Q = a + bx + cx^2 + dx^3 + ex^4;$$

d'où

$$\begin{array}{l} q_0 = a, \\ q_1 = a + b + c + d + e, \\ q_2 = a + 2b + 4c + 8d + 16e, \\ q_3 = a + 3b + 9c + 27d + 81e, \\ q_4 = a + 4b + 16c + 64d + 256e; \\ q_5 = a + 5b + 25c + 125d + 625e, \\ \dots \end{array}$$

donc, en partant de la valeur 5,

$$\begin{aligned} \text{Pour } x=5, & \quad y=a+4b+17c+74d+329e, \\ & \quad 6, \quad a+5b+26c+138d+744e, \\ & \quad 7, \quad a+6b+37c+232d+1473e, \\ & \quad \dots \end{aligned}$$

résultats qui sont tous compris dans la formule générale

$$a+b(x-1)+c(x^2-2x+2)+d(x^3-3x^2+6x-6)+e(x^4-4x^3+12x^2-24x+24):$$

de sorte qu'on doit avoir

$$\begin{aligned} y &= Ae^{-x} + a \\ & \quad + b(x-1) \\ & \quad + c(x^2-2x+2) \\ & \quad + d(x^3-3x^2+6x-6) \\ & \quad + e(x^4-4x^3+12x^2-24x+24). \end{aligned}$$

20. Les résultats obtenus dans ce mémoire ont tous été exacts et rigoureux; et ils ont dû l'être à raison de ce que les exposans de toutes les puissances dont se composait la quantité Q étaient *entiers* et *positifs*. Dans le mémoire qui suivra celui-ci, nous prendrons pour Q des fonctions quelconques de x ; nous leur appliquerons la même méthode; nous serons conduits à des résultats absolument neufs, et nous aurons lieu d'être satisfaits de leur exactitude; conséquence nécessaire de l'approximation que nous avons employée. La seule difficulté qui reste sera la détermination de la *constante*. Dans le cas que nous venons d'exposer, savoir $y + \frac{dy}{dx} = Q$, cette constante était Ae^{-x} ; encore ne sommes-nous parvenus à ceci que par une induction très-permise; mais qui eut été difficile dans d'autres cas quelconques.

ANALISE