

ALAIN ROBERT

## **Le théorème des accroissements finis $p$ -adique**

*Annales mathématiques Blaise Pascal*, tome 2, n° 1 (1995), p. 245-258

[http://www.numdam.org/item?id=AMBP\\_1995\\_\\_2\\_1\\_245\\_0](http://www.numdam.org/item?id=AMBP_1995__2_1_245_0)

© Annales mathématiques Blaise Pascal, 1995, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Annales mathématiques Blaise Pascal » (<http://math.univ-bpclermont.fr/ambp/>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme  
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

## LE THEOREME DES ACCROISSEMENTS FINIS $p$ -ADIQUE

Alain ROBERT, Université de Neuchâtel, Suisse

**Résumé.** La formule du calcul différentiel et intégral réel

$$|f(t+h) - f(t)| \leq |h| \cdot \|f'\|$$

est valable pour les fonctions  $C^1$ . Malheureusement, on sait qu'il existe des fonctions  $p$ -adiques de dérivée identiquement nulle et qui ne sont localement constantes au voisinage d'aucun point (cette remarque avait déjà été faite par J. Dieudonné cf. [1]). Même pour les fonctions polynomiales  $p$ -adiques, le théorème n'est pas valable comme l'exemple suivant le montre. Prenons en effet  $f(t) = t^p$ , d'où  $f'(t) = pt^{p-1}$  et avec la norme uniforme sur le disque unité  $p$ -adique  $\|f'\| = |p| = 1/p < 1$  tandis que  $f(1) - f(0) = 1$ . En prenant encore  $f(t) = t^{p^v}$ , on voit qu'on peut même rendre  $\|f'\|$  arbitrairement petite, tout en maintenant la différence  $f(1) - f(0) = 1$  constante. On se propose de montrer qu'il y a une constante  $r_p < 1$  universelle (indépendante de  $f$ ) telle que le théorème des accroissements finis *reste valable pour*  $|h| \leq r_p$ .

### 1. NOTATIONS ET PREMIERE FORME DU THEOREME.

Considérons une extension complète  $K$  de  $\mathbb{Q}_p$  et  $E$  un espace de Banach ultramétrique sur  $K$ . Pour toute suite  $a = (a_n)_{n \geq 0}$  tendant vers zéro dans  $E$ , i.e.  $a \in c_0(E)$ , on peut considérer la série formelle restreinte  $\sum_{n \geq 0} a_n T^n$ . Grâce au fait que  $\|a_n\| \rightarrow 0$ , la série  $\sum_{n \geq 0} a_n t^n$  va converger dans l'espace complet  $E$  pour  $|t| \leq 1$ , ( $t \in K$ ). Une telle suite définit une application

$$f : B_{\leq 1}(K) \longrightarrow E, \quad t \mapsto f(t) = \sum_{n \geq 0} a_n t^n$$

par son développement en série. La *norme* de  $f$  est définie par

$$\|f\| = \sup_{n \geq 0} \|a_n\| = \max_{n \geq 0} \|a_n\|.$$

Lorsque  $|t| \leq 1$ , on a évidemment  $\|f(t)\| \leq \|f\|$ .

**Proposition 1.** *Lorsque le corps résiduel  $k$  de  $K$  est infini, on a*

$$\|f\| = \sup_{|t| \leq 1} \|f(t)\| = \max_{|t|=1} \|f(t)\|.$$

**Preuve:** Rappelons les notations:  $k = \tilde{K} = R/P$  est le quotient de l'anneau  $R = B_{\leq 1}(K)$  par son idéal maximal  $P = B_{< 1}(K)$ . Posons  $c = \|f\|$ . Il est loisible de supposer  $c > 0$ . La boule  $B_{\leq c}(E)$  est un  $R$ -module et son quotient

$$\tilde{E} = B_{\leq c}(E)/B_{< c}(E)$$

un espace vectoriel sur le corps résiduel  $k$ . La fonction  $f$  fournit un polynôme vectoriel  $\tilde{f} = \sum \tilde{a}_n \cdot T^n$  ayant au moins un coefficient non nul puisque, par hypothèse,  $\|f\| = c$ . On peut choisir une forme linéaire  $\varphi$  sur  $\tilde{E}$  telle que  $\varphi(\tilde{a}_n) \neq 0$  pour un tel coefficient. Le polynôme scalaire

$$\varphi \circ \tilde{f} = \sum \alpha_n T^n = \sum \varphi(\tilde{a}_n) \cdot T^n \in k[T]$$

est non nul: il ne peut s'annuler en tous les points du corps infini  $k$ . On peut trouver  $\tau \in k^\times$  tel que  $\varphi \circ \tilde{f}(\tau) \neq 0$ , et a fortiori

$$\|f(t)\| = c$$

pour tout  $t \in R$ ,  $\tau \equiv t \pmod{P}$ . Comme on a choisi  $\tau \neq 0$ , on a  $|t| = 1$ . ■

**Proposition 2.** *Si  $|s| \leq 1$  et  $|t| \leq 1$ , on a*

$$\|f(s) - f(t)\| \leq |s - t| \cdot \|f\|.$$

**Preuve:** Ecrivons simplement

$$\begin{aligned} f(s) - f(t) &= \sum_{n \geq 0} a_n s^n - \sum_{n \geq 0} a_n t^n = \sum_{n \geq 0} a_n (s^n - t^n) \\ &= (s - t) \sum_{n \geq 1} a_n (s^{n-1} + s^{n-2}t + \dots + t^{n-1}). \end{aligned}$$

L'inégalité en résulte, car on a

$$|s^{n-1} + s^{n-2}t + \dots + t^{n-1}| \leq \max_{i+j=n-1} |s^i t^j| \leq 1$$

sous l'hypothèse faite. ■

Cette proposition montre par exemple que la boule unité de l'algèbre des séries formelles restreintes (aussi appelée *algèbre de Tate*) est uniformément équicontinue sur le disque unité fermé. On peut réécrire l'inégalité de la proposition 2 sous la forme équivalente

$$|f(t+h) - f(t)| \leq |h| \cdot \|f\|$$

si  $|t| \leq 1$  et  $|h| \leq 1$ . Mais comme

$$\|f'\| = \sup_{n \geq 1} \|na_n\| \leq \sup_{n \geq 0} \|a_n\| = \|f\|,$$

on voit bien que le théorème des accroissements finis ultramétrique visé est plus précis que l'équicontinuité qui vient d'être démontrée.

**Théorème 1:** Lorsque  $f = \sum_{n \geq 0} a_n t^n$  a des coefficients  $a_n$  dans un espace de Banach  $E$  ultramétrique sur un corps complet  $K$  avec  $\|a_n\| \rightarrow 0$ , on a

$$\|f(t+h) - f(t)\| \leq |t| \cdot \|f'\|$$

si  $|t| \leq 1$  et  $|h| \leq r_p = |p|^{1/(p-1)}$ .

**Preuve:** La formule de Taylor donne

$$f(t+h) - f(t) = \sum_{k \geq 1} h^k \cdot \frac{D^k f(t)}{k!} = h \cdot \sum_{k \geq 1} \frac{h^{k-1}}{k!} D^{k-1} f'(t)$$

avec  $f' = \sum_{n \geq 1} na_n t^{n-1}$ . Il est clair que  $\|D\| \leq 1$  d'où  $\|D^{k-1} f'\| \leq \|f'\|$  et

$$\|D^{k-1} f'\| \leq \sup_{n \geq k} \|a_n\| \rightarrow 0 \quad (k \rightarrow \infty).$$

Le théorème sera démontré dès lors que l'on aura montré  $|h^{k-1}/k!| \leq 1$ . Cette condition pour  $k = p$  requiert  $|h|^{p-1} \leq |p|$ , i.e.  $|h| \leq r_p$ . Lorsqu'elle est satisfaite, on aura

$$|h|^{k-1} \leq |p|^{(k-1)/(p-1)} \leq |k!|$$

car, en effet

$$\text{ord}_p(k!) = \frac{k - S_p(k)}{p-1} \leq \frac{k-1}{p-1}.$$

Alternativement, on peut observer que

$$D^k(x^m) = m(m-1) \cdots (m-k+1) \cdot x^{m-k}, \quad \frac{D^k(x^m)}{k!} = \binom{m}{k} \cdot x^{m-k}$$

d'où  $\|\frac{D^k}{k!}\| \leq 1$  et  $\|\frac{D^k(g)}{k!}\| \rightarrow 0$  lorsque les coefficients de  $g$  tendent vers 0. Puisque

$$f(t+h) - f(t) = h \cdot \sum_{k \geq 1} \frac{h^{k-1}}{k} \cdot \frac{D^{k-1} f'}{(k-1)!}(t)$$

il s'agit de montrer  $|h^{k-1}/k| \leq 1$ . Pour  $k = p$ , cette condition requiert bien  $|h| \leq r_p = |p|^{1/(p-1)}$ . Supposons-la satisfaite et prenons un entier  $k \geq 1$  d'ordre  $p$ -adique  $\nu$ . Alors

$$k = p^\nu m \geq p^\nu$$

et  $\left| \frac{h^{k-1}}{k} \right| \leq \frac{r_p^{k-1}}{|p|^\nu} \leq r_p^{p^\nu-1} \cdot |p|^{-\nu} = |p|^e$ . L'exposant est positif

$$e = \frac{p^\nu - 1}{p - 1} - \nu = (1 + p + \cdots + p^{\nu-1}) - \nu \geq 0$$

et la démonstration est achevée. ■

**Remarque:** La limite de validité du théorème des accroissements finis peut être déduite de l'examen du seul exemple  $f(t) = t^p$  car

$$|f(h) - f(0)| = |h^p|$$

doit être majoré par  $|h| \cdot \|f'\| = |h| \cdot |p|$ . Il en résulte déjà la condition  $|h|^{(p-1)} \leq |p|$ . D'autre part, on sait bien que le nombre  $r_p = |p|^{1/(p-1)}$  est le rayon de convergence de l'exponentielle  $p$ -adique. Il est assez naturel que cette limitation apparaisse (même pour les polynômes) si on pense à la formule de Taylor

$$f(t+h) = \sum_{k \geq 0} h^k \cdot \frac{f^{(k)}(t)}{k!} = [\exp(hD) \cdot f](t)$$

écrite à l'aide de l'opérateur de dérivation  $D$ . Néanmoins, l'exponentielle  $p$ -adique  $e^z$  ne converge que pour  $|z| < r_p$  (inégalité stricte) alors que le théorème des accroissements finis est valable pour  $|h| \leq r_p$ , en particulier valable pour  $|h| = |p|$  (même si  $p = 2$ ).

**Exemple:** Considérons le polynôme

$$f(T) = (1 + T)^{p^n} - 1 \in \mathbb{Z}_p[T].$$

Son terme constant est nul et on démontre sans peine par induction que

$$f(T) \in T(p, T)^n \subset (p, T)^{n+1} \subset \mathbb{Z}_p[T],$$

où  $(p, T)$  désigne l'idéal de l'anneau  $\mathbb{Z}_p[T]$  engendré par  $p$  et  $T$ . Il en résulte immédiatement que pour tout  $t \in \mathbb{C}_p$

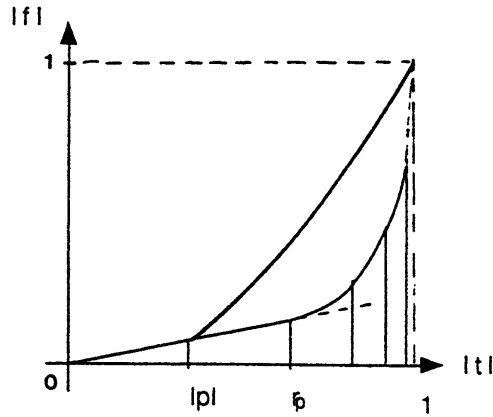
$$|f(t)| \leq |t| \cdot \max(|p|^n, |t|^n)$$

et donc

$$|f(t)| \leq |t| \cdot |p|^n = |t| \cdot \|f'\| \quad \text{pour } |t| \leq |p|,$$

$$|f(t)| \leq |t|^{n+1} \quad \text{pour } |p| \leq |t| \leq 1.$$

Le théorème des accroissements finis montre que la première inégalité persiste dans la région  $|p| \leq |t| \leq r_p$  qui représente une amélioration pour tout  $p \geq 3$ . La méthode du polygone de valuation permet d'évaluer exactement la valeur absolue  $|f(t)|$ . Celle-ci est en effet linéaire jusqu'au premier zéro de  $f$  qui intervient lorsque  $1+t$  est une racine de 1 d'ordre divisant  $p^n$ . Or les racines  $p$ -ièmes de 1 sont situées à distance  $r_p$  de 1. Ensuite le module de  $f$  dépasse l'estimation linéaire. La limitation donnée par le théorème des accroissements finis est donc la meilleure possible.



**Application 1: Numérateurs des nombres de Bernoulli ([2], [3]).**

Dénotons par  $S_k(p)$  la somme des puissances  $k$ -ièmes des entiers  $< p$

$$S_k(p) = \sum_{1 \leq j \leq p-1} j^k$$

$p$  premier et  $k$  entier  $\geq 1$ . Comme  $\mu_{p-1} \subset \mathbb{Z}_p$ , remplaçons dans la somme précédente chaque entier  $j$  par la racine de l'unité  $\zeta_j \in \mu_{p-1}$  qui lui est congrue modulo  $p$

$$j \equiv \zeta_j \pmod{p}.$$

Donc

$$S_k(p) = \sum_{1 \leq j \leq p-1} \zeta_j^k = \sum_{\mu_{p-1}} \zeta^k \pmod{p}$$

et cette dernière est nulle si  $k$  n'est pas multiple de  $p-1$ . On a un peu mieux. En appliquant le théorème des accroissements finis à  $f(x) = x^k$ , donc  $f'(x) = kx^{k-1}$  puis  $\|f'\| = |k|$  ( $k \geq 1$ ), on en tire

$$|\zeta_j^k - i^k| \leq |p| \cdot \|f'\| = |pk|.$$

On peut écrire cette inégalité sous la forme

$$S_k(p) = \sum_{\mu_{p-1}} \zeta^k + pk \cdot u \quad (u \in \mathbb{Z}_p).$$

Ceci étant vu, rappelons quelques propriétés des nombres et polynômes de Bernoulli. On pose

$$\frac{t \exp(xt)}{\exp(t) - 1} = \sum_{k \geq 0} B_k(x) \frac{t^k}{k!}, \quad \frac{t}{\exp(t) - 1} = \sum_{k \geq 0} b_k \frac{t^k}{k!}$$

d'où  $b_k = B_k(0)$ ,  $b_0 = 1$ ,  $b_1 = -1/2$ ,  $b_2 = 1/6, \dots$ ,  $b_{2k+1} = 0$  pour  $k \geq 1$  et inversement

$$B_k(x) = (b+x)^k = \sum_{0 \leq i \leq k} \binom{k}{i} b_{k-i} x^i.$$

On utilise ces polynômes de Bernoulli pour estimer les sommes de puissances

$$S_k(n) = \sum_{0 \leq \ell < n} \ell^k = 0^k + 1^k + \dots + (n-1)^k$$

(avec  $0^k = 0$  si  $k \geq 1$ , tandis que  $0^k = 1$  si  $k = 0$ ). Pour calculer ces sommes, on peut former la fonction génératrice

$$\sum_{k \geq 0} S_k(n) \frac{t^k}{k!} = \sum_{k \geq 0} \sum_{0 \leq \ell < n} \frac{\ell^k t^k}{k!} = \sum_{0 \leq \ell < n} e^{\ell t} = \frac{e^{nt} - 1}{e^t - 1}$$

et en revenant aux polynômes de Bernoulli

$$\sum_{k \geq 0} S_k(n) \frac{t^k}{k!} = \frac{1}{t} \sum_{k \geq 0} (B_k(n) - b_k) \frac{t^k}{k!}$$

d'où

$$S_k(n) = \frac{B_{k+1}(n) - b_{k+1}}{k+1}.$$

On a ainsi

$$S_0(n) = n, \quad S_1(n) = \frac{n(n-1)}{2}, \dots$$

et plus généralement

$$\begin{aligned} S_k(n) &= \frac{1}{k+1} \sum_{1 \leq i \leq k+1} \binom{k+1}{i} n^i b_{k+1-i} \\ &= \sum_{1 \leq i \leq k+1} \frac{1}{i} \binom{k}{i-1} n^i b_{k+1-i} \\ &= n b_k + \sum_{2 \leq i \leq k+1} \frac{1}{i} \binom{k}{i-1} n^i b_{k+1-i}. \end{aligned}$$

Nous utiliserons l'expression précédente pour  $n$  premier, disons  $n = p > 2$

$$\begin{aligned} S_k(p) &= p b_k + \sum_{2 \leq i \leq k+1} \frac{1}{i} \binom{k}{i-1} p^i b_{k+1-i} \\ &= p b_k + p k \cdot \sum_{2 \leq i \leq k+1} \frac{1}{i(i-1)} \binom{k-1}{i-2} p^{i-2} \cdot p b_{k+1-i}. \end{aligned}$$

Cette identité montre (par induction) que  $pb_k \in \mathbb{Z}_p$  et que

$$S_k(p) = pb_k + pk \cdot v$$

avec  $v \in \mathbb{Z}_p$ . En comparant les deux dernières expressions pour la somme  $S_k(p)$

$$S_k(p) = \begin{cases} \sum_{\mu_{p-1}} \zeta^k + pk \cdot u \\ pb_k + pk \cdot v \end{cases}$$

on obtient

$$pb_k = \sum_{\mu_{p-1}} \zeta^k + pk \cdot w \quad (w = u - v \in \mathbb{Z}_p).$$

Lorsque  $k$  n'est pas multiple de  $p-1$ , on a ainsi  $b_k = k \cdot w$  ( $w \in \mathbb{Z}_p$ ) et cela montre que si  $k$  est multiple d'une puissance  $p^\nu$  de  $p$ , alors le numérateur de  $b_k$  est aussi divisible par  $p^\nu$ . C'est un théorème de Kummer (qui a été redécouvert plusieurs fois!). On a démontré

**Théorème 2:** *Les nombres de Bernoulli ont les propriétés suivantes*

- 1/  $pb_k \in \mathbb{Z}_p$  pour tout nombre premier  $p$ ,  $b_k \in \mathbb{Z}_p$  si  $p-1$  ne divise pas  $k$ ;
- 2/ (Kummer)  $\text{ord}_p(b_k) \geq \text{ord}_p(k)$  si  $p-1$  ne divise pas  $k$ ;
- 3/ (von Staudt)  $pb_k \equiv -1 \pmod{p\mathbb{Z}_p}$  si  $p-1$  divise  $k$ .

**Corollaire:** (von Staudt) On a

$$b_k = - \sum_{p-1|k} \frac{1}{p} + m_k \text{ avec } m_k \in \mathbb{Z}$$

(En effet,  $b_k + \sum_{p-1|k} \frac{1}{p}$  est un nombre rationnel qui est entier  $p$ -adique pour tout nombre premier  $p$ : son dénominateur est 1.)

**Application 2: Congruences de coefficients binomiaux.**

Posons  $(1+x)^p = 1 + p \cdot g(x) + x^p$  puis  $f(T) = (1 + T \cdot g(x) + x^p)^n$  de sorte que

$$f(p) = (1 + p \cdot g(x) + x^p)^n = (1+x)^{pn}, \quad f(0) = (1+x^p)^n.$$

Alors le théorème des accroissements finis appliqué à la fonction vectorielle  $f$  (dont les coefficients sont dans l'espace de dimension finie  $E \subset \mathbb{Q}_p[x]$  formé des polynômes de degrés  $\leq pn$ ) va permettre d'évaluer

$$f(p) - f(0) = (1+x)^{pn} - (1+x^p)^n = \sum \binom{np}{j} x^j - \binom{n}{k} x^k.$$



Comme  $\|f'\| \leq |n|$ ,  $|f(p) - f(0)| \leq |pn|$  et on déduit

$$\binom{np}{kp} \equiv \binom{n}{k} \pmod{npZ_p}, \text{ et } \binom{np}{k} \equiv 0 \pmod{npZ_p} \text{ si } p \text{ ne divise pas } k$$

(cette méthode est donnée dans [5]). La deuxième congruence est triviale car

$$\binom{np}{k} = \frac{np}{k} \binom{np-1}{k-1} \in npZ_p$$

(car  $k \in \mathbb{Z}_p^\times$  par hypothèse).

### Application 3: Théorème du point fixe $p$ -adique.

Soit  $K$  une extension finie du corps  $\mathbb{Q}_p$  et  $f \in K\{T\}$  une série formelle restreinte avec  $\|f\| \leq 1$ . Alors  $f$  définit une application continue de la boule unité  $B = B_{\leq 1}(K)$  dans elle-même. Lorsque

$$\|f'\| < 1 \text{ et } \inf \|f(x) - x\| \leq r_p = |p|^{1/(p-1)}$$

$f$  possède un point fixe.

**Preuve:** Par continuité de  $f$  sur la boule compacte  $B$ , on peut trouver  $x_0 \in B$  avec  $|f(x_0) - x_0| \leq r_p$ . Posons alors  $x_{n+1} = f(x_n)$  pour  $n \geq 0$ . On voit, par induction, en utilisant le théorème des accroissements finis

$$|x_{n+1} - x_n| = |f(x_n) - f(x_{n-1})| \leq |x_n - x_{n-1}| \cdot \|f'\| < |x_n - x_{n-1}| \leq r_p.$$

Comme le corps  $K$  est localement compact, sa valuation est discrète et la suite strictement décroissante  $|x_{n+1} - x_n|$  tend vers zéro: c'est une suite de Cauchy. Sa limite est un point fixe de  $f$ . ■

Pour voir que les hypothèses sont nécessaires, on peut considérer l'exemple de  $f(T) = T^p + 1 \in \mathbb{Q}_p[T]$ , d'où  $f'(T) = pT^{p-1}$ ,  $\|f'\| = 1/p \leq r_p < 1$ . On a

$$f(x) - x = x^p - x + 1 \equiv 1 \pmod{p}$$

pour tout  $x \in \mathbb{Z}_p$ . Cette fonction  $f$  n'a pas de point fixe dans la boule unité  $B = \mathbb{Z}_p$  de  $\mathbb{Q}_p$ . Dans une extension convenable (de degré  $p$ ) de  $\mathbb{Q}_p$ , on pourra néanmoins trouver une racine de  $x^p - x + 1 = 0$  !).

## 2. LE THEOREME DES ACCROISSEMENTS FINIS D'ORDRE 2

**Théorème 3:** Avec les mêmes notations que précédemment, si  $|t| \leq 1$ , on a

$$\|f(t+h) - f(t) - f'(t)h\| \leq \left| \frac{t^2}{2} \right| \cdot \|f''\|$$

dès que  $|h| \leq |p|^{1/(p-2)}$  pour  $p \geq 3$ , et dès que  $|h| \leq |\sqrt{2}|$  pour  $p = 2$ .

**Preuve:** On écrit encore la formule de Taylor de  $f$  au point  $t$

$$\begin{aligned} f(t+h) - f(t) - f'(t)h &= \sum_{k \geq 2} h^k \cdot \frac{D^k f(t)}{k!} \\ &= h^2 \cdot \sum_{k \geq 2} \frac{h^{k-2}}{k!} \cdot D^{k-2} f''(t) \\ &= h^2 \cdot \sum_{k \geq 2} \frac{h^{k-2}}{k(k-1)} \cdot \frac{D^{k-2} f''}{(k-2)!}(t). \end{aligned}$$

Comme précédemment

$$\left\| \frac{D^{k-2} f''}{(k-2)!} \right\| \leq \|f''\| \quad (k \geq 2) \quad \text{et} \quad \left\| \frac{D^{k-2} f''}{(k-2)!} \right\| \rightarrow 0.$$

- 1. Pour  $p \neq 2$ , il reste à vérifier

$$\left| \frac{h^{k-2}}{k(k-1)} \right| \leq 1 \quad (k \geq 2).$$

Pour  $k = p$ , ceci requiert  $|h^{p-2}| \leq |p|$ , condition indiquée dans l'énoncé. Lorsqu'elle est satisfaite, si  $\nu = \text{ord}_p k \geq 1$ , on a  $k \geq p^\nu$  et  $|k-1| = 1$  d'où

$$\left| \frac{h^{k-2}}{k(k-1)} \right| \leq \frac{|h|^{p^\nu-2}}{|p|^\nu} \leq |p|^e$$

avec un exposant  $e$  valant

$$e = \frac{p^\nu - 2}{p - 2} - \nu \geq \frac{p^\nu - 1}{p - 1} - \nu \geq 0.$$

(L'homographie  $\frac{p^\nu - x}{p - x}$  est croissante jusqu'en  $x = p$ -asymptote verticale- car elle vaut  $p^{\nu-1} \geq 1$  en  $x = 0$ , et est donc au-dessus de son asymptote horizontale jusqu'en  $x = p$ .) Dans le cas  $\nu = \text{ord}_p(k-1) \geq 1$ , on a  $k \geq p^\nu + 1$  et les estimations précédentes sont a fortiori satisfaites. Finalement,  $\text{ord}_p(k-1) = \text{ord}_p(k) = 0$  implique

$$|k(k-1)| = 1$$

et la démonstration est terminée.

- 2. Dans le cas  $p = 2$ , on met  $h^2/2$  en évidence et il reste à montrer

$$\left| \frac{h^{k-2}}{k(k-1)/2} \right| \leq 1$$

si  $|h| \leq |\sqrt{2}|$ . Le terme  $k = 4$  requiert  $|h^2/2| \leq 1$  qui fournit le domaine  $|h| \leq |\sqrt{2}|$ . Supposons ainsi  $|h| \leq |\sqrt{2}|$ . Si  $\nu = \text{ord}_2(k) \geq 1$ ,

$$k \geq 2^\nu \quad \text{et} \quad |k(k-1)/2| = |2|^{\nu-1},$$

d'où

$$\left| \frac{h^{k-2}}{k(k-1)/2} \right| \leq \frac{|h|^{2^{\nu}-2}}{|2|^{\nu-1}} \leq |2|^{2^{\nu-1}-1-(\nu-1)} = |2|^e.$$

Comme nous supposons  $\nu \geq 1$ , l'exposant  $e = 2^{\nu-1} - \nu \geq 0$  est positif. On peut traiter de façon similaire le cas où  $\nu = \text{ord}_2(k-1) \geq 1$ .

**Remarque:** La condition sur la valeur absolue de l'accroissement est moins restrictive pour  $p = 2$  mais l'inégalité est aussi moins forte dans ce cas puisque le dénominateur 2 se fait sentir dans  $|h^2/2|$  (alors qu'il passe inaperçu si  $p \geq 3$ ).

**Application 4.** Soit  $K$  une extension finie de  $\mathbb{Q}_p$ ,  $R = B_{\leq 1}$  son anneau d'entiers d'idéal maximal  $P$ . Pour  $n \in \mathbb{N}$  (ou même  $n \in \mathbb{Z}_p$ ), on a ([4], p.33-34)

$$(1+x)^n \equiv 1 + nx \pmod{pnxR}$$

dès que  $x \in 2pR$ .

On prendra ici  $f(T) = (1+T)^n$ , d'où  $f''(T) = n(n-1)(1+T)^{n-2}$  et

$$\|f''\| = |n(n-1)| \text{ si } n \geq 2.$$

Pour  $|x| \leq |p|^{1/(p-2)}$  (resp.  $\leq |\sqrt{2}|$  si  $p = 2$ ) on ainsi

$$|(1+x)^n - 1 - nx| \leq \left| \frac{x^2}{2} \right| \cdot \|f''\| \leq |nx| \cdot \left| \frac{x}{2} \right|.$$

En particulier, lorsque  $x \in 2pR$ ,  $|x/2| \leq |p|$  et l'inégalité précédente fournit le résultat souhaité.

**Application 5.** Numérateurs des nombres harmoniques, théorème de Wolstenholme.

Les nombres harmoniques  $h_n \in \mathbb{Q}$  sont définis par

$$h_n = 1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n}.$$

On a par exemple

$$h_2 = \frac{3}{2}, \quad h_3 = \frac{11}{6}, \quad h_4 = \frac{25}{12}, \quad h_6 = \frac{49}{20}, \quad h_{10} = \frac{11^2 \cdot 61}{2520}, \dots$$

De façon générale, pour tout nombre premier  $p$ , le dénominateur de  $h_{p-1}$  est premier à  $p$ . Modulo  $p$ , on a

$$h_{p-1} \equiv \sum_{0 \neq \zeta \in \mathbb{F}_p^\times} \frac{1}{\zeta} = 0 \text{ si } p > 2.$$

Donc le numérateur de  $h_{p-1}$  est divisible par  $p$  pour  $p \geq 3$ . Le théorème de Wolstenholme précise la situation lorsque  $p \geq 5$ . Il affirme que

*pour tout nombre premier  $p$  supérieur à 3, le numérateur de  $h_{p-1}$  est divisible par  $p^2$ .*

**Preuve:** (M. Zuber). Introduisons le polynôme

$$f(T) = (T-1)(T-2)\cdots(T-p+1)$$

de degré  $p-1$  pair. On constate que  $f(p-T) = f(T)$  d'où

$$f(p) = f(0), \quad -f'(p-T) = f'(T), \quad f''(p-T) = f''(T), \dots$$

(Explicitement  $f(0) = (-1)(-2)\cdots(-p+1) = (-1)^{p-1}(p-1)! = (p-1)! = f(p)$  car  $p$  est impair.) La dérivée de  $f$  vaut

$$f'(T) = \sum_{1 \leq i \leq p-1} (T-1)\cdots(T-i)\cdots(T-p+1)$$

(où le circonflexe indique un terme à omettre du produit), d'où

$$f'(0) = -f'(p).$$

La dérivée logarithme  $f'/f = \sum_{1 \leq i \leq p-1} \frac{1}{T-i}$  permet de calculer  $h_{p-1}$

$$h_{p-1} = -\frac{f'}{f}(0) = \frac{f'}{f}(p).$$

Le théorème de Wolstenholme revient à dire  $h_{p-1} \in p^2\mathbb{Z}_p$ , i.e.  $|h_{p-1}| \leq |p|^2$ . Mais puisque  $f(0)$  est premier à  $p \neq 2$

$$|h_{p-1}| = \left| \frac{f'(0)}{f(0)} \right| = |f'(0)| = |2f'(0)| = |f'(p) - f'(0)|.$$

Le théorème des accroissements finis (d'ordre 2) permet d'estimer

$$|f'(p) - f'(0) - pf''(0)| \leq |p|^2 \cdot \|f'''\| \leq |p|^2$$

(car  $f \in \mathbb{Z}[T]$  implique  $\|f^{(k)}\| \leq 1$  pour toutes les dérivées de  $f$ ). Or on sait que  $f(T) \equiv T^{p-1} - 1 \pmod{p}$ , d'où  $f'(T) \equiv (p-1)T^{p-2}$ ,  $f''(T) \equiv (p-1)(p-2)T^{p-3}$  et finalement  $f'''(0) \equiv 0 \pmod{p}$  dès que  $p > 3$ . Dans ce cas, on a

$$f'(p) - f'(0) \equiv f'(p) - f'(0) - pf''(0) \equiv 0 \pmod{p^2\mathbb{Z}_p}.$$

■

### 3. LE THEOREME DE ROLLE $p$ -ADIQUE.

Il s'agit du théorème analogue au théorème classique (réel) qui fournit l'existence d'une valeur intermédiaire  $t \leq \tau \leq t + h$  pour laquelle

$$f(t + h) = f(t) + h \cdot f'(\tau)$$

(rappelons le fait que cette forme n'est valable que pour les fonctions  $f$  d'une variable à valeurs scalaires). Si  $f \in \mathbb{C}_p[[x]]$  est une série formelle, nous dénoterons par  $r_f \in [0, \infty]$  son rayon de convergence. On sait que

$$r_f = \sup\{r \geq 0 : a_n r^n \rightarrow 0\} = \frac{1}{\limsup |a_n|^{1/n}}.$$

**Théorème 4.** a) Soit  $f \in \mathbb{C}_p[[x]]$  avec  $r_f > 1$  (donc  $f \in \mathbb{C}_p\{x\}$ ); supposons que  $f$  a deux zéros  $a \neq b$  dans  $B_{\leq 1}$  suffisamment proches

$$|a - b| \leq r_p = |p|^{1/(p-1)}.$$

Alors  $f$  s'annule dans  $B_{\leq 1}$ .

b) Soit  $f \in \mathbb{C}_p\{x\}$  avec  $r_f > 1$  : supposons que  $f$  a deux zéros  $a \neq b$  dans  $B_{\leq 1}$  suffisamment proches

$$|a - b| < r_p = |p|^{1/(p-1)}.$$

Alors  $f$  s'annule dans  $B_{< 1}$ .

**Preuve:** Développant  $f$  en série de puissances centrée au voisinage de  $b$ , on voit qu'il suffit de considérer le cas où  $f$  s'annule en 0 et en  $a$  avec

$$|a| \leq r_p \quad (\text{resp. } < r_p).$$

Posons  $f(x) = \sum_{n \geq 1} a_n x^n$  et supposons  $a_1 \neq 0$  (sinon  $f'$  s'annule en 0 et le théorème est démontré). On peut aussi supposer que  $|a| = r$  est le plus petit rayon critique  $> 0$ . Il y a donc un entier  $n > 1$  avec

$$|a_1| r = |a_n| r^n,$$

d'où

$$\left| \frac{a_1}{a_n} \right| = r^{n-1} \leq r_p^{n-1} \quad (\text{resp. } < r_p^{n-1}).$$

Mais si  $\nu = \text{ord}_p n$ , disons  $n = p^\nu \cdot m$ , on a

$$\frac{n-1}{p-1} = \frac{p^\nu m - 1}{p-1} \geq \frac{p^\nu - 1}{p-1} = p^{\nu-1} + \dots + p + 1 \geq \nu$$

(avec des égalités si  $m = 1$  et  $\nu = 1$ ). Revenant à ce que nous avons trouvé, on en déduit

$$\left| \frac{a_1}{a_n} \right| \leq r_p^{n-1} = |p|^{\frac{n-1}{p-1}} \leq |p|^\nu = |n|$$

puis

$$|a_1| \leq |na_n| \text{ (resp. } < |na_n| \text{)}.$$

Ceci montre que la série de puissances de  $f'$  admet  $r = 1$  (resp. un rayon  $< 1$ ) comme rayon critique. Il en résulte que  $f'$  doit s'annuler dans  $B_{\leq 1}$  (resp.  $B_{< 1}$ ) et le théorème est complètement démontré. ■

On en déduit la version du développement limité avec point intermédiaire.

**Corollaire 1.** Si  $f \in \mathbb{C}_p[[x]]$  possède un rayon de convergence  $r_f > 1$ , alors pour tout couple de points  $a, b$  de  $B_{\leq 1}$  satisfaisant  $|a - b| \leq r_p$ , il existe un point  $\xi$  de la boule unité  $B$  avec

$$f(b) - f(a) = (b - a) \cdot f'(\xi).$$

**Corollaire 2.** Si  $f \in \mathbb{C}_p\{x\}$  et  $|a - b| < r_p$ , il existe  $\xi \in B_{< 1}$  avec

$$f(b) - f(a) = (b - a) \cdot f'(\xi).$$

**Preuve:** Comme dans le cas classique, on considérera la fonction

$$\varphi(x) = \begin{vmatrix} f(a) & f(x) & f(b) \\ a & x & b \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$$

qui s'annule en  $x = a$  et  $x = b$  et dont la dérivée

$$\varphi'(x) = \begin{vmatrix} f(a) & f'(x) & f(b) \\ a & 1 & b \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

doit s'annuler dans la boule correspondant à la situation ...

**Exemple:** Prenons  $f = x^p - px$  et choisissons une racine  $(p-1)$ -ième de  $p$  dans  $\mathbb{C}_p$ . Alors  $f$  s'annule en

$$x = 0 \text{ et } x \in \mu_{p-1} \cdot p^{1/(p-1)}.$$

Deux racines distinctes de  $f$  sont donc à distance  $r_p$ . Les zéros de  $f'$  sont les zéros de  $f'/p = x^{p-1} - 1$ , donc les éléments de  $\mu_{p-1}$ . Ces zéros sont sur la sphère unité. Plus généralement, si  $f = x^{p^\nu} - p^\nu x$ , les zéros de  $f'$  sont encore les racines de 1 d'ordre divisant  $p^\nu - 1$  (donc situés sur la sphère unité), tandis que les zéros de  $f$  sont les éléments

$$0 \text{ et } \zeta \cdot p^{\nu/(p^\nu-1)} \text{ (où } \zeta \in \mu_{p^\nu-1} \text{)}.$$

## REFERENCES:

- [1] Dieudonné J. : Sur les fonctions analytiques  $p$ -adiques,  
*Bulletin des Sc. Math. 2<sup>e</sup> série t. 58 (mai-Juin 1944) p. 79-95*  
[Choix d'oeuvres mathématiques, Hermann 1981, vol. 1, p. 177-192].
- [2] Girstmair K. : A Theorem on the Numerators of the Bernoulli  
Numbers, *The American Math. Monthly* vol. 97, nb. 2, 1990 pp. 136-138.
- [3] Robert A. : A Note on the Numerators of the Bernoulli Numbers,  
*Expositiones Math.* 9 (1991), pp. 189-191.
- [4] Weil A. : Basic Number Theory. *Springer Verlag* (1967).
- [5] Zuber M. : Propriétés  $p$ -adiques de polynômes classiques,  
*Thèse 1992. Inst. de Mathématiques. CH-2007 Neuchâtel.*

Alain Robert  
Institut de Mathématiques  
Emile-Argand 11  
CH-2007 NEUCHÂTEL  
(Suisse)