ANNALES DE L'I. H. P.

PIERRE HILLION
JEAN-PIERRE VIGIER

Sur les équations d'ondes associées à la structure des bosons

Annales de l'I. H. P., tome 17, nº 3 (1962), p. 209-228
<http://www.numdam.org/item?id=AIHP_1962__17_3_209_0>

Sur les équations d'ondes associées à la structure des bosons

par

Pierre HILLION et Jean-Pierre VIGIER,
Institut Henri Poincaré (Paris).

Introduction. — Dans une étude antérieure [1], on a montré qu'on pouvait associer à la structure des particules élémentaires des systèmes d'ondes permanentes caractérisées par des équations invariantes sous le groupe des rotations tridimensionnelles complexes conjuguées et dont les vecteurs d'onde sont les éléments de l'espace vectoriel invariant sous la représentation $\mathcal{D}(l^+, l^-)$ ou $\mathcal{D}(l^-, l^+)$ de ce groupe, l^+ et l^- prenant soit des valeurs entières, soit des valeurs demi-entières et ceci indépendamment l'un de l'autre.

Par analogie avec ce qui se fait habituellement pour le groupe de Lorentz (analogie justifiée par l'isomorphisme existant entre ce dernier groupe et celui des rotations tridimensionnelles complexes conjuguées) on associe aux bosons les vecteurs d'ondes des espaces pour lesquels la somme $l^+ + l^-$ est entière. Dans cette étude on se limitera aux deux cas les plus simples :

$$l^+ = l^- = \frac{1}{2}, \qquad \{l^+, l^-\} = \{1, 0\}.$$

On a alors établi les résultats suivants [1] :

Comme remarque préliminaire observons que dans le travail qu'on vient de mentionner il faut distinguer deux parties, dans la première on a donné explicitement les formes des spineurs de rang $2l^+ + 2l^-$, cor-

---

(1) P. Hillion et J.-P. Vigier, *Les ondes associées à une structure interne des particules* (*Ann. Ints. H. Poincaré*, t. 17, fasc, II, 1961, p. 149).

respondant aux représentations $\mathcal{D}(l^+, l^-)$ et $\mathcal{D}(l^-, l^+)$ et montré que dans le cas particulier $l^+ = l^- = \frac{1}{2}$ on pouvait avec ces spineurs construire des quadrivecteurs A_μ et dans l'autre cas particulier $\{l^+, l^-\} = \{1, 0\}$ des tenseurs antisymétriques self-duaux $F_{ij}^{m',+}$, $F_{ij}^{m',-}$, satisfaisant respectivement aux représentations $\mathcal{D}(1, 0)$ et $\mathcal{D}(0, 1)$.

Dans une seconde partie, partant de l'équation différentielle du second ordre :

$$(J_k^+ J_k^+ + J_k^- J_k^- - \chi^2)\,\varphi = 0,$$

où φ est un scalaire, on a déterminé les équations par les vecteurs d'onde satisfaisant aux représentations $\mathcal{D}(l^+, l^-)$ et $\mathcal{D}(l^-, l^+)$. Le problème qu'on se propose d'examiner est le suivant : dans les deux cas particuliers envisagés peut-on confondre les vecteurs d'onde respectivement avec les quadrivecteurs A_μ et les tenseurs antisymétriques self-duaux $F_{ij}^{m',+}$ et $F_{ij}^{m',-}$, et comme question connexe, dans l'affirmative, comment classer tous les vecteurs d'onde solutions de ces équations.

Pour répondre à la première de ces questions, il faut observer que l'équation précédente peut être séparable ou non; dans le premier cas elle est remplacée par l'ensemble de deux équations

$$(J_k^+ J_k^+ - \chi_\alpha^2)\,\varphi = 0, \qquad (J_k^- J_k^- - \chi_\beta^2)\,\varphi = 0,$$

avec

$$\chi^2 = \chi_\alpha^2 + \chi_\beta^2.$$

Dans l'étude générale qu'on a donnée de ces équations on a étudié les formalismes correspondants à ces deux possibilités mais on avait observé que pour des spineurs exprimés avec les fonctions $Z_{l^+, l^-, s'}^{m^+, m^-, m'}(\omega^+, \omega^-)$ et en l'absence d'interactions on se trouvait dans le cas le plus simple d'une équation séparable. C'est donc uniquement cette possibilité qu'on envisagera tout au long de cette étude.

D'après les propriétés des fonctions $Z_{l^+, l^-, s'}^{m^+, m^-, m'}(\omega^+, \omega^-)$, on peut alors répondre par l'affirmative à la première question posée précédemment :

a. les quadrivecteurs A_μ formés avec les spineurs de second rang du type $\Phi^{r}{}_{\dot{s}}$, $\Psi^{r}{}_{\dot{s}}$, $\chi^{r}{}_{\dot{s}}$. $\Omega^{r}{}_{\dot{s}}$ sont les vecteurs d'onde de la représentation $\mathcal{D}\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$;

b. les tenseurs antisymétriques self-duaux $F_{ij}^{m',+}$ et $F_{ij}^{m',-}$ sont les vecteurs d'onde respectivement des représentations $\mathcal{D}(1, 0)$ et $\mathcal{D}(0, 1)$.

D'une façon précise on a les résultats suivants :

a. Représentation $\mathcal{D}\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$. — Le nombre quantique s' dont on trouvera la définition dans l'étude ci-dessus mentionnée prend les valeurs 1 et 0.

On se limitera ici à la seule valeur $s' = 0$.

Le vecteur d'onde est un quadrivecteur $A_\mu (\mu \sim 1, 2, 3, 4)$ satisfaisant simultanément aux deux équations

$$(J_k^+ J_k^+ - \chi^2)\, A_\mu = 0, \qquad (J_k^- J_k^- - \chi^2)\, A_\mu = 0,$$

ici

$$\chi_\alpha^2 = \chi_\beta^2,$$

où J_k^+ et J_k^- sont des opérateurs moments cinétiques exprimés respectivement en fonction des angles d'Euler :

$$\omega^+ = \{\varphi^+, \theta^+, \psi^+\}, \qquad \omega^- = \{\varphi^-, \theta^-, \psi^-\}$$

et où les composantes de A_μ sont formées avec les fonctions propres $Z_{\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 0}^{m^+, m^-, 0}(\omega^+, \omega^-)$ des opérateurs $J_k^+ J_k^+$, J_3^+, $J_k^- J_k^-$, J_3^-, $S'_k S'_k$, S'_3 avec

$$S'_k = J'^+_k + J'^-_k,$$

J'^+_k et J'^-_k étant les projections des moments cinétiques sur le repère mobile. (J_k^+ et J_k^- sont les projections sur le repère fixe.)

Dans toute cette étude les indices latins varient de 1 à 3 et les indices grecs de 1 à 4.

b. Représentations $\mathcal{D}(1, 0)$ *et* $\mathcal{D}(0, 1)$. — Les tenseurs antisymétriques self-duaux $F_{ij}^{m'+}$ et $F_{ij}^{m'-}$ satisfont chacun à l'équation ci-dessous :

$$(J_k^+ J_k^+ - \chi^2)\, F_{ij}^{m'+} = 0, \qquad (J_k^- J_k^- - \chi^2)\, F_{ij}^{m'-} = 0,$$

on remarquera que pour cette représentation s' prend seulement la valeur 1, donc $m' = 1, 0, -1$.

On se propose alors dans la suite de cette étude :

a. de classer effectivement tous les vecteurs indépendants de l'espace des quadrivecteurs A_μ et de l'espace des tenseurs antisymétriques F_{ij}^+ et F_{ij}^- ;

b. d'étudier comment se comportent chacun des vecteurs indépendants de la précédente classification sous les transformations caractérisées par les opérateurs J_3^+, J_3^-, S'_3, opérateurs qui comme on l'a montré sont des constantes du mouvement;

c. on cherchera s'il existe un lien entre la classification précédente et la classification des particules élémentaires de Nishijima-Gell-Mann et dans l'affirmative à interpréter les opérateurs spin isotopique, étrangeté, nombre de baryons.

1. Vecteurs d'onde associés à l'espace de la représentation $\mathcal{D}\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$ ($s' = 0$). — 1.1. Classification des vecteurs d'onde indépendants. — Considérons donc l'espace des quadrivecteurs A_μ solutions de l'équation

$$(1) \qquad (J_k^+ J_k^+ - \chi^2) A_\mu = 0, \qquad (J_k^- J_k^- - \chi^2) A_\mu = 0,$$

où A_μ a pour composantes des combinaisons linéaires des fonctions $Z_{\frac{1}{2},\frac{1}{2},0}^{m^+,m^-,0}(\omega^+, \omega^-)$. Cet espace étant de dimensions 4, il existe quatre quadrivecteurs indépendants. Nous avons obtenu [1] explicitement l'expression de l'un de ces quadrivecteurs qu'on notera $A_\mu^{(1)}$.

$$(2) \qquad A_\mu^{(1)} = \left\{ \begin{aligned} A_1^{(1)} &= \frac{1}{2}\left(Z_{\frac{1}{2},\frac{1}{2},0}^{-\frac{1}{2},-\frac{1}{2},0}(\omega^+, \omega^-) - Z_{\frac{1}{2},\frac{1}{2},0}^{\frac{1}{2},\frac{1}{2},0}(\omega^+, \omega^-) \right), \\ A_2^{(1)} &= \frac{1}{2i}\left(Z_{\frac{1}{2},\frac{1}{2},0}^{-\frac{1}{2},-\frac{1}{2},0}(\omega^+, \omega^-) + Z_{\frac{1}{2},\frac{1}{2},0}^{\frac{1}{2},\frac{1}{2},0}(\omega^+, \omega^-) \right), \\ A_3^{(1)} &= \frac{1}{2}\left(Z_{\frac{1}{2},\frac{1}{2},0}^{\frac{1}{2},-\frac{1}{2},0}(\omega^+, \omega^-) + Z_{\frac{1}{2},\frac{1}{2},0}^{-\frac{1}{2},\frac{1}{2},0}(\omega^+, \omega^-) \right), \\ A_4^{(1)} &= \frac{1}{2i}\left(Z_{\frac{1}{2},\frac{1}{2},0}^{\frac{1}{2},-\frac{1}{2},0}(\omega^+, \omega^-) - Z_{\frac{1}{2},\frac{1}{2},0}^{-\frac{1}{2},\frac{1}{2},0}(\omega^+, \omega^-) \right). \end{aligned} \right.$$

Pour déterminer les trois autres vecteurs indépendants on introduit les opérateurs

$$(3) \qquad P^+ = J_1^+ + jJ_2^+, \qquad Q^+ = J_1^+ - jJ_2^+;$$

$$(4) \qquad P^- = J_1^- + jJ_2^-, \qquad Q^- = J_1^- - jJ_2^-.$$

D'une façon générale, on a les relations [2]

$$(5) \quad \left\{ \begin{aligned} P^+ Z_{l^+,l^-,s'}^{m^+,m^-,m'}(\omega^+, \omega^-) &= [(l^+ - m^+)(l^+ + m^+ + 1)]^{\frac{1}{2}} Z_{l^+,l^-,s'}^{m^+ + 1,m^-,m'}(\omega^+, \omega^-), \\ P^- Z_{l^+,l^+,s'}^{m^+,m^-,m'}(\omega^+, \omega^-) &= [(l^- - m^-)(l^- + m^- + 1)]^{\frac{1}{2}} Z_{l^+,l^-s'}^{m^+,m^- + 1,m'}(\omega^+, \omega^-), \\ Q^+ Z_{l^+,l^-,s'}^{m^+,m^-,m'}(\omega^+, \omega^-) &= [(l^+ + m^+)(l^+ - m^+ + 1)]^{\frac{1}{2}} Z_{l^+,l^-,s'}^{m^+ - 1,m^-,m'}(\omega^+, \omega^-), \\ Q^- Z_{l^+,l^-,s'}^{m^+,m^-,m'}(\omega^+, \omega^-) &= [(l^- + m^-)(l^- - m^- + 1)]^{\frac{1}{2}} Z_{l^+,l^-,s'}^{m^+,m^- - 1,m'}(\omega^+, \omega^-). \end{aligned} \right.$$

---

[2] C. Van Winter, *Thèse*, Groningen, 1957.

Appliquées au cas particulier de la représentation $\mathcal{D}\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$ ces relations deviennent

$$(6\,a)\quad \left\{\begin{array}{lll} P^{+} Z_{\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 0}^{m^{+}, m^{-}, 0}(\omega^{+}, \omega^{-}) = Z_{\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 0}^{m^{+}+1, m^{-}, 0}(\omega^{+}, \omega^{-}) & \text{si} & m^{+} < 0, \\ \qquad = 0 & \text{»} & m^{+} > 0; \\ P^{-} Z_{\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 0}^{m^{+}, m^{-}, 0}(\omega^{+}, \omega^{-}) = Z_{\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 0}^{m^{+}, m^{-}+1, 0}(\omega^{+}, \omega^{-}) & \text{»} & m^{-} < 0, \\ \qquad = 0 & \text{»} & m^{-} > 0; \end{array}\right.$$

$$(6\,b)\quad \left\{\begin{array}{lll} Q^{+} Z_{\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 0}^{m^{+}, m^{-}, 0}(\omega^{+}, \omega^{-}) = Z_{\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 0}^{m^{+}-1, m^{-}, 0}(\omega^{+}, \omega^{-}) & \text{si} & m^{+} > 0, \\ \qquad = 0 & \text{»} & m^{+} < 0; \\ Q^{-} Z_{\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 0}^{m^{+}, m^{-}, 0}(\omega^{+}, \omega^{-}) = Z_{\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 0}^{m^{+}, m^{-}-1, 0}(\omega^{+}, \omega^{-}) & \text{»} & m^{-} > 0, \\ \qquad = 0 & \text{»} & m^{-} < 0. \end{array}\right.$$

Appliquons ces différents opérateurs au quadrivecteur $A_{\mu}^{(1)}$. On obtient l'ensemble des résultats ci-dessous :

$$(7)\quad \left\{\begin{array}{ll} P^{+} A_{1}^{(1)} = \frac{1}{2} Z_{\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 0}^{\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, 0}(\omega^{+}, \omega^{-}), & Q^{+} A_{1}^{(1)} = -\frac{1}{2} Z_{\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 0}^{-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 0}(\omega^{+}, \omega^{-}), \\ P^{-} A_{1}^{(1)} = \frac{1}{2} Z_{\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 0}^{-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 0}(\omega^{+}, \omega^{-}), & Q^{-} A_{1}^{(1)} = -\frac{1}{2} Z_{\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 0}^{\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, 0}(\omega^{+}, \omega^{-}), \\ P^{+} A_{2}^{(1)} = \frac{1}{2i} Z_{\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 0}^{\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, 0}(\omega^{+}, \omega^{-}), & Q^{+} A_{2}^{(1)} = \frac{1}{2i} Z_{\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 0}^{-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 0}(\omega^{+}, \omega^{-}), \\ P^{-} A_{2}^{(1)} = \frac{1}{2i} Z_{\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 0}^{-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 0}(\omega^{+}, \omega^{-}), & Q^{-} A_{2}^{(1)} = \frac{1}{2i} Z_{\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 0}^{\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, 0}(\omega^{+}, \omega^{-}), \\ P^{+} A_{3}^{(1)} = \frac{1}{2} Z_{\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 0}^{\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 0}(\omega^{+}, \omega^{-}), & Q^{+} A_{3}^{(1)} = \frac{1}{2} Z_{\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 0}^{-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, 0}(\omega^{+}, \omega^{-}), \\ P^{-} A_{3}^{(1)} = \frac{1}{2} Z_{\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 0}^{\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 0}(\omega^{+}, \omega^{-}), & Q^{-} A_{3}^{(1)} = \frac{1}{2} Z_{\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 0}^{-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, 0}(\omega^{+}, \omega^{-}), \\ P^{+} A_{4}^{(1)} = -\frac{1}{2i} Z_{\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 0}^{\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 0}(\omega^{+}, \omega^{-}), & Q^{+} A_{4}^{(1)} = \frac{1}{2i} Z_{\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 0}^{-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, 0}(\omega^{+}, \omega^{-}), \\ P^{-} A_{4}^{(1)} = \frac{1}{2i} Z_{\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 0}^{\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 0}(\omega^{+}, \omega^{-}), & Q^{-} A_{4}^{(1)} = -\frac{1}{2i} Z_{\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 0}^{-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, 0}(\omega^{+}, \omega^{-}). \end{array}\right.$$

On est alors conduit à envisager les deux ensembles d'opérateurs, d'une part

$$(8)\qquad P^{+} - Q^{+} \quad \text{et} \quad P^{-} - Q^{-},$$

d'autre part

$$(9)\qquad P^{+} + Q^{+} \quad \text{et} \quad P^{-} + Q^{-}.$$

Appliquons par exemple les opérateurs du premier ensemble au quadrivecteur $A_\mu^{(1)}$, il vient

$$(P^+ - Q^+)\,A_\mu^{(1)} = \begin{cases} (P^+ - Q^+)\,A_1^{(1)} = A_3^{(1)}, \\ (P^+ - Q^+)\,A_2^{(1)} = A_4^{(1)}, \\ (P^+ - Q^+)\,A_3^{(1)} = -A_1^{(1)}, \\ (P^+ - Q^+)\,A_4^{(1)} = -A_2^{(1)}. \end{cases}$$

Posons

$$A_\mu^{(3)} = \begin{pmatrix} A_1^{(3)} = A_3^{(1)} \\ A_2^{(3)} = A_4^{(1)} \\ A_3^{(3)} = -A_1^{(1)} \\ A_4^{(3)} = -A_2^{(1)} \end{pmatrix}, \tag{10}$$

manifestement $A_\mu^{(3)}$ est indépendant de $A_\mu^{(1)}$. Appliquons une seconde fois l'opérateur $P^+ - Q^+$, on a

$$(P^+ - Q^+)\,A_\mu^{(3)} = (P^+ - Q^+)^2\,A_\mu^{(1)} = -A_\mu^{(1)}.$$

On n'obtient donc pas un nouveau quadrivecteur. D'une façon analogue en utilisant $P^- - Q^-$:

$$(P^- - Q^-)\,A_\mu^{(1)} = \begin{cases} (P^- - Q^-)\,A_1^{(1)} = A_3^{(1)}, \\ (P^- - Q^-)\,A_2^{(1)} = -A_4^{(1)}, \\ (P^- - Q^-)\,A_3^{(1)} = -A_1^{(1)}, \\ (P^- - Q^-)\,A_4^{(1)} = A_2^{(1)}. \end{cases}$$

Posons encore

$$A_\mu^{(4)} = \begin{pmatrix} A_1^{(4)} = A_3^{(1)} \\ A_2^{(4)} = -A_4^{(1)} \\ A_3^{(4)} = -A_1^{(1)} \\ A_4^{(4)} = A_2^{(1)} \end{pmatrix}, \tag{11}$$

on a aussi

$$(P^- - Q^-)\,A_\mu^{(4)} = (P^- - Q^-)^2\,A_\mu^{(1)} = -A_\mu^{(1)}.$$

Appliquons maintenant à $A_\mu^{(1)}$ l'opérateur

$$(P^+ - Q^+)\,((P^- - Q^-) = (P^- - Q^-)\,(P^+ - Q^+);$$

$$(P^+ - Q^+)\,(P^- - Q^-)\,A_\mu^{(1)} = \begin{cases} (P^+ - Q^+)\,(P^- - Q^-)\,A_1^{(1)} = -A_1^{(1)}, \\ (P^+ - Q^+)\,(P^- - Q^-)\,A_2^{(1)} = A_2^{(1)}, \\ (P^+ - Q^+)\,(P^- - Q^-)\,A_3^{(1)} = -A_3^{(1)}, \\ (P^+ - Q^+)\,(P^- - Q^-)\,A_4^{(1)} = A_4^{(1)}. \end{cases}$$

Posons

$$A_\mu^{(2)} = \begin{pmatrix} A_1^{(2)} = -A_1^{(1)} \\ A_2^{(2)} = A_2^{(1)} \\ A_3^{(1)} = -A_3^{(1)} \\ A_4^{(2)} = -A_4^{(1)} \end{pmatrix}. \tag{12}$$

Les quatre équations (2), 10), (11) et (12)) fournissent donc les quatre quadrivecteurs A_{μ}^{ξ} cherchés ($\xi \sim 1, 2, 3, 4$).

Si l'on avait utilisé les opérateurs $P^{+} + Q^{+}$ et $P^{-} + Q^{-}$ à la place $P^{+} - Q^{+}$ et $P^{-} - Q^{-}$ on aurait obtenu des résultats analogues (au signe près).

Nous allons expliciter ci-dessous les quatre quadrivecteurs A_{μ}^{ξ} :

$$
(13)\quad
\begin{cases}
A_{\mu}^{(1)} = \begin{cases}
A_1^{(1)} = \frac{1}{2}\left(Z^{-\frac{1}{2},-\frac{1}{2},0}_{\frac{1}{2},\frac{1}{2},0}(\omega^{+},\omega^{-}) - Z^{\frac{1}{2},\frac{1}{2},0}_{\frac{1}{2},\frac{1}{2},0}(\omega^{+},\omega^{-})\right),\\
A_2^{(1)} = \frac{1}{2i}\left(Z^{-\frac{1}{2},-\frac{1}{2},0}_{\frac{1}{2},\frac{1}{2},0}(\omega^{+},\omega^{-}) + Z^{\frac{1}{2},\frac{1}{2},0}_{\frac{1}{2},\frac{1}{2},0}(\omega^{+},\omega^{-})\right),\\
A_3^{(1)} = \frac{1}{2}\left(Z^{\frac{1}{2},-\frac{1}{2},0}_{\frac{1}{2},\frac{1}{2},0}(\omega^{+},\omega^{-}) + Z^{-\frac{1}{2},\frac{1}{2},0}_{\frac{1}{2},\frac{1}{2},0}(\omega^{+},\omega^{-})\right),\\
A_4^{(1)} = \frac{1}{2i}\left(Z^{\frac{1}{2},-\frac{1}{2},0}_{\frac{1}{2},\frac{1}{2},0}(\omega^{+},\omega^{-}) - Z^{-\frac{1}{2},\frac{1}{1},0}_{\frac{1}{2},\frac{1}{2},0}(\omega^{+},\omega^{-})\right);
\end{cases}\\
A_{\mu}^{(2)} = \begin{cases}
A_1^{(2)} = -\frac{1}{2}\left(Z^{-\frac{1}{2},-\frac{1}{2},0}_{\frac{1}{2},\frac{1}{2},0}(\omega^{+},\omega^{-}) - Z^{\frac{1}{2},\frac{1}{2},0}_{\frac{1}{2},\frac{1}{2},0}(\omega^{+},\omega^{-})\right),\\
A_2^{(2)} = \frac{1}{2i}\left(Z^{-\frac{1}{2},-\frac{1}{2},0}_{\frac{1}{2},\frac{1}{2},0}(\omega^{+},\omega^{-}) + Z^{\frac{1}{2},\frac{1}{2},0}_{\frac{1}{2},\frac{1}{2},0}(\omega^{+},\omega^{-})\right),\\
A_3^{(2)} = -\frac{1}{2}\left(Z^{\frac{1}{2},-\frac{1}{2},0}_{\frac{1}{2},\frac{1}{2},0}(\omega^{+},\omega^{-}) + Z^{-\frac{1}{2},\frac{1}{2},0}_{\frac{1}{2},\frac{1}{2},0}(\omega^{+},\omega^{-})\right),\\
A_4^{(2)} = \frac{1}{2i}\left(Z^{\frac{1}{2},-\frac{1}{2},0}_{\frac{1}{2},\frac{1}{2},0}(\omega^{+},\omega^{-}) - Z^{-\frac{1}{2},\frac{1}{2},0}_{\frac{1}{2},\frac{1}{2},0}(\omega^{+},\omega^{-})\right);
\end{cases}\\
A_{\mu}^{(3)} = \begin{cases}
A_1^{(3)} = \frac{1}{2}\left(Z^{\frac{1}{2},-\frac{1}{2},0}_{\frac{1}{2},\frac{1}{2},0}(\omega^{+},\omega^{-}) + Z^{-\frac{1}{2},\frac{1}{2},0}_{\frac{1}{2},\frac{1}{2},0}(\omega^{+},\omega^{-})\right),\\
A_2^{(3)} = \frac{1}{2i}\left(Z^{\frac{1}{2},-\frac{1}{2},0}_{\frac{1}{2},\frac{1}{2},0}(\omega^{+},\omega^{-}) - Z^{-\frac{1}{2},\frac{1}{2},0}_{\frac{1}{2},\frac{1}{2},0}(\omega^{+},\omega^{-})\right),\\
A_3^{(3)} = -\frac{1}{2}\left(Z^{-\frac{1}{2},-\frac{1}{2},0}_{\frac{1}{2},\frac{1}{2},0}(\omega^{+},\omega^{-}) - Z^{\frac{1}{2},\frac{1}{2},0}_{\frac{1}{2},\frac{1}{2},0}(\omega^{+},\omega^{-})\right),\\
A_4^{(3)} = -\frac{1}{2i}\left(Z^{-\frac{1}{2},-\frac{1}{2},0}_{\frac{1}{2},\frac{1}{2},0}(\omega^{+},\omega^{-}) + Z^{\frac{1}{2},\frac{1}{2},0}_{\frac{1}{2},\frac{1}{2},0}(\omega^{+},\omega^{-})\right);
\end{cases}\\
A_{\mu}^{(4)} = \begin{cases}
A_1^{(4)} = \frac{1}{2}\left(Z^{\frac{1}{2},-\frac{1}{2},0}_{\frac{1}{2},\frac{1}{2},0}(\omega^{+},\omega^{-}) + Z^{-\frac{1}{2},\frac{1}{2},0}_{\frac{1}{2},\frac{1}{2},0}(\omega^{+},\omega^{-})\right),\\
A_2^{(4)} = -\frac{1}{2i}\left(Z^{\frac{1}{2},-\frac{1}{2},0}_{\frac{1}{2},\frac{1}{2},0}(\omega^{+},\omega^{-}) - Z^{-\frac{1}{2},-\frac{1}{2},0}_{\frac{1}{2},\frac{1}{2},0}(\omega^{+},\omega^{-})\right),\\
A_3^{(4)} = -\frac{1}{2}\left(Z^{-\frac{1}{2},-\frac{1}{2},0}_{\frac{1}{2},\frac{1}{2},0}(\omega^{+},\omega^{-}) - Z^{-\frac{1}{2},-\frac{1}{2},0}_{\frac{1}{2},\frac{1}{2},0}(\omega^{+},\omega^{-})\right),\\
A_4^{(4)} = \frac{1}{2i}\left(Z^{-\frac{1}{2},-\frac{1}{2},0}_{\frac{1}{2},\frac{1}{2},0}(\omega^{+},\omega^{-}) + \left(^{\frac{1}{2},\frac{1}{2},0}_{\frac{1}{2},\frac{1}{2},0}(\omega^{+},\omega^{-})\right)\right).
\end{cases}
\end{cases}
$$

Il est alors tentant d'associer chacun de ces vecteurs d'onde à une onde de structure de bosons mais auparavant il faut examiner comment se comportent ces vecteurs sous les opérations J_3^+, J_3^-, S'_3.

1.2. Comportement des vecteurs A_μ^ξ sous les opérations J_3^+, J_3^-, S'_3. — Comme on a pris pour former A_μ^ξ, les spineurs correspondant à la valeur nulle du nombre s', donc aussi à la valeur nulle de m', il vient immédiatement

$$S'_3 A_\mu^\xi = 0. \tag{14}$$

Considérons maintenant les transformations des vecteurs A_μ^ξ sous les opérations J_3^+ et J_3^- qui correspondent à des rotations infinitésimales autour du troisième axe constitué comme on l'a montré ([3]) (en collaboration avec F. Halbwachs) par des bivecteurs self-duaux. Or on a aussi montré ([3]) que ces rotations infinitésimales appliquées à des quadrivecteurs s'effectuaient par l'intermédiaire des matrices

$$\Gamma_3^+ = \begin{vmatrix} 0 & i & 0 & 0 \\ -i & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -i \\ 0 & 0 & i & 0 \end{vmatrix}, \tag{15}$$

$$\Gamma_3^- = \begin{vmatrix} 0 & i & 0 & 0 \\ -i & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & i \\ 0 & 0 & -i & 0 \end{vmatrix}. \tag{16}$$

Par ailleurs on a les relations

$$J_3^+ Z_{\frac{1}{2},\frac{1}{2},0}^{m^+,m^-,0}(\omega^+,\omega^-) = m^+ Z_{\frac{1}{2},\frac{1}{2},0}^{m^+,m^-,0}(\omega^+,\omega^-), \tag{17}$$

$$J_3^- Z_{\frac{1}{2},\frac{1}{2},0}^{m^+,m^-,0}(\omega^+,\omega^-) = m^- Z_{\frac{1}{2},\frac{1}{2},0}^{m^+,m^-,0}(\omega^+,\omega^-) \tag{18}$$

dans un système d'unités où $\hbar$ est pris égal à 1.

Dans ces conditions à partir des relations (13), il vient immédiatement :

(*Voir* Formule page 217).

([3]) F. Halbwachs, P. Hillion et J.-P. Vigier, *Théorie mathématique des angles d'Euler dans l'espace-temps*, (*Ann. Inst. H. Poincaré*, t. 16, fasc. III, 1959, p. 115).

$$
(19)\quad
\left\{
\begin{array}{ll}
J_3^+ A_\mu^{(1)} = \left\{
\begin{array}{l}
J_3^+ A_1^{(1)} = -\dfrac{i}{2} A_2^{(1)},\\
J_3^+ A_2^{(1)} = \dfrac{i}{2} A_1^{(1)},\\
J_3^+ A_3^{(1)} = \dfrac{i}{2} A_4^{(1)},\\
J_3^+ A_4^{(1)} = -\dfrac{i}{2} A_3^{(1)};
\end{array}\right.
&
J_3^+ A_\mu^{(2)} = \left\{
\begin{array}{l}
J_3^+ A_1^{(2)} = \dfrac{i}{2} A_2^{(2)},\\
J_3^+ A_2^{(2)} = -\dfrac{i}{2} A_1^{(2)},\\
J_3^+ A_3^{(2)} = -\dfrac{i}{2} A_4^{(2)},\\
J_3^+ A_4^{(2)} = -\dfrac{i}{2} A_3^{(2)};
\end{array}\right.
\\[2ex]
J_3^+ A_\mu^{(3)} = \left\{
\begin{array}{l}
J_3^+ A_1^{(3)} = \dfrac{i}{2} A_2^{(3)},\\
J_3^+ A_2^{(3)} = -\dfrac{i}{2} A_1^{(3)},\\
J_3^+ A_3^{(3)} = -\dfrac{i}{2} A_4^{(3)},\\
J_3^+ A_4^{(3)} = \dfrac{i}{2} A_3^{(3)};
\end{array}\right.
&
J_3^+ A_\mu^{(4)} = \left\{
\begin{array}{l}
J_3^+ A_1^{(4)} = -\dfrac{i}{2} A_2^{(4)},\\
J_3^+ A_2^{(4)} = \dfrac{i}{2} A_1^{(4)},\\
J_3^+ A_3^{(4)} = \dfrac{i}{2} A_4^{(4)},\\
J_3^+ A_4^{(4)} = -\dfrac{i}{2} A_3^{(4)};
\end{array}\right.
\end{array}
\right.
$$

or utilisons la matrice (15), on a

$$
(20)\qquad \Gamma_3^+ A_\mu = \begin{vmatrix} 0 & i & 0 & 0 \\ -i & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -i \\ 0 & 0 & i & 0 \end{vmatrix} \begin{pmatrix} A_1 \\ A_2 \\ A_3 \\ A_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} iA_2 \\ -iA_1 \\ -iA_4 \\ iA_3 \end{pmatrix}.
$$

Donc compte tenu de (20) les relations (19) peuvent s'écrire

$$
(21)\qquad \left\{
\begin{array}{l}
J_3^+ A_\mu^{(1)} = -\dfrac{1}{2} \Gamma_3^+ A_\mu^{(1)},\\
J_3^+ A_\mu^{(2)} = \dfrac{1}{2} \Gamma_3^+ A_\mu^{(2)},\\
J_3^+ A_\mu^{(3)} = \dfrac{1}{2} \Gamma_3^+ A_\mu^{(3)},\\
J_3^+ A_\mu^{(4)} = -\dfrac{1}{2} \Gamma_3^+ A_\mu^{(4)}.
\end{array}\right.
$$

Relations qu'on peut encore mettre sous la forme

$$
(22)\qquad
\begin{array}{l}
\Gamma_3^+ J_3^+ A_\mu^{(1)} = -\dfrac{1}{2} A_\mu^{(1)},\\
\Gamma_3^+ J_3^+ A_\mu^{(2)} = \dfrac{1}{2} A_\mu^{(2)},\\
\Gamma_3^+ J_3^+ A_\mu^{(3)} = \dfrac{1}{2} A_\mu^{(3)},\\
\Gamma_3^+ J_3^+ A_\mu^{(4)} = -\dfrac{1}{2} A_\mu^{(4)}.
\end{array}
$$

Appliquons maintenant l'opérateur J_3^-; à partir des relations (13) il vient immédiatement :

$$
(23)\qquad
\begin{array}{ll}
J_3^- A_\mu^{(1)} = \begin{cases} J_3^- A_1^{(1)} = -\dfrac{i}{2} A_2^{(1)}, \\ J_3^- A_2^{(1)} = \dfrac{i}{2} A_1^{(1)}, \\ J_3^- A_3^{(1)} = -\dfrac{i}{2} A_4^{(1)}, \\ J_3^- A_4^{(1)} = \dfrac{i}{2} A_3^{(1)}; \end{cases}
&
J_3^- A_\mu^{(2)} = \begin{cases} J_3^- A_1^{(2)} = \dfrac{i}{2} A_2^{(2)}, \\ J_3^- A_2^{(2)} = -\dfrac{i}{2} A_1^{(2)}, \\ J_3^- A_3^{(2)} = \dfrac{i}{2} A_4^{(2)}, \\ J_3^- A_4^{(2)} = -\dfrac{i}{2} A_3^{(2)}; \end{cases}
\\[2ex]
J_3^- A_\mu^{(3)} = \begin{cases} J_3^- A_1^{(3)} = -\dfrac{i}{2} A_2^{(3)}, \\ J_3^- A_2^{(3)} = \dfrac{i}{2} A_1^{(3)}, \\ J_3^- A_3^{(3)} = -\dfrac{i}{2} A_4^{(3)}, \\ J_3^- A_4^{(3)} = \dfrac{i}{2} A_3^{(3)}; \end{cases}
&
J_3^- A_\mu^{(4)} = \begin{cases} J_3^- A_1^{(4)} = \dfrac{i}{2} A_2^{(4)}, \\ J_3^- A_2^{(4)} = -\dfrac{i}{2} A_1^{(4)}, \\ J_3^- A_3^{(4)} = \dfrac{i}{2} A_4^{(4)}, \\ J_3^- A_4^{(4)} = -\dfrac{i}{2} A_3^{(4)}, \end{cases}
\end{array}
$$

or avec la matrice (16), on a

$$
(24)\qquad \Gamma_3^- A_\mu = \begin{vmatrix} 0 & i & 0 & 0 \\ -i & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & i \\ 0 & 0 & -i & 0 \end{vmatrix} \begin{pmatrix} A_1 \\ A_2 \\ A_3 \\ A_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} iA_2 \\ -iA_1 \\ iA_4 \\ -iA_3 \end{pmatrix}.
$$

Les relations (23) peuvent donc s'écrire

$$
(25)\qquad \begin{cases} J_3^- A_\mu^{(1)} = -\dfrac{1}{2} \Gamma_3^- A_\mu^{(1)}, \\ J_3^- A_\mu^{(2)} = \dfrac{1}{2} \Gamma_3^- A_\mu^{(2)}, \\ J_3^- A_\mu^{(3)} = -\dfrac{1}{2} \Gamma_3^- A_\mu^{(3)}, \\ J_3^- A_\mu^{(4)} = \dfrac{1}{2} \Gamma_3^- A_\mu^{(4)}, \end{cases}
$$

soit encore

$$
(26)\qquad \begin{cases} \Gamma_3^+ J_3^+ A_\mu^{(1)} = -\dfrac{1}{2} A_\mu^{(1)}, \\ \Gamma_3^- J_3^- A_\mu^{(2)} = \dfrac{1}{2} A_\mu^{(2)}, \\ \Gamma_3^- J_3^- A_\mu^{(3)} = -\dfrac{1}{2} A_\mu^{(3)}, \\ \Gamma_3^- J_3^- A_\mu^{(4)} = \dfrac{1}{2} A_\mu^{(4)}. \end{cases}
$$

On peut alors résumer les résultats (14) (22) et (26) dans tableau ci-dessous :

Vecteur d'onde initial.	$\Gamma_3^+ J_3^+$.	$\Gamma_3^- J_3^-$.	S'_3.	Vecteur d'onde final.
$A_\mu^{(1)}$	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	0	$A_\mu^{(1)}$
$A_\mu^{(2)}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	$A_\mu^{(2)}$
$A_\mu^{(3)}$	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	0	$A_\mu^{(3)}$
$A_\mu^{(4)}$	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	$A_\mu^{(4)}$

Ce tableau se comprend de lui-même d'après l'étude précédente.

Comparons ces résultats avec la classification empirique de Nishijima-Gell-Mann pour les mésons K.

Soient I_3 la troisième composante du spin isotopique, S l'étrangeté, η le nombre de baryons :

Mésons.	I_3.	S.	N.
K^-	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	0
K^+	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
$\tilde{K}^0$	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	0
K^0	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	0

L'analogie entre les tableaux est frappante.

Donc le spin isotopique et l'étrangeté peuvent s'interpréter à l'aide des opérateurs $\Gamma_3^+ J_3^+$ et $\Gamma_3^- J_3^+$, tandis que l'opérateur nombre de baryons peut être assimilé à l'opérateur S'_3. Dans ces conditions chaque méson K est caractérisé par une fonction d'onde interne :

$$K^- \text{ par } A_\mu^{(1)}, \quad K^+ \text{ par } A_\mu^{(2)}, \quad \tilde{K}_0 \text{ par } A_\mu^{(3)}, \quad K_0 \text{ par } A_\mu^{(4)}.$$

Ces résultats sont en accord avec les conclusions qu'on avait tirées d'une précédente étude (4). Les particules élémentaires ne peuvent être

(4) D. Bohm, P. Hillion et J.-P. Vigier, *Progr. Theor. Phys.*, t. 24, 1960, p. 761.

assimilées à des états excités du rotateur hypersphérique (rotateur de Nakano) mais à des « polarisations » différentes d'un système d'ondes permanentes.

2. Vecteurs d'onde associés à l'espace des représentations $\mathcal{D}$ (1, 0) et $\mathcal{D}$ (0, 1). — 2.1. CLASSIFICATION DES VECTEURS D'ONDE INDÉPENDANTS. — Pour cette représentation s' prend seulement la valeur 1, mais m' prend les trois valeurs 1, 0, -1, on a montré qu'on avait trois types de tenseurs antisymétriques self-duaux :

$$F_{ij}^{(1)},\quad F_{ij}^{(0)},\quad F_{ij}^{(-1)},$$

Dans cette étude, on se limitera à la valeur nulle de m' c'est-à-dire à la classification des tenseurs $F_{ij}^{(0)}$ On a en outre montré que chacun de ces tenseurs se divisait en composantes F_{ij}^{+} et F_{ij}^{-}, les premières satisfaisant à la représentation $\mathcal{D}(1, 0)$ et les secondes à $\mathcal{D}(0, 1)$ et elles sont respectivement solutions des équations

$$(27)\qquad (J_k^+ J_k^+ - \chi^2) F_{ij}^{(0)+} = 0, \qquad (J_k^- J_k^- - \chi^2) F_{ij}^{(0)-} = 0;$$

Dans la suite pour simplifier l'écriture on supprimera l'indice zéro, mais il reste entendu qu'on sera toujours dans le cas $m' = 0$.

Les composantes F_{ij}^{+} et F_{ij}^{-} sont formées à l'aide des matrices de Pauli respectivement à partir des spineurs de rang 2, χ^{rs} et $\chi_{\dot r\dot s}$ Les formules exactes sont :

$$(28)\qquad F_{ij}^{+} = \frac{1}{2}\sigma_{ir}{}^{\dot s}\sigma_j{}^{rt}\chi_{\dot s t}, \qquad F_{ij}^{-} = \frac{1}{2}\sigma_i{}^{\dot r}{}_s\sigma_{j\dot r t}\chi^{st}$$

avec

$$(29)\qquad \chi^{rs} = \begin{pmatrix} \chi^{11} = Z_{0,\,1,\,1}^{0,\,1,\,0}(\omega^+,\,\omega^-) & \chi^{21} = Z_{0,\,1,\,1}^{0,\,0,\,0}(\omega^+,\,\omega^-) \\ \chi^{12} = Z_{0,\,1,\,1}^{0,\,0,\,0}(\omega^+,\,\omega^-) & \chi^{22} = Z_{0,\,1,\,1}^{0,\,-0,\,0}(\omega^+,\,\omega^-) \end{pmatrix},$$

$$(30\,a)\qquad \chi_{\dot r\dot s} = \begin{pmatrix} \chi_{\dot 1\dot 1} = Z_{1,\,0,\,1}^{1,\,0,\,0}(\omega^+,\,\omega^-) & \chi_{\dot 2\dot 1} = Z_{0,\,1,\,1}^{0,\,0,\,0}(\omega^+,\,\omega^-) \\ \chi_{\dot 1\dot 2} = Z_{1,\,0,\,1}^{0,\,0,\,0}(\omega^+,\,\omega^-) & \chi_{\dot 2\dot 2} = Z_{1,\,0,\,1}^{-1,\,0,\,0}(\omega^+,\,\omega^-) \end{pmatrix}$$

A l'aide des relations (28 a) et (30 a), on explicite immédiatement $F_{ij}^{\pm}$; les champs $F_{ij}^{\pm}$ normés à l'unité dépendent de deux paramètres $s^{\pm}$, $\sigma^{\pm}$ de normalisation choisis pour que ces champs soient vecteurs propres de l'opérateur de spin isotopique, on a alors les deux ensembles de solutions ci-dessous $F_{ij}^{\pm}$ et $F_{ij}'^{\pm}$.

$$(31\,a)\qquad F_{ij}^{+} = \begin{pmatrix} F_{12}^{+} = 0 \\ F_{23}^{+} = -\dfrac{i}{2}\left(Z_{1,\,0,\,1}^{1,\,0,\,0}(\omega^+,\,\omega^-) - Z_{1,\,0,\,1}^{-1,\,0,\,0}(\omega^+,\,\omega^-)\right) \\ F_{31}^{+} = -\dfrac{1}{2}\left(Z_{1,\,0,\,1}^{1,\,0,\,0}(\omega^+,\,\omega^-) + Z_{1,\,0,\,1}^{-1,\,0,\,0}(\omega^+,\,\omega^-)\right) \end{pmatrix},$$

de la même façon :

$$(32\,a)\qquad F^{-}_{ij} = \begin{pmatrix} F^{-}_{12} = & 0 \\ F^{-}_{23} = & \frac{i}{2}\left(Z^{0,1,0}_{0,1,1}(\omega^+,\omega^-) - Z^{0,-1,0}_{0,1,1}(\omega^+,\omega^-)\right) \\ F^{-}_{31} = & \frac{1}{2}\left(Z^{0,1,0}_{0,1,1}(\omega^+,\omega^-) + Z^{0,-1,0}_{0,1,1}(\omega^+,\omega^-)\right) \end{pmatrix}.$$

En choisissant différemment les paramètres de normalisation on a immédiatement F'^{+}_{ij} et F'^{-}_{ij},

$$(31\,b)\qquad F'^{+}_{ij} = \begin{pmatrix} F'^{+}_{12} = Z^{0,0,0}_{1,0,1}(\omega^+,\omega^-) \\ F'^{+}_{23} = 0 \\ F'^{+}_{13} = 0 \end{pmatrix},$$

$$(32\,b)\qquad F''_{ij} = \begin{pmatrix} F'^{-}_{12} = Z^{0,0,0}_{0,1,1}(\omega^+,\omega^-) \\ F'^{-}_{23} = 0 \\ F'^{-}_{31} = 0 \end{pmatrix},$$

on remplacera les notations précédentes des tenseurs antisymétriques self-duaux par celles des vecteurs axiaux trimensionnels, on posera

$$(33)\qquad A_k^{(1)+} = F'^{+}_{ij},\qquad A_k^{(3)+} = F'^{+}_{ij},\qquad A_k^{(1)} = F^{-}_{ij},\qquad A_k^{(3)-} = F'^{-}_{ij}.$$

On a alors

$$(34)\qquad A_k^{(1)+} = \begin{pmatrix} A_1^{(1)+} = \frac{i}{2}\left(Z^{1,0,0}_{1,0,1}(\omega^+,\omega^-) - Z^{-1,0,0}_{1,0,1}(\omega^+,\omega^-)\right) \\ A_2^{(1)+} = \frac{1}{2}\left(Z^{1,0,0}_{1,0,1}(\omega^+,\omega^-) + Z^{-1,0,0}_{1,0,1}(\omega^+,\omega^-)\right) \\ A_3^{(1)+} = 0 \end{pmatrix},$$

$$(35)\qquad A_k^{(3)+} = \begin{pmatrix} A_1^{(3)+} = 0 \\ A_2^{(3)+} = 0 \\ A_3^{(3)+} = Z^{0,0,0}_{1,0,1}(\omega^+,\omega^-) \end{pmatrix}$$

et de façon analogue :

$$(36)\qquad A_k^{(1)-} = \begin{pmatrix} A_1^{(1)-} = \frac{1}{2}\left(Z^{0,1,0}_{0,1,1}(\omega^+,\omega^-) + Z^{0,-1,0}_{0,1,1}(\omega^+,\omega^-)\right) \\ A_2^{(1)-} = \frac{i}{2}\left(Z^{0,1,0}_{0,1,1}(\omega^+,\omega^-) - Z^{0,-1,0}_{0,1,1}(\omega^+,\omega^-)\right) \\ A_3^{(1)+} = 0 \end{pmatrix},$$

$$(37)\qquad A_k^{(3)-} = \begin{pmatrix} A_1^{(3)-} = 0 \\ A_2^{(3)-} = 0 \\ A_3^{(3)-} = Z^{0,0,0}_{0,1,1}(\omega^+,\omega^-) \end{pmatrix}.$$

En permutant dans (34) les rôles de $Z^{1,\,0,\,0}_{1,\,0,\,1}(\omega^+, \omega^-)$ et $Z^{-1,\,0,\,0}_{1,\,0,\,1}(\omega^+, \omega^-)$ et dans (36) ceux de $Z^{0,\,1,\,0}_{0,\,1,\,1}(\omega^+, \omega^-)$ et $Z^{0,\,-1,\,0}_{0,\,1,\,1}(\omega^+, \omega^-)$ on met en évidence deux autres vecteurs $A^{(2)+}_k$ et $A^{(2)-}_k$:

$$(38)\qquad A^{(2)+}_k = \begin{pmatrix} A^{(2)+}_1 = -\dfrac{i}{2}\left(Z^{1,\,0,\,0}_{1,\,0,\,1}(\omega^+, \omega^-) - Z^{-1,\,0,\,0}_{1,\,0,\,1}(\omega^+, \omega^-)\right) \\ A^{(2)+}_2 = \dfrac{1}{2}\left(Z^{1,\,0,\,0}_{1,\,0,\,1}(\omega^+, \omega^-) + Z^{-1,\,0,\,0}_{1,\,0,\,1}(\omega^+, \omega^-)\right) \\ A^{(2)+}_3 = 0 \end{pmatrix},$$

$$(39)\qquad A^{(2)-}_k = \begin{pmatrix} A^{(2)-}_1 = \dfrac{1}{2}\left(Z^{0,\,1,\,0}_{0,\,1,\,1}(\omega^+, \omega^-) + Z^{0,\,-1,\,0}_{0,\,1,\,1}(\omega^+, \omega^-)\right) \\ A^{(2)-}_2 = -\dfrac{i}{2}\left(Z^{0,\,1,\,0}_{0,\,1,\,1}(\omega^+, \omega^-) - Z^{0,\,-1,\,0}_{0,\,1,\,1}(\omega^+, \omega^-)\right) \\ A^{(2)-}_3 = 0 \end{pmatrix}.$$

En désignant par A^{r+}_k et A^{r-}_k ($r \sim 1, 2, 3$) l'ensemble des trois vecteurs A^+_k et A^-_k, ceux-ci satisfont aux équations

$$(40)\qquad (J^+_k J^+_k - \chi^2)A^{r+}_i = 0,$$

$$(41)\qquad (J^-_k J^-_k - \chi^2)A^{r-}_i = 0.$$

Si l'on avait utilisé les spineurs Φ^{rs}, $\Phi_{\dot r\dot s}$ et Ψ^{rs}, $\Psi_{\dot r\dot s}$ correspondant respectivement aux valeurs $m' = 1$ et $m' = -1$ on aurait obtenu des résultats sensiblement différents. Par exemple l'un des vecteurs qu'on désignera par B_k sera

$$(42)\qquad B_k = \begin{pmatrix} B_1 = \dfrac{ai}{1}\left(Z^{1,\,0,\,1}_{1,\,0,\,1}(\omega^+, \omega^-) - Z^{-1,\,0,\,1}_{1,\,0,\,1}(\omega^+, \omega^-)\right) \\ B_2 = \dfrac{b1}{2}\left(Z^{1,\,0,\,1}_{1,\,0,\,1}(\omega^+, \omega^-) + Z^{-1,\,0,\,1}_{1,\,0,\,1}(\omega^+, \omega^-)\right) \\ B_3 = c\, Z^{0,\,0,\,1}_{1,\,0,\,1}(\omega^+, \omega^-) \end{pmatrix},$$

où a, b, $c\,(a^r + b^r + c^r) = 1$ sont :

$$a = \frac{1}{2\sqrt{2}}\sqrt{1+\sigma+s},$$

$$b = \frac{1}{2\sqrt{2}}\sqrt{1+\sigma-s} \qquad \text{et} \qquad -1 \leqq \sigma \leqq 1$$

$$c = \frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{1-\sigma} \qquad\qquad 0 \leqq s \leqq 2$$

2.2. Comportement des vecteurs A^{r+}_k et A^{r-}_k sous les opérateurs J^+_3, J^-_3, S'_3. — Pour l'opérateur S'_3, il vient immédiatement

$$(43)\qquad S'_3 A^{r+}_i = m' A^{r+}_i = 0, \qquad S'_3 A^{r-}_i = m' A^{r-}_i = 0.$$

Dans le cas d'un espace tridimensionnel, une rotation infinitésimale autour de l'axe 3 est caractérisée par la matrice

$$(44)\qquad \Gamma_3 = \begin{vmatrix} 0 & i & 0 \\ -i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}.$$

On remarquera que Γ_3 peut être déduit de Γ_3^+ ou de Γ_3^- donnés dans le paragraphe précédent en supprimant la dernière ligne et la dernière colonne de ces matrices. Par ailleurs, on a les relations

$$(45)\qquad J_3^+ Z_{1,\,0,\,1}^{m^+,\,0,\,m'}(\omega^+,\omega^-) = m^+ Z_{1,\,0,\,1}^{m^+,\,0,\,m'}(\omega^+,\omega^-), \qquad J_3^- Z_{1,\,0,\,1}^{m^+,\,0,\,m'}(\omega^+,\omega^-) = 0$$

et

$$(46)\qquad J_3^- Z_{0,\,1,\,1}^{0,\,m^-,\,m'}(\omega^+,\omega^-) = m^- Z_{0,\,1,\,1}^{0,\,m^-,\,m'}(\omega^+,\omega^-), \qquad J_3^+ Z_{0,\,1,\,1}^{0,\,m^-,\,m'}(\omega^+,\omega^-) = 0,$$

on obtient donc immédiatement les relations

$$(47)\qquad J_3^- A_k^{r+} = 0.$$

$$(48)\qquad J_3^+ A_k^{r-} = 0.$$

Appliquons maintenant l'opérateur J_3^+, aux vecteurs A_k^{r+}, on a immédiatement

$$(49)\qquad \left\{\begin{array}{l} J_3^+ A_k^{(1)+} = \begin{pmatrix} J_3^+ A_1^{(1)+} = i A_2^{(1)+} \\ J_3^+ A_2^{(1)+} = -i A_1^{(1)+} \\ J_3^+ A_3^{(1)+} = 0 \end{pmatrix}, \qquad J_3^+ A_k^{(2)+} = \begin{pmatrix} J_3^+ A_1^{(2)+} = -i A_2^{(2)+} \\ J_3^+ A_2^{(2)+} = i A_1^{(2)+} \\ J_3^+ A_3^{(2)+} = 0 \end{pmatrix}, \\ \qquad\qquad\qquad\qquad J_3^+ A_3^{(3)+} = 0, \end{array}\right.$$

soit si l'on introduit la matrice Γ_3 (44) :

$$(50)\qquad J_3^+ A_k^{(1)+} = \Gamma_3 A_k^{(1)+}, \qquad J_3^+ A_k^{(2)+} = -\Gamma_3 A_k^{(2)+}, \qquad J_3^+ A_k^{(3)+} = 0,$$

ce qu'on peut écrire

$$(51)\qquad \Gamma_3 J_3^+ A_k^{(1)+} = A_k^{(1)+}, \qquad \Gamma_3 J_3^+ A_k^{(2)+} = -A_k^{(2)+}, \qquad \Gamma_3 J_3^+ A_k^{(3)+} = 0,$$

malgré la différence existant entre les vecteurs $A_k^{r+}(m' = 0)$ et ceux qu'on formerait [*cf.* la relation (42)] avec les deux autres valeurs de m' non nulles, les relations (51) restent valables dans tous les cas.

On obtiendrait de façon analogue en appliquant les opérateurs J_3^- sur les vecteurs A_k^{r-} :

$$(52)\qquad \Gamma_3 J_3^- A_k^{(1)-} = A_k^{(1)-}, \qquad \Gamma_3 J_3^- A_k^{(2)-} = -A_k^{(2)-}, \qquad \Gamma_3 J_3^- A_k^{(3)-} = 0$$

on peut alors résumer les relations (43), (47), (48), (51) et (52) dans les deux tableaux ci-dessous :

a. Représentation $\mathcal{D}(1, 0)$:

(53)

Vecteur.	$\Gamma_3 J_3^+$.	$\Gamma_3 J_3^-$.	S'_3.
$A_k^{(1)+}$	1	0	0
$A_k^{(2)+}$	—1	0	0
$A_k^{(3)+}$	0	0	0

Dans ce tableau figure les scalaires par lesquels sont multipliés les vecteurs quand on leur applique l'un quelconque des trois opérateurs

$$\Gamma_3 J_3^+, \quad \Gamma_3 J_3^-, \quad S'_3.$$

b. Représentation $\mathcal{D}(0, 1)$:

(54)

Vecteur.	$\Gamma_3 J_3^+$.	$\Gamma_3 J_3^-$.	S'_3.
$A_k^{(1)-}$	0	1	0
$A_k^{(2)-}$	0	—1	0
$A_k^{(3)-}$	0	0	0

Comme pour la représentation $\mathcal{D}\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$, on va comparer ces tableaux avec la classification de Nishijima-Gell-Mann pour les mésons Π.

On désigne par I_3 la troisième composante du spin isotopique, S l'étrangeté, N le nombre de baryons.

(55)

Mésons	I_3.	S.	N.
Π^+	1	0	0
Π^-	—1	0	0
Π^0	0	0	0

Il apparaît immédiatement que les tableaux (53) et (55) sont identiques. Comme pour la représentation $\mathcal{D}\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$, il est donc légitime d'interpréter $\Gamma_3 J_3^+$, $\Gamma_3 J_3^-$ et S'_3 respectivement comme le spin isotopique, l'étrangeté et le nombre de baryons. On est alors conduit à associer aux mésons Π, les vecteurs d'onde suivants :

$$A_k^{(1)+} \text{ à } \Pi^+, \quad A_k^{(2)+} \text{ à } \Pi^-, \quad A_k^{(3)+} \text{ à } \Pi^0, \tag{56}$$

les expressions explicitées de ces trois vecteurs sont données par les relations (34), (35) et (38).

A ce stade la théorie ne permet pas de comprendre les raisons pour lesquelles les vecteurs d'onde de la représentation $\mathcal{D}(1, 0)$ correspondent seuls à des ondes physiquement observées et non pas ceux de la représentation $\mathcal{D}(0, 1)$, ceci semble signifier que les particules élémentaires ont une chiralité qui joue un rôle fondamental bien qu'encore incompris. Cette remarque permettra de classer les fermions appartenant aux représentations $\mathcal{D}\left(\frac{1}{2}, 0\right)$ et $\mathcal{D}\left(0, \frac{1}{2}\right)$ comme on le montrera dans une étude ultérieure. Récemment de nouvelles particules ont été découvertes et certains auteurs ([5]) ont examiné la possibilité qu'elles soient associées à $\mathcal{D}(0, 1)$.

On remarquera que dans la théorie de Pais ainsi que celle de Salam et Polkinghorne ([6]) (dans un espace de spin isotopique à métrique euclidienne), les mésons Π sont également associés à la représentation $\mathcal{D}(1, 0)$ du groupe O_4 des rotations quadridimensionnelles réelles.

Nous montrerons dans le prochain paragraphe que les vecteurs A_k^{r+} et A_k^{r-} correspondants à la valeur nulle de m' sont les seuls vecteurs d'onde qui peuvent s'interpréter comme appartenant à une représentation de spin zéro.

Les résultats de ce paragraphe et du précédent montrent que dans le cadre de la théorie qu'on a développée, le choix de la dénomination spin isotopique est particulièrement malheureuse car l'opérateur J_3^+ correspond à un moment cinétique et il n'a aucune des propriétés du spin.

3. **Isospin des ondes et la charge.** — 3.1. Isospin. — On se trouve dans une position analogue à celle des théories quantiques usuelles. En effet, dans ces dernières, pour les représentations d'ordre $l^+ + l^-$ demi-entier, l'isospin est lié au tenseur de Belinfante-Rosenfeld dont la divergence est utilisée pour symétriser le tenseur énergie-impulsion; nous montrerons dans une prochaine étude que cette situation se retrouve, pour les représentations d'ordre $l^+ + l^-$ demi-entier du groupe des rotations complexes conjuguées. On l'a même établi ([1]) dans le cas particulier des représentations $\mathcal{D}\left(\frac{1}{2}, 0\right)$ et $\mathcal{D}\left(0, \frac{1}{2}\right)$.

([5]) J. C. Polkinghorne et A. Salam, *Nuovo Cimento*, vol. 15, n° 1, 1960, p. 160.
([6]) *Voir* article de d'Espagnat et Prentki dans *Progress in elementary particles and Cosmic Ray Physics*, vol. IV, North. Holl. Pub. Co.

Pour les représentations d'ordre $l^+ + l^-$ entier, le tenseur énergie-impulsion dans le cas du groupe de Lorentz (ou le tenseur moment cinétique pour le groupe des rotations complexes) est symétrique et dans ces conditions le tenseur de Belinfante-Rosenfeld est identiquement nul. Donc si l'on continue à lier le spin à ce tenseur on aboutit à la conclusion que le spin de tous les bosons est nul, ce qui tendrait à montrer que le spin est lié au caractère univalué ou bivalué de la représentation. En conséquence, il en découlerait, que si l'on veut décrire des particules de spin 1 on est alors obligatoirement conduit à utiliser le formalisme de Duffin-Kemmer-Petiau mais il est également vrai que cette théorie est équivalente à celle de Proca ([7]).

D'une façon habituelle on lie le spin des bosons, non pas au tenseur de Belinfante-Rosenfeld puisqu'il est identiquement nul, mais au nombre de composantes de la fonction d'onde dans le système propre où l'on utilise le théorème de la décomposition de la représentation $\mathcal{D}(l^+, l^-)$ du groupe de Lorentz en

$$\mathcal{D}(l^+ + l^-),\quad \mathcal{D}(l^+ + l^- - 1),\quad \ldots,\quad \mathcal{D}(|l^+ - l^-|)$$

qui sont des représentations du groupe des rotations.

Si q est alors la dimension du vecteur d'onde appartenant à la représentation $\mathcal{D}(l^+ + l^- - r)$, $r = 0, 1, \ldots, l^+$, le spin S de l'onde est donné par la relation

$$q = 2S + 1. \tag{57}$$

Appliquons une théorie analogue dans le cas du groupe des rotations complexes conjuguées, c'est-à-dire cherchons ce que deviennent les quadrivecteurs A^{ξ}_{μ} de $\mathcal{D}\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$ et les vecteurs complexes A^{r+}_{k} et A^{r-}_{k} respectivement de $\mathcal{D}(1, 0)$ et $\mathcal{D}(0, 1)$.

Comme on l'a indiqué les quadrivecteurs A^{ξ}_{μ} qu'on a explicités au cours de cette étude correspondent à la valeur nulle de s'. Dans ces conditions le spineur de second rang $\Omega^{r}{}_{s}$ est formé des combinaisons antisymétriques de spineur du premier rang :

$$\Omega^{r}{}_{s} - \varphi^{r}\psi^{s} - \varphi^{s}\psi^{r},$$

où φ^{r} et φ^{s} correspondent à la valeur $m' = \frac{1}{2}$, ψ^{r} et ψ^{s} à la valeur $m' = -\frac{1}{2}$.

([7]) H. UMEZAWA, *Quantum field theory*, North. Holl. Pub. Co.

On a donc

$$\Omega^{r\dot{s}} = \begin{pmatrix} \Omega^{1\dot{1}} = \varphi^1\psi^{\dot{1}} - \varphi^{\dot{1}}\psi^1 & \Omega^{2\dot{1}} = \varphi^2\psi^{\dot{1}} - \varphi^{\dot{1}}\psi^2 \\ \Omega^{1\dot{2}} = \varphi^1\psi^{\dot{2}} - \varphi^{\dot{2}}\psi^1 & \Omega^{2\dot{2}} = \varphi^2\psi^{\dot{2}} - \varphi^{\dot{2}}\psi^2 \end{pmatrix}. \tag{58}$$

Pour passer dans le système propre il suffit de remplacer les indices spinoriels pointés par les mêmes indices non pointés, donc

$$\Omega^{r\dot{s}} \to \Omega_0^{rs},$$

d'où

$$\Omega_0^{rs} = \begin{pmatrix} \Omega^{11} = \varphi^1\psi^1 - \varphi^1\psi^1 & \Omega^{21} = \varphi^2\psi^1 - \varphi^1\psi^2 \\ \Omega^{12} = \varphi^1\psi^2 - \varphi^2\psi^1 & \Omega^{22} = \varphi^2\psi^2 - \psi^2\varphi^2 \end{pmatrix}, \tag{59}$$

Ω_0^{rs} a une seule composante différente de zéro :

$$\Omega_0^{12} = -\Omega_0^{21} = \varphi^1\psi^2 - \varphi^2\psi^1.$$

Donc les quadrivecteurs A_μ^ξ dans le système propre auront une seule composante indépendante, et par application de la relation (56) :

$$S = 0.$$

On remarquera que $\mathcal{D}\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$ ne décompose dans le système propre en $\mathcal{D}(1)$ et $\mathcal{D}(0)$ représentations du groupe des rotations. La démonstration précédente montre que $\mathcal{D}(0)$ correspond à $s' = 0$, on montrerait de la même façon que $\mathcal{D}(1)$ correspond à $s' = 1$. On avait déjà précédemment signalé ce résultat [8]. Ceci justifie le choix qu'on avait fait de la valeur nulle de s'.

3.2. La charge. — Dans l'étude [1] du formalisme général de la Mécanique ondulatoire associée à une structure des particules élémentaires, on a montré que l'opérateur de charge s'écrivait

$$Q_{op} = \frac{e}{\hbar}(I_3^+ J_3^+ + I_3^- J_3^- + S_3'),$$

où I_3^+ et I_3^- sont les matrices de rotations infinitésimales autour de l'axe 3 dans l'espace vectoriel des fonctions d'onde.

Pour $\mathcal{D}\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$, I_3^+ et I_3^- sont respectivement les matrices données par

---

[8] P. Hillion et J.-P. Vigier, *Elementary and irreducible representation of the Lorentz group.* (*Nucl. Phys.*, vol. 16, n° 2. 1960, p. 360). Depuis la publication de ce travail dans *Nucl. Phys.*, on a montré que $R_5^\star$ était seulement localement isomorphe au groupe de Lorentz, donc tout ce qui est écrit se rapporte en fait à $R_5^\star$.

les expressions (15) et (16) de sorte que les valeurs propres de Q sont la somme des valeurs propres du spin isotopique et de la moitié des valeurs propres de l'étrangeté et du nombre de baryons, ce qui fournit bien la formule de Nishijima-Gell-Mann et montre que pour cette représentation la charge prend seulement les valeurs 1, 0, — 1.

Pour $\mathcal{D}(1, 0)$, I_3^+ est la matrice (44) tandis que pour $\mathcal{D}(0, 1)$, I_3^- est également cette matrice (44) et l'on obtient pour la charge le même résultat que pour la représentation $\mathcal{D}\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$.

4. Conclusions. — L'étude précédente justifie donc bien l'idée qui nous a guidés dans tout ce travail d'associer aux particules élémentaires considérées comme des systèmes d'ondes permanentes, des vecteurs qui sont les éléments de l'espace vectoriel invariant sous la représentation $\mathcal{D}(l^+, l^-)$ ou $\mathcal{D}(l^-, l^+)$ du groupe des rotations complexes conjuguées, car non seulement il est possible de caractériser chaque particule par une fonction d'onde déterminée, ce qui prendra tout son intérêt dans l'étude des interactions, mais encore les notions de spin isotopique, étrangeté, et nombre de baryons acquièrent un support physique, puisqu'ils peuvent être considérés comme liés à des rotations infinitésimales du système d'ondes. L'isospin également trouve dans cette théorie une interprétation analogue à celle qu'on a habituellement. Ceci permet d'évaluer la différence qui existe entre la charge et le spin isotopique, l'étrangeté ou le nombre de baryons.

Cette étude a en outre mis en évidence, bien qu'elle ne l'explique pas, le rôle important joué par la parité spécialement dans le cas des mésons Π dont les vecteurs d'onde présentent une chiralité bien déterminée.

Dans une prochaine étude, nous examinerons les vecteurs d'onde associés à la structure des fermions.