ANNALES DE L'I. H. P.

FRANCIS HALBWACHS

Rotation instantanée et angle d'Euler dans l'espace-temps

Annales de l'I. H. P., tome 16, n° 3 (1959), p. 145-160
<http://www.numdam.org/item?id=AIHP_1959__16_3_145_0>

Rotation instantanée et angle d'Euler dans l'espace-temps

par

M. Francis HALBWACHS,
Institut Henri Poincaré (Paris).

Dans un précédent article (1), P. Hillion, J.-P. Vigier, et moi-même avons proposé une généralisation relativiste de la notion d'angles d'Euler et nous avons établi les formules donnant l'orientation d'un système mobile b_μ^ξ de quatre vecteurs d'univers orthogonaux et unitaires par rapport à un système fixe a_μ^ξ, en fonction de trois couples d'angles d'Euler $\psi^\pm$, $\theta^\pm$, $\varphi^\pm$ respectivement complexes conjugués. Nous avons montré que dans cette représentation une transformation de Lorentz quelconque était isomorphe au produit de deux rotations tridimensionnelles complexes conjuguées opérant sur des bivecteurs self-duaux formés à partir des a_μ^ξ et des b_μ^ξ, et dont les angles d'Euler (complexes), au sens tridimensionnel du terme, sont respectivement ψ^+, θ^+, φ^+, pour un trièdre mobile $B_k^{\prime +}$ et ψ^-, θ^-, φ^-, pour un autre trièdre mobile $B_k^{\prime -}$. On peut dès lors penser que les diverses grandeurs physiques associées à la rotation relativiste des b_μ^ξ, pourraient être exprimées de façon simple en fonction des caractéristiques des deux rotations tridimensionnelles complexes qui lui correspondent. Ce sera l'objet du présent article, où l'on se propose d'établir ces expressions mathématiques en vue de leur utilisation dans des travaux ultérieurs de physique classique et quantique sur les rotations dans l'espace-temps. On étudiera d'abord l'expression physique de la rotation instantanée en

---

(1) Halbwachs, Hillion et Vigier, *Ann. Inst. H. Poincaré*, vol. 16, fasc. 3, 1959, p. 115.

fonction des angles d'Euler pour la toupie non relativiste puis on généralisera la méthode employée au cas des rotations dans l'espace-temps.

1. Toupie classique et angles d'Euler à trois dimensions. — Nous introduisons dans l'espace euclidien tridimensionnel (réel) un trièdre de vecteurs orthogonaux unitaires fixes a_k^r, et un trièdre mobile b_k^r avec les relations usuelles

$$a_k^r a_j^r = \delta_{kj}, \qquad a_k^r a_k^s = \delta^{rs},$$
$$b_k^r b_j^r = \delta_{kj}, \qquad b_k^r b_k^s = \delta^{rs}.$$

La rotation instantanée du trièdre mobile est représentée par le tenseur antisymétrique vitesse de rotation

$$\omega_{ij} = \dot{b}_i^r b_j^r \tag{1}$$

ou par son dual

$$\omega_k = \frac{1}{2}\varepsilon_{ijk}\dot{b}_i^r b_j^r, \tag{2}$$

le point désigne la dérivée par rapport au temps. Les sommations seront effectuées pour tous les indices muets en position supérieure aussi bien qu'inférieure, avec les valeurs 1, 2, 3, pour ces indices.

On sait, dans ces conditions, que l'énergie cinétique de rotation s'exprime par

$$T = \frac{1}{2}I_{ij}\,\omega_i\,\omega_j$$

et le moment cinétique par

$$s_j = I_{ij}\,\omega_i, \qquad \text{d'où} \qquad T = \frac{1}{2}s_j\,\omega_j,$$

I_{ij} est un tenseur symétrique, constant pour une toupie solide, et généralisant la notion élémentaire de moment d'inertie.

Dans ce qui va suivre, nous n'aurons besoin d'étudier qu'un cas simplifié, celui de la toupie sphérique, pour laquelle, les expressions précédentes deviennent

$$T = \frac{1}{2}I\,\omega_i\,\omega_i, \qquad s_i = I\,\omega_i.$$

Tout notre calcul pourrait être facilement généralisé à la toupie non sphérique. Si l'on utilise l'expression (2) de ω_i en fonction des vecteurs b_k^r, on obtient

$$T = \frac{1}{4}I\,\dot{b}_j^r\,\dot{b}_j^r, \qquad s_i = \frac{1}{2}I\,\varepsilon_{ijk}\,\dot{b}_j^r\,b_k^r.$$

On repère alors le trièdre mobile par rapport au trièdre fixe au moyen de trois angles d'Euler, avec la convention habituelle : si $\vec{u}$ est le vecteur unitaire pris sur la ligne nodale, intersection des plans $\vec{a}^{(1)}\vec{a}^{(2)}$ et $\vec{b}^{(1)}\vec{b}^{(2)}$, on pose

$$\psi = \widehat{\vec{a}^{(2)}, \vec{u}}, \qquad \theta = \widehat{\vec{a}^{(3)}, \vec{b}^{(3)}}, \qquad \varphi = \widehat{\vec{u}, \vec{b}^{(2)}};$$

le sens de rotation choisi étant évidemment le même dans les trois plans et l'expression des b_k^r s'écrit sous forme matricielle

$$(3) \qquad \begin{pmatrix} b^{(1)} \\ b^{(2)} \\ b^{(3)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\varphi & \sin\varphi & 0 \\ -\sin\varphi & \cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos\theta & 0 & -\sin\theta \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin\theta & 0 & \cos\theta \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} \cos\psi & \sin\psi & 0 \\ -\sin\psi & \cos\psi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a^{(1)} \\ a^{(2)} \\ a^{(3)} \end{pmatrix},$$

ce que pour abréger nous écrirons

$$(b) = (\varphi)(\theta)(\psi)(a).$$

Il s'agit maintenant d'exprimer le moment angulaire s_i et l'énergie de rotation T en fonction des angles d'Euler et de leurs dérivées. Le calcul, très classique, est assez fastidieux : on explicite le produit matriciel (3) en un tableau de cosinus directeurs. On dérive explicitement chaque b^r et l'on effectue la multiplication $\dot{b}_i^r b_j^r$, pour i et j donnés, en sommant sur r.

Nous allons proposer ici une autre méthode de calcul plus simple, mais qui ne prendra tout son intérêt que dans la généralisation relativiste. L'idée est de conserver la forme matricielle en effectuant les dérivations sous forme de multiplication matricielle. Ainsi la dérivée de la matrice (ψ) peut s'écrire

$$\frac{\partial}{\partial\psi}(\psi) = \begin{pmatrix} -\sin\psi & \cos\psi & 0 \\ -\cos\psi & -\sin\psi & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\psi & \sin\psi & 0 \\ -\sin\psi & \cos\psi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

soit en appelant $\Gamma^{(3)}$ la dernière matrice :

$$\frac{\partial}{\partial\psi}(\psi) = (\psi)\,\Gamma^{(3)} = \Gamma^{(3)}(\psi).$$

d'où

$$\frac{\partial}{\partial\psi}(b) = (\varphi)(\theta)(\psi)\,\Gamma^{(3)}(a),$$

on aura de même en posant

$$\Gamma^{(2)} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$\frac{\partial}{\partial \theta}(b) = (\varphi)(\theta)\,\Gamma^{(2)}(\psi)\,(a).$$

Si l'on veut garder groupé le produit $(\varphi)\,(\theta)\,(\psi)$, il faut introduire un commutateur qui fasse passer $\Gamma^{(2)}$ à droite de (ψ). Il est facile de voir que

$$\Gamma^{(2)}(\psi) = (\psi)\,L_{\psi}^{(2)}.$$

où

$$L^{(2)}\psi = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -\cos\psi \\ 0 & 0 & -\sin\psi \\ \cos\psi & \sin\psi & 0 \end{pmatrix};$$

Il vient

$$\frac{\partial}{\partial \theta}(b) = (\varphi)\,(\theta)\,(\psi)\,L_{\psi}^{(2)}(a).$$

La troisième dérivation, effectuée suivant le même principe, est un peu plus compliquée, l'opérateur devant sauter d'abord par-dessus (θ), puis par-dessus (ψ). On vérifiera qu'on a

$$\frac{\partial}{\partial \varphi}(\varphi) = (\varphi)\,\Gamma^{(3)}.$$

$$\Gamma^{(3)}(\theta) = (\theta)\,L_{\theta}^{(3)}, \qquad \text{avec } L = L_{\theta}^{(3)} = \begin{pmatrix} 0 & \cos\theta & 0 \\ -\cos\theta & 0 & \sin\theta \\ 0 & -\sin\theta & 0 \end{pmatrix},$$

$$L_{\theta}^{(3)}(\psi) = (\psi)\,X_{\theta,\psi}^{(3)}.$$

avec

$$X_{\theta,\psi}^{(3)} = \begin{pmatrix} 0 & \cos\theta & -\sin\theta\sin\psi \\ -\cos\theta & 0 & \sin\theta\cos\psi \\ \sin\theta\sin\psi & -\sin\theta\cos\psi & 0 \end{pmatrix},$$

de telle sorte qu'on peut écrire

$$\frac{\partial}{\partial \varphi}(b) = (\varphi)\,(\theta)\,(\psi)\,X_{\theta,\psi}^{(3)}(a).$$

Ainsi les dérivées des b'_k par rapport au temps s'écrivent sous forme matricielle

$$(\dot b) = (\varphi)\,(\theta)\,(\psi)\,\big(\Gamma^{(2)}\dot\psi + L_{\psi}^{(2)}\,\dot\theta + X_{\theta,\psi}^{(3)}\dot\varphi\big)\,(a)$$

ou

$$(\dot b) = (\varphi)\,(\theta)\,(\psi)\,N(a).$$

en posant

$$N = \begin{pmatrix} 0 & \dot\psi + \dot\varphi \cos\theta & -\dot\theta \cos\psi - \dot\varphi \sin\theta \sin\psi \\ -\dot\psi - \dot\varphi \cos\theta & 0 & -\dot\theta \sin\psi + \dot\varphi \sin\theta \cos\psi \\ \dot\theta \cos\psi + \dot\varphi \sin\theta \sin\psi & \dot\theta \sin\psi - \dot\varphi \sin\theta \cos\psi & 0 \end{pmatrix}.$$

On remarque que cette matrice est antisymétrique, si bien que sa transposée est

$$\tilde{N} = -N.$$

On peut faire un calcul analogue en faisant passer tous les opérateurs à *gauche* du produit (φ) (θ) (ψ). On vérifiera qu'on peut écrire

$$(\dot{b}) = M(\varphi)(\theta)(\psi)(a) = M(b),$$

M désignant la matrice antisymétrique

$$M = \begin{pmatrix} 0 & \dot\varphi + \dot\psi \cos\theta & -\dot\theta \cos\varphi - \dot\psi \sin\varphi \sin\theta \\ -\dot\varphi - \dot\psi \cos\theta & 0 & \dot\theta \sin\varphi - \dot\psi \cos\varphi \sin\theta \\ \dot\theta \cos\varphi + \dot\psi \sin\varphi \sin\theta & -\dot\theta \sin\varphi + \dot\psi \cos\varphi \sin\theta & 0 \end{pmatrix}.$$

Ainsi préparés, les calculs sont immédiats. Soit à calculer la rotation instantanée

$$\omega_k = \frac{1}{2} \varepsilon_{ijk} \dot{b}_i^r b_j^r.$$

Elle s'écrit sous forme matricielle en introduisant la matrice ligne $(\tilde{\dot{b}})$ transposée de (b) :

$$\begin{aligned} \omega_k &= \frac{1}{2} \varepsilon_{ijk} (\tilde{\dot{b}}_i)(b_j) \\ &= \frac{1}{2} \varepsilon_{ijk} [\widetilde{(\varphi)(\theta)(\psi) N(a_i)}] [(\varphi)(\theta)(\psi)(a_j)] \\ &= \frac{1}{2} \varepsilon_{ijk} (\tilde{a}_i) \tilde{N} (\tilde{\psi}) (\tilde{\theta}) (\tilde{\varphi}) (\varphi)(\theta)(\psi)(a_j), \end{aligned}$$

Soit, puisque chacune des matrices (φ), (θ), (ψ), est l'inverse de sa transposée et que $\tilde{N} = -N$:

$$\boxed{\omega_k = -\frac{1}{2} \varepsilon_{ijk} (\tilde{a}_i) N(a_j).} \tag{4}$$

L'expression avec les opérateurs à gauche est de même :

$$\boxed{\omega_k = -\frac{1}{2} \varepsilon_{ijk} (\tilde{b}_i) M(b_j)} \tag{5}$$

On aura de même pour le moment cinétique :

$$\boxed{s_k = -\frac{1}{2}\varepsilon_{ijk}(\tilde{a}_i)\,\mathrm{N}(a_j)} \tag{6}$$

et

$$\boxed{s_k = -\frac{1}{2}\varepsilon_{ijk}(\tilde{b}_i)\,\mathrm{M}(b_j).} \tag{7}$$

Ces deux expressions donnent immédiatement les quantités physiquement intéressantes, qui sont, on le sait, les projections du vecteur moment cinétique, soit sur les axes fixes a_k^r, soit sur les axes mobiles b_k^r.

Les premières s'obtiennent simplement à partir de (6) en faisant

$$a_k^{(r)} = \delta_k^r,$$

Par exemple, on aura

$$s_1 = -\mathrm{I}(0,\ 1,\ 0)\,\mathrm{N}\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = -\mathrm{I}\,\mathrm{N}_{23}.$$

Ainsi il vient immédiatement

$$\boxed{\begin{aligned} s_1 &= -\mathrm{I}\,\mathrm{N}_{23} = \mathrm{I}(\ \ \dot{\theta}\sin\psi - \dot{\varphi}\sin\theta\cos\psi), \\ s_2 &= -\mathrm{I}\,\mathrm{N}_{31} = \mathrm{I}(-\dot{\theta}\cos\psi - \dot{\varphi}\sin\theta\sin\psi), \\ s_3 &= -\mathrm{I}\,\mathrm{N}_{12} = \mathrm{I}(-\dot{\psi} - \dot{\varphi}\cos\theta). \end{aligned}} \tag{8}$$

De même, les projections sur les axes mobiles s'obtiennent à partir de (7) en faisant

$$b_k^r = \delta_k^r,$$

soit

$$\boxed{\begin{aligned} s^{(1)} &= -\mathrm{I}\,\mathrm{M}_{13} = \mathrm{I}(-\dot{\theta}\sin\varphi + \dot{\psi}\cos\varphi\sin\theta), \\ s^{(2)} &= -\mathrm{I}\,\mathrm{M}_{31} = \mathrm{I}(-\dot{\theta}\cos\varphi - \dot{\psi}\sin\varphi\sin\theta), \\ s^{(3)} &= -\mathrm{I}\,\mathrm{M}_{12} = \mathrm{I}(-\dot{\varphi} - \dot{\psi}\cos\theta. \end{aligned}} \tag{9}$$

L'expression de l'énergie cinétique de rotation est

$$\mathrm{T} = \frac{1}{4}\mathrm{I}\,\dot{b}_k^r\dot{b}_k^r = \frac{1}{4}\mathrm{I}\,(\dot{\tilde{b}}_k)\,(\dot{b}_k).$$

Elle peut se calculer à volonté par les deux procédés.

$$\begin{aligned} \mathrm{T} &= \ \ \frac{1}{4}\mathrm{I}\,(\tilde{b}_k)\,\tilde{\mathrm{M}}\mathrm{M}(b_k) \\ &= -\frac{1}{4}\mathrm{I}\,(\tilde{b}_k)\,\mathrm{M}^2(b_k). \end{aligned}$$

Étant données les relations d'orthogonalité, on voit que la matrice M intervient par la *trace* de son carré. Un calcul sans difficulté nous donne

$$T = \frac{1}{2} I(\dot{\varphi}^2 + \dot{\theta}^2 + \dot{\psi}^2 + 2\dot{\varphi}\dot{\psi}\cos\theta).$$

Comme il n'y a pas de force extérieure, le lagrangien est simplement égal à T et l'on peut calculer les moments canoniquement conjugués

$$p_\varphi = \frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}} = I(\dot{\varphi} + \dot{\psi}\cos\theta),$$

$$p_\psi = \frac{\partial T}{\partial \dot{\psi}} = I(\dot{\psi} + \dot{\varphi}\cos\theta),$$

$$p_\theta = \frac{\partial T}{\partial \dot{\theta}} = I\dot{\theta},$$

d'où les relations réciproques

$$\dot{\psi} = \frac{1}{I\sin^2\theta}(p_\psi - p_\varphi\cos\theta),$$

$$\dot{\varphi} = \frac{1}{I\sin^2\theta}(p_\varphi - p_\psi\cos\theta),$$

$$\dot{\theta} = \frac{1}{I}p_\theta$$

qui portées dans T permettent de former l'hamiltonien

$$H = \frac{1}{2I}\left(\frac{p_\varphi^2 + p_\psi^2 - 2p_\varphi p_\psi\cos\theta}{\sin^2\theta} + p_\theta^2\right).$$

Enfin, en portant ces relations dans les formules (8) et (9), on obtient les expressions bien connues pour les projections du moment cinétique sur les axes fixes :

$$s_1 = \sin\psi\, p_\theta + \cos\psi\cot g\theta\, p_\psi - \frac{\cos\psi}{\sin\theta}p_\varphi,$$

$$s_2 = -\cos\psi\, p_\theta + \sin\psi\cot g\theta\, p_\psi - \frac{\sin\psi}{\sin\theta}p_\varphi,$$

$$s_3 = -p_\psi$$

et sur les axes mobiles :

$$s^{(1)} = -\sin\varphi\, p_\theta - \cos\varphi\cot g\theta\, p_\varphi + \frac{\cos\varphi}{\sin\theta}p_\psi,$$

$$s^{(2)} = -\cos\varphi\, p_\theta + \sin\varphi\cot g\theta\, p_\varphi - \frac{\sin\varphi}{\sin\theta}p_\psi,$$

$$s^{(3)} = -p_\varphi.$$

Nous avons ainsi toutes les formules généralement utilisées pour étudier la mécanique de la toupie sphérique, tant au point de vue classique, qu'au point de vue quantique.

2. Toupie relativiste et angles d'Euler complexes. — Dans l'article cité en référence, nous avons exprimé la disposition relative d'un tétrapode mobile de vecteurs d'univers unitaires et orthogonaux b^{ξ}_{μ} par rapport à un tétrapode fixe a^{ξ}_{μ} au moyen de six angles d'Euler deux à deux complexes conjugués $\varphi^{\pm}$, $\theta^{\pm}$, $\psi^{\pm}$. L'expression matricielle de la transformation, dont on trouvera la forme explicite dans l'article cité, peut s'écrire de façon abrégée :

$$(b) = (\varphi^{+})(\varphi^{-})(\theta^{+})(\theta^{-})(\psi^{+})(\psi^{-})(a) \tag{10}$$

ou encore

$$(b) = (\varphi)(\theta)(\psi)(a)$$

en désignant par (φ) le produit $(\varphi^{+})(\varphi^{-})$.

Nous savons que ces matrices s'expriment au moyen de six opérateurs :

$$\Gamma^{1\pm}, \quad \Gamma^{2\pm}, \quad \Gamma^{3\pm},$$

dont on a montré :

— qu'ils sont antisymétriques et de carré -1 ;

— que chaque Γ^{+} commute avec les trois Γ^{-} et anticommute avec les deux autres Γ^{+}, et de même pour chaque Γ^{-};

— enfin qu'on a

$$\left\{\begin{array}{l} \Gamma^{1+}\Gamma^{2+} = \Gamma^{3+}, \\ \Gamma^{2+}\Gamma^{3+} = \Gamma^{1+}, \\ \Gamma^{3+}\Gamma^{1+} = \Gamma^{2+}. \end{array}\right.$$

et de même avec les Γ^{-}.

Chacune des matrices de l'expression (10) peut s'exprimer au moyen des Γ correspondants, les (φ) et les (ψ) utilisant les Γ^{3}, et les (θ) les Γ^{2}.

On a par exemple :

$$(\psi^{+}) = \cos\frac{\psi^{+}}{2}(1) + \sin\frac{\psi^{+}}{2}\Gamma^{3+},$$

ce qui peut se mettre sous la forme simple

$$(\psi^{+}) = \exp\left(\frac{\psi^{+}}{2}\Gamma^{3+}\right) \qquad \text{puisque} \quad \Gamma^{3+}\Gamma^{3+} = -1.$$

La transformation (10) s'écrit donc

$$(b) = \exp\left(\frac{\varphi^+}{2}\Gamma^{3+}\right)\exp\left(\frac{\varphi^-}{2}\Gamma^{3-}\right)\exp\left(\frac{\theta^+}{2}\Gamma^{2+}\right)$$
$$\times \exp\left(\frac{\theta^-}{2}\Gamma^{2-}\right)\exp\left(\frac{\psi^+}{2}\Gamma^{3+}\right)\exp\left(\frac{\psi^-}{2}\Gamma^{3-}\right)(a).$$

Nous aurons à utiliser les relations suivantes dont la vérification est facile :

$$\text{(11)} \qquad \frac{\partial}{\partial\alpha}\exp\left(\frac{\alpha}{2}\Gamma^r\right) = \frac{1}{2}\Gamma^r\exp\left(\frac{\alpha}{2}\Gamma^r\right),$$

$$\text{(12)} \qquad \Gamma^r\exp\left(\frac{\alpha}{2}\Gamma^s\right) = \exp(-\alpha\Gamma^s)\exp\left(\frac{\alpha}{2}\Gamma^s\right)\Gamma^r,$$

$$\text{(13)} \qquad \exp\left(\frac{\alpha}{2}\Gamma^s\right)\Gamma^r = \Gamma^r\exp\left(\frac{\alpha}{2}\Gamma^s\right)\exp(-\alpha\Gamma^s),$$

$$\text{(14)} \quad \exp\left(\frac{\beta}{2}\Gamma^r\right)\exp\left(\frac{\alpha}{2}\Gamma^s\right) = \exp\left(\frac{\alpha}{2}\Gamma^s\right)\left[\cos\frac{\beta}{2} + \exp(-\alpha\Gamma^s)\Gamma^r\sin\frac{\beta}{2}\right],$$

$$\text{(15)} \qquad = \left[\cos\frac{\alpha}{2} + \sin\frac{\alpha}{2}\Gamma^s\exp\left(-\beta\Gamma^r\right)\right]\exp\left(\frac{\beta}{2}\Gamma^r\right).$$

Appliquons alors la méthode de dérivation de la première section :

$$\frac{\partial}{\partial\psi^+}(b) = \frac{1}{2}(\varphi)(\theta)(\psi^-)\Gamma^{3+}(\psi^+)(a) \quad \text{d'après (11)},$$
$$= \frac{1}{2}(\varphi)(\theta)(\psi)\Gamma^{3+}(a),$$
$$\frac{\partial}{\partial\theta^+}(b) = \frac{1}{2}(\varphi)(\theta^-)(\theta^+)\Gamma^{2+}(\psi)(a).$$

Nous pourrons au moyen de (12), faire sauter Γ^{2+} par dessus (ψ^+) [par ailleurs Γ^{2+} commute avec (ψ^-)] :

$$(\Gamma^{2+})(\psi^+) = (\psi^+)\exp(-\psi^+\Gamma^{3+})\Gamma^{2+},$$

d'où

$$\frac{\partial}{\partial\theta^+}(b) = \frac{1}{2}(\varphi)(\theta)(\psi)\exp(-\psi^+\Gamma^{3+})\Gamma^{2+}(a),$$

Enfin on a

$$\frac{\partial}{\partial\varphi^+}(b) = \frac{1}{2}(\varphi^-)(\varphi^+)\Gamma^{3+}(\theta)(\psi)(a).$$

Faisons d'abord sauter Γ^{3+} par dessus (θ^+) au moyen de (12) :

$$\Gamma^{3+}(\theta^+) = (\theta^+)\exp(-\theta^+\Gamma^{2+})\Gamma^{3+},$$
$$\frac{\partial}{\partial\varphi^+}(b) = (\varphi)(\theta)\exp(-\theta^+\Gamma^{2+})(\psi)\Gamma^{3+}(a)$$

puisque Γ^{3+} commute avec (ψ).

Il reste à faire passer $\exp(-\theta^+\Gamma^{2+})$ par dessus $(\psi^+) = \exp\left(\frac{\psi^+}{2}\Gamma^3\right)$ au moyen de (14) :

$$\exp(-\theta^+\Gamma^{2+})\exp\left(\frac{\psi^+}{2}\Gamma^{3+}\right) = \exp\left(\frac{\psi^+}{2}\Gamma^{3+}\right) \times [\cos\theta^+ - \exp(-\psi^+\Gamma^{3+})\Gamma^{2+}\sin\theta^+].$$

Ainsi il vient finalement

$$\frac{\partial}{\partial\varphi^+}(b) = (\varphi)(\theta)(\psi)[\cos\theta^+ - \exp(-\psi^+\Gamma^{3+})\Gamma^{2+}\sin\theta^+]\Gamma^{3+}(a)$$

La forme des calculs est identique pour les angles ψ^-, θ^-, φ^-.

On peut alors écrire sous forme abrégée :

$$\boxed{(\dot{b}) = \frac{1}{2}(\varphi)(\theta)(\psi)(N^+ + N^-)(a),} \tag{16}$$

N^+ et N^- étant deux matrices de forme identique, fonction l'une des angles $(+)$ et des Γ^+, l'autre des angles $(-)$ et des Γ^-. Leur forme explicite résulte immédiatement des calculs précédents. On aura (en sous-entendant $+$ ou $-$) :

$$N = \Gamma^3\dot{\psi} + \exp(-\psi\Gamma^3)\Gamma^2\dot{\theta} + [\cos\theta - \exp(-\psi\Gamma^3)\Gamma^2\sin\theta]\Gamma^3\dot{\varphi},$$

ce qui devient, en explicitant les exponentielles et en utilisant les relations de commutation entre les Γ :

$$N = \Gamma^1(\sin\psi\dot{\theta} - \cos\psi\sin\theta\dot{\varphi}) + \Gamma^2(\cos\psi\dot{\theta} + \sin\psi\sin\theta\dot{\varphi}) + \Gamma^3(\dot{\psi} + \cos\theta\dot{\varphi}),$$

N est antisymétrique comme les Γ, on a donc $\tilde{N} = -N$.

Un calcul en tous points identique, utilisant les relations (13) et (15) permet de faire passer les opérateurs vers la gauche :

$$\boxed{(\dot{b}) = \frac{1}{2}(M^+ + M^-)(\varphi)(\theta)(\psi)(a) = \frac{1}{2}(M^+ + M^-)(b),} \tag{17}$$

avec des matrices analogues M^+ et M^- :

$$M = \Gamma^1(\sin\varphi\dot{\theta} + \cos\varphi\sin\theta\dot{\psi}) + \Gamma^2(\cos\varphi\dot{\theta} - \sin\varphi\sin\theta\dot{\psi}) + \Gamma^3(\dot{\varphi} + \cos\theta\dot{\psi}).$$

On a encore

$$\tilde{M} = -M.$$

On sait, (2), (3), qu'il est possible de donner une définition physique convenable aux quatre vecteurs b^{ξ}_{μ} régis par les relations d'orthonormalité

$$b^{\xi}_{\mu}\, b^{\xi}_{\nu} = \delta_{\mu\nu}, \qquad b^{\xi}_{\mu}\, b^{\eta}_{\mu} = \delta^{\xi\eta}$$

de façon à ce qu'ils représentent le mouvement instantané d'une toupie relativiste et que la vitesse de rotation instantanée généralisée soit donnée par

$$\omega_{\mu\nu} = \dot{b}^{\xi}_{\mu}\, b^{\xi}_{\nu} = (\tilde{\dot{b}}_{\mu})\,(b_{\nu}),$$

formule qui généralise l'expression (1) de la toupie classique.

On a alors l'énergie cinétique de rotation propre (4)

$$\mathrm{T} = \frac{1}{8}\,\mathrm{I}_{\alpha\beta,\mu\nu}\,\omega_{\alpha\beta}\,\omega_{\mu\nu},$$

le tenseur d'inertie $\mathrm{I}_{\alpha\beta\mu\nu}$ étant symétrique par rapport à la substitution de $\alpha\beta$ et $\mu\nu$ et antisymétrique pour $\alpha\beta$ et $\mu\nu$ respectivement.

De même le moment angulaire propre est

$$s_{\mu\nu} = \frac{1}{2}\,\mathrm{I}_{\alpha\beta,\mu\nu}\,\omega_{\alpha\beta}, \qquad \text{d'où} \qquad \mathrm{T} = \frac{1}{4}\,s_{\mu\nu}\,\omega_{\mu\nu}.$$

Dans le cas, auquel nous nous bornerons, de la toupie sphérique relativiste, on doit poser, pour retrouver à l'approximation non relativiste les formules classiques ordinaires

$$\mathrm{I}_{\alpha\beta\mu\nu} = (\delta_{\alpha\mu}\,\delta_{\beta\nu} - \delta_{\alpha\nu}\,\delta_{\beta\mu})\,\mathrm{I},$$

soit

$$\mathrm{T} = \frac{1}{4}\,\mathrm{I}\,\omega_{\mu\nu}\,\omega_{\mu\nu}, \qquad s_{\mu\nu} = \mathrm{I}\,\omega_{\mu\nu}.$$

Il est facile de voir, qu'en fonction des vecteurs b^{ξ}_{μ}, ces expressions deviennent

$$\mathrm{T} = \frac{1}{4}\,\mathrm{I}\,(\tilde{\dot{b}}_{\mu})\,(\dot{b}_{\mu}), \qquad s_{\mu\nu} = \mathrm{I}\,(\tilde{\dot{b}}_{\mu})\,(b_{\nu}).$$

Introduisons maintenant les angles d'Euler complexes. On a

(2) HALBWACHS, *Théorie des fluides à spin relativistes*, Paris, Gauthier-Villars. 1959, chap. V.

(3) HALBWACHS, HILLION et VIGIER, *Nuovo Cimento*, t. 10, 1959, p. 817.

(4) HALBWACHS, HILLION et VIGIER, *Nuovo Cimento*, t. 11 1959, p. 882.

d'après (16) :

$$\omega_{\mu\nu} = \frac{1}{2}(\tilde{a}_\mu)(\tilde{N}^+ + \tilde{N}^-)(\tilde{\psi})(\tilde{\theta})(\tilde{\varphi})(\varphi)(\theta)(\psi)(a_\nu),$$

soit

$$(18) \qquad \boxed{\omega_{\mu\nu} = -\frac{1}{2}(\tilde{a}_\mu)(N^+ + N^-)(a_\nu).}$$

De même d'après (17) :

$$(19) \qquad \boxed{\omega_{\mu\nu} = -\frac{1}{2}(\tilde{b}_\mu)(M^+ + M^-)(b_\nu).}$$

Nous reviendrons plus loin sur ces formules, mais il faut souligner leur caractère fondamental : elles montrent que $\omega_{\mu\nu}$ se décompose en une somme de deux expressions, l'une :

$$\omega^+_{\mu\nu} = -\frac{1}{2}(\tilde{a}_\mu)N^+(a_\nu)$$

ne faisant intervenir que les angles (+) et leurs dérivées; l'autre :

$$\omega^-_{\mu\nu} = -\frac{1}{2}(\tilde{a}_\mu)N^-(a_\nu)$$

ne faisant intervenir que les angles (—) et leurs dérivées.

Autrement dit, la rotation infinitésimale relativiste

$$\omega_{\mu\nu}\,dt = (d\tilde{b}_\mu)(b_\nu)$$

peut être réalisée par deux transformations infinitésimales successives

$$\omega^+_{\mu\nu}\,dt + \omega^-_{\mu\nu}\,dt,$$

exprimées respectivement en φ^+, θ^+, ψ^+, $d\varphi^+$, $d\psi^+$, $d\theta^+$ et φ^-, θ^-, ψ^-, $d\varphi^-$, $d\theta^-$, $d\psi^-$.

Nous trouvons un résultat analogue sur l'énergie cinétique. On a

$$\begin{aligned} T &= \frac{1}{16} I(\tilde{b}_\mu)(\tilde{M}^+ + \tilde{M}^-)(M^+ + M^-)(b_\mu) \\ &= -\frac{1}{16} I \operatorname{Tr}(M^+ + M^-)^2. \end{aligned}$$

Sur la forme explicite [1] des matrices Γ, on constate que tous les produits d'un Γ^+ par un Γ^- sont de trace nulle, ainsi que le produit d'un

Γ^+ par un Γ^+ d'indice différent. Les seuls termes du carré $(M^+ + M^-)^2$ qui fournissent une trace non nulle sont les termes tels que $\Gamma^{3+}\Gamma^{3+}$, et les traces de ces derniers sont toutes évidemment égales à -4.

D'où

$$\begin{aligned}\mathrm{Tr}(M^+ + M^-)^2 = -4\big[&(\dot\varphi^+)^2 + (\dot\psi^+)^2\cos^2\theta^+ + 2\,\dot\varphi^+\dot\psi^+\cos\theta^+ + (\dot\theta^+)^2\cos^2\varphi^+ \\ &+ (\dot\psi^+)^2\sin^2\varphi^+\sin^2\theta^+ - 2\,\dot\theta^+\dot\psi^+\sin\varphi^+\cos\varphi^+\sin\theta^+ \\ &+ (\dot\theta^+)^2\sin^2\varphi^+ + (\dot\psi^+)^2\cos^2\varphi^+\sin^2\theta^+ \\ &+ 2\,\dot\theta^+\dot\psi^+\cos\varphi^+\sin\varphi^+\sin\theta^+ \\ &\qquad + \text{expression identique avec les angles}(-)\big].\end{aligned}$$

On a ainsi

$$T = T^+ + T^-,$$

avec

$$\boxed{T^\pm = \frac{1}{4}\big[(\dot\theta^\pm)^2 + (\dot\varphi^\pm)^2 + (\dot\psi^\pm)^2 + 2\,\dot\varphi^\pm\dot\psi^+\cos\theta^\pm\big].} \tag{20}$$

L'énergie cinétique de rotation propre de la toupie relativiste se décompose donc en deux termes qui ont chacun exactement la même forme $\left(\text{à un coefficient } \frac{1}{2} \text{ près}\right)$ que l'énergie cinétique d'une toupie classique repérée par les angles d'Euler complexes, $\varphi^\pm$, $\theta^\pm$, $\psi^\pm$. On peut donc considérer séparément ces deux toupies classiques et leur appliquer les considérations de la section 1.

3. **Toupie relativiste et toupies classiques complexes conjuguées.** — Dans l'article cité en référence nous avons introduit dans l'espace euclidien tridimensionnel complexe, deux trièdres trirectangles unitaires fixes $A_k'^{\pm}$ construits au moyen des a_μ^ξ à l'aide des relations suivantes :

$$A_{\nu\mu}'^{\pm} = (\tilde a_\mu)\,\Gamma'^{\pm}(a_\nu),$$

$$A_{\mu\nu}'^{\pm} = \frac{1}{2}A_{\mu\nu}'^{\pm} + \frac{1}{4}\varepsilon_{\mu\nu\alpha\beta}A_{\alpha\beta}'^{\pm},$$

$$A_k'^{\pm} = \frac{1}{2}\varepsilon_{ijk}A_{ij}'^{\pm}$$

et deux trièdres trirectangles mobiles $B_k'^{\pm}$ construits de la même façon sur les b_μ^ξ. On a alors

$$A_k'^{\pm}A_j'^{\pm} = \delta_{kj}, \qquad A_k'^{\pm}A_k^{s\pm} = \delta^{rs}$$

et des relations analogues pour les $B_k'^{\pm}$.

Les $B_k'^+$ sont repérés par rapport aux $A_k'^+$ précisément par les trois angles φ^+, θ^+, ψ^+, qui jouent formellement le rôle des angles d'Euler ordinaires de même, les $B_k'^-$ sont repérés par rapport aux $A_k'^-$ par φ^-, θ^-, ψ^-.

Nous allons maintenant exprimer les grandeurs mécaniques concernant la toupie relativiste en fonction des grandeurs mécaniques définies par deux toupies classiques complexes conjuguées qui seraient liées aux deux trièdres mobiles des $B_k'^{\pm}$ de la même façon que dans le cas de la toupie classique réelle de la section 1.

Les matrices $M^{\pm}$ et $N^{\pm}$ étant des combinaisons linéaires des opérateurs $\Gamma'^{\pm}$, on voit d'abord qu'en encadrant, comme dans la formule (18), N^+ et N^- entre $(\tilde{a}_\mu)$ et (a_ν), on fera intervenir dans l'expression de $\omega_{\mu\nu}$, les tenseurs $\Lambda_{\mu\nu}'^{\pm}$ dont on vient de rappeler la définition. De même si l'on utilise la formule (19), on fera apparaître les tenseurs

$$\Gamma_{\mu\nu}'^{\pm} = (\tilde{b}_\mu)\,\Gamma'^{\pm}(b_\nu).$$

Pour passer aux vecteurs tridimensionnels complexes conjugués on doit introduire comme représentation de la rotation instantanée relativiste une quantité qu'on peut former à partir de la vitesse angulaire $\omega_{\mu\nu}$ et qui exprime les mêmes propriétés qu'elle, à savoir la « vitesse angulaire self-duale ».

$$\Omega_{\mu\nu} = \omega_{\mu\nu} + \frac{1}{i}\,\hat{\omega}_{\mu\nu}, \qquad \text{avec} \quad \hat{\omega}_{\mu\nu} = \frac{i}{2}\,\varepsilon_{\mu\nu\alpha\beta}\,\omega_{\alpha\beta}.$$

En formant $\Omega_{\mu\nu}$ à partir des formules (18) ou (19) exprimées en fonction des tenseurs $\Lambda_{\mu\nu}'^{\pm}$ et $\Gamma_{\mu\nu}'^{\pm}$, on fera apparaître les self-duaux de ces tenseurs, soit

$$A_{\mu\nu}'^{\pm} = \Lambda_{\mu\nu}'^{\pm} + \frac{1}{2}\,\varepsilon_{\mu\nu\alpha\beta}\,\Lambda_{\alpha\beta}'^{\pm},$$

$$B_{\mu\nu}'^{\pm} = \Gamma_{\mu\nu}'^{\pm} + \frac{1}{2}\,\varepsilon_{\mu\nu\alpha\beta}\,\Gamma_{\alpha\beta}'^{\pm}.$$

Nous prendrons alors les composantes d'espace Ω_{ij}, qui sont égales (à i près) aux composantes Ω_{k4} $(i, j, k \sim 1, 2, 3)$ et l'on considère le vecteur dual d'espace

$$\Omega_k = \frac{1}{2}\,\varepsilon_{ijk}\,\Omega_{ij},$$

ce qui fera apparaître à la place des $A_{\mu\nu}'^{\pm}$, les vecteurs tridimensionnels complexes $A_k'^{\pm}$ du trièdre fixe et à la place des $B_{\mu\nu}'^{\pm}$ les vecteurs $B_k'^{\pm}$ du trièdre mobile. On voit qu'on aura simplement à remplacer dans les formules (18) et (19) respectivement :

$$(\tilde{a}_\mu)\,\Gamma'^{\pm}(a_\nu) \qquad \text{par} \quad A_k'^{\pm}$$

et

$$(\tilde{b}_\mu)\,\Gamma'^{\pm}(b_\nu) \qquad \text{par} \quad B_k'^{\pm}.$$

Dans chaque cas la vitesse angulaire self-duale se séparera en deux termes, l'un relatif aux trièdres $A_k'^{+}$ et $B_k'^{+}$ et aux angles φ^+, θ^+, ψ^+, l'autre aux trièdres $A_k'^{-}$ et $B_k'^{-}$ et aux angles φ^-, θ^-, ψ^- :

$$\Omega_i = \Omega_i^+ + \Omega_i^-.$$

N'écrivons que l'un des termes en sous-entendant le signe. Il vient

$$\begin{aligned}\Omega_i = -\big[\; & A_i^1\,(\dot\theta \sin\psi - \dot\varphi \sin\theta\cos\psi) \\ & + A_i^2\,(\dot\theta\cos\psi + \dot\varphi\sin\theta\sin\psi) + A_i^3\,(\dot\psi + \dot\varphi\cos\theta)\big]\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}\Omega_i = -\big[\; & B_i^1\,(\dot\theta \sin\varphi + \dot\psi \sin\theta\cos\varphi) \\ & + B_i^2\,(\dot\theta\cos\varphi - \dot\psi\sin\theta\sin\varphi) + B_i^3\,(\dot\varphi + \cos\theta\,\dot\psi)\big].\end{aligned}$$

Finalement, ces formules fournissent les projections de chacun des vecteurs vitesse angulaire self-duale $\Omega_i^{\pm}$ sur chacun des trièdres fixes $A_k'^{\pm}$ et mobile $B_k'^{\pm}$. On a ainsi sur le trièdre fixe :

$$\begin{aligned}\Omega_1^{\pm} &= -\,\dot\theta^{\pm}\sin\psi^{\pm} + \dot\varphi^{\pm}\sin\theta^{\pm}\cos\psi^{\pm},\\ \Omega_2^{\pm} &= -\,\dot\theta^{\pm}\cos\psi^{\pm} - \dot\varphi^{\pm}\sin\theta^{\pm}\sin\psi^{\pm},\\ \Omega_3^{\pm} &= -\,\dot\psi^{\pm} - \dot\varphi^{\pm}\cos\theta^{\pm}\end{aligned}$$

et sur le trièdre mobile :

$$\begin{aligned}\Omega^{1\pm} &= -\,\dot\theta^{\pm}\sin\varphi^{\pm} - \dot\psi^{\pm}\sin\theta^{\pm}\cos\varphi^{\pm},\\ \Omega^{2\pm} &= -\,\dot\theta^{\pm}\cos\varphi^{\pm} + \dot\psi^{\pm}\sin\theta^{\pm}\sin\varphi^{\pm},\\ \Omega^{3\pm} &= -\,\dot\varphi^{\pm} - \dot\psi^{\pm}\cos\theta^{\pm},\end{aligned}$$

c'est-à-dire précisément (au sens de rotation près) les formules que nous avons trouvées dans la section 1 pour la toupie classique.

Il y a donc une analogie formelle complète entre la toupie réelle classique et les deux toupies complexes conjuguées qui expriment la rotation instantanée de la toupie relativiste. A l'aide de l'expression (20) de l'énergie cinétique, on peut bâtir un formalisme canonique et l'on obtiendra entre les moments conjugués $p_{\varphi\pm}$, $p_{\psi\pm}$, $p_{\theta\pm}$ et les composantes du moment cinétique sur les $A_k^{\prime\pm}$ et les $B_k^{\prime\pm}$ les mêmes relations que pour la toupie classique.

Dans un travail à paraître prochainement, nous nous proposons P. Hillion, J. P. Vigier et moi-même de tirer les conséquences de ces relations sur le plan classique, puis sur le plan quantique.