ANNALES DE L'I. H. P.

P.A.M. DIRAC

La seconde quantification

Annales de l'I. H. P., tome 11, n° 1 (1949), p. 15-47

<http://www.numdam.org/item?id=AIHP_1949__11_1_15_0>

© Gauthier-Villars, 1949, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Annales de l'I. H. P. » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (http://www.numdam.org/conditions). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
http://www.numdam.org/

La seconde quantification,

par

P. A. M. DIRAC

La seconde quantification est une méthode utilisée en mécanique quantique pour étudier un ensemble de particules identiques.

Cette méthode n'est pas nouvelle : voici bientôt vingt ans qu'elle a été employée pour édifier une théorie du rayonnement, qu'on peut cependant reprendre aujourd'hui à nouveau pour lui donner une forme qui en fasse mieux resssortir la beauté.

C'est V. Fock qui a montré le premier dans deux mémoires, trop peu connus, sur l'oscillateur harmonique et sur la théorie du rayonnement (1), comment on peut perfectionner la méthode de la seconde quantification.

L'article qui suit est basé sur ce travail de Fock. J'indiquerai tout d'abord les idées et les résultats fondamentaux; ensuite je montrerai comment on peut développer la théorie pour la rendre relativiste et l'appliquer au problème du rayonnement.

1. **Notations.** — Pour traiter des problèmes généraux de la mécanique quantique, j'ai développé une notation symbolique spéciale, qui me semble commode et bien adaptée à ce genre de questions.

En mécanique quantique, on utilise des opérateurs qui correspondent aux variables dynamiques et qui obéissent aux lois ordinaires de l'algèbre, à l'exclusion de la loi de commutativité de la multiplication; ils peuvent opérer soit à gauche, soit à droite et dans chaque cas sur une sorte déterminée de vecteurs.

---

(1) V. Fock, *Zeitschr. f. Phys.*, 49, 1928, p. 339; *Phys. Zeitschr. d. Sowiet. U.*, 6, 1934, p. 425.

Nous appellerons *vecteurs à gauche* les vecteurs de la première sorte, sur lesquels les opérateurs opèrent à gauche et nous les désignerons par le symbole $\langle|$; ceux du deuxième type seront appelés *vecteurs à droite*, et seront désignés par le symbole $|\rangle$.

Un vecteur déterminé, à gauche ou à droite, sera caractérisé par une ou plusieurs lettres placées au milieu du symbole correspondant, par exemple $\langle P|$ ou $|Q\rangle$.

A chaque vecteur à gauche correspond un vecteur à droite, qui est son imaginaire conjugué et qui est désigné par la même lettre; par exemple l'imaginaire conjugué de $\langle P|$ est $|P\rangle$.

Ces vecteurs correspondent aux divers états du système dynamique considéré. Plus exactement ce sont leurs directions qui correspondent aux états; en effet, si l'on multiplie un vecteur donné par un nombre complexe quelconque (zéro excepté), l'état décrit par le vecteur n'est pas altéré. Un vecteur $\langle P|$ et son imaginaire conjugué correspondent au même état.

Un vecteur à gauche $\langle P|$ et un vecteur à droite $|Q\rangle$ ont un produit scalaire, qu'on écrit $\langle P|Q\rangle$, et qui est en général un nombre complexe. Nous avons les lois générales

$$\langle P|Q\rangle = \overline{\langle Q|P\rangle}, \tag{1}$$

$$\langle P|P\rangle > 0 \quad \text{pour} \quad \langle P| \neq 0. \tag{2}$$

Avec les vecteurs $\langle P|$, $|Q\rangle$, et les opérateurs α, β nous pouvons construire, par exemple, les vecteurs $\langle P|\alpha$, $\alpha\beta|Q\rangle$, et les nombres $\langle P|\alpha|Q\rangle$, $\langle P|\alpha\beta|Q\rangle$. La multiplication est toujours associative et distributive. Nous voyons que, dans ce symbolisme toute quantité comprise entre deux parenthèses $\langle\ \rangle$ est toujours un nombre, tandis qu'une quantité qui ne comporte qu'un seul crochet $\langle$ ou $\rangle$ est un vecteur. Ce sont précisément ces résultats généraux qui rendent la notation commode.

Avec un vecteur à gauche $\langle P|$ et un vecteur à droite $|Q\rangle$ on peut former un second produit $|Q\rangle\langle P|$, qui est un opérateur; en effet, si on le multiplie par un vecteur à gauche quelconque $\langle X|$, on obtient un autre vecteur à gauche, à savoir $\langle X|Q\rangle\langle P|$, égal d'ailleurs au vecteur à gauche $\langle P|$ multiplié par le nombre $\langle X|Q\rangle$, et si on le multiplie par un vecteur à droite quelconque $|Y\rangle$, on obtient un autre vecteur à droite, à savoir $|Q\rangle\langle P|Y\rangle$.

Introduisons maintenant une base d'états, qui corresponde à une série de vecteurs de base, c'est-à-dire à un système complet de vecteurs $|a_1\rangle$, $|a_2\rangle$, $|a_3\rangle$, ... orthogonaux et normés.

La condition d'orthogonalité et de normalisation s'écrit

$$\langle a_r | a_s \rangle = \delta_{rs}. \tag{3}$$

Dire, de plus, que le système de vecteurs est complet, signifie qu'un vecteur à droite quelconque $|P\rangle$ peut être exprimé linéairement en fonction des vecteurs de base

$$|P\rangle = \Sigma_r p_r |a_r\rangle,$$

avec des coefficients complexes p_r. En multipliant cette équation par $\langle a_s|$ à gauche, nous trouvons

$$\langle a_s | P\rangle = \Sigma_r p_r \langle a_s | a_r\rangle = \Sigma_r p_r \delta_{sr} = p_s,$$

et ainsi

$$|P\rangle = \Sigma_r |a_r\rangle p_r = \Sigma_r |a_r\rangle\langle a_r | P\rangle.$$

Puisque ce résultat est valable pour tous les vecteurs à droite $|P\rangle$, nous pouvons en tirer

$$\Sigma_r |a_r\rangle\langle a_r| = 1, \tag{4}$$

c'est-à-dire, l'opérateur $\Sigma_r |a_r\rangle\langle a_r|$ est égal à l'opérateur unité. Les équations (3) et (4) sont les deux conditions fondamentales auxquelles satisfont les vecteurs d'une base d'états.

Les nombres $\langle a_r | P\rangle$ sont les éléments représentatifs ou plus brièvement le « représentatif » du vecteur $|P\rangle$. Ils constituent les composantes de la fonction d'onde de Schrödinger dans la représentation déterminée par la base $|a_1\rangle$, $|a_2\rangle$, $|a_3\rangle$, ... L'imaginaire conjuguée de la fonction d'onde est $\langle P | a_r\rangle$.

Avec la notation actuelle, l'équation d'onde de Schrödinger s'écrit

$$i\hbar \frac{d\langle a_r | P\rangle}{dt} = \sum_s \langle a_r | H | a_s\rangle\langle a_s | P\rangle,$$

où $\langle a_r | H | a_s\rangle$ est le représentatif de l'hamiltonien H. D'après (4) nous pouvons simplifier cette équation en écrivant

$$i\hbar \frac{d\langle a_r | P\rangle}{dt} = \langle a_r | H | P\rangle,$$

et puisque cette équation est valable pour tous les $\langle a_r |$, nous pouvons l'écrire dans la forme

$$i\hbar \frac{d|\mathrm{P}\rangle}{dt} = \mathrm{H}|\mathrm{P}\rangle. \tag{5}$$

L'équation (5) est la forme symbolique de l'équation d'onde de Schrödinger. Elle nous montre comment le vecteur $|\mathrm{P}\rangle$, qui correspond à un état du système dynamique, varie avec le temps.

2. **L'oscillateur harmonique d'après la théorie de Fock.** — Le problème de l'oscillateur harmonique introduit deux variables réelles q et p qui satisfont à

$$qp - pq = i\hbar,$$

où $\hbar$ est la constante de Planck divisée par 2π; l'hamiltonien H s'écrit

$$\mathrm{H} = \frac{1}{2}(p^2 + q^2)$$

en négligeant certaines constantes qui ne présentent aucune importance pour la théorie générale. Posons

$$\eta = (2\hbar)^{-\frac{1}{2}}(p + iq), \qquad \bar{\eta} = (2\hbar)^{-\frac{1}{2}}(p - iq).$$

La méthode de Fock consiste à travailler avec les variables complexes η et $\bar{\eta}$ au lieu des variables réelles q et p.

Nous pouvons déduire de la condition ci-dessus

$$\bar{\eta}\eta - \eta\bar{\eta} = 1$$

et, plus généralement,

$$\bar{\eta}\eta^n - \eta^n\bar{\eta} = n\eta^{n-1}, \tag{6}$$

où n est un nombre entier positif. Ces relations de commutation montrent que $\bar{\eta}$ est équivalent à l'opérateur $\frac{d}{d\eta}$. Nous avons aussi

$$\mathrm{H} = \hbar\left(\eta\bar{\eta} + \frac{1}{2}\right) = \hbar\left(\bar{\eta}\eta - \frac{1}{2}\right). \tag{7}$$

Désignons par λ la plus petite valeur propre de l'énergie H. Si $|\mathrm{o}\rangle$ est le vecteur propre à droite, qui correspond à cette valeur propre, nous avons

$$\mathrm{H}|\mathrm{o}\rangle = \lambda|\mathrm{o}\rangle.$$

Il s'ensuit

$$\hbar\eta\bar{\eta}\,|\,o\rangle = \left(\lambda - \frac{1}{2}\hbar\right)|\,o\rangle,$$

$$\hbar\bar{\eta}\eta\bar{\eta}\,|\,o\rangle = \left(\lambda - \frac{1}{2}\hbar\right)\bar{\eta}\,|\,o\rangle,$$

et ainsi

$$H\bar{\eta}\,|\,o\rangle = (\lambda - \hbar)\bar{\eta}\,|\,o\rangle.$$

Cette équation indique que $\bar{\eta}\,|\,o\rangle$ est un vecteur propre de l'énergie, appartenant à la valeur propre $\lambda - \hbar$ qui est inférieure à λ. Mais puisque par hypothèse λ est la plus petite valeur propre de H, cela n'est pas possible, et il faut nécessairement que

$$\bar{\eta}\,|\,o\rangle = o. \tag{8}$$

De cette équation, nous pouvons tirer

$$\hbar\eta\bar{\eta}\,|\,o\rangle = o,$$

$$\left(H - \frac{1}{2}\hbar\right)|\,o\rangle = o,$$

$$\left(\lambda - \frac{1}{2}\hbar\right)|\,o\rangle = o$$

et par conséquent $\lambda = \frac{1}{2}\hbar$, résultat bien connu.

Construisons maintenant le système de vecteurs

$$|\,o\rangle,\quad \eta\,|\,o\rangle,\quad \eta^2\,|\,o\rangle,\quad \eta^3\,|\,o\rangle,\quad \ldots,\quad \eta^n\,|\,o\rangle\quad \ldots \tag{9}$$

Nous avons, d'après (6) et (8),

$$\bar{\eta}\eta^n\,|\,o\rangle = n\eta^{n-1}\,|\,o\rangle,$$

donc

$$\hbar\eta\bar{\eta}\eta^n\,|\,o\rangle = n\hbar\eta^n\,|\,o\rangle$$

et

$$H\eta^n\,|\,o\rangle = \left(n + \frac{1}{2}\right)\hbar\eta^n\,|\,o\rangle.$$

Nous verrons bientôt que le vecteur $\eta^n\,|\,o\rangle$ n'est pas nul; c'est le vecteur propre de l'énergie, appartenant à la valeur propre $\left(n + \frac{1}{2}\right)\hbar$. La série (9) nous donne tous les vecteurs propres de l'énergie H.

Si nous définissons n par

$$H = \left(n + \frac{1}{2}\right)\hbar,$$

nous pouvons considérer n comme une variable dynamique ayant les valeurs propres 0, 1, 2, 3, ... qui détermine le numéro d'un état stationnaire. Il est plus commode de travailler avec n qu'avec H. D'après (7)

$$n = \bar{\eta}\eta. \tag{10}$$

Admettons que le vecteur $|0\rangle$ soit normalisé, donc que

$$\langle 0|0\rangle = 1,$$

et calculons la longueur des autres vecteurs du système (9). Le carré de la longueur de $\eta^n|0\rangle$ est, d'après (6),

$$\langle 0|\bar{\eta}^n\eta^n|0\rangle = \langle 0|\bar{\eta}^{n-1}(\eta^n\bar{\eta} + n\eta^{n-1})|0\rangle.$$

En vertu de (8) on trouve

$$\langle 0|\bar{\eta}^n\eta^n|0\rangle = n\langle 0|\bar{\eta}^{n-1}\eta^{n-1}|0\rangle,$$

donc

$$\langle 0|\bar{\eta}^n\eta^n|0\rangle = n!\langle 0|0\rangle = n! \tag{11}$$

Un calcul analogue nous donne, pour $m > n$,

$$\langle 0|\bar{\eta}^m\eta^n|0\rangle = n!\langle 0|\bar{\eta}^{m-n}|0\rangle = 0$$

et pour $m < n$

$$\langle 0|\bar{\eta}^m\eta^n|0\rangle = \overline{\langle 0|\bar{\eta}^n\eta^m|0\rangle} = 0.$$

Cela nous montre que les vecteurs (9) sont orthogonaux, comme ils doivent l'être puisque ce sont des vecteurs propres de l'énergie. Le résultat (11) peut s'écrire plus généralement

$$\langle 0|\bar{\eta}^m\eta^n|0\rangle = n!\,\delta_{mn}. \tag{12}$$

Les vecteurs (9) forment une base, malgré qu'ils ne soient pas normalisés. Un état général de l'oscillateur correspond à un vecteur $|X\rangle$, qu'on peut exprimer au moyen d'une somme

$$|X\rangle = \{c_0 + c_1\eta + c_2\eta^2 + \ldots\}|0\rangle, \tag{13}$$

où les c_i sont des nombres complexes. L'état est complètement déterminé par la série

$$c_0 + c_1\eta + c_2\eta^2 + \ldots = \psi(\eta)$$

et peut être considéré comme *représenté* par $\psi(\eta)$.

Nous avons obtenu ainsi la *représentation de Fock* des états de l'oscillateur harmonique. Elle diffère des représentations usuelles de la mécanique quantique en ce que la fonction d'onde est fonction d'une variable complexe η, alors qu'habituellement elle est une fonction de variables réelles. La représentation de Fock est plus commode que la représentation ordinaire qui se rapporte à q; en effet, dans la première le représentatif d'un état stationnaire est tout simplement η^n, tandis que dans la deuxième il est $e^{-\frac{1}{2}q^2/\hbar}$ multiplié par un polynome d'Hermite.

Le carré du vecteur $|\,X\,\rangle$ donné par (13) est $\Sigma_n n!\,|\,c_n\,|^2$. Pour que la fonction $\psi(\eta)$ soit normalisée il faut que

$$\Sigma_n n!\,|\,c_n\,|^2 = 1. \tag{14}$$

Si cette condition est satisfaite, la probabilité pour que l'énergie ait la valeur $\left(n+\frac{1}{2}\right)\hbar$, c'est-à-dire la probabilité pour que l'oscillateur soit dans son $n^{\text{ième}}$ état propre, est

$$P_n = n!\,|\,c_n\,|^2. \tag{15}$$

Nous avons ainsi une représentation pour chaque vecteur à droite $|\,X\,\rangle$. Quelle sera la représentation d'un vecteur à gauche $\langle X\,|$? L'équation conjuguée de l'équation (13) est

$$\langle X\,| = \langle o\,|\left\{\bar{c}_0 + \bar{c}_1\bar{\eta}_1 + \bar{c}_2\bar{\eta}_1^2 + \dots\right\}, \tag{16}$$

qui montre que $\langle X\,|$ est déterminé par la série

$$\bar{c}_0 + \bar{c}_1\bar{\eta}_1 + \bar{c}_2\bar{\eta}_1^2 + \dots = \bar{\psi}(\bar{\eta}_1).$$

On peut donc dire que $\langle X\,|$ est représenté par la fonction $\bar{\psi}$ de $\bar{\eta}$. Nous pouvons représenter $\langle X\,|$ par une fonction de η au lieu de $\bar{\eta}$ de la manière suivante.

Définissons l'opérateur η^{-1} par les équations

$$\begin{cases} \eta^{-1}\eta^n\,|\,o\rangle = \eta^{n-1}\,|\,o\rangle & (n \geqq 1) \\ \eta^{-1}\,|\,o\rangle = o. \end{cases} \tag{17}$$

De ces équations on déduit

$$\eta^{-1}\eta\eta^n\,|\,o\rangle = \eta^n\,|\,o\rangle \qquad (n \geqq o)$$

et

$$\eta^{-1}\eta = 1. \tag{18}$$

Mais

$$\eta\eta^{-1} \neq 1,$$

puisque

$$\eta\eta^{-1} \,|\, 0\rangle = 0.$$

Ainsi η^{-1} n'est pas vraiment l'inverse de η. L'opérateur η n'a pas de vèritable inverse et l'opérateur η^{-1}, défini par (17), est le meilleur qu'on puisse définir.

Écrivons les puissances de l'opérateur η^{-1} sous la forme η^{-2}, η^{-3}, ..., η^{-n}. D'après (18)

$$\eta^{-n}\eta^{m} = \eta^{m-n}.$$

L'équation

$$\eta^{r}\eta^{s} = \eta^{r+s}$$

est maintenant valable d'une façon générale pour des r et s entiers positifs ou négatifs, excepté dans le cas $r > 0$, $s < 0$.

Nous avons

$$\langle 0 \,|\, \eta^{-n}\eta^{m} \,|\, 0\rangle = \langle 0 \,|\, \eta^{m-n} \,|\, 0\rangle.$$

Ce nombre est égal à zéro lorsque $m < n$, d'après la deuxième équation (17), et il est également nul quand $m > n$, d'après l'équation conjuguée à (8). Ainsi le vecteur $\langle 0 \,|\, \eta^{-n}$ est orthogonal à tous les vecteurs du système (9) excepté à $\eta^{n} \,|\, 0\rangle$, et dans ce cas il doit être égal au conjugué de $\eta^{n} \,|\, 0\rangle$, à un facteur près. Posons

$$\langle 0 \,|\, \eta^{-n} = a_n \langle 0 \,|\, \bar{\eta}^{n}.$$

Pour déterminer a_n, nous avons

$$1 = \langle 0 \,|\, \eta^{-n}\eta^{n} \,|\, 0\rangle = a_n \langle 0 \,|\, \bar{\eta}^{n}\eta^{n} \,|\, 0\rangle = a_n\, n!$$

d'après (11). Donc $a_n = n!^{-1}$ et

$$\langle 0 \,|\, \eta^{-n} = n!^{-1} \langle 0 \,|\, \bar{\eta}^{n}. \tag{19}$$

L'équation (16) nous donne maintenant

$$\langle X \,| = \langle 0 \,| \{ \bar{c}_0 + \bar{c}_1\eta^{-1} + 2!\,\bar{c}_2\eta^{-2} + \ldots \}.$$

Posons

$$\bar{c}_0\eta^{-1} + \bar{c}_1\eta^{-2} + 2!\bar{c}_2\eta^{-3} + \ldots = \psi^+(\eta),$$

ainsi que

$$\langle X| = \langle 0|\psi^+(\eta)\eta.$$

Il faut remarquer que

$$\langle X| \neq \langle 0|\eta\psi^+(\eta),$$

le second membre étant nul. La fonction $\psi^+(\eta)$ détermine le vecteur $\langle X|$, et nous l'appelons le représentatif de $\langle X|$.

Pour un vecteur à gauche général $\langle Y|$, qui est égal à

$$\langle Y| = \langle 0|\{b_0 + b_1\eta^{-1} + b_2\eta^{-2} + \ldots\} = \langle 0|\Phi(\eta)\eta \tag{20}$$

où

$$\Phi(\eta) = b_0\eta^{-1} + b_1\eta^{-2} + b_2\eta^{-3} + \ldots, \tag{21}$$

la fonction $\Phi(\eta)$ est la représentation de $\langle Y|$. Pour que $\langle Y|$ soit normalisé, il faut que

$$\Sigma\,|b_n|^2/n! = 1. \tag{22}$$

Ainsi, dans la théorie de Fock, un vecteur à droite est représenté par une série de puissances croissantes de η et un vecteur à gauche par une série de puissances décroissantes de η, commençant avec η^{-1}. D'après (14) on voit que la série croissante $\psi(\eta)$ doit converger pour toutes les valeurs complexes de η, mais d'après (22) la série décroissante $\Phi(\eta)$ ne doit pas nécessairement converger pour n'importe quelle valeur de η. Pour cette raison, la représentation d'un vecteur à gauche dans cette théorie n'est pas très importante et en général on n'utilise que la représentation des vecteurs à droite.

Il est possible de généraliser la théorie de la représentation des vecteurs à gauche. On peut en effet ajouter au représentatif $\Phi(\eta)$ de $\langle Y|$ les termes d'une série croissante

$$b_{-1} + b_{-2}\eta + b_{-3}\eta^2 + \ldots = \Phi_-(\eta), \tag{23}$$

où b_{-1}, b_{-2}, b_{-3}, ... sont des nombres arbitraires. Ces termes donneraient des termes additionnels au second membre de l'équation (20)

$$\langle 0|\{b_{-1}\eta + b_{-2}\eta^2 + b_{-3}\eta^3 + \ldots\},$$

qui sont nuls parce que $\langle o | \eta = o$. Ces termes n'apporteraient aucune contribution à la série (22), parce que $n! = \infty$ quand n est négatif. Il n'y a pas de généralisation correspondante pour les vecteurs à droite, parce que si l'on continuait la série (14) pour des valeurs négatives de n, les termes additionnels seraient infiniment grands.

Le produit scalaire de deux vecteurs est donné par une formule intéressante. Supposons que la série (21), qui représente le vecteur $\langle Y |$, converge pour les valeurs de η pour lesquelles $|\eta| > R$, de sorte que la fonction $\Phi(\eta)$ existe dans le domaine $|\eta| > R$. Nous avons, d'après (20) et (13),

$$\begin{aligned}(24)\quad \langle Y | X \rangle &= \langle o | \{ b_0 + b_1 \eta^{-1} + b_2 \eta^{-2} + \dots \} \{ c_0 + c_1 \eta + c_2 \eta^2 + \dots \} | o \rangle \\ &= b_0 c_0 + b_1 c_1 + b_2 c_2 + \dots \\ &= \frac{1}{2\pi i} \oint \Phi(\eta) \psi(\eta) \, d\eta,\end{aligned}$$

où l'intégrale est prise sur une ligne fermée autour de l'origine dans le domaine $|\eta| > R$.

Nous pouvons construire par une méthode semblable une représentation qui se rapporte à la variable $\bar{\eta}$. Dans cette représentation un vecteur à gauche est représenté par une série de puissances croissantes de $\bar{\eta}$, et un vecteur à droite par une série de puissances décroissantes de $\bar{\eta}$, commençant avec $\bar{\eta}^{-1}$,

3. **Système de plusieurs oscillateurs.** — On peut facilement généraliser la théorie précédente de l'oscillateur harmonique pour l'appliquer à un système de plusieurs oscillateurs. Introduisons pour chaque oscillateur r les opérateurs η_r et $\bar{\eta}_r$. Ces opérateurs satisfont aux relations de commutation

$$(25)\qquad \begin{cases} \eta_r \eta_s - \eta_s \eta_r = o, \\ \bar{\eta}_r \bar{\eta}_s - \bar{\eta}_s \bar{\eta}_r = o, \\ \bar{\eta}_r \eta_s - \eta_s \bar{\eta}_r = \delta_{rs}. \end{cases}$$

La généralisation de (10) est

$$(26)\qquad \bar{\eta}_r \eta_r = n_r.$$

Un état stationnaire du système est déterminé par les valeurs propres de tous les n_r et correspond à un vecteur à droite de la forme

$$(27)\qquad \eta_1^{n_1} \eta_2^{n_2} \dots | o \rangle,$$

où $|\,0\,\rangle$ est le vecteur normalisé qui correspond à l'état normal, pour lequel tous les n_r sont nuls. Le carré de la longueur du vecteur (27) est donné par

$$\langle 0\,|\,\bar{\eta}_1^{n_1}\bar{\eta}_2^{n_2}\ldots\eta_1^{n_1}\eta_2^{n_2}\ldots\,|\,0\,\rangle = n_1!\,n_2!\ldots \tag{28}$$

d'après (11). La généralisation de (8) est

$$\eta_r\,|\,0\,\rangle = 0 \tag{29}$$

pour tous les r.

Un état général du système correspond à un vecteur à droite $|\,X\,\rangle$ qu'on peut exprimer par une série

$$|\,X\,\rangle = \Sigma_{n_1 n_2\ldots} c_{n_1 n_2}\eta_1^{n_1}\eta_2^{n_2}\ldots\,|\,0\,\rangle = \psi(\eta)\,|\,0\,\rangle,$$

où les n_i sont des nombres entiers non négatifs. Cet état est donc représenté par la fonction $\psi(\eta)$, c'est-à-dire par une série de puissances croissantes de tous les η. Les termes de cette série correspondent aux états des oscillateurs diversement excités, en rapport avec les puissances des η_r.

Pour que $|\,X\,\rangle$ soit normalisé, il faut que

$$\Sigma_n\,|\,c_{n_1 n_2\ldots}\,|^2\,n_1!\,n_2!\ldots = 1.$$

Lorsque cette condition est satisfaite nous obtenons, en généralisant (15), le résultat que la probabilité pour que tous les oscillateurs soient respectivement dans les états n_1, n_2, ... est

$$P_{n_1 n_2\ldots} = |\,c_{n_1 n_2\ldots}\,|^2\,n_1!\,n_2!\ldots.$$

4. **Un ensemble de bosons.** — Considérons un ensemble de u particules semblables. Si la première particule est dans un état a, la seconde dans un état b, la troisième dans un état c, ..., l'état de l'ensemble correspondra à un vecteur à droite que nous pouvons désigner par $|\,abc\ldots g\,\rangle$. Nous pouvons changer l'ordre des particules sans qu'aucun changement observable n'intervienne dans l'état de l'ensemble. L'application d'une permutation P, c'est-à-dire un changement déterminé de l'ordre des particules, nous donnera pour l'ensemble un nouveau vecteur à droite, que nous désignerons par $P\,|\,abc\ldots g\,\rangle$. P est ici un opérateur du même genre que les opérateurs qui correspondent aux variables dynamiques.

Posons

$$S = u!^{-\frac{1}{2}} \Sigma P,$$

où la somme est prise sur toutes les $u!$ permutations. Le vecteur $S|abc\ldots g\rangle$ est toujours symétrique par rapport à toutes les particules; on peut appeler S *l'opérateur symétrisant*. C'est un opérateur réel, $\overline{S} = S$.

Si les particules satisfont à la statistique de Bose, seuls les vecteurs symétriques devront être employés. J'appelle de telles particules des *bosons*.

Prenons une base orthogonale d'états pour un boson $a_1, a_2, a_3, \ldots$, et supposons que tous les états précédents $a, b, c, \ldots, g$ soient des termes de cette base; le vecteur $|abc\ldots g\rangle$ devient $a_r a_s \ldots a_z\rangle$. L'application de l'opérateur symétrisant nous donne les vecteurs $S|a_r a_s \ldots a_z\rangle$, qui forment une base d'états pour l'ensemble de bosons.

Supposons que le vecteur $|a_r a_s \ldots a_z\rangle$ soit normalisé, donc que

$$\langle a_r a_s \ldots a_z | a_r a_s \ldots a_z\rangle = 1.$$

Nous avons

$$(30)\quad \langle a_r a_s \ldots a_z | S.S | a_r a_s \ldots a_z\rangle = u!^{-1} \Sigma_{P,P'} \langle a_r a_s \ldots a_z | PP' | a_r a_s \ldots a_z\rangle.$$

Quand les états $a_r, a_s, \ldots, a_z$ sont tous différents, les termes dans la somme double sont tous nuls, excepté ceux pour lesquels $PP' = 1$, à cause de l'orthogonalité des états $a_r, a_s, \ldots, a_z$. Le nombre de termes non nuls est $u!$ et chacun de ces termes est égal à 1. Le second membre de (30) est égal à 1 et $S|a_r a_s \ldots a_z\rangle$ est normalisé.

Considérons maintenant le cas général dans lequel les états $a_r, a_s, \ldots, a_z$ ne sont pas tous différents. Supposons qu'il y ait n_1 états a_1, ensuite n_2 états a_2, ... La série $a_r, a_s, \ldots, a_z$ détermine les nombres $n_1, n_2, \ldots$ suivant l'équation

$$(31)\qquad a_r + a_s + \ldots + a_z = n_1 a_1 + n_2 a_2 + \ldots.$$

Les termes dans la double somme (30) sont maintenant tous nuls, excepté ceux pour lesquels $PP' = P_S$, où P_S est une permutation qui interchange seulement des bosons qui sont dans le même état. Le nombre de permutations P_S est $n_1!\, n_2! \ldots$. Ainsi le nombre de termes

non nuls dans la double somme est égal à $u!\, n_1!\, n_2! \ldots$, et nous obtenons la formule générale

$$\langle a_r a_s \ldots a_z \,|\, \mathrm{S.S} \,|\, a_r a_s \ldots a_z \rangle = n_1! n_2! \ldots . \tag{32}$$

Nous pouvons facilement généraliser la théorie précédente pour l'appliquer au cas où le nombre de bosons est variable. Dans ce cas il faut employer comme base de vecteurs pour l'ensemble

$$|\,\rangle, \quad |\, a_r \rangle, \quad \mathrm{S}\,|\, a_r a_s \rangle, \quad \ldots, \quad \mathrm{S}\,|\, a_r a_s \ldots a_z \rangle, \quad \ldots . \tag{33}$$

Le premier terme $|\,\rangle$ correspond à l'état de l'ensemble lorsqu'il n'y a pas de bosons, les termes $|\, a_r \rangle$ correspondent à des états ne comportant qu'un boson, les termes $\mathrm{S}\,|\, a_r a_s \rangle$ correspondent à des états à deux bosons, etc. L'état général correspondra à une somme de tous les termes de la série (33) avec des coefficients arbitraires.

Naturellement on ne devra pas traiter comme distincts deux termes de cette série s'ils ne diffèrent que par l'ordre des a; les n déterminés par (31) sont les mêmes.

Tous les termes de la série sont orthogonaux, et la longueur de chacun est donnée par (32).

Nous pouvons maintenant comparer les vecteurs (33) aux vecteurs (27). Chaque vecteur (33) correspond à un vecteur (27), à savoir à celui dont les n sont donnés par (31). D'après (32) et (28) la longueur d'un vecteur (33) est égale à la longueur du vecteur (27) correspondant, et les vecteurs (27) sont tous orthogonaux, de même que les vecteurs (33). En conséquence les deux sytèmes de vecteurs ont exactement les mêmes propriétés et nous pouvons les égaler, c'est-à-dire, nous pouvons poser

$$\mathrm{S}\,|\, a_r a_s \ldots a_z \rangle = \eta_1^{n_1} \eta_2^{n_2} \ldots |\, \mathrm{o} \rangle . \tag{34}$$

Nous arrivons ainsi à établir une correspondance entre les états d'un ensemble de bosons et les états stationnaires d'un système d'oscillateurs.

Appliquons cette correspondance au cas d'un ensemble à un seul boson. L'équation (34) devient

$$|\, a_r \rangle = \eta_r \,|\, \mathrm{o} \rangle . \tag{35}$$

Cette équation montre que le vecteur $|\, a_r \rangle$, qui correspond à un boson

dans l'état a_r, est le résultat de l'application de l'opérateur η_r au vecteur $|\,0\rangle$ qui correspond à zéro boson. On peut aussi considérer l'opérateur η_r comme l'opérateur d'émission d'un boson dans l'état a_r.

Le vecteur qui correspond à un boson dans un état général est $\Sigma_r c_r \eta_r |\,0\rangle$. Si nous multiplions ce vecteur par l'opérateur $\bar{\eta}_s$, on aura, d'après (29) et (25),

$$\bar{\eta}_s \Sigma_r c_r \eta_r |\,0\rangle = \Sigma_r c_r (\bar{\eta}_s \eta_r - \eta_r \bar{\eta}_s) |\,0\rangle = \Sigma_r c_r \delta_{sr} |\,0\rangle = c_s |\,0\rangle.$$

Nous obtenons ainsi un vecteur qui ne correspond à aucun boson, ce qui montre que l'opérateur $\bar{\eta}_s$ est l'opérateur d'absorption d'un boson. Plus précisément, $\bar{\eta}_s$ est l'opérateur d'absorption d'un boson de l'état a_s, puisqu'il donne le résultat zéro si initialement il n'y a pas de boson dans l'état a_s, donc $c_s = 0$.

Considérons maintenant un vecteur $\eta_1^{n_1}\eta_2^{n_2}\ldots|\,0\rangle$ qui correspond à un état à plusieurs bosons. En multipliant ce vecteur par η_r, nous augmentons d'une unité le nombre de bosons dans l'état a_r. En le multipliant par $\bar{\eta}_r$, nous obtenons, d'après (29) et (6),

$$\begin{aligned}(36)\qquad \bar{\eta}_r \eta_1^{n_1}\eta_2^{n_2}\ldots\eta_r^{n_r}\ldots|\,0\rangle &= \eta_1^{n_1}\eta_2^{n_2}\ldots(\bar{\eta}_r\eta_r^{n_r} - \eta_r^{n_r}\bar{\eta}_r)\ldots|\,0\rangle \\ &= n_r \eta_1^{n_1}\eta_2^{n_2}\ldots\eta_r^{n_r-1}\ldots|\,0\rangle.\end{aligned}$$

Ainsi $\bar{\eta}_r$ abaisse d'une unité le nombre de bosons dans l'état a_r. L'opérateur $\bar{\eta}_r$ conduit, du point de vue mathématique, au même résultat que l'opérateur de différentiation $\frac{\partial}{\partial \eta_r}$.

Un état général de l'ensemble de bosons correspond à un vecteur

$$\Sigma_n c_{n_1 n_2}\ldots\eta_1^{n_1}\eta_2^{n_2}\ldots|\,0\rangle = \Psi(\eta)|\,0\rangle;$$

il est donc représenté par la fonction $\Psi(\eta)$. Les divers termes de la somme Ψ ont une interprétation physique très précise : le degré total d'un terme est le nombre total de bosons, les degrés des divers η sont les nombres de bosons dans les états qui correspondent à ces η.

Étudions maintenant les équations du mouvement, en l'absence de toute interaction entre les bosons. Supposons d'abord que les états a_1, a_2, ... de base pour un boson soient des états stationnaires,

et que les niveaux d'énergie correspondants soient E_1, E_2, ... Les vecteurs $|\, a_r\rangle$ varieront avec le temps suivant la loi

$$|\, a_r\rangle : e^{-iE_r t/\hbar},$$

Nous faisons l'hypothèse que le vecteur $|\, o\rangle$ est indépendant du temps, et par conséquent, d'après (35),

$$\eta_r : e^{-iE_r t/\hbar}. \tag{37}$$

η_r varie donc suivant la même loi qu'un oscillateur harmonique de fréquence $\frac{E_r}{h}$. Ce résultat montre que l'ensemble de bosons sans interaction est mathématiquemcnt identique à un système d'oscillateurs harmoniques ayant les fréquences $\frac{E_r}{h}$.

L'énergie totale est

$$H = \Sigma n_r E_r = \Sigma E_r \eta_r \bar{\eta}_r. \tag{38}$$

On peut utiliser H comme hamiltonien du système et en déduire les équations du mouvement (37) pour les η.

Si les états de base a_1, a_2, ... ne sont pas des états stationnaires, les vecteurs qui correspondent à ces états varieront suivant l'équation de Schrödinger. A l'instant $t = o$ cette variation est donnée par l'équation (5) avec $|\, a_r\rangle$ à la place de $|\, P\rangle$,

$$i\hbar \frac{d}{dt} |\, a_r\rangle = H\, |\, a_r\rangle = \Sigma\, |\, a_s\rangle H_{sr}, \tag{39}$$

où

$$H_{sr} = \langle a_s |\, H\, |\, a_r\rangle.$$

Ainsi, d'après (35),

$$i\hbar \frac{d\eta_r}{dt} |\, o\rangle = \Sigma_s \eta_s H_{sr} |\, o\rangle, \tag{40}$$

et

$$i\hbar \frac{d\eta_r}{dt} = \Sigma_s \eta_s H_{sr}. \tag{41}$$

L'équation (41) n'est pas une conséquence nécessaire de l'équation (40), parce que nous pouvons ajouter à (41) des termes contenant $\bar{\eta}_s$ sans altérer la validité de (40); cependant de tels termes conduiraient à des contradictions pour les ensembles à plusieurs bosons.

Les équations du mouvement (41) prennent la forme ordinaire

$$i\hbar \frac{d\eta_r}{dt} = \mathrm{H}\eta_r - \eta_r \mathrm{H}, \tag{42}$$

avec

$$\mathrm{H} = \Sigma_{rs} \eta_s \mathrm{H}_{sr} \bar{\eta}_r. \tag{43}$$

Donc H est la fonction d'Hamilton pour l'ensemble de bosons. Nous travaillons toujours avec la mécanique quantique de Schrödinger, pour laquelle les états sont représentés par des vecteurs qui varient avec le temps, et en conséquence l'équation (42) a un signe différent de l'équation du mouvement de la mécanique quantique d'Heisenberg.

L'équation (41) a la même forme que l'équation (39), mais la signification en est tout à fait différente. L'équation (39) s'applique à une seule particule. Si on la multiplie par un vecteur à gauche fixe $\langle \mathrm{P} |$, on obtient

$$i\hbar \frac{d}{dt} \langle \mathrm{P} \mid a_r \rangle = \Sigma \langle \mathrm{P} \mid a_s \rangle \mathrm{H}_{sr},$$

qui est une équation entre les nombres $\langle \mathrm{P} \mid a_r \rangle$, tandis que l'équation (41) est une équation reliant des opérateurs qui s'appliquent au problème d'un ensemble de bosons. Le passage de l'équation (39) à l'équation (41) est précisément ce qu'on appelle la seconde quantification. Ce passage consiste à remplacer les nombres $\langle \mathrm{P} \mid a_r \rangle$ par les opérateurs η_r qui, avec leurs conjugués, satisfont aux relations de commutation (25). Les nombres $\langle \mathrm{P} \mid a_r \rangle$ sont les composantes de l'imaginaire conjuguée de la fonction d'onde pour une particule, et deviennent, après la seconde quantification, les opérateurs d'émission η_r.

Lorsqu'il y a interaction entre les bosons, l'hamiltonien prend la forme plus générale

$$\mathrm{H} = \Sigma_{rs} \eta_s \mathrm{H}_{sr} \bar{\eta}_r + \Sigma_{rsuv} \eta_r \eta_s \mathrm{V}_{rsuv} \bar{\eta}_u \bar{\eta}_v. \tag{44}$$

Enfin, lorsqu'on fait intervenir des phénomènes d'émission ou d'absoption de bosons, il faut encore ajouter à H des termes contenant des nombres différents de facteurs η et $\bar{\eta}$.

5. **Un ensemble de fermions.** — Nous pouvons modifier la théorie

précédente en employant, au lieu de l'opérateur symétrisant S, l'opérateur antisymétrisant A défini par

$$\mathrm{A} = u!^{-\frac{1}{2}} \Sigma \pm \mathrm{P},$$

avec le signe + pour les permutations paires et le signe — pour les permutations impaires. Nous obtenons ainsi la théorie d'un ensemble de particules qui satisfont à la statistique de Fermi, pour lesquels on doit employer seulement les vecteurs antisymétriques. J'appelle de telles particules des *fermions*.

Pour que le vecteur $\mathrm{A}\,|\,a_r a_s \ldots a_z\rangle$ ne soit pas nul, il faut que tous les a soient différents. Dans ce cas, $\mathrm{A}\,|\,a_r a_s \ldots a_z\rangle$ est toujours normalisé quand $|\,a_r a_s \ldots a_z\rangle$ lui-même est normalisé.

Pour établir une théorie d'un ensemble de fermions en nombre variable on a recours à une base constituée par les vecteurs

$$(45) \qquad |\,\rangle,\quad |\,a_r\rangle,\quad \mathrm{A}\,|\,a_r a_s\rangle,\quad \ldots,\quad \mathrm{A}\,|\,a_r a_s \ldots a_z\rangle,\quad \ldots,$$

analogue à (33). L'état général correspond à une somme de tous les membres de (45) avec des coefficients arbitraires.

Introduisons des opérateurs η, $\bar{\eta}$, qui satisfont aux relations de commutation

$$(46) \qquad \begin{cases} \eta_r \eta_s + \eta_s \eta_r = 0, \\ \bar{\eta}_r \bar{\eta}_s + \bar{\eta}_s \bar{\eta}_r = 0, \\ \bar{\eta}_r \eta_s + \eta_s \bar{\eta}_r = \delta_{rs}. \end{cases}$$

Pour chaque état de base a_r pour un fermion, il y a un η_r et un $\bar{\eta}_r$. Les équations (46) sont semblables aux équations (25), avec le signe + à gauche au lieu du signe —. Les équations (46) donnent

$$\eta_r^2 = 0, \qquad \bar{\eta}_r^2 = 0.$$

Posons

$$(47) \qquad \eta_r \bar{\eta}_r = n_r$$

analogue à (26). Nous avons

$$n_r^2 = \eta_r \bar{\eta}_r \eta_r \bar{\eta}_r = \eta_r (1 - \eta_r \bar{\eta}_r) \eta_r = \eta_r \bar{\eta}_r = n_r.$$

Ce résultat montre que η_r a les seules valeurs propres 0 et 1.

Les n forment un groupe d'observables qui commutent et ils ont des

vecteurs propres simultanés. Prenons le vecteur propre normalisé $|\,0\rangle$ qui appartient aux valeurs propres zéro pour tous les n, de sorte que

$$\langle 0\,|\,0\rangle = 1, \qquad n_r\,|\,0\rangle = 0.$$

De la seconde de ces équations nous tirons

$$\langle 0\,|\,\eta_r\bar{\eta}_r\,|\,0\rangle = 0.$$

Le premier membre de cette équation représente le carré de la longueur du vecteur $\bar{\eta}_r\,|\,0\rangle$; donc ce vecteur doit être nul,

$$\bar{\eta}_r\,|\,0\rangle = 0, \tag{48}$$

relation analogue à (29).

Nous avons

$$\langle 0\,|\,\bar{\eta}_r\eta_r\,|\,0\rangle = \langle 0\,|\,1-\eta_r\bar{\eta}_r\,|\,0\rangle = \langle 0\,|\,0\rangle = 1,$$

donc $\eta_r\,|\,0\rangle$ est normalisé. Également

$$n_r\eta_r\,|\,0\rangle = \eta_r\bar{\eta}_r\eta_r\,|\,0\rangle = \eta_r(1-\eta_r\bar{\eta}_r)\,|\,0\rangle = \eta_r\,|\,0\rangle,$$

et par conséquent $\eta_r\,|\,0\rangle$ est un vecteur propre de n_r appartenant à la valeur propre 1. Ce vecteur est aussi un vecteur propre de tous les autres n appartenant à la valeur propre zéro. Plus généralement, nous trouvons facilement que, pour tous les $\eta_r, \eta_s, \ldots, \eta_z$ différents entre eux,

$$\eta_r\eta_s\ldots\eta_z\,|\,0\rangle \tag{49}$$

est normalisée et constitue un vecteur propre simultané de tous les n, appartenant à la valeur propre 1 pour $n_r, n_s, \ldots, n_z$ et à la valeur propre zéro pour les autres n. Il s'ensuit que tous les vecteurs (49) sont orthogonaux.

Les vecteurs (49) sont en correspondance biunivoque avec les vecteurs (45) et ont exactement les mêmes propriétés, tous les deux étant antisymétriques en $r, s, \ldots, z$. Nous pouvons donc les égaler

$$\mathrm{A}\,|\,a_ra_s\ldots a_z\rangle = \eta_r\eta_s\ldots\eta_z\,|\,0\rangle, \tag{50}$$

ce qui nous donne l'analogue de l'équation (34).

Un état général correspond à un vecteur à droite

$$\Sigma c_{rs\ldots z}\eta_r\eta_s\ldots\eta_z\,|\,0\rangle$$

et l'on peut considérer qu'il est représenté par la fonction

$$\Psi(\eta) = \Sigma c_{rs\ldots z}\eta_r\eta_s\ldots\eta_z$$

des variables η qui anticommutent et dont les carrés sont nuls. Cela nous fournit une représentation convenable pour un ensemble de fermions. Le degré d'un des termes dans $\Psi(\eta)$ correspond au nombre total de fermions et les facteurs η qui entrent dans ce terme indiquent les états occupés.

Les opérateurs η et $\overline{\eta}$ sont les opérateurs d'émission et d'absorption d'un fermion. Quand il n'y a pas d'interaction entre les fermions, les η satisfont à des équations du mouvement ayant la même forme (41) que pour les bosons et l'on peut facilement vérifier que la forme (43) de l'hamiltonien reste toujours valable.

Nous constatons ici encore une fois la ressemblance que présentent les composantes de l'imaginaire conjuguée de la fonction d'onde d'une particule avec les opérateurs d'émission pour un ensemble. Nous appelons toujours « seconde quantification » le passage de ces composantes aux opérateurs, mais il s'agira ici d'une autre sorte de quantification qui s'applique aux fermions au lieu des bosons et pour laquelle les relations de commutation seront (46) au lieu de (25).

6. **Théorie à vecteurs réels.** — Il existe une autre théorie de la seconde quantification, qui est plus simple du point de vue mathématique. Son point de départ est la considération de deux vecteurs réels, ayant un produit scalaire, lequel sera naturellement un nombre réel. Deux cas sont à considérer :

1° Le produit scalaire de deux vecteurs est antisymétrique,

$$(ab) = -(ba). \tag{51}$$

2° Le produit scalaire est symétrique,

$$(ab) = (ba) \quad \text{et} \quad (aa) > 0. \tag{52}$$

Les vecteurs ordinaires correspondent naturellement au second cas.

Introduisons un système d'opérateurs hermitiques ξ_a, ξ_b, ... qui correspondent aux vecteurs a, b, ..., la correspondance étant linéaire

$$\begin{cases} \xi_{(a+b)} = \xi_a + \xi_b, \\ \xi_{xa} = x\xi_a, \end{cases} \tag{53}$$

x étant un nombre réel quelconque. Nous supposons que ces opérateurs satisfont aux relations de commutation

$$\xi_a\xi_b - \xi_b\xi_a = i(ab) \qquad \text{(premier cas)}, \tag{54}$$

$$\xi_a\xi_b + \xi_b\xi_a = (ab) \qquad \text{(second cas)}. \tag{55}$$

Il est facile de voir qu'il n'y a pas de contradiction ni entre (54), (53) et (51), ni entre (55), (53) et (52).

Le facteur i s'introduit dans le second membre de (54), parce que le premier membre est imaginaire.

Avec quelques petites modifications, nous pourrons établir une correspondance entre les vecteurs a, b, ... et les états d'un système dynamique. Les vecteurs $\langle|$ et $|\rangle$ de la mécanique quantique doivent toujours être des vecteurs complexes, sans quoi il n'y aurait pas d'accord avec l'expérience. Il faudra donc admettre que nos vecteurs a, b, ... peuvent être multipliés par des nombres complexes. Nous pouvons considérer qu'un de ces vecteurs multiplié par un nombre complexe quelconque est un vecteur à droite $|\rangle$, et que son imaginaire conjuguée est un vecteur à gauche $\langle|$. Dans le premier cas, il faut définir à nouveau le produit scalaire (ab) comme un nombre imaginaire, égal à $-i$ fois le (ab) de l'équation (51), pour que cette équation reste en accord avec (1). Le i dans le second membre de (54) disparaîtra.

Nous appellerons *système primitif* le système dynamique déterminé par ces vecteurs $|\rangle$ et $\langle|$. Les opérateurs ξ nous fourniront une seconde quantification du système primitif.

Pour comparer cette nouvelle méthode de seconde quantification à celles des paragraphes 4 et 5, il nous faudra introduire une base. Nous admettrons que le nombre des vecteurs indépendants est pair et égal à $2n$ (si ce nombre était impair, la comparaison serait plus malaisée). Dans le premier cas, nous pouvons choisir une base de vecteurs $a_1, a_2, \ldots, a_n, a_1^+, a_2^+, \ldots, a_n^+$ telle que

$$(a_r a_s) = 0, \qquad (a_r^+ a_s^+) = 0, \qquad (a_r a_s^+) = -(a_s^+ a_r) = i\,\delta_{rs},$$

avec

$$r, s = 1, 2, \ldots, n,$$

pourvu qu'il n'existe pas de vecteur dont le produit scalaire avec n'importe quel autre soit nul.

Cela étant, les opérateurs ξ_r, ξ_r^+ qui correspondent à ces vecteurs de base satisfont à

$$(56)\qquad \begin{cases} \xi_r\xi_s - \xi_s\xi_r = 0, \qquad \xi_r^+\xi_s^+ - \xi_s^+\xi_r^+ = 0, \\ \xi_r\xi_s^+ - \xi_s^+\xi_r = i\,\delta_{rs}. \end{cases}$$

Si nous introduisons maintenant les opérateurs complexes η_r, $\bar{\eta}_r$ par

$$\xi_r - i\xi_r^+ = \sqrt{2}\,\eta_r, \qquad \xi_r + i\xi_r^+ = \sqrt{2}\,\bar{\eta}_r,$$

nous trouvons que les η et $\bar{\eta}$ satisfont aux relations de commutation (25). Nous revenons ainsi à la seconde quantification du paragraphe 4 pour un ensemble de bosons, avec toutefois la différence que *le nombre d'états pour un boson est seulement la moitié du nombre d'états du système primitif*.

Dans le second cas, nous pouvons choisir une base de vecteurs $a_1, a_2, \ldots, a_{2n}$ du type ordinaire, telle que

$$(a_l a_m) = \delta_{lm} \qquad (l, m = 1, 1, \ldots, 2n).$$

Les opérateurs ξ_l qui correspondent à ces vecteurs de base satisfont à

$$\xi_l\xi_m + \xi_m\xi_l = \delta_{lm}.$$

Introduisons maintenant les opérateurs complexes η_r, $\bar{\eta}_r$ par

$$\xi_{2r} + i\xi_{2r-1} = \sqrt{2}\,\eta_r, \qquad \xi_{2r} - i\xi_{2r-1} = \sqrt{2}\,\bar{\eta}_r \qquad (r = 1, 2, \ldots, n).$$

Nous trouvons que ces η_o et $\bar{\eta}_o$ satisfont aux relations de commutation (46). Ainsi nous revenons à la seconde quantification du paragraphe 5 pour un ensemble de fermions, mais encore une fois *le nombre d'états pour un fermion est seulement la moitié du nombre d'états du système primitif*.

7. **Théorie relativiste** $\left(\text{**équation d'onde linéaire en** } \frac{\partial}{\partial t}\right)$. — Examinons maintenant les modifications à apporter à la théorie des paragraphes 4 et 5 pour la rendre relativiste. Nous ne pouvons naturellement attaquer ce problème que dans le cas d'absence d'interaction entre les particules; il n'existe pas en effet jusqu'à présent de théorie relativiste exempte de contradictions pour plusieurs particules en interaction.

Si l'équation d'onde relativiste d'une particule est linéaire en $\frac{\partial}{\partial t}$, la théorie des paragraphes 4 et 5 reste valable sans modification. Cette

théorie nous fournit les opérateurs d'émission η_{rt} d'une particule dans l'état r à l'instant t, et les opérateurs correspondants d'absorption $\bar{\eta}_{rt}$. Ces opérateurs satisfont aux conditions (44) et aussi (25) ou (46). Il s'agit de mettre ces conditions sous une forme relativiste.

Or, nous pouvons considérer les opérateurs η_{rt}, $\bar{\eta}_{rt}$ comme des quantités relativistes. Pour cela il faut que les vecteurs de base $\langle a_1|, \langle a_2|, \ldots$ soient les vecteurs propres des coordonnées x_1, x_2, x_3 d'une particule, condition nécessaire pour réaliser la symétrie entre x_1, x_2, x_3 et le temps t. Ainsi un vecteur $\langle a_r|$ prend la forme $\langle x'_1 x'_2 x'_3 \alpha|$, ou x'_1, x'_2, x'_3 sont des valeurs propres de x_1, x_2, x_3, et α est une variable qui est ajoutée pour tenir compte du spin, s'il y en a. L'opérateur $\eta_{rt'}$ devient maintenant $\eta_{x'_1 x'_2 x'_3 t'\alpha}$.

Avec ces η, l'équation du mouvement (41) est invariante pour les transformations de Lorentz; puisqu'elle a la même forme que l'équation d'onde (ou plutôt que l'équation conjuguée à l'équation d'onde). Cependant les relations de commutation (25) ou (46) n'ont pas une forme relativiste, parce que les deux opérateurs η ou $\bar{\eta}$ se rapportent au même temps t. Il faut donc généraliser ces équations pour qu'elles fournissent les relations de commutation générales entre deux opérateurs se rapportant à deux temps différents; celles-ci seront déterminées par les équations du mouvement (41).

Posons

$$\eta_{x'_1 x'_2 x'_3 t'\alpha'} = \eta', \qquad \eta_{x''_1 x''_2 x''_3 t''\alpha''} = \eta'', \tag{57}$$

nous avons

$$\begin{cases} \eta'\eta'' \pm \eta''\eta' = 0, \\ \bar{\eta}'\bar{\eta}'' \pm \bar{\eta}''\bar{\eta}' = 0, \end{cases} \tag{58}$$

et nous trouvons facilement que

$$\eta'\bar{\eta}'' \pm \bar{\eta}''\eta' = G(x'_1 x'_2 x'_3\ t'\alpha'\ x''_1 x''_2 x''_3\ t''\alpha''), \tag{59}$$

où la fonction G de $x'_1 x'_2 x'_3\, t'\alpha'$ est la solution de l'équation d'onde avec la valeur

$$\delta(x'_1 - x''_1)\,\delta(x'_2 - x''_2)\,\delta(x'_3 - x''_3)\,\delta_{\alpha'\alpha''} \tag{60}$$

à l'instant $t' = t''$. Le signe $+$ dans (58) et (59) se rapporte au cas des fermions, et le signe $-$ au cas des bosons.

La fonction G est une fonction relativiste. Par une transformation de Lorentz elle se transformerait simplement comme un tenseur (ou un spineur par rapport aux variables α', α''). Les relations de commutation généralisées (58), (59) ont ainsi une forme relativiste. Avec l'équation de mouvement, elles constituent les équations fondamentales de la seconde quantification relativiste.

Nous pouvons construire les vecteurs à droite

$$\eta'\eta''\ldots|\,0\rangle. \tag{61}$$

Un tel vecteur correspond à un état pour lequel une particule se trouve dans la position $x'_1 x'_2 x'_3$ à l'instant t', une seconde particule dans la position $x''_1 x''_2 x''_3$ à l'instant t'', etc. Naturellement les divers vecteurs (61) ne sont pas indépendants, parce que les η à un instant déterminé t', dépendent des η à un autre instant t''.

8. Théorie relativiste (équation d'onde du second degré). — Une équation d'onde relativiste du second degré en $\frac{\partial}{\partial t}$ a été proposée par Klein et Gordon. Nous savons en fait que cette équation n'est pas valable pour l'électron, puisqu'elle ne donne pas la valeur correcte du spin, mais elle est utile, dans le cas $m = 0$, comme base pour la théorie du photon. En vue d'une théorie du rayonnement il serait donc utile d'examiner l'application de la méthode de la seconde quantification à cette équation.

La théorie des paragraphes 4 et 5 n'est plus valable pour une équation d'onde du second degré en $\frac{\partial}{\partial t}$; il faut l'adapter à ce cas.

Dans la théorie de Klein et Gordon avec $m = 0$, la fonction d'onde Ψ satisfait à l'équation d'onde

$$\Box\Psi = 0, \tag{62}$$

où

$$\Box = \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} - \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} - \frac{\partial^2}{\partial x_3^2}.$$

Deux solutions Ψ_a et Ψ_b de (62) déterminent une densité de probabilité

$$\frac{1}{4\pi i}\left(\frac{\partial\overline{\Psi}_a}{\partial t}\Psi_b - \overline{\Psi}_a\frac{\partial\Psi_b}{\partial t}\right), \tag{63}$$

qui n'est pas toujours positive pour $\Psi_a = \Psi_b$. On voit apparaître ici une difficulté fondamentale de la théorie de Klein et Gordon, l'existence des probabilités négatives, qui nous empêche d'en donner une interprétation physique directe.

La probabilité totale déterminée par Ψ_a et Ψ_b est

$$\frac{1}{4\pi i}\iiint_{t=\text{const.}} \left\{ \frac{\partial \overline{\Psi}_a}{\partial t}\Psi_b - \overline{\Psi}_a \frac{\partial \Psi_b}{\partial t} \right\} dx_1\, dx_2\, dx_3. \tag{64}$$

Cette intégrale doit être prise sur n'importe quelle surface $t = \text{const.}$ dans l'espace à quatre dimensions. En vertu de l'équation d'onde (62), toutes les valeurs de cette constante conduisent à la même valeur pour l'intégrale (64). Pour abréger, nous écrirons l'expression (64)

$$\frac{1}{4\pi i}\int \overline{\Psi}_a (\urcorner - \ulcorner)\Psi_b\, d^3x, \tag{65}$$

où $\urcorner$ signifie l'opération $\frac{\partial}{\partial t}$ appliquée à gauche, $\ulcorner$ l'opération $\frac{\partial t}{\partial}$ appliquée à droite, et $d^3x = dx_1\, dx_2 dx_3$. L'expression (65) est un invariant, déterminé par $\overline{\Psi}_a$ et Ψ_b.

Soit $\mathbf{x}$ l'ensemble des quatre variables x_1, x_2, x_3, t. On peut considérer la fonction d'onde $\Psi_b(\mathbf{x}')$ en un point donné comme le produit scalaire d'un vecteur à gauche $\langle \mathbf{x}' |$ et d'un vecteur à droite $| b \rangle$,

$$\Psi_b(\mathbf{x}') = \langle \mathbf{x}' | b \rangle, \tag{66}$$

où $\langle \mathbf{x}' |$ dépend seulement du point x' et $| b \rangle$ dépend seulement de la fonction d'onde Ψ_b. Puisque seules les fonctions Ψ qui satisfont à (62) nous intéressent, nous aurons toujours

$$\square \langle \mathbf{x} | b \rangle = 0,$$

et nous pouvons poser, par hypothèse,

$$\square \langle \mathbf{x} | = 0 \tag{67}$$

Avec la même notation, posons

$$\overline{\Psi}_a(\mathbf{x}') = \langle a | \mathbf{x}' \rangle,$$

avec

$$\square | \mathbf{x} \rangle = 0. \tag{68}$$

Le produit scalaire $\langle a \mid b \rangle$ doit être le nombre invariant (65). Nous obtenons ainsi

$$\frac{1}{4\pi i}\int \langle a \mid \mathbf{x}\rangle (\urcorner - \ulcorner)\langle \mathbf{x} \mid b\rangle d^3x = \langle a \mid b\rangle. \tag{69}$$

Avec cette définition du produit scalaire, l'équation (1) est valable, mais (2) ne l'est pas. Puisque l'équation (69) est valable pour chaque vecteur à gauche $\langle a \mid$ et chaque vecteur à droite $\mid b \rangle$, nous aurons

$$\frac{1}{4\pi i}\int \mid \mathbf{x}\rangle (\urcorner - \ulcorner)\langle \mathbf{x} \mid d^3x = 1, \tag{70}$$

où le second membre est l'opérateur unité.

Introduisons la fonction invariante $\Delta(\mathbf{x})$ de Heisenberg et Pauli, définie par

$$\Delta(\mathbf{x}) = \frac{1}{r}\{\delta(r-t) - \delta(r+t)\}, \tag{71}$$

avec

$$r = (x_1^2 + x_2^2 + x_3^2)^{\frac{1}{2}}.$$

Cette fonction a les propriétés importantes suivantes :

$$\square\Delta(\mathbf{x}) = 0, \tag{72}$$

$$\frac{\partial\Delta(\mathbf{x})}{\partial t} = 4\pi\,\delta(x_1)\,\delta(x_2)\,\delta(x_3) \qquad \text{pour} \quad t = 0. \tag{73}$$

A l'aide de ces propriétés nous pouvons déduire, pour une fonction $\Psi(\mathbf{x})$ quelconque qui satisfait à (62),

$$\int \Psi(\mathbf{x})(\urcorner - \ulcorner)\Delta(\mathbf{x}-\mathbf{x}')\,d^3x = -4\pi\Psi(\mathbf{x}'), \tag{74}$$

en prenant l'intégrale sur la surface $t = t'$.

Pour calculer la valeur du produit scalaire $\langle \mathbf{x} \mid \mathbf{x}'\rangle$, substituons $\mid \mathbf{x}'\rangle$ à $\mid b\rangle$ dans (69); nous aurons

$$\frac{1}{4\pi i}\int \langle a \mid \mathbf{x}\rangle (\urcorner - \ulcorner)\langle \mathbf{x} \mid \mathbf{x}'\rangle d^3x = \langle a \mid \mathbf{x}'\rangle.$$

D'après (74) avec $\Psi(\mathbf{x}) = \langle a \mid \mathbf{x}\rangle$, la solution de cette équation est

$$\langle \mathbf{x} \mid \mathbf{x}'\rangle = -i\Delta(\mathbf{x}-\mathbf{x}'). \tag{75}$$

Les vecteurs $\langle \mathbf{x}' \mid$, $\mid \mathbf{x}'\rangle$ prennent la place des vecteurs de base,

quoiqu'ils ne soient pas indépendants. Ils satisfont aux conditions fondamentales (70) et (75), au lieu des conditions (4) et (3). L'équation (70) nous permet d'exprimer un vecteur à droite quelconque $|\,P\,\rangle$ en fonction des vecteurs $|\,\mathbf{x}\,\rangle$ par

$$|\,P\,\rangle = \frac{1}{4\pi i}\int |\,\mathbf{x}\,\rangle(\square - \square)\langle\,\mathbf{x}\,|\,P\,\rangle\, d^3x.$$

Sous la forme que nous lui avons donnée, la théorie de Klein et Gordon est maintenant prête à subir l'application de la seconde quantification. Pour ce faire, il nous suffira d'introduire encore des opérateurs $\eta_{\mathbf{x}}$ et $\bar{\eta}_{\mathbf{x}}$ qui correspondent aux vecteurs à droite $|\,\mathbf{x}\,\rangle$ et aux vecteurs à gauche $\langle\,\mathbf{x}\,|$, et qui satisfont à certaines relations de commutation posées ci-après.

Par analogie avec la théorie des paragraphes 4 et 5, posons

$$|\,\mathbf{x}\,\rangle = \eta_{\mathbf{x}}\,|\,o\,\rangle, \tag{76}$$

$$\bar{\eta}_{\mathbf{x}}\,|\,o\,\rangle = 0, \tag{77}$$

où $|\,o\,\rangle$ est toujours le vecteur à droite qui correspond à l'état de l'ensemble ne contenant aucune particule. D'après (68) et (76) nous en déduisons

$$\square\,\eta_{\mathbf{x}} = 0. \tag{78}$$

L'équation conjuguée à (76) est

$$\langle\,\mathbf{x}\,| = \langle\,o\,|\,\bar{\eta}_{\mathbf{x}}. \tag{79}$$

De (76), (79) et (75) nous tirons

$$\langle\,o\,|\,\bar{\eta}_{\mathbf{x}}\eta_{\mathbf{x}'}\,|\,o\,\rangle = \langle\,\mathbf{x}\,|\,\mathbf{x}'\,\rangle = -\,i\,\Delta(\mathbf{x}-\mathbf{x}'),$$

et, en utilisant (77),

$$\langle\,o\,|\,\bar{\eta}_{\mathbf{x}}\eta_{\mathbf{x}'} \pm \eta_{\mathbf{x}'}\bar{\eta}_{\mathbf{x}}\,|\,o\,\rangle = -\,i\,\Delta(\mathbf{x}-\mathbf{x}').$$

Nous pouvons conclure que les relations de commutation pour les η et $\bar{\eta}$ doivent être

$$\begin{cases} \eta_{\mathbf{x}}\eta_{\mathbf{x}'} \pm \eta_{\mathbf{x}'}\eta_{\mathbf{x}} = 0, \\ \bar{\eta}_{\mathbf{x}}\bar{\eta}_{\mathbf{x}'} \pm \bar{\eta}_{\mathbf{x}'}\bar{\eta}_{\mathbf{x}} = 0, \\ \bar{\eta}_{\mathbf{x}}\eta_{\mathbf{x}'} \pm \eta_{\mathbf{x}'}\bar{\eta}_{\mathbf{x}} = -\,i\,\Delta(\mathbf{x}-\mathbf{x}'), \end{cases} \tag{80}$$

avec le signe + pour les fermions et le signe — pour les bosons.

L'opérateur $\eta_{\mathbf{x}'}$ est l'opérateur d'émission d'une particule dans un état pour lequel la fonction d'onde est

$$\langle \mathbf{x} \mid \eta_{\mathbf{x}'} \mid 0 \rangle = \langle \mathbf{x} \mid \mathbf{x}' \rangle = -i\Delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}').$$

Dans cet état, la particule est certainement au point x'_1, x'_2, x'_3 au temps t'. Il existe encore un état pour lequel la particule est certainement au point x'_1, x'_2, x'_3 au temps t', à savoir l'état qui correspond au vecteur $\frac{\partial}{\partial t'}\eta_{\mathbf{x}'} \mid 0 \rangle$, avec la fonction d'onde

$$\langle \mathbf{x} \mid \frac{\partial}{\partial t'}\eta_{\mathbf{x}'} \mid 0 \rangle = -i\frac{\partial}{\partial t'}\Delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}').$$

Les $\eta_{\mathbf{x}}$ et toutes les fonctions linéaires des $\eta_{\mathbf{x}}$ sont des opérateurs d'émission, et de la même manière les $\bar{\eta}_{\mathbf{x}}$ et les fonctions linéaires des $\bar{\eta}_{\mathbf{x}}$ sont des opérateurs d'absorption.

Comme dans la théorie non relativiste, nous pouvons construire les vecteurs à droite $\eta_{\mathbf{x}}\,\eta_{\mathbf{x}'}\,\eta_{\mathbf{x}''}\ldots \mid 0 \rangle$, qui correspondent à des états de l'ensemble avec plusieurs particules. Un état général de l'ensemble de particules correspond à un vecteur à droite qui est une somme ou une intégrale de tels vecteurs; cet état est donc représenté par une fonction des $\eta_{\mathbf{x}}$. Du point de vue formel, la théorie est semblable à celle des paragraphes 4 et 5, sauf en ce qui concerne le fait qu'en général l'inégalité (2) n'est pas vraie.

La théorie précédente n'est susceptible d'aucune application directe à cause des probabilités négatives qui y apparaissent et qui empêchent l'inégalité (2) de subsister. Malgré cela, j'ai réussi à l'utiliser pour construire une théorie du rayonnement (1).

Il faut préciser dès l'abord que cette dernière théorie s'applique directement à un univers hypothétique dans lequel on peut parler de nombres négatifs de particules. On trouve cependant que dans ce monde hypothétique les *coefficients de probabilité* sont toujours positifs. Un coefficient de probabilité est la fréquence d'un processus atomique divisé par la fréquence de l'arrivée des particules incidentes. Seuls ces coefficients de probabilité sont vraiment importants, et de cette façon les résultats finaux de la théorie peuvent être considérés comme raisonnables.

---

(1) P. Dirac, *Proc. Roy. Soc.*, A, 180, 1941, p. 1.

9. **La théorie de Pauli et Weisskopf.** — On peut éviter les difficultés des probabilités négatives et de l'univers hypothétique dont il a été question au paragraphe précédent en employant la théorie du paragraphe 6 avec des vecteurs réels. Deux fonctions d'onde réelles de Klein et Gordon ont un produit, donné par (64) ou (65), qui est antisymétrique. Donc, d'après le paragraphe 6, nous pouvons construire une théorie de bosons avec des opérateurs hermétiques ξ_a, qui correspondent aux fonctions d'onde réelles Ψ_a et qui satisfont aux relations de commutation suivantes :

$$\xi_a\xi_b - \xi_b\xi_a = \frac{1}{4\pi i}\int \Psi_a(\square - \square)\Psi_b\, d^3x. \tag{81}$$

Prenons comme base pour ces fonctions d'onde

$$\Psi_k = \cos(\mathbf{kx}), \qquad \Psi_k^+ = \sin(\mathbf{kx}), \tag{82}$$

où $\mathbf{k}$ est un vecteur dans l'univers à quatre dimensions, avec

$$k_0^2 - k_1^2 - k_2^2 - k_3^2 = 0, \qquad k_0 > 0.$$

Les fonctions (82) correspondent à des opérateurs $\xi_{\mathbf{k}}$, $\xi_{\mathbf{k}}^+$ qui satisfont aux relations de commutation

$$\begin{aligned}\xi_{\mathbf{k}}\xi_{\mathbf{k}'}^+ - \xi_{\mathbf{k}'}^+\xi_{\mathbf{k}} &= \frac{1}{4\pi i}\int \Psi_{\mathbf{k}}(\square - \square)\Psi_{\mathbf{k}'}^+\, d^3x \\ &= \frac{i}{4\pi}\int \left\{ k_0 \sin(\mathbf{kx})\sin(\mathbf{k'x}) + k'_0\cos(\mathbf{kx})\cos(\mathbf{k'x})\right\} d^3x \\ &= \frac{i}{4\pi}\int \left\{ \frac{1}{2}(k_0+k'_0)\cos(\mathbf{k}-\mathbf{k}', \mathbf{x}) - \frac{1}{2}(k_0-k'_0)\cos(\mathbf{k}+\mathbf{k}', \mathbf{x})\right\} d^3x.\end{aligned}$$

Pour évaluer cette intégrale nous pouvons poser $t = 0$ et nous trouvons

$$\xi_{\mathbf{k}}\xi_{\mathbf{k}'}^+ - \xi_{\mathbf{k}'}^+\xi_{\mathbf{k}} = 2\pi^2 i k_0\, \delta(k_1 - k'_1)\,\delta(k_2 - k'_2)\,\delta(k_3 - k'_3).$$

Cette équation remplace la troisième des équations (56).

Introduisons $\eta_{\mathbf{k}}$ et $\bar{\eta}_{\mathbf{k}}$ par

$$\xi_{\mathbf{k}} - i\xi_{\mathbf{k}}^+ = \eta_{\mathbf{k}}, \qquad \xi_{\mathbf{k}} + i\xi_{\mathbf{k}}^+ = \bar{\eta}_{\mathbf{k}},$$

nous trouvons

$$\bar{\eta}_{\mathbf{k}}\eta_{\mathbf{k}'} - \eta_{\mathbf{k}'}\bar{\eta}_{\mathbf{k}} = 4\pi^2 k_0\, \delta(k_1 - k'_1)\,\delta(k_2 - k'_2)\,\delta(k_3 - k'_3). \tag{83}$$

Cette équation remplace la troisième des équations (25).

Les fonctions δ s'introduisent naturellement dans le second membre de (83), parce que les $\mathbf{k}$ varient d'une manière continue. Dans le second membre de (83) apparaît aussi le coefficient $4\pi^2 k$. Cependant, comme ce coefficient est toujours positif, nous pouvons l'éliminer par une normalisation des $\eta_{\mathbf{k}}$; il n'a pas de signification fondamentale. Les η que nous avons introduits ont donc les mêmes propriétés que les η de la seconde quantification du paragraphe 4 et par conséquent permettent de décrire un ensemble de bosons.

La théorie que nous venons d'établir est la théorie de la seconde quantification de Pauli et Weisskopf (1). Elle n'est pas reliée à la théorie d'une particule de Klein et Gordon d'une façon aussi directe que la théorie du paragraphe 8, mais elle a l'avantage de permettre une interprétation physique sans introduction de probabilités négatives.

Elle a, de plus, un second avantage. L'opérateur d'émission $\eta_{\mathbf{k}} = \xi_{\mathbf{k}} - i\xi_{\mathbf{k}}^{+}$ est l'opérateur d'émission d'un boson dans un état qui correspond à la fonction d'onde

$$\cos(\mathbf{kx}) - i\sin(\mathbf{kx}) = e^{-i(\mathbf{kx})},$$

et l'énergie pour cet état est positive. Ainsi, dans cette théorie, les bosons ont tous des énergies positives, tandis que dans la théorie du paragraphe 8 ils ont aussi des énergies négatives.

Il y a donc deux méthodes de seconde quantification pour l'équation d'onde de Klein et Gordon, la méthode du paragraphe 8 et celle de Pauli et Weisskopf. Du point de vue de l'interprétation physique, la théorie de Pauli et Weisskopf présente tous les avantages, mais elle conduit à des équations d'onde de l'ensemble trop compliquées, et pour lesquelles on n'a pas pu encore trouver de solutions. A cause de la symétrie entre les énergies positives et négatives, la recherche des solutions dans le cas de la théorie du paragraphe 8 est considérablement simplifiée.

10. **Application aux photons.** — Pour appliquer la théorie du paragraphe 8 ou celle du paragraphe 9 aux photons, il faut introduire une variable supplémentaire décrivant la polarisation. La fonction d'onde d'un photon doit avoir quatre composantes, correspondant aux quatre

(1) PAULI et WEISSKOPF, *Helv. Phys. Acta*, VII, 1934, p. 709.

potentiels électromagnétiques; elle doit donc s'écrire $\Psi_\mu(\mathbf{x})$ avec $\mu = 0, 1, 2, 3$. Le produit scalaire de deux de ces fonctions d'onde Ψ_a et Ψ_b sera défini par l'expression de forme relativiste

$$-\frac{g^{\mu\nu}}{4\pi i}\int \overline{\Psi}_{\mu a}(\square - \square)\Psi_{\nu b}\, d^3x. \tag{84}$$

Les composantes de $\overline{\Psi}_{\mu a}$ et $\Psi_{\mu b}$ pour lesquelles $\mu = 1, 2$ ou 3 fournissent dans (84) une contribution de même signe que (65); la composante $\mu = 0$ donne une contribution de signe contraire.

La manière dont il faut généraliser la théorie du paragraphe 8 est claire et il n'est pas nécessaire d'en préciser les détails. Les opérateurs d'émission sont maintenant des fonctions non seulement de $\mathbf{x}$, mais aussi de μ et il faut les écrire $\eta_{\mathbf{x}\mu}$. A la place de la troisième des équations (80) nous aurons l'équation relativiste

$$\bar{\eta}_{\mathbf{x}\mu}\eta_{\mathbf{x}'\nu} \pm \eta_{\mathbf{x}'\nu}\bar{\eta}_{\mathbf{x}\mu} = ig_{\mu\nu}\Delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}'). \tag{85}$$

Un état général sera représenté par une fonction de tous les $\eta_{\mathbf{x}\mu}$.

La manière de généraliser la théorie de Pauli et Weisskopf n'apparaît pas si clairement, parce que, si l'on n'y prend garde, on n'évitera pas les probabilités négatives.

Dans cette généralisation nous avons des opérateurs d'émission $\eta_{\mathbf{k}\mu}$ satisfaisant à la relation de commutation suivante

$$\bar{\eta}_{\mathbf{k}\mu}\eta_{\mathbf{k}'\nu} - \eta_{\mathbf{k}'\nu}\bar{\eta}_{\mathbf{k}\mu} = -4\pi^2 g_{\mu\nu}k_0\,\delta(k_1 - k_1')\,\delta(k_2 - k_2')\,\delta(k_3 - k_3'). \tag{86}$$

Dans le second membre apparaissent le signe + pour μ et ν égaux à 1, 2, ou 3, et le signe — pour μ et ν égaux à zéro. En conséquence les opérateurs $\eta_{\mathbf{k}1}$, $\eta_{\mathbf{k}2}$, $\eta_{\mathbf{k}3}$ sont des opérateurs d'émission comme les η du paragraphe 4, et de plus $\bar{\eta}_{\mathbf{k}0}$ est aussi un opérateur d'émission.

Si nous n'admettons pas l'existence de probabilités négatives dans la théorie, nous ne pouvons plus représenter un vecteur à droite par une série de puissances croissantes des $\eta_{\mathbf{k}1}$, $\eta_{\mathbf{k}2}$, $\eta_{\mathbf{k}3}$, $\eta_{\mathbf{k}0}$; il nous faudra avoir recours à une série de puissances croissantes de $\eta_{\mathbf{k}1}$, $\eta_{\mathbf{k}2}$, $\eta_{\mathbf{k}3}$ et $\bar{\eta}_{\mathbf{k}0}$, ou bien à une série de puissances croissantes pour $\eta_{\mathbf{k}1}$, $\eta_{\mathbf{k}2}$, $\eta_{\mathbf{k}3}$ et décroissantes pour $\eta_{\mathbf{k}0}$. La seconde de ces représentations est la plus commode.

Considérons une seule valeur $\mathbf{k}$, de façon à n'avoir que les quatre

variables η_1, η_2, η_3 et η_0. La fonction d'onde aura dans ce cas la forme

$$\sum A_{nrst}\,\eta_1^r\,\eta_2^s\,\eta_3^t\,\eta_0^{-n-1}, \tag{87}$$

où n, r, s, t prennent les valeurs 0, 1, 2, ..., ∞. n peut aussi prendre les valeurs négatives -1, -2, ..., mais les termes qui correspondent à ces valeurs négatives sont équivalents à zéro, tout comme les termes (23).

Il est intéressant d'étudier comment l'expression (87) se transforme lorsqu'on applique une transformation de Lorentz. Les coefficients A_{nrst} se transforment naturellement d'après une loi linéaire, et par conséquent on peut les considérer comme les composantes, en nombre infiniment grand, d'une sorte de tenseur généralisé. J'appelle un tel tenseur généralisé un *expanseur*.

On peut facilement vérifier que la forme quadratique

$$\sum n!^{-1}\,r!\,s!\,t!\,|\,A_{nrst}\,|^2$$

est invariante (²). Cette forme est toujours positive. Les composantes d'un expanseur nous donnent une représentation unitaire du groupe de Lorentz.

11. **Les conditions supplémentaires.** — En électrodynamique quantique il existe des conditions supplémentaires

$$\left\{\frac{\partial A_\mu}{\partial x_\mu} - Q\right\}|\,P\,\rangle = 0, \tag{88}$$

auxquelles doivent satisfaire tous les vecteurs $|\,P\,\rangle$ qui correspondent à des états réels. Les A_μ dans (88) sont les potentiels électrodynamiques et Q est une fonction de $\mathbf{x}$ qui dépend des charges électriques. Soient $\eta_{\mathbf{k}\mu}$ et $\bar{\eta}_{\mathbf{k}\mu}$ les composantes de Fourier des potentiels A_μ. En décomposant en série de Fourier l'équation (88), nous avons

$$\begin{cases} \left\{k^\mu \eta_{\mathbf{k}\mu} - b_{\mathbf{k}}\right\}|\,P\,\rangle = 0, \\ \left\{k^\mu \bar{\eta}_{\mathbf{k}\mu} - \bar{b}_{\mathbf{k}}\right\}|\,P\,\rangle = 0, \end{cases} \tag{89}$$

où $b_{\mathbf{k}}$ dépendent des charges électriques.

(²) P. Dirac, *Proc. Roy. Soc.*, A, 183, 1945, p. 284.

Représentons $|\,P\,\rangle$ par une fonction Ψ des $\eta_{\mathbf{k}\mu}$ sous la forme d'une série de puissances croissantes pour $\eta_{\mathbf{k}1}$, $\eta_{\mathbf{k}2}$, $\eta_{\mathbf{k}3}$ et décroissantes pour $\eta_{\mathbf{k}0}$. Dans le but de simplifier l'écriture, supposons que les valeurs des $\mathbf{k}$ soient discrètes et que la relation de commutation (86) soit remplacée par

$$\bar{\eta}_{\mathbf{k}\mu}\eta_{\mathbf{k}'\nu} - \eta_{\mathbf{k}'\nu}\bar{\eta}_{\mathbf{k}\mu} = -g_{\mu\nu}c\,\delta_{\mathbf{k}\mathbf{k}'},$$

où c est un nombre positif, qui peut dépendre de $\mathbf{k}$.

Dans ce cas, nous avons

$$\bar{\eta}_{\mathbf{k}\mu} = -c\frac{\partial}{\partial\eta_{\mathbf{k}}^{\mu}},$$

et les équations (89) deviennent

$$\{k^{\mu}\eta_{\mathbf{k}\mu} - b_{\mathbf{k}}\}\Psi = 0, \tag{90}$$

$$\left\{ck_{\mu}\frac{\partial}{\partial\eta_{\mathbf{k}\mu}} + \bar{b}_{\mathbf{k}}\right\}\Psi = 0. \tag{91}$$

Considérons les équations (90) et (91) pour une valeur particulière pour $\mathbf{k}$. La solution de l'équation (90) est

$$\Psi = (k^{\mu}\eta_{\mathbf{k}\mu} - b_{\mathbf{k}})^{-1}\chi, \tag{92}$$

où χ est une fonction des $\eta_{\mathbf{k}1}$, $\eta_{\mathbf{k}2}$, $\eta_{\mathbf{k}3}$ ayant la forme d'une série de puissances croissantes, et où il faut entendre par $(k^{\mu}\eta_{\mathbf{k}\mu} - b_{\mathbf{k}})^{-1}$ une série de puissances croissantes de $\eta_{\mathbf{k}1}$, $\eta_{\mathbf{k}2}$, $\eta_{\mathbf{k}3}$ et décroissantes pour $\eta_{\mathbf{k}0}$. (92) est vraiment une solution de (90), parce que, en la substituant dans (92), le premier membre devient χ, qui ne contient pas de puissances négatives de $\eta_{\mathbf{k}0}$ et qui est ainsi équivalent à zéro. Pour conserver la forme relativiste de (92), on devrait admettre dans χ des termes contenant des puissances positives de $\eta_{\mathbf{k}0}$, quoique de tels termes ne nous fournissent pas de solution plus générale.

En substituant (92) dans (91), nous trouvons

$$0 = \left(ck_{\mu}\frac{\partial}{\partial\eta_{\mathbf{k}\mu}} + \bar{b}_{\mathbf{k}}\right)(k^{\mu}\eta_{\mathbf{k}\mu} - b_{\mathbf{k}})^{-1}\chi = (k^{\mu}\eta_{\mathbf{k}\mu} - b_{\mathbf{k}})^{-1}\left(ck_{\mu}\frac{\partial}{\partial\eta_{\mathbf{k}\mu}} + \bar{b}_{\mathbf{k}}\right)\chi,$$

et ainsi

$$\left(ck_{\mu}\frac{\partial}{\partial\eta_{\mathbf{k}\mu}} + b_{\mathbf{k}}\right)\chi = 0.$$

Si χ ne contient pas $\eta_{\mathbf{k}0}$, la solution de cette équation est

$$\chi = e^{\bar{b}_{\mathbf{k}} k_r \eta_{\mathbf{k}r} / k_0^2 c} \Phi \qquad (r = 1, 2, 3), \tag{93}$$

où Φ est une fonction de $\eta_{\mathbf{k}1}$, $\eta_{\mathbf{k}2}$, $\eta_{\mathbf{k}3}$ qui satisfait à

$$k_r \frac{\partial \Phi}{\partial \eta_{\mathbf{k}r}} = 0. \tag{94}$$

L'équation (94) montre que Φ dépend seulement des composantes transversales du vecteur $\eta_{\mathbf{k}1}$, $\eta_{\mathbf{k}2}$, $\eta_{\mathbf{k}3}$.

Nous pouvons résoudre de cette façon toutes les équations (90), (91) pour les diverses valeurs de $\mathbf{k}$ et nous tiendrons compte de cette façon des conditions supplémentaires. Le résultat est donné par

$$\chi = e^{\sum_{\mathbf{k}} \bar{b}_{\mathbf{k}} k_r \eta_{\mathbf{k}} r / k_0^2 c} \Phi,$$

où Φ est une fonction des composantes transversales des vecteurs $\eta_{\mathbf{k}1}$, $\eta_{\mathbf{k}2}$, $\eta_{\mathbf{k}3}$. Nous pouvons considérer Φ comme la fonction d'onde dans une nouvelle représentation, qui se rapporte uniquement aux composantes transversales du champ électromagnétique. C'est en fait le processus de l'élimination des composantes longitudinales, découvert par Fermi, exprimé dans la représentation qu'on obtient en généralisant la théorie de Fock pour la rendre relativiste.