

# ANNALES DE L'I. H. P.

P.-A.-M. DIRAC

## La théorie de l'électron et du champ électromagnétique

*Annales de l'I. H. P.*, tome 9, n° 2 (1939), p. 13-49

[http://www.numdam.org/item?id=AIHP\\_1939\\_\\_9\\_2\\_13\\_0](http://www.numdam.org/item?id=AIHP_1939__9_2_13_0)

© Gauthier-Villars, 1939, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Annales de l'I. H. P. » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme  
Numérisation de documents anciens mathématiques  
<http://www.numdam.org/>

# La théorie de l'électron et du champ électromagnétique

par

**P.-A.-M. DIRAC.**

---

Considérons le problème d'un ou de plusieurs électrons qui réagissent avec un champ électromagnétique quelconque. Une solution de ce problème a été donnée il y a longtemps par Lorentz, qui se représentait l'électron comme une petite sphère chargée d'électricité, et de dimensions telles que l'inertie du champ de Coulomb environnant était égale à la masse de l'électron.

Cette théorie de Lorentz a donné naissance à l'hypothèse que toute masse peut être expliquée par l'inertie d'un champ électromagnétique et toute énergie par l'énergie électromagnétique d'un tel champ. Cette hypothèse, très intéressante, paraissait raisonnable à l'époque de Lorentz; cependant, aujourd'hui, après les récentes découvertes de la physique, il semble qu'il faille y renoncer, pour deux raisons. En premier lieu, une nouvelle particule a été découverte, le neutron, qui n'a pas de charge électrique, et dont la masse peut difficilement être considérée comme ayant une origine électromagnétique. En second lieu, on a découvert le positon, particule en tout point semblable à l'électron, mais ayant une charge de signe opposé, et l'on a pu construire une théorie de ces deux particules basée sur l'idée d'une symétrie complète entre la masse positive et la masse négative, conception absolument incompatible avec l'hypothèse qui relie la masse à un champ.

La théorie de l'électron de Lorentz a également rencontré des difficultés. En effet, cette théorie ne permet de calculer le mouvement de l'électron que si son accélération est petite. Lorsque l'accélération est grande, — à cause par exemple d'un champ électromagnétique intense

ou d'un champ de haute fréquence qui réagit avec l'électron, — la théorie de Lorentz ne suffit plus pour déterminer le mouvement de l'électron; en effet, d'après la théorie de la relativité, la notion de « sphère en mouvement accéléré » n'est pas bien définie. Pour déterminer le mouvement de l'électron dans ces circonstances, il faut faire des hypothèses supplémentaires qui fixent l'interaction entre les diverses parties de la sphère constituant l'électron; la théorie devient alors très compliquée et très artificielle.

Dans ce qui suit nous proposons une amélioration de la théorie de Lorentz, destinée à la rendre applicable au problème des grandes accélérations, sans hypothèses accessoires compliquées. Ensuite nous envisagerons la possibilité de passer à une théorie quantique <sup>(1)</sup>.

**1. L'action de l'électron sur le champ.** — Deux problèmes sont à considérer, à savoir l'action d'un électron sur un champ électromagnétique, et l'action d'un champ sur un électron. Nous examinerons d'abord le premier de ces problèmes, parce qu'il est de beaucoup le plus simple. Nous admettons que l'électron est un point, et non pas une sphère comme l'a supposé Lorentz; le mouvement de l'électron pourra donc être complètement décrit par ses coordonnées  $x_\mu$  fonctions du temps propre  $s$

$$(1) \quad x_\mu = x_\mu(s), \quad \mu = 0, 1, 2, 3.$$

Nous adopterons la notation usuelle de la théorie de la relativité; on aura

$$(2) \quad (\dot{\mathbf{z}}\dot{\mathbf{z}}) = 1,$$

où le point indique la différentiation par rapport au temps propre  $s$  et les parenthèses le produit scalaire en quatre dimensions

$$(3) \quad (\mathbf{AB}) = A_\mu B^\mu = A_0 B_0 - A_1 B_1 - A_2 B_2 - A_3 B_3.$$

Les unités de longueur et de temps sont telles que la vitesse de la lumière soit égale à l'unité.

D'après la théorie de Maxwell, le champ électromagnétique autour de

<sup>(1)</sup> Les calculs détaillés concernant la théorie classique ont été donnés dans les *Proceedings of the Royal Society*, London, A, t. 167, 1938, p. 148-169.

l'électron peut être décrit par les potentiels  $A_\mu$  qui satisfont aux équations

$$(4) \quad \frac{\partial A_\mu}{\partial x_\mu} = 0,$$

$$(5) \quad \square A_\mu = 4\pi j_\mu,$$

où  $j_\mu$  est le vecteur densité de charge et de courant électrique. Ce vecteur est nul partout, excepté sur la ligne d'univers de l'électron,  $x_\mu = z_\mu$ , où il est infiniment grand.

La singularité dans  $j_\mu$  peut être exprimée facilement à l'aide de la fonction  $\delta$

$$(6) \quad j_\mu = e \int_{-\infty}^{\infty} \dot{z} \delta(x_0 - z_0) \delta(x_1 - z_1) \delta(x_2 - z_2) \delta(x_3 - z_3) ds,$$

où  $e$  est la charge de l'électron. Le champ  $F^{\mu\nu}$  est déterminé par la formule

$$(7) \quad F^{\mu\nu} = \frac{\partial A^\nu}{\partial x_\mu} - \frac{\partial A^\mu}{\partial x_\nu}.$$

Les équations (4) et (5) possèdent une infinité de solutions; en effet, étant donnée une solution de (4) et (5), nous en trouverons une autre en lui ajoutant n'importe quelle solution de (4) et de

$$(8) \quad \square A_\mu = 0.$$

Une solution particulière importante de (4) et (5) est la solution par potentiels retardés découverte par Liénard et Wiechert; nous désignerons par  $F_{rt}$  le champ dérivé de cette solution. La solution réelle qui convient à notre problème physique sera la somme de la solution par potentiels retardés et de la solution de (4) et (8) représentant les ondes électromagnétiques incidentes, c'est-à-dire qui viennent du dehors et réagissent avec l'électron. Nous désignerons par  $F_\nu$  le champ vrai correspondant à cette solution physique et par  $F_{in}$  le champ des ondes incidentes, de sorte que nous aurons

$$(9) \quad F_\nu = F_{rt} + F_{in}.$$

Une autre solution importante de (4) et (5) est la solution par potentiels avancés, qui nous donne le champ  $F_{av}$ . Toute théorie fondamentale devrait être symétrique entre  $F_{av}$  et  $F_{rt}$ . Nous poserons donc

$$(10) \quad F_\nu = F_{av} + F_{ex}.$$

Analogue à (9). Cette relation définit un nouveau champ  $F_{ex}$ , qui peut s'interpréter comme le champ des ondes électromagnétiques qui *sortent* de l'électron. Ainsi la différence

$$(11) \quad F_{ex} - F_{in} = F_{rt} - F_{av} = F_{rad}$$

sera le champ de rayonnement produit par l'électron. Cette différence représente un champ dérivé de potentiels qui satisfont à (8) et n'a pas de singularité sur la ligne d'univers de l'électron. Elle est complètement déterminée par la ligne d'univers, et l'on peut calculer que sur cette ligne elle est donnée par

$$(12) \quad F_{\mu\nu rad} = \frac{4e}{3} (\ddot{z}_\mu \dot{z}_\nu - \ddot{z}_\nu \dot{z}_\mu).$$

**2. Les équations du mouvement de l'électron.** — Pour compléter la théorie il nous faut écrire les équations du mouvement de l'électron, qui détermineront la trajectoire (1). Pour nous aider à trouver ces équations, nous disposons des lois de conservation de l'énergie et de la quantité de mouvement. La théorie de Maxwell nous fournit un tenseur  $T_{\mu\nu}$ , défini par

$$(13) \quad 4\pi T_{\mu\nu} = F_{\mu\rho} F_{\rho\nu} + \frac{1}{4} g_{\mu\nu} F_{\rho\sigma} F^{\rho\sigma},$$

qui détermine le flux d'énergie et de quantité de mouvement à travers n'importe quelle surface dans l'espace à quatre dimensions. Le champ  $F$  à introduire dans (13) doit être, naturellement, le champ réel  $F_r$ .

Pour employer ce tenseur dans notre problème, il faut entourer la ligne d'univers de l'électron par un petit tube et calculer le flux à travers sa surface. Le tube doit être très petit, beaucoup plus petit que la sphère qui représente l'électron dans la théorie de Lorentz; par exemple, on pourrait prendre comme rayon  $\varepsilon$  du tube  $10^{-100}$  cm. Après un calcul compliqué, mais ne présentant pas de difficulté essentielle, on trouve pour le flux d'énergie et de quantité de mouvement qui sortent d'un tronçon quelconque du tube, le vecteur

$$(14) \quad \int \left[ \frac{1}{2} \frac{e^2}{\varepsilon} \dot{z}_\mu - e \dot{z}_\nu f_{\mu\nu} \right] ds,$$

en négligeant les termes qui s'annulent avec  $\varepsilon$ .

Les limites d'intégration sont les valeurs de  $s$  correspondant aux

extrémités du tronçon considéré et le champ  $f$  est défini par

$$(15) \quad f = F_\nu - \frac{1}{2}(F_{r\iota} + F_{a\nu}) = \frac{1}{2}(F_{in} + F_{ex});$$

en d'autres termes,  $f$  est égal à la moyenne de  $F_{in}$  et  $F_{ex}$ .  $f$  n'a pas de singularité sur la ligne d'univers.

D'après les lois de conservation précédentes, l'intégrale (14) doit être égale à la différence entre les flux de l'énergie et de la quantité de mouvement à travers les deux bouts considérés. Cette différence doit dépendre uniquement des conditions physiques aux deux extrémités et doit être indépendante des conditions en tout point intermédiaire. Soit  $B_\mu(s)$  le flux de l'énergie et de la quantité de mouvement à travers une section du tube à un temps propre quelconque  $s$ . Nous avons alors

$$\int_{s_1}^{s_2} \left[ \frac{1}{2} \frac{e^2}{\varepsilon} \ddot{z}_\mu - e \dot{z}_\nu f_\mu^\nu \right] ds = B_\mu(s_2) - B_\mu(s_1),$$

et par conséquent

$$(16) \quad \frac{1}{2} \frac{e^2}{\varepsilon} \ddot{z}_\mu - e \dot{z}_\nu f_\mu^\nu = \dot{B}_\mu.$$

Ceci est tout ce que nous pouvons tirer des lois de conservation. La quantité  $B_\mu$  est arbitraire, à cela près qu'elle doit satisfaire à

$$(17) \quad (\dot{\mathbf{B}} \dot{\mathbf{z}}) = \frac{1}{2} \frac{e^2}{\varepsilon} (\dot{\mathbf{z}} \dot{\mathbf{z}}) - e \dot{z}^\mu \dot{z}_\nu f_\mu^\nu = 0,$$

obtenue à partir des équations (16) à l'aide de

$$(18) \quad (\ddot{\mathbf{z}} \dot{\mathbf{z}}) = 0,$$

relation qui se déduit par dérivation de (2).

Pour préciser (16) nous devons donc faire une hypothèse concernant la forme de  $B_\mu$ . La plus simple consiste à poser

$$(19) \quad B_\mu = k \dot{z}_\mu,$$

où  $k$  est une constante. D'après (18), cette hypothèse satisfait automatiquement à la condition (17). D'autres suppositions sont possibles, mais elles sont toutes beaucoup plus compliquées que celle-ci. Nous emploierons donc (19), et nous aurons ainsi

$$(20) \quad \left( \frac{1}{2} \frac{e^2}{\varepsilon} - k \right) \ddot{z}_\mu = e \dot{z}_\nu f_\mu^\nu.$$

La constante  $k$  doit dépendre du rayon  $\varepsilon$  du tube de manière que l'équation (20) reste bien déterminée quand on passe à la limite  $\varepsilon \rightarrow 0$ . Cette condition impose à  $k$  la forme

$$(21) \quad k = \frac{1}{2} \frac{e^2}{\varepsilon} - m,$$

où  $m$  est une constante indépendante de  $\varepsilon$ . L'équation (20) se réduit maintenant à

$$(22) \quad m \ddot{z}_\mu = e \dot{z}_\nu f_\mu^\nu,$$

qui est de la même forme que l'équation classique du mouvement d'un électron dans un champ donné. La constante  $m$ , introduite par l'équation (21), joue le rôle de la masse de l'électron, et le champ  $f$ , moyenne des champs entrant et sortant, joue le rôle du champ extérieur donné.

Pour comprendre l'équation (21) nous devons supposer qu'au point de l'espace à trois dimensions où se trouve l'électron, il existe une masse négative infiniment grande, qui contrebalance la masse positive, infiniment grande elle aussi, du champ électrique aux environs de ce point, de telle sorte que la masse totale contenue dans une sphère de rayon  $\varepsilon$  soit égale à  $-k = m - \frac{1}{2} \frac{e^2}{\varepsilon}$ , quand on néglige les termes d'ordre  $\varepsilon$ . Nous avons ici un modèle d'électron destiné à remplacer celui de Lorentz. Le rayon de l'électron de Lorentz est remplacé, dans la nouvelle théorie, par le rayon de la sphère dans laquelle la masse totale est nulle. A l'intérieur de cette sphère cependant le champ électrique ne s'évanouit pas, ce qui souligne la différence entre le nouveau modèle et celui de Lorentz. Une discussion générale de la signification des lois de conservation dans de telles circonstances a été donnée par M. Pryce<sup>(1)</sup>.

Dans les problèmes pratiques, le champ donné est généralement le champ incident  $F_{in}$ , et non pas la moyenne  $f$  des champs incident et sortant. L'équation (22) ne se présente pas sous une forme convenable, mais nous pouvons la transformer au moyen des équations (15), (11) et (12), qui nous donnent

$$(23) \quad f_{\mu\nu} = F_{\mu\nu in} + \frac{1}{2} F_{\mu\nu rad} = F_{\mu\nu in} + \frac{2e}{3} (\ddot{z}_\mu \dot{z}_\nu - \ddot{z}_\nu \dot{z}_\mu).$$

---

(1) M. H. L. PRYCE, *Proc. Roy. Soc.*, **2A**, t. 168, 1938, p. 389.

En substituant cette expression à  $f$  dans l'équation (22), nous trouvons, à l'aide de l'équation (2) et de la dérivée de (18) :

$$(24) \quad m\ddot{z}_\mu - \frac{2e^2}{3}\ddot{\ddot{z}}_\mu - \frac{2e^2}{3}\ddot{\mathbf{z}}^2\dot{z}_\mu = e\dot{z}_\nu F_{\mu\nu}.$$

Cette équation est la même que celle déduite de la théorie de Lorentz, les termes  $\frac{2e^2}{3}\ddot{\ddot{z}}_\mu$  et  $\frac{2e^2}{3}\ddot{\mathbf{z}}^2\dot{z}_\mu$  donnant l'effet de la réaction de l'électron sur lui-même. Cependant, dans la théorie de Lorentz cette équation n'est qu'approximative et pour la compléter il faut y ajouter d'autres termes dépendant de la structure de l'électron, tandis que dans la nouvelle théorie elle est rigoureusement exacte.

Les équations (24) ont des conséquences intéressantes. Ordinairement, les équations du mouvement d'un système dynamique dépendent uniquement des coordonnées ainsi que des dérivées premières et secondes, ce qui fait que le mouvement est complètement déterminé lorsque les coordonnées et leurs premières dérivées sont données à un moment quelconque. Les équations (24) renferment cependant aussi les troisièmes dérivées des coordonnées ; pour déterminer le mouvement il faudra donc donner à l'instant initial, non seulement les coordonnées et leurs premières dérivées, mais aussi les dérivées secondes.

**3. Cas d'un électron sans champ incident.** — Pour étudier de plus près cette question, considérons le cas d'un électron sans champ incident. Dans ce cas, l'équation du mouvement (24) se réduit à

$$(25) \quad \alpha\ddot{z}_\mu - \ddot{\ddot{z}}_\mu - \ddot{\mathbf{z}}^2\dot{z}_\mu = 0, \quad \text{où } \alpha = \frac{3m}{2e^2}.$$

Nous sommes habitués à voir l'électron se déplacer dans ce cas en ligne droite et avec une vitesse constante ; ce mouvement constitue en effet une solution de l'équation (25).

Il y en a d'autres. Si l'accélération initiale de l'électron n'est pas nulle, l'équation (25) ne lui permet pas de s'en débarrasser brusquement et il doit suivre un mouvement accéléré. Écrivons les équations d'un tel mouvement.

Sans rien perdre en généralité, nous pouvons choisir nos axes des coordonnées pour que  $x_2$  et  $x_3$  restent toujours nulles, et que seulement  $x_1$  et le temps  $x_0$  varient. Avec cette simplification, les quatre équations (25)



se réduisent aux deux équations suivantes

$$(26) \quad \alpha \ddot{z}_0 - \ddot{z}_0 - (\dot{z}_0^2 - \dot{z}_1^2) \dot{z}_0 = 0;$$

$$(27) \quad \alpha \ddot{z}_1 - \ddot{z}_1 - (\dot{z}_0^2 - \dot{z}_1^2) \dot{z}_1 = 0,$$

qui ne sont pas indépendantes, parce que la somme de (26) multipliée par  $\dot{z}_0$  et de (27) multipliée par  $\dot{z}_1$  est identiquement nulle. Les équations (2) et (18) nous donnent

$$(28) \quad \dot{z}_0^2 - \dot{z}_1^2 = 1,$$

$$(29) \quad \dot{z}_0 \ddot{z}_0 - \dot{z}_1 \ddot{z}_1 = 0,$$

d'où

$$(30) \quad \ddot{z}_0 = \frac{\dot{z}_1 \ddot{z}_1}{(1 + \dot{z}_1^2)^{\frac{1}{2}}}.$$

En éliminant  $\ddot{z}_0$  de (27) et (30), nous trouvons

$$(31) \quad \alpha \ddot{z}_1 - \ddot{z}_1 + \frac{\dot{z}_1^2 \dot{z}_1}{1 + \dot{z}_1^2} = 0.$$

Nous pouvons intégrer deux fois cette équation et nous trouvons comme résultat

$$(32) \quad \begin{cases} \dot{z}_1 = \sinh(e^{as} + b), \\ \text{d'où, selon (28),} \\ \dot{z}_0 = \cosh(e^{as} + b). \end{cases}$$

$b$  est une constante d'intégration. La deuxième constante d'intégration disparaît avec un choix convenable de l'origine de  $s$ .

Les équations (32) signifient que l'accélération est nulle à l'époque  $s = -\infty$ , mais croît avec  $s$ . On pourrait croire qu'il y a une faute dans ces équations et que l'on devrait avoir  $e^{-as}$  au lieu de  $e^{as}$ , ce qui serait nécessaire pour que l'accélération diminue au lieu d'augmenter. Mais il n'y a pas de faute, et nous devons chercher une interprétation raisonnable de nos équations, telles qu'elles se présentent.

**4. Application des équations du mouvement.** — Le mouvement (32) n'est certainement jamais observé pour un électron, en l'absence de champ incident. Nous devons donc faire l'hypothèse qu'en ce cas il faut toujours prendre une solution de l'équation (25) *sans accélération*. Nous pouvons généraliser cette hypothèse. *Quand on fait une appli-*

*cation des équations du mouvement (24), pour un champ n'agissant que pendant une durée limitée, il faut toujours prendre une solution telle qu'après l'interaction du champ incident et de l'électron, ce dernier se trouve dans un état de mouvement sans accélération.*

Avec cette supposition, les équations du mouvement donnent toujours des résultats raisonnables, et les valeurs des coordonnées et de leurs premières dérivées à un moment quelconque suffisent pour déterminer complètement le mouvement comme en mécanique ordinaire. Les équations ont au surplus certaines conséquences inattendues.

Considérons le cas où le champ incident consiste simplement en une impulsion instantanée. Après le passage de l'impulsion l'électron doit se trouver dans un état sans accélération. Il en résulte qu'avant l'arrivée de cette impulsion, l'électron doit avoir eu une accélération, d'ailleurs croissante, selon les équations (32). La grandeur de l'accélération doit être telle qu'elle puisse exactement contrebalancer l'impulsion électromagnétique au moment où celle-ci rencontre l'électron de façon à laisser ce dernier dans un état sans accélération. L'électron doit en quelque sorte connaître à l'avance l'intensité de l'impulsion électromagnétique incidente et ajuster son accélération [comme les équations (32) lui permettent de le faire] de façon à en contrebalancer l'effet au moment de la rencontre.

Une telle description du phénomène n'est pas en contradiction avec l'expérience, mais elle contredit nos idées ordinaires sur la causalité. Nous pouvons améliorer cette description en admettant que l'électron a une grandeur finie et qu'il commence de s'accélérer dès que l'impulsion rencontre ses frontières. Mathématiquement, l'électron devrait s'étendre à l'infini, mais pratiquement il suffit que ses dimensions soient de l'ordre de  $\frac{1}{\alpha}$ , parce que l'accélération est extrêmement petite tant que l'impulsion n'est pas arrivée à une distance de cet ordre du centre de l'électron. Nous revenons ainsi à l'ancienne hypothèse de Lorentz et nous admettons que l'électron est une petite sphère, avec cette différence toutefois que les lois du champ électromagnétique ne subissent aucune modification à la surface de la sphère.

Considérons maintenant une expérience simple. Un observateur, qui se trouve en un point A, envoie un signal, consistant en une impulsion électromagnétique, vers un autre observateur qui se trouve en B. Entre

A et B, le signal rencontre un électron. Dès que l'impulsion arrive à une distance de l'ordre  $\frac{1}{\alpha}$  du centre de l'électron, celui-ci prend une accélération et commence à émettre. Le rayonnement ainsi émis arrivera en B *avant* l'impulsion électromagnétique initiale, l'avance étant de l'ordre de  $\frac{1}{\alpha}$ . Ainsi B pourra savoir que A a envoyé un signal, c'est-à-dire B *recevra* le signal, avant l'instant où il devrait le recevoir si ce signal voyageait toujours avec la vitesse de la lumière. Nous sommes ainsi conduits à admettre *qu'un signal peut traverser l'intérieur d'un électron avec une vitesse plus grande que celle de la lumière.*

La théorie de la relativité nous a enseigné qu'un signal ne peut jamais se propager avec une vitesse plus grande que celle de la lumière, et il semblerait que notre nouvelle théorie de l'électron est en désaccord avec la théorie de la relativité. Cependant, l'hypothèse fondamentale de la théorie de la relativité est en réalité l'invariance de toutes les lois de la physique par rapport aux transformations de Lorentz, et la nouvelle théorie de l'électron est certainement en accord avec cette hypothèse, puisque ses équations sont écrites sous forme tensorielle.

L'hypothèse suivant laquelle un signal ne peut jamais se propager plus vite que la lumière est une hypothèse secondaire, indépendante de la précédente. D'après la nouvelle théorie, elle n'est pas tout à fait vraie, mais les régions de l'espace où elle est fautive ont des dimensions très petites.

**5. Extension de la théorie au cas de plusieurs électrons.** — La théorie précédente peut facilement être généralisée au cas de plusieurs électrons, en entendant par « électron » toute particule chargée de masse et de charge absolument quelconques.

Considérons un certain nombre d'électrons, de masses  $m_1, m_2, m_3, \dots$ , et de charges  $e_1, e_2, e_3, \dots$ . Chaque électron aura sa propre ligne d'univers

$$(33) \quad z_{\mu n} = z_{\mu n}(s_n)$$

qui détermine son champ retardé propre  $F_{nrt}$  et son champ avancé propre  $F_{nav}$ . La différence  $F_{nrt} - F_{nav}$  sera le champ de rayonnement produit par le  $n^{\text{ième}}$  électron. La généralisation de l'équation (9) sera

$$(34) \quad F_\nu = F_{in} + \sum_n F_{nrt},$$

et celle de l'équation (10)

$$(35) \quad F_\nu = F_{ex} + \Sigma_n F_{nav}.$$

Ainsi, le champ du rayonnement total produit par tout l'ensemble sera

$$(36) \quad F_{ex} - F_{in} = \Sigma_n (F_{nrt} - F_{nav}),$$

égal à la somme des rayonnements produits individuellement par les électrons; naturellement, la radiation totale est la seule qu'on puisse observer.

Le champ  $f_n$  qui entre dans l'équation (22) du mouvement de l'électron  $n$  est toujours

$$(37) \quad f_n = F_\nu - \frac{1}{2}(F_{nrt} + F_{nav}),$$

suivant la première forme de l'équation (15);  $f_n$  n'a donc pas de singularité sur la trajectoire du  $n^{\text{ième}}$  électron. D'après (34) nous pouvons écrire (37) sous la forme

$$(38) \quad f_n = F_{in} + \Sigma_{m \neq n} F_{mrt} + \frac{1}{2}(F_{nrt} - F_{nav}).$$

En substituant ce résultat dans l'équation (22) du mouvement de l'électron  $n$  et en appliquant l'équation (12) à cet électron, nous trouvons

$$(39) \quad m_n \ddot{x}_{\mu n} - \frac{2}{3} e_n^2 \ddot{z}_{\mu n} - \frac{2}{3} e_n^2 \ddot{z}_n^2 \dot{z}_{\mu n} = e_n \dot{z}_{\nu n} \{ F_{\mu\nu in} + \Sigma_{m \neq n} F_{\mu\nu mrt} \}.$$

Comme dans le cas d'un seul électron, cette équation est la même que celle de la théorie de Lorentz, à cela près qu'ici c'est une équation exacte, tandis que dans la théorie de Lorentz elle n'était qu'approximative.

**6. Le champ de Wentzel.** — Nous avons obtenu ainsi une théorie classique de l'interaction de plusieurs électrons avec un champ électromagnétique, que j'estime être tout à fait satisfaisante; son application à des problèmes physiques réels exige cependant une quantification préalable, et cette tâche est relativement compliquée.

Entre les équations de la mécanique quantique et celles de la mécanique classique, il existe une correspondance très précise, mais qui n'est utilisable que si les équations classiques sont écrites sous forme hamiltonienne. Les équations de la nouvelle théorie telles que nous les

avons données, ne se présentent pas sous cette forme, et notre premier devoir est de les y ramener.

Dans ce but, nous aurons à employer un nouveau champ électromagnétique, ayant des propriétés légèrement différentes de celles du champ de Maxwell. Ce champ a été introduit dans un mémoire de Fock, Podolsky et moi-même <sup>(1)</sup>, et son importance pour les équations du mouvement des électrons a été indiquée dans un mémoire de Wentzel <sup>(2)</sup>, nous l'appellerons donc le champ de Wentzel.

Le champ de Wentzel peut être exprimé à l'aide de potentiels par les équations usuelles (7). Ces potentiels satisfont à l'équation (8) des ondes se propageant avec la vitesse de la lumière, partout et *même sur les trajectoires des électrons*. Par contre, ils ne satisfont pas partout à l'équation (4), qui est toujours satisfaite dans la théorie de Maxwell.

Le champ de Wentzel est défini de la façon suivante. Prenons un point sur la trajectoire de chaque électron, par exemple, le point  $\mathbf{Z}_1(s'_1)$  sur la trajectoire du premier électron, le point  $\mathbf{Z}_2(s'_2)$  sur la trajectoire du deuxième électron, etc. Le champ de Wentzel est déterminé uniquement *par rapport à ces points*. Il a des valeurs différentes pour un choix différent de ces points. Il suffit de considérer seulement les cas où chacun de ces points est en dehors du cône de lumière d'un autre de ces points, c'est-à-dire le cas où

$$(40) \quad [\mathbf{z}_m(s'_m) - \mathbf{z}_n(s'_n)]^2 < 0.$$

Le champ en n'importe quel point  $x_\mu$  est donc une fonction des paramètres  $s'_1, s'_2, \dots$ , définie pour le domaine où les inégalités (40) sont satisfaites.

Les potentiels du champ de Wentzel en un point  $x_\mu$  ont les valeurs

$$(41) \quad A_{\mu\nu} = A_{\mu\nu} + \sum_n e_n \int_{-\infty}^{s'_n} \dot{z}_{\mu n} \Delta(\mathbf{x} - \mathbf{z}_n) ds_n,$$

où  $\Delta$  signifie la « fonction  $\delta$  relativiste » introduite par Pauli et Jordan. Cette fonction  $\Delta$  peut être exprimée au moyen de la fonction  $\delta$  ordinaire par l'équation

$$(42) \quad \Delta(\mathbf{x}) = \frac{1}{r} \{ \delta(x_0 - r) - \delta(x_0 + r) \},$$

(1) DIRAC, FOCK et PODOLSKY, *Phys. Zeits. d. Soviet.*, t. 2, 1932, p. 468.

(2) WENTZEL, *Zeits. f. Phys.*, t. 86, 1933, p. 479.

où

$$r = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2},$$

et elle a la propriété importante d'être invariante par rapport à une transformation de Lorentz. Une autre expression de  $\Delta(\mathbf{x})$  est

$$(43) \quad \Delta(\mathbf{x}) = \pm 2 \delta(\mathbf{x}^2),$$

où l'on prend le signe + sur le côté  $x_0 > 0$  du cône  $\mathbf{x}^2 = 0$  et le signe — sur le côté  $x_0 < 0$ .

Nous voyons, d'après (41), que les potentiels de Wentzel sont égaux aux potentiels incidents plus des contributions de chaque électron. La contribution d'un électron est nulle si le point où l'on considère le champ  $x_\mu$  se trouve à l'intérieur de la nappe de l'avenir du cône de lumière passant par le point choisi sur la trajectoire de cet électron. Si le point du champ est en dehors de ce cône, la contribution est

$$(44) \quad e \int_{-\infty}^{s_n} \dot{z}_\mu \frac{1}{r(\mathbf{x} - \mathbf{z})} \delta[x_0 - z_0 - r(\mathbf{x} - \mathbf{z})] ds,$$

où

$$(45) \quad r(\mathbf{x} - \mathbf{z}) = \sqrt{(x_1 - z_1)^2 + (x_2 - z_2)^2 + (x_3 - z_3)^2}.$$

L'expression (44) nous donne précisément les potentiels retardés. De la même façon, si le point du champ est à l'intérieur de la nappe du cône de lumière correspondant au passé, la contribution est égale aux potentiels retardés moins les potentiels avancés. Ainsi, dans la région où le point du champ est en dehors de tous les cônes, d'après (34) *le champ de Wentzel est le même que le champ réel*.

D'après (36) nous pouvons facilement transformer l'équation (41) en

$$(46) \quad A_{\mu\nu} = A_{\mu\nu ex} - \sum_n e_n \int_{s'_n}^{\infty} \dot{z}_{\mu n} \Delta(\mathbf{x} - \mathbf{z}_n) ds_n,$$

ce qui montre la symétrie du champ de Wentzel par rapport à l'avenir et au passé.

En posant tous les  $s'_n = -\infty$ , le champ de Wentzel se réduit au champ incident, et si tous les  $s'_n = +\infty$ , il est égal au champ sortant.

**7. Les propriétés du champ de Wentzel.** — Les potentiels de Wentzel sont discontinus sur les cônes de lumière qui passent par les points choisis sur les trajectoires, et ils ont des singularités aux sommets de ces

cônes, tout en satisfaisant partout à l'équation (8). Pour vérifier ce résultat, il suffit de vérifier que la fonction  $\Delta(\mathbf{x})$  satisfait partout à cette équation. Nous pouvons ensuite conclure que  $\Delta(\mathbf{x} - \mathbf{z})$  satisfait aussi à cette équation, et par conséquent chacun des termes du second membre de (41) la vérifie également. Nous avons

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial x_0} \delta(\mathbf{x}^2) &= 2x_0 \delta'(\mathbf{x}^2), \\ \frac{\partial^2}{\partial x_0^2} \delta(\mathbf{x}^2) &= 2 \delta'(\mathbf{x}^2) + 4x_0^2 \delta''(\mathbf{x}^2), \\ \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} \delta(\mathbf{x}^2) &= -2 \delta'(\mathbf{x}^2) + 4x_1^2 \delta''(\mathbf{x}^2),\end{aligned}$$

et de la même manière pour  $x_2$  et  $x_3$ . Ainsi

$$(47) \quad \square \delta(\mathbf{x}^2) = 8 \delta'(\mathbf{x}^2) + 4 \mathbf{x}^2 \delta''(\mathbf{x}^2).$$

Or, une propriété de la fonction  $\delta$

$$(48) \quad \xi \delta(\xi) = 0,$$

nous donne, après une double différentiation,

$$2 \delta'(\xi) + \xi \delta''(\xi) = 0.$$

Ainsi, le second membre de (47) est nul, ce qui nous montre, en vertu de (43), que  $\square \Delta(\mathbf{x})$  est nul partout excepté, peut-être, à l'origine.

Pour vérifier que  $\square \Delta(\mathbf{x})$  est également nul à l'origine, où  $\Delta(\mathbf{x})$  a une forte singularité, il faut calculer la valeur de l'intégrale

$$(49) \quad \iiint \square \Delta(\mathbf{x}) dx_0 dx_1 dx_2 dx_3,$$

dans un petit domaine renfermant l'origine. On peut y arriver en transformant cette intégrale, par une transformation de Gauss, en

$$(50) \quad \iiint \frac{\partial}{\partial x_\mu} \Delta(\mathbf{x}) dS_\mu,$$

où  $dS_\mu$  signifie un élément de la surface à trois dimensions qui entoure le petit domaine de l'intégrale (49). Nous calculerons la valeur de (50) pour le cas où le petit domaine est un cylindre, défini par

$$\begin{aligned}r &< a, \\ -b &< x_0 < b,\end{aligned}$$

avec

$$a > b > 0,$$

comme l'indique la figure 1. La surface courbée du cylindre ne contribuera pas à l'intégrale (50).

La contribution de la surface  $x_0 = b$  sera, d'après (42),

$$\int_0^a \frac{\partial}{\partial x_0} \Delta(\mathbf{x}) 4\pi r^2 dr = 4\pi \int_0^a \delta'(x_0 - r) r dr = 4\pi \int_0^a \delta(x_0 - r) dr = 4\pi$$

[seul le premier terme du crochet de (43) apporte une contribution non nulle].

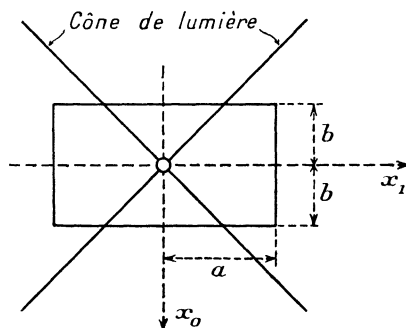


Fig. 1.

La contribution de la surface  $x_0 = -b$  [venant du second terme dans le crochet de (42)] sera

$$\int_0^a -\frac{\partial}{\partial x_0} \Delta(\mathbf{x}) 4\pi r^2 dr = 4\pi \int_0^a \delta'(x_0 + r) r dr = -4\pi.$$

Ainsi l'intégrale totale est nulle. Nous pouvons en conclure que

$$(51) \quad \square \Delta(\mathbf{x}) = 0,$$

et donc

$$(52) \quad \square \mathbf{A}_\mu = 0.$$

Calculons maintenant la divergence de  $\mathbf{A}_\mu$ . Nous avons, d'après (41) et (43),

$$\frac{\partial}{\partial x_\mu} \mathbf{A}_{\mu\nu} = \sum_n e_n \int_{-\infty}^{s_n^+} \pm \dot{z}_{\mu n}^2 (x^\mu - z_n^\mu)^2 \delta'(\mathbf{x} - \mathbf{z}_n)^2 ds_n,$$



où l'on prend le signe + quand  $x_0 - z_{0n} > 0$  et le signe - quand  $x_0 - z_{0n} < 0$ . Donc

$$(53) \quad \frac{\partial}{\partial x_\mu} A_{\mu\nu} = - \sum_n e_n \int_{-\infty}^{s'_n} \pm \frac{d}{ds_n} (\mathbf{x} - \mathbf{z}_n)^2 \cdot 2 \delta'(\mathbf{x} - \mathbf{z}_n)^2 ds_n \\ = - \sum_n e_n [\pm 2 \delta(\mathbf{x} - \mathbf{z}_n)^2]_{-\infty}^{s'_n} = - \sum_n e_n \Delta[\mathbf{x} - \mathbf{z}_n(s'_n)].$$

Ce calcul n'est plus valable si le point  $x_\mu$  coïncide avec un des points  $z_\mu(s')$ . Pour calculer la contribution à  $\frac{\partial}{\partial x_\mu} A_{\mu\nu}$  de l'électron  $n$  lorsque  $x_\mu = z_{\mu n}(s'_n)$ , il faudra prendre l'intégrale de cette contribution dans un petit domaine renfermant le point  $x_\mu = z_{\mu n}(s'_n)$  et la transformer en une intégrale de surface. Après un calcul simple nous trouvons que cette intégrale est nulle et que le résultat (53) est donc valable partout.

L'équation (52) nous montre que le champ de Wentzel peut être décomposé en ondes qui se propagent avec la vitesse de la lumière, et l'inégalité  $\frac{\partial A_{\mu\nu}}{\partial x_\mu} \neq 0$  précise qu'il existe aussi des ondes longitudinales, et non pas seulement des ondes transversales comme dans le champ de Maxwell. Le champ de Maxwell contient, au voisinage d'un électron, la force électrique de Coulomb, qui ne peut pas être décomposée en ondes. Le champ de Wentzel contient lui aussi la force de Coulomb, dans un domaine important, à savoir le domaine extérieur à tous les cônes de lumière. On peut donc dire que *le champ de Wentzel contient la force de Coulomb sous une forme qui peut être décomposée en ondes*. Cela constitue une propriété importante du champ de Wentzel.

Le champ de Wentzel a une singularité en chacun des points  $\mathbf{x} = \mathbf{z}_n(s'_n)$ . Lorsque nous approchons du point  $\mathbf{x} = \mathbf{z}_n(s'_n)$  par un chemin situé tout entier en dehors du cône de lumière qui passe par ce point, le champ de Wentzel devient infini suivant la loi de Coulomb le long de cette trajectoire, parce que dans ce cas, la contribution du  $n^{\text{ième}}$  électron est précisément le champ retardé. Si cependant nous approchons de ce point par une courbe située à l'intérieur du cône, le champ de Wentzel restera fini. Lorsque ce chemin se trouve du côté avenir du cône, le champ de Wentzel a la valeur

$$(54) \quad F_{\mu\nu} = F_{in} + \sum_{m \neq n} F_{m\nu};$$

en effet, la contribution du  $n^{\text{ième}}$  électron est nulle et la contribution de

tous les autres sera égale à leurs champs retardés si l'on est suffisamment près du point  $\mathbf{x} = \mathbf{z}_n(s'_n)$ , ce point étant en dehors des cônes de sommets  $\mathbf{z}_m(s'_m)$  en vertu de l'inégalité (40). Si le chemin se trouve dans la nappe passé du cône, le champ de Wentzel a la valeur

$$(55) \quad F_{\omega} = F_{in} + \sum_{m \neq n} F_{mrt} + F_{nrt} - F_{nav},$$

la contribution du  $n^{\text{ième}}$  électron étant son propre champ retardé moins son champ avancé.

Or, d'après (38), à la limite lorsqu'on tend vers le point  $\mathbf{x} = \mathbf{z}_n(s'_n)$ , la moyenne des deux valeurs (54) et (55) est précisément le champ  $f_n$  qu'il faut employer dans l'équation (22) du mouvement du  $n^{\text{ième}}$  électron. Ce fait constitue une autre propriété importante de ce type de champ et qui a été découverte par Wentzel.

**8. Forme relativiste des équations de Hamilton.** — En mécanique ordinaire on peut écrire les équations du mouvement sous la forme

$$(56) \quad \frac{d\beta}{dt} = \sum_{r=1}^N \left\{ \frac{\partial \beta}{\partial q_r} \frac{\partial H}{\partial p_r} - \frac{\partial \beta}{\partial p_r} \frac{\partial H}{\partial q_r} \right\},$$

où les variables  $q_1, q_2, \dots, q_N$  sont des coordonnées généralisées de Lagrange, les variables  $p_1, p_2, \dots, p_N$  les quantités de mouvement conjuguées,  $\beta$  n'importe quelle fonction des  $q$  et des  $p$  et  $H$  la fonction de Hamilton. Le second membre de (56) est un crochet de Poisson et on peut l'écrire  $[\beta, H]$ .

La forme des équations (56) n'est pas bien adaptée à une théorie relativiste, à cause du rôle privilégié qu'y joue la variable du temps  $t$ . Pour remédier à cet inconvénient, il faut regarder  $t$  comme une coordonnée supplémentaire et  $-\omega$ , l'énergie changée de signe comme son moment conjugué; de plus, il faut employer au lieu de la fonction hamiltonienne  $H$  une équation hamiltonienne

$$(57) \quad F = 0,$$

où

$$(58) \quad F \equiv H - \omega,$$

$\omega$  étant considérée comme une nouvelle variable indépendante. Si nous prenons maintenant une fonction  $\beta$  plus générale, fonction quelconque

des  $q$  et des  $p$  et aussi de  $t$  et de  $\omega$ , nous aurons

$$(59) \quad \frac{d\beta}{dt} = \sum_{r=1}^N \left\{ \frac{\partial\beta}{\partial q_r} \frac{\partial H}{\partial p_r} - \frac{\partial\beta}{\partial p_r} \frac{\partial H}{\partial q_r} \right\} + \frac{\partial\beta}{\partial t} + \frac{\partial\beta}{\partial\omega} \frac{d\omega}{dt} \\ = \sum_{r=1}^N \left\{ \frac{\partial\beta}{\partial q_r} \frac{\partial F}{\partial p_r} - \frac{\partial\beta}{\partial p_r} \frac{\partial F}{\partial q_r} \right\} + \frac{\partial\beta}{\partial t} \frac{\partial F}{\partial(-\omega)} - \frac{\partial\beta}{\partial(-\omega)} \frac{\partial F}{\partial t},$$

puisque

$$(60) \quad \frac{d\omega}{dt} = \frac{\partial H}{\partial t} = \frac{\partial H}{\partial t} = \frac{\partial F}{\partial t}.$$

Nous pouvons écrire (59) sous la forme

$$(61) \quad \frac{d\beta}{dt} = [\beta, F],$$

en employant un crochet de Poisson généralisé, intéressant toutes les  $N + 1$  coordonnées  $q_1, q_2, \dots, q_n, t$  et à leurs moments conjugués. Nous pouvons généraliser l'équation (61) encore une fois pour la rapporter à une nouvelle variable indépendante  $\tau$  qui sera n'importe quelle fonction de toutes les  $N + 1$  coordonnées et de leurs moments conjugués. Nous aurons

$$(62) \quad \frac{d\beta}{d\tau} = \frac{d\beta}{dt} \frac{dt}{d\tau} = \left[ \beta, F \frac{dt}{d\tau} \right] - F \left[ \beta, \frac{dt}{d\tau} \right],$$

$$(63) \quad = [\beta, F^*],$$

avec  $F^* = F \frac{dt}{d\tau}$ , puisque, d'après (57), le second terme à droite de l'équation (62) est nul.

Avec la forme (63) des équations du mouvement, la variable temps  $t$  ne joue plus un rôle privilégié. Cette forme est bien adaptée à la théorie relativiste d'un système dynamique qui ne contient qu'une seule particule, cas dans lequel nous pouvons convenablement prendre pour  $\tau$  le temps propre  $s$ . Lorsque le système contient plusieurs particules, pour ne pas altérer la symétrie, il faudra prendre au lieu de  $s$  plusieurs variables indépendantes, une pour chaque particule, par exemple, les temps propres  $s_1, s_2, s_3, \dots$  de ces particules. Une fonction  $\beta$  des variables dynamiques dépendra maintenant, en général, de toutes ces variables et nous aurons besoin de plusieurs équations du mouvement, une pour chacune d'entre elles. Ces équations auront la forme

$$(64) \quad \frac{d\beta}{ds_1} = [\beta, F_1], \quad \frac{d\beta}{ds_2} = [\beta, F_2], \quad \dots,$$

chacune ayant sa propre équation hamiltonienne

$$(65) \quad F_1 = 0, \quad F_2 = 0, \quad \dots$$

Pour que les équations (64) soient compatibles, il faut que certaines conditions soient satisfaites, à savoir

$$\frac{d^2 \beta}{ds_n ds_m} = \frac{d^2 \beta}{ds_m ds_n},$$

donc

$$[[\beta, F_m], F_n] = [[\beta, F_n], F_m].$$

D'après l'identité de Poisson, nous pouvons écrire cette condition sous la forme

$$(66) \quad [\beta[F_m, F_n]] = 0.$$

Pendant, dans l'application aux électrons de cette théorie générale de la mécanique relativiste, les conditions plus restrictives

$$(67) \quad [F_m, F_n] = 0$$

seront satisfaites.

**9. Les équations du mouvement des électrons sous forme hamiltonienne.** — Revenons à notre problème principal, qui est la mise des équations du mouvement sous forme hamiltonienne. A notre avis, il n'est pas possible de donner une solution directe de ce problème; il faut employer un processus de limite. Nous pouvons écrire sous forme hamiltonienne des équations qui sont presque identiques aux équations correctes, et qui se rapprochent de plus en plus de celles-ci quand nous nous approchons de la limite; cela suffira pour une théorie physique.

Avant le passage à la limite, les équations ne sont pas tout à fait invariantes par rapport à une transformation de Lorentz, ce qui constitue un manque d'élégance dans la théorie, n'ayant cependant aucune importance pratique, puisque, naturellement, l'écart dans l'invariance devient de plus en plus faible à mesure qu'on se rapproche de la limite.

Dans les équations du mouvement nous introduirons un petit vecteur  $\lambda$ , situé dans la partie de l'avenir du cône de lumière, c'est-à-dire tel que

$$(68) \quad \lambda^2 > 0,$$

$$(69) \quad \lambda_0 > 0.$$

La longueur de  $\lambda$  tend vers zéro dans le processus de limite envisagé et sa direction reste arbitraire pourvu que les conditions (68), (69) soient toujours satisfaites. C'est précisément à cause de l'introduction du vecteur  $\lambda$ , qui nous définit une direction privilégiée pour l'axe des temps, que les équations ne sont pas invariantes pour une transformation de Lorentz avant le passage à la limite.

Posons maintenant pour l'équation hamiltonienne du  $n^{\text{ième}}$  électron la forme usuelle

$$(70) \quad F_n \equiv -\frac{1}{2m_n} \{ [\mathbf{p}_n - e_n \mathbf{A}(\mathbf{z}_n)]^2 - m_n^2 \} = 0.$$

Le facteur  $-\frac{1}{2m_n}$  n'est naturellement pas nécessaire, mais son emploi est commode.

Pour préciser les équations du mouvement, il faut faire certaines hypothèses qui détermineront le crochet de Poisson de deux variables dynamiques quelconques. Admettons donc les hypothèses ordinaires d'après lesquelles les crochets de Poisson des coordonnées  $z_n$  et des quantités de mouvement  $p_n$  d'un électron satisfont à

$$(71) \quad [z_{\mu n}, z_{\nu n}] = 0, \quad [p_{\mu n}, p_{\nu n}] = 0, \quad [z_{\mu n}, p_{\nu n}] = -g_{\mu\nu},$$

le crochet de Poisson de deux variables relatives à deux électrons différents étant égal à zéro. De plus, le crochet de Poisson d'un potentiel  $A_\mu(\mathbf{x}')$  en un point donné  $\mathbf{x}'$  avec une des variables électroniques est nul, et celui d'un potentiel  $A_\mu(\mathbf{x}')$  en un point donné  $\mathbf{x}'$  avec un potentiel  $A_\nu(\mathbf{x}'')$  en un autre point donné  $\mathbf{x}''$  est

$$(72) \quad [A_\mu(\mathbf{x}'), A_\nu(\mathbf{x}'')] = g_{\mu\nu} \frac{1}{2} \{ \Delta(\mathbf{x}' - \mathbf{x}'' + \lambda) + \Delta(\mathbf{x}' - \mathbf{x}'' - \lambda) \}.$$

L'apparition du  $\lambda$  dans cette formule constitue le trait nouveau de la théorie actuelle.

Il faut vérifier maintenant si les conditions (67) de compatibilité des équations du mouvement sont satisfaites. Le crochet de Poisson de n'importe quel terme de  $F_n$  et de n'importe quel terme de  $F_m$  est nul, sauf si le premier terme contient un potentiel  $A_\mu(\mathbf{z}_n)$  et le second un potentiel  $A_\nu(\mathbf{z}_m)$ ; dans ce cas, le crochet de Poisson contiendra, d'après (72), le facteur

$$(73) \quad \{ \Delta(\mathbf{z}_n - \mathbf{z}_m + \lambda) + \Delta(\mathbf{z}_n - \mathbf{z}_m - \lambda) \}.$$

Ce facteur est nul dans un domaine où les valeurs des temps propres  $s_n$ ,  $s_m$  satisfont aux inégalités

$$(74) \quad \begin{cases} [\mathbf{z}_n(s_n) - \mathbf{z}_m(s_m) + \lambda]^2 < 0, \\ [\mathbf{z}_m(s_m) - \mathbf{z}_n(s_n) + \lambda]^2 < 0. \end{cases}$$

Nous allons donc admettre que les variables indépendantes  $s_1, s_2, \dots$  de nos équations du mouvement sont tenues à satisfaire aux inégalités (74) pour tout  $m$  et  $n$  avec  $m \neq n$ , c'est à-dire que les variables dépendantes sont des fonctions des variables indépendantes, définies seulement dans le domaine où les inégalités (74) sont satisfaites; les conditions (67) seront donc remplies.

Calculons maintenant les équations du mouvement, d'après (64). Nous voyons d'abord que les variables  $z_{\mu n}, p_{\mu n}$  du  $n^{\text{ième}}$  électron sont indépendantes de tous les temps propres  $s_m$  à l'exception de celui pour lequel  $m = n$ , cas auquel on a

$$(75) \quad m_n \frac{dz_{\mu n}}{ds_n} = m_n [z_{\mu n}, F_n] = p_{\mu n} - e_n A_{\mu}(\mathbf{z}_n),$$

$$(76) \quad m_n \frac{dp_{\mu n}}{ds_n} = m_n [p_{\mu n}, F_n] = (p_{\nu n} - e_n A_{\nu}) e_n \frac{\partial A_n^{\nu}}{\partial z_n^{\mu}}.$$

L'équation (75) nous donne la relation ordinaire entre la quantité de mouvement et la vitesse. Compte tenu de cette relation, nous pouvons écrire l'équation (76) sous la forme

$$(77) \quad m_n \frac{d^2 z_{\mu n}}{ds_n^2} = e_n \frac{dz_{\nu n}}{ds_n} \left( \frac{\partial A_n^{\nu}}{\partial z_n^{\mu}} - \frac{\partial A_{\mu n}}{\partial z_{\nu n}} \right),$$

qui est la forme ordinaire de l'équation du mouvement d'un électron dans un champ défini par les potentiels  $\mathbf{A}$ .

Prenons maintenant le potentiel  $A_{\mu}$  en un point donné quelconque  $\mathbf{x}$ . Sa variation avec le temps propre  $s_n$  sera donnée, d'après (75) et (72), par

$$(78) \quad \begin{aligned} \frac{dA_{\mu}(\mathbf{x})}{ds_n} &= [A_{\mu}(\mathbf{x}), F_n] = \frac{e_n}{m_n} \{ p_{\nu n} - e_n A_{\nu}(\mathbf{z}_n) \} [A_{\mu}(\mathbf{x}), A^{\nu}(\mathbf{z}_n)] \\ &= e_n \dot{z}_{\mu n} \frac{1}{2} \{ \Delta(\mathbf{x} - \mathbf{z}_n + \lambda) + \Delta(\mathbf{x} - \mathbf{z}_n - \lambda) \}. \end{aligned}$$

L'intégrale des équations (78) nous donne, comme valeur de  $A_{\mu}(x)$  quand les  $s_n$  ont les valeurs  $s'_n$ ,

$$A_{\mu}(\mathbf{x}) = \sum_n e_n \int_{-\infty}^{s'_n} \dot{z}_{\mu n} \frac{1}{2} \{ \Delta(\mathbf{x} - \mathbf{z}_n + \lambda) + \Delta(\mathbf{x} - \mathbf{z}_n - \lambda) \} ds_n + \text{const.}$$

En choisissant pour cette constante la valeur

$$\frac{1}{2} \{ A_{\mu}(\mathbf{x} + \boldsymbol{\lambda})_{in} + A_{\mu}(\mathbf{x} - \boldsymbol{\lambda})_{in} \},$$

nous aurons, d'après (41),

$$(79) \quad A_{\mu}(\mathbf{x}) = \frac{1}{2} \{ A_{\mu\nu}(\mathbf{x} + \boldsymbol{\lambda}) + A_{\mu\nu}(\mathbf{x} - \boldsymbol{\lambda}) \}.$$

Nous avons ainsi acquis un résultat important qui s'énonce de la manière suivante : *les potentiels qui apparaissent dans les équations hamiltoniennes (70) sont les moyennes des potentiels de Wentzel ayant subi le petit déplacement  $\boldsymbol{\lambda}$  et le petit déplacement  $-\boldsymbol{\lambda}$ .*

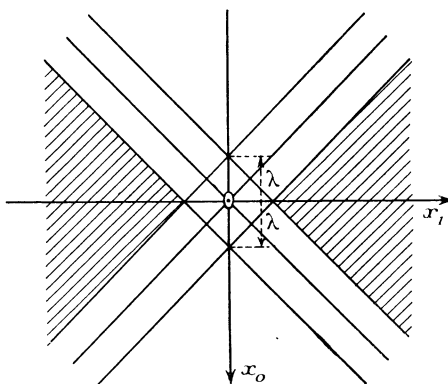


Fig. 2.

Le champ qui intervient au second membre de l'équation (77) du mouvement du  $n^{\text{ième}}$  électron est la moyenne des valeurs du champ de Wentzel aux points  $\mathbf{z}_n + \boldsymbol{\lambda}$  et  $\mathbf{z}_n - \boldsymbol{\lambda}$ . Or, d'après la discussion à la fin du paragraphe 7, c'est précisément cette moyenne qu'on devrait employer dans l'équation du mouvement pour obtenir l'équation correcte à la limite  $\boldsymbol{\lambda} \rightarrow 0$ . Nous avons donc réussi à trouver des équations sous forme hamiltonienne qui nous donnent les équations du mouvement correctes à la limite  $\boldsymbol{\lambda} \rightarrow 0$ .

La restriction (74) des valeurs des temps propres  $s$  est un peu plus forte que la restriction (40) que nous avons introduite dans notre discussion du champ de Wentzel. A cause de la condition (74), si l'un des points  $\mathbf{z}_n$  se trouve en O (voir la figure 2), un autre  $\mathbf{z}_m$  doit se trouver

dans la région hachurée. Deux électrons ne peuvent donc pas se rapprocher à une distance inférieure à  $|\lambda|$ . Si l'on étudiait un mouvement réel dans lequel deux électrons devraient se trouver à une distance plus petite que la précédente, nos équations de mouvement seraient inapplicables. Cependant, nous pouvons prendre  $\lambda$  aussi petit que nous voulons, et par conséquent nous pouvons toujours choisir  $\lambda$  plus petit que la distance minima entre deux électrons, excepté dans le cas d'une véritable collision. Ce dernier cas n'a pas d'intérêt physique, sa probabilité étant nulle.

En vertu de (79) et (53), nous avons

$$(80) \quad \frac{\partial A_\mu}{\partial x_\mu} = -\frac{1}{2} \sum_n e_n \{ \Delta(\mathbf{x} - \mathbf{z}_n - \lambda) + \Delta(\mathbf{x} - \mathbf{z}_n + \lambda) \}.$$

Cette équation n'est pas une conséquence des équations hamiltoniennes et des équations du mouvement. Il faut la poser comme condition supplémentaire dans la théorie, et vérifier qu'elle est compatible avec les équations du mouvement, c'est-à-dire, qu'elle sera toujours satisfaite si elle l'est pour certaines valeurs données des temps propres  $s_1, s_2, \dots$ . A cet effet, il suffira de vérifier que si nous différencions les deux membres de l'équation (80) par rapport aux temps propres, les résultats obtenus restent égaux entre eux.

Nous avons, en différentiant (78) par rapport à  $x_\mu$ ,

$$(81) \quad \frac{d}{ds_n} \frac{\partial A_\mu}{\partial x_\mu} = e_n \frac{dz_{\mu n}}{ds_n} \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial x_\mu} \{ \Delta(\mathbf{x} - \mathbf{z}_n + \lambda) + \Delta(\mathbf{x} - \mathbf{z}_n - \lambda) \}.$$

De même

$$(82) \quad -\frac{1}{2} \frac{d}{ds_n} \sum_m e_m \{ \Delta(\mathbf{x} - \mathbf{z}_m - \lambda) + \Delta(\mathbf{x} - \mathbf{z}_m + \lambda) \} \\ = \frac{1}{2} e_n \frac{\partial}{\partial z_{\mu n}} \{ \Delta(\mathbf{x} - \mathbf{z}_n - \lambda) + \Delta(\mathbf{x} - \mathbf{z}_n + \lambda) \} \frac{dz_{\mu n}}{ds_n}.$$

Les seconds membres de (81) et (82) sont égaux, et par conséquent les premiers membres sont aussi égaux, et le résultat de la différentiation de (80) par  $s_n$  est encore valable.

**10. La quantification des équations du mouvement.** — Nous pouvons maintenant passer à la mécanique quantique. Toutes les variables dynamiques deviennent des opérateurs, qui peuvent être appliqués à une



fonction d'onde  $\psi$  représentant un état. La fonction d'onde est une fonction des coordonnées  $z_{\mu 1}, z_{\mu 2}, \dots$  de tous les électrons et aussi des variables du champ.

Aux conditions (74) de la théorie classique, correspondront des conditions analogues en théorie quantique, qui limiteront le domaine de définition de la fonction d'onde au domaine des variables  $z$  où les inégalités (74) sont satisfaites.

Selon les règles ordinaires de la quantification, nous avons les équations de Schrödinger

$$(83) \quad F_1 \psi = 0, \quad F_2 \psi = 0, \quad \dots$$

Les fonctions  $F$  sont les mêmes que dans la théorie classique, mais les variables  $p_{\mu n}$  signifient maintenant les opérateurs

$$(84) \quad p_{\mu n} = i\hbar \frac{\partial}{\partial z_{\mu n}};$$

les potentiels  $A_{\mu}$  sont des opérateurs, applicables aux variables du champ dans la fonction d'onde, et tels que les conditions de commutativité correspondant aux crochets de Poisson (72) soient satisfaites.

Pour représenter les potentiels, la méthode usuelle les développe en intégrales de Fourier. La forme générale d'un tel développement est

$$(85) \quad \mathbf{A}(\mathbf{x}) = \int \mathbf{A}_{\mathbf{k}} e^{i\mathbf{k}\mathbf{x}} d\mathbf{k},$$

où  $d\mathbf{k} = dk_0 dk_1 dk_2 dk_3$ . Le vecteur  $\mathbf{k}$  détermine la vitesse, la fréquence et la direction du mouvement, d'une des composantes de Fourier. Pour que  $\mathbf{A}(\mathbf{x})$  soit réel, il faut que  $\mathbf{A}_{\mathbf{k}} = \overline{\mathbf{A}_{-\mathbf{k}}}$ . D'après les équations (79) et (52) nous avons

$$\square \mathbf{A} = 0,$$

résultat valable en théorie quantique aussi bien qu'en théorie classique, et qui nous montre que les seules composantes de Fourier non nulles dans (85) sont celles qui ont la vitesse de la lumière, pour lesquelles  $\mathbf{k}^2 = 0$ . Ainsi  $\mathbf{A}_{\mathbf{k}}$  est de la forme

$$(86) \quad \mathbf{A}_{\mathbf{k}} = \xi_{\mathbf{k}} \delta(\mathbf{k}^2),$$

et l'équation (85) devient

$$(87) \quad \mathbf{A}(\mathbf{x}) = \int \xi_{\mathbf{k}} \delta(\mathbf{k}^2) e^{i(\mathbf{k}\mathbf{x})} d\mathbf{k}.$$

Écrivons

$$(88) \quad \begin{cases} \xi_{\mathbf{k}} = 2\eta_{\mathbf{k}}, & \text{quand } k_0 > 0, \\ \xi_{\mathbf{k}} = 2\bar{\eta}_{-\mathbf{k}}, & \text{quand } k_0 < 0; \end{cases}$$

l'équation (87) devient

$$(89) \quad \begin{aligned} \mathbf{A}(\mathbf{x}) &= 2 \int_{k_0 < 0} \{ \eta_{\mathbf{k}} e^{i(\mathbf{k}\mathbf{x})} + \bar{\eta}_{\mathbf{k}} e^{-i(\mathbf{k}\mathbf{x})} \} \delta(\mathbf{k}^2) d\mathbf{k} \\ &= \iiint \{ \eta_{\mathbf{k}} e^{i(\mathbf{k}\mathbf{x})} + \bar{\eta}_{\mathbf{k}} e^{-i(\mathbf{k}\mathbf{x})} \} \frac{1}{k_0} dk_1 dk_2 dk_3, \end{aligned}$$

où  $k_0$  signifie la fonction de  $k_1, k_2, k_3$ ,

$$(90) \quad k_0 = \sqrt{k_1^2 + k_2^2 + k_3^2}.$$

D'après (86) et (88)

$$(91) \quad \begin{cases} \mathbf{A}_{\mathbf{k}} = 2\eta_{\mathbf{k}} & \delta(\mathbf{k}^2) = \eta_{\mathbf{k}} \frac{1}{k_0} \delta(k_0 - \sqrt{k_1^2 + k_2^2 + k_3^2}) & \text{quand } k_0 > 0, \\ \mathbf{A}_{\mathbf{k}} = 2\bar{\eta}_{-\mathbf{k}} & \delta(\mathbf{k}^2) = \bar{\eta}_{-\mathbf{k}} \frac{1}{(-k_0)} \delta(k_0 + \sqrt{k_1^2 + k_2^2 + k_3^2}) & \text{quand } k_0 < 0. \end{cases}$$

Calculons les crochets de Poisson des  $\mathbf{A}_{\mathbf{k}}$  et des  $\eta_{\mathbf{k}}$ . D'après le théorème de Fourier

$$(92) \quad \mathbf{A}_{\mathbf{k}} = \frac{1}{(2\pi)^4} \int \mathbf{A}(\mathbf{x}) e^{-i(\mathbf{k}\mathbf{x})} d\mathbf{x};$$

donc, en vertu de (72)

$$(93) \quad \begin{aligned} [A_{\mu\mathbf{k}'}, A_{\nu\mathbf{k}''}] &= \frac{1}{(2\pi)^8} \iint [A_{\mu}(\mathbf{x}'), A_{\nu}(\mathbf{x}'')] e^{-i[(\mathbf{k}'\mathbf{x}') + (\mathbf{k}''\mathbf{x}'')] } d\mathbf{x}' d\mathbf{x}'' \\ &= \frac{g_{\mu\nu}}{(2\pi)^8} \frac{1}{2} \iint \{ \Delta(\mathbf{x}' - \mathbf{x}'' + \lambda) + \Delta(\mathbf{x}' - \mathbf{x}'' - \lambda) \} \\ &\quad \times e^{-i[(\mathbf{k}'\mathbf{x}') + (\mathbf{k}''\mathbf{x}'')] } d\mathbf{x}' d\mathbf{x}''. \end{aligned}$$

Or, l'application de la transformation de Fourier à la fonction  $\Delta(\mathbf{x})$  donne une fonction de  $\mathbf{k}$  de la même forme

$$(94) \quad \int \Delta(\mathbf{x}) e^{-i(\mathbf{k}\mathbf{x})} d\mathbf{x} = -4\pi^2 i \Delta(\mathbf{k}).$$

En employant ce résultat dans le second membre de (93), nous trouvons

$$\begin{aligned}
 (95) \quad [\Lambda_{\mu\mathbf{k}'}, \Lambda_{\nu\mathbf{k}''}] &= -\frac{i g_{\mu\nu}}{(2\pi)^6} \frac{1}{2} \Delta(\mathbf{k}') \\
 &\quad \times \int \{ e^{-i[(\mathbf{k}', \mathbf{x}' - \lambda) + (\mathbf{k}'' \mathbf{x}'')] + e^{-i[(\mathbf{k}', \mathbf{x}' + \lambda) + (\mathbf{k}'' \mathbf{x}'')] } \} d\mathbf{x}'' \\
 &= -\frac{i g_{\mu\nu}}{4\pi^2} \frac{1}{2} \Delta(\mathbf{k}') \delta(\mathbf{k}' + \mathbf{k}'') \{ e^{i(\mathbf{k}'\lambda)} + e^{-i(\mathbf{k}'\lambda)} \} \\
 &= -\frac{i g_{\mu\nu}}{4\pi^2} \cos(\mathbf{k}'\lambda) \Delta(\mathbf{k}') \delta(\mathbf{k}' + \mathbf{k}'').
 \end{aligned}$$

En prenant  $k'_0$  et  $k''_0$  tous les deux positifs ou négatifs, nous trouvons

$$(96) \quad [\eta_{\mu\mathbf{k}'}, \eta_{\nu\mathbf{k}''}] = 0, \quad [\bar{\eta}_{\mu\mathbf{k}'}, \bar{\eta}_{\nu\mathbf{k}''}] = 0;$$

et en prenant  $k'_0$  positif et  $k''_0$  négatif, nous trouvons, d'après (91),

$$\begin{aligned}
 [\eta_{\mu\mathbf{k}'}, \bar{\eta}_{\nu-\mathbf{k}''}] &= \frac{\delta(k'_0 - \sqrt{k_1'^2 + k_2'^2 + k_3'^2})}{k'_0} \frac{\delta(k''_0 + \sqrt{k_1''^2 + k_2''^2 + k_3''^2})}{(-k''_0)} \\
 &= -\frac{i g_{\mu\nu}}{4\pi^2} \cos(\mathbf{k}'\lambda) \frac{\delta(k'_0 - \sqrt{k_1'^2 + k_2'^2 + k_3'^2})}{k'_0} \delta(\mathbf{k}' + \mathbf{k}'')
 \end{aligned}$$

qui se réduit à

$$(97) \quad [\eta_{\mu\mathbf{k}'}, \bar{\eta}_{\nu\mathbf{k}''}] = -\frac{i g_{\mu\nu}}{4\pi^2} \cos(\mathbf{k}'\lambda) k'_0 \delta(k'_1 - k''_1) \delta(k'_2 - k''_2) \delta(k'_3 - k''_3),$$

où  $\mathbf{k}''$  a été remplacé par  $-\mathbf{k}''$ . Les équations (96), (97) nous donnent immédiatement les relations de commutativité entre les  $\eta$  et les  $\bar{\eta}$ . Les  $\eta$  commutent avec eux-mêmes, ainsi que les  $\bar{\eta}$  et

$$(98) \quad \eta_{\mu\mathbf{k}'} \bar{\eta}_{\nu\mathbf{k}''} - \bar{\eta}_{\nu\mathbf{k}''} \eta_{\mu\mathbf{k}'} = \frac{g_{\mu\nu} \hbar}{4\pi^2} \cos(\mathbf{k}'\lambda) k'_0 \delta(k'_1 - k''_1) \delta(k'_2 - k''_2) \delta(k'_3 - k''_3).$$

Ces relations de commutativité sont les mêmes que celle de l'ancienne théorie de Heisenberg et Pauli, au facteur  $\cos(\mathbf{k}'\lambda)$  près.

**11. Élimination des ondes longitudinales.** — Dans la théorie classique nous avons une condition supplémentaire exprimée par la relation (80). Dans la théorie quantique nous aurons une condition analogue appliquée à la fonction d'onde

$$(99) \quad \mathbf{R}(\mathbf{x})\psi = 0,$$

où

$$(100) \quad R(\mathbf{x}) = \frac{\partial \Lambda_{\mu}(\mathbf{x})}{\partial x_{\mu}} + \frac{1}{2} \sum_n e_n \{ \Delta(\mathbf{x} - \mathbf{z}_n - \lambda) + \Delta(\mathbf{x} - \mathbf{z}_n + \lambda) \}.$$

On constate qu'on a affaire ici à vraiment beaucoup de conditions, en l'espèce une pour chaque point  $\mathbf{x}$ ; il faut vérifier si elles sont compatibles, ce qu'on peut faire en regardant si

$$(101) \quad [R(\mathbf{x}'), R(\mathbf{x}'')] \psi = 0$$

sont satisfaites. Nous avons

$$(102) \quad [R(\mathbf{x}'), R(\mathbf{x}'')] = \left[ \frac{\partial \Lambda_{\mu}(\mathbf{x}')}{\partial x'_{\mu}}, \frac{\partial \Lambda_{\nu}(\mathbf{x}'')}{\partial x''_{\nu}} \right] \\ = \frac{\partial^2}{\partial x'_{\mu} \partial x''_{\nu}} [\Lambda_{\mu}(\mathbf{x}'), \Lambda_{\nu}(\mathbf{x}'')] \\ = -\frac{1}{2} \square_{x'} \{ \Delta(\mathbf{x}' - \mathbf{x}'' + \lambda) + \Delta(\mathbf{x}' - \mathbf{x}'' - \lambda) \} = 0,$$

en vertu de (72) et (51). Donc la condition (101) est satisfaite et les conditions (99) sont compatibles entre elles.

Pour exprimer ces conditions en fonction des variables  $\eta$ , remarquons que, d'après (92) et (94)

$$\int R(\mathbf{x}) e^{-i(\mathbf{k}\mathbf{x})} d\mathbf{x} \\ = (2\pi)^4 i k^{\mu} \Lambda_{\mu\mathbf{k}} - 2\pi^2 i \Delta(\mathbf{k}) \Sigma_n e_n \{ e^{-i(\mathbf{k}, \mathbf{z}_n + \lambda)} + e^{-i(\mathbf{k}, \mathbf{z}_n - \lambda)} \};$$

nous avons donc

$$(103) \quad \left\{ k^{\mu} \Lambda_{\mu\mathbf{k}} - \frac{\cos(\mathbf{k}\lambda)}{4\pi^2} \Delta(\mathbf{k}) \Sigma_n e_n e^{-i(\mathbf{k}\mathbf{z}_n)} \right\} \psi = 0.$$

Donc, d'après (91), en prenant  $k_0 < 0$ , nous trouvons

$$(104) \quad \left\{ k^{\mu} \tau_{\mu\mathbf{k}} - \frac{\cos(\mathbf{k}\lambda)}{4\pi^2} \Sigma_n e_n e^{-i(\mathbf{k}\mathbf{z}_n)} \right\} \psi = 0,$$

et en prenant  $k_0 < 0$ , ensuite en remplaçant  $-\mathbf{k}$  par  $\mathbf{k}$ , nous trouvons

$$(105) \quad \left\{ k^{\mu} \bar{\tau}_{\mu\mathbf{k}} - \frac{\cos(\mathbf{k}\lambda)}{4\pi^2} \Sigma_n e_n e^{i(\mathbf{k}\mathbf{z}_n)} \right\} \psi = 0.$$

Nous pouvons séparer le champ en une partie qui contient les ondes longitudinales et une autre partie qui contient les ondes transversales. Une telle séparation n'est pas invariante par rapport à une transforma-

tion de Lorentz, mais elle est avantageuse parce qu'elle permet d'éliminer les ondes longitudinales à l'aide des conditions supplémentaires (99) et simplifier ainsi les équations.

Considérons les ondes de fréquence donnée qui se propagent dans la direction de l'axe  $x_3$  et pour lesquelles on aura

$$(106) \quad k_0 = k_3, \quad k_1 = 0, \quad k_2 = 0.$$

Il existe quatre ondes de ce type correspondant aux quatre composantes du vecteur  $\eta_{\mathbf{k}}$  et de son conjugué  $\bar{\eta}_{\mathbf{k}}$ . Celles qui correspondent à  $\eta_{0\mathbf{k}}$  et  $\eta_{3\mathbf{k}}$  sont des ondes longitudinales, celles qui correspondent à  $\eta_{1\mathbf{k}}$  et  $\eta_{2\mathbf{k}}$  des ondes transversales. Pour les ondes longitudinales les équations (104) et (105) nous donnent

$$(107) \quad \left\{ \begin{array}{l} \left\{ \eta_{0\mathbf{k}} - \eta_{3\mathbf{k}} - \frac{\cos(\mathbf{k}\lambda)}{4\pi^2 k_0} \sum_n e_n e^{-i(\mathbf{k}\mathbf{z}_n)} \right\} \psi = 0, \\ \left\{ \bar{\eta}_{0\mathbf{k}} - \bar{\eta}_{3\mathbf{k}} - \frac{\cos(\mathbf{k}\lambda)}{4\pi^2 k_0} \sum_n e_n e^{i(\mathbf{k}\mathbf{z}_n)} \right\} \psi = 0. \end{array} \right.$$

Ces deux équations suffisent pour déterminer la forme de  $\psi$  par rapport aux variables  $\eta_{0\mathbf{k}}$ ,  $\eta_{3\mathbf{k}}$ ,  $\bar{\eta}_{0\mathbf{k}}$ ,  $\bar{\eta}_{3\mathbf{k}}$ . Nous sommes ici en présence d'une différence entre la théorie quantique et la théorie classique. Dans la théorie classique il faudrait quatre équations pour déterminer un état en fonction de quatre variables dynamiques, mais en théorie quantique, il suffit d'en avoir deux, compatibles entre elles [comme le sont les équations (107)]; d'après le principe d'incertitude de Heisenberg, il ne serait pas permis d'en ajouter d'autres.

Posons

$$(108) \quad \left\{ \begin{array}{l} \eta_{0\mathbf{k}} - \eta_{3\mathbf{k}} = \alpha - i\beta, \\ \bar{\eta}_{0\mathbf{k}} - \bar{\eta}_{3\mathbf{k}} = \alpha + i\beta; \end{array} \right.$$

de sorte que les variables  $\alpha$  et  $\beta$  sont réelles. Les équations (107) deviennent

$$(109) \quad (\alpha - a)\psi = 0, \quad (\beta - b)\psi = 0,$$

où

$$(110) \quad \left\{ \begin{array}{l} a = \frac{\cos(\mathbf{k}\lambda)}{4\pi^2 k_0} \sum_n e_n \cos(\mathbf{k}\mathbf{z}_n), \\ b = \frac{\cos(\mathbf{k}\lambda)}{4\pi^2 k_0} \sum_n e_n \sin(\mathbf{k}\mathbf{z}_n). \end{array} \right.$$

Prenons une représentation des  $\eta$  dans laquelle  $\alpha$  et  $\beta$  soient diagonales, ce qui est permis puisque  $\alpha$  et  $\beta$  sont commutables. D'après (109), la fonction d'onde  $\psi$  contiendra les facteurs  $\delta(\alpha - a)$  et  $\delta(\beta - b)$ .

Il y aura des facteurs semblables dans  $\psi$  pour toutes les fréquences et toutes les directions du mouvement des ondes. Nous pouvons écrire ce résultat sous la forme

$$(111) \quad \psi = \Pi \{ \delta(\alpha - a) \delta(\beta - b) \} \chi,$$

le symbole  $\Pi$  signifiant le produit pour toutes fréquences et toutes les directions du mouvement des ondes. Le  $\chi$  dans (111) est une fonction d'onde indépendante des variables  $\alpha$  et  $\beta$  qui se rapportent aux ondes longitudinales, et ne dépendent ainsi que des variables électroniques et des ondes transversales. En conséquence

$$(112) \quad (\eta_{0\mathbf{k}} + \eta_{3\mathbf{k}})\chi = 0, \quad (\bar{\eta}_{0\mathbf{k}} + \bar{\eta}_{3\mathbf{k}})\chi = 0,$$

parce que les opérateurs  $\eta_{0\mathbf{k}} + \eta_{3\mathbf{k}}$  et  $\bar{\eta}_{0\mathbf{k}} + \bar{\eta}_{3\mathbf{k}}$  ont la forme de différentiations par rapport à  $\alpha$  et  $\beta$ , à cause des relations de commutation entre eux-mêmes et  $\alpha$ ,  $\beta$ .

Nous allons montrer maintenant que les opérateurs  $p_{\mu n} - e_n A_{\mu}(\mathbf{z}_n)$  commutent avec les opérateurs des équations (104) et (105), et, par conséquent, avec les opérateurs  $(\alpha - a)$  et  $(\beta - b)$ . Nous avons, d'après (89), (96) et (97),

$$[p_{\mu n} - e_n A_{\mu}(\mathbf{z}_n), k^{\nu} \eta_{\nu \mathbf{k}}] = - \frac{i e_n k_{\mu}}{4 \pi^2} e^{-i(\mathbf{k} \mathbf{z}_n)} \cos(\mathbf{k} \lambda),$$

et, d'après (84),

$$[p_{\mu n} - e_n A_{\mu}(\mathbf{z}_n), \Sigma_m e_m e^{-i(\mathbf{k} \mathbf{z}_m)} \cos(\mathbf{k} \lambda)] = - i e_n k_{\mu} e^{-i(\mathbf{k} \mathbf{z}_n)} \cos(\mathbf{k} \lambda).$$

En conséquence,  $p_{\mu n} - e_n A_{\mu}(\mathbf{z}_n)$  commute avec l'opérateur de (104), et, de la même façon, avec l'opérateur de (105). Donc cette expression commute avec tous les  $(\alpha - a)$  et  $(\beta - b)$ . Nous avons donc, d'après (111),

$$(113) \quad \{ p_{\mu n} - e_n A_{\mu}(\mathbf{z}_n) \} \psi = \Pi \{ \delta(\alpha - a) \delta(\beta - b) \} \{ p_{\mu n} - e_n A_{\mu}(\mathbf{z}_n) \} \chi.$$

Prenons maintenant le cas  $\mu = 0$ , et calculons la valeur de  $A_0(\mathbf{z}_n)\chi$  dans (113). D'après (89) on a

$$(114) \quad A_0(\mathbf{z}_n)\chi = \iiint \{ \eta_{0\mathbf{k}} e^{i(\mathbf{k} \mathbf{z}_n)} + \bar{\eta}_{0\mathbf{k}} e^{-i(\mathbf{k} \mathbf{z}_n)} \} \frac{1}{k_0} dk_1 dk_2 dk_3 \chi.$$

Quand les  $k$  ont les valeurs (106), la quantité sous le signe d'intégration, sans le facteur  $\frac{1}{k_0}$ , est égale, en vertu de (112), à

$$(115) \quad \left\{ \frac{1}{2} (\eta_{0\mathbf{k}} - \eta_{3\mathbf{k}}) e^{i(\mathbf{k}\mathbf{z}_n)} + \frac{1}{2} (\bar{\eta}_{0\mathbf{k}} - \bar{\eta}_{3\mathbf{k}}) e^{-i(\mathbf{k}\mathbf{z}_n)} \right\} \chi \\ = \{ \alpha \cos(\mathbf{k}\mathbf{z}_n) + \beta \sin(\mathbf{k}\mathbf{z}_n) \} \chi.$$

Cette quantité est multipliée par les facteurs  $\delta(\alpha - a)$  et  $\delta(\beta - b)$  dans (113); nous pouvons donc remplacer  $\alpha$  par  $a$  et  $\beta$  par  $b$ . L'expression (115) devient donc

$$\{ a \cos(\mathbf{k}\mathbf{z}_n) + b \sin(\mathbf{k}\mathbf{z}_n) \} \chi = \left\{ \frac{\cos(\mathbf{k}\lambda)}{4\pi^2 k_0} \Sigma_m e_m \cos(\mathbf{k}, \mathbf{z}_n - \mathbf{z}_m) \right\} \chi.$$

Pour évaluer (114), il faut diviser cette expression par  $k_0$  et prendre son intégrale pour tous les  $k_1$ ,  $k_2$  et  $k_3$ ,  $k_0$  étant la fonction (90). Nous obtenons ainsi

$$(116) \quad \Lambda_0(\mathbf{z}_n) \chi = \frac{1}{8\pi^2} \Sigma_m e_m \\ \times \iiint \frac{\cos(\mathbf{k}, \mathbf{z}_n - \mathbf{z}_m + \lambda) + \cos(\mathbf{k}, \mathbf{z}_n - \mathbf{z}_m - \lambda)}{k_1^2 + k_2^2 + k_3^2} dk_1 dk_2 dk_3 \chi.$$

Pour évaluer cette intégrale, remarquons qu'elle est constituée par une somme de termes de la forme  $\iiint \frac{e^{i(\mathbf{k}\mathbf{a})}}{k_0^2} dk_1 dk_2 dk_3$ , qui se calculent en passant aux coordonnées polaires en trois dimensions [axe dirigé suivant le vecteur tridimensionnel  $(a_1, a_2, a_3)$ ]. On a

$$\iiint \frac{e^{i(\mathbf{k}\mathbf{a})}}{k_0^2} dk_1 dk_2 dk_3 = 2\pi \iint e^{ik_0(a_0 - b \cos \theta)} dk_0 d \cos \theta,$$

avec

$$b = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2},$$

$$\iiint \frac{e^{i(\mathbf{k}\mathbf{a})}}{k_0^2} dk_1 dk_2 dk_3 \\ = 2\pi \int_0^\infty dk_0 e^{ik_0 a_0} \frac{e^{-ik_0 b} - e^{ik_0 b}}{-ik_0 b} \\ = \frac{2\pi i}{b} \int_0^\infty \frac{dk_0}{k_0} \{ e^{-ik_0(b-a_0)} - e^{ik_0(b+a_0)} \} \\ = \frac{2\pi i}{b} \int_0^\infty \frac{dx}{x} (e^{-ix} - e^{ix}) \quad (\text{pour le cas } b > |a_0|) \\ = \frac{4\pi}{b} \int_0^\infty \frac{\sin x}{x} dx = \frac{2\pi^2}{b}.$$

Pour  $a_0 > b$  nous avons

$$\frac{2\pi i}{b} \int_0^\infty \frac{dx}{x} (e^{ix} - e^{-ix}) = 0,$$

et de la même façon pour  $a_0 < -b$

$$\frac{2\pi i}{b} \int_0^\infty \frac{dx}{x} (e^{-ix} - e^{-ix}) = 0.$$

Revenons maintenant à la formule (116).

Si (74) est satisfaite, le résultat de cette intégration est

$$(117) \quad A_0(\mathbf{z}_n)\chi = \frac{1}{4} \sum_{m \neq n} e_m \left\{ \frac{1}{r(\mathbf{z}_n - \mathbf{z}_m + \lambda)} + \frac{1}{r(\mathbf{z}_n - \mathbf{z}_m - \lambda)} \right\} \chi,$$

où

$$r(\mathbf{x}) = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}.$$

A la limite  $\lambda \rightarrow 0$ , l'expression  $A_0(\mathbf{z}_n)$  ainsi obtenue est précisément la moitié du potentiel de Coulomb des autres électrons. Le terme qui dans (116) correspond à  $m = n$ , et qui est infini dans la théorie de Heisenberg et Pauli, est nul dans la théorie actuelle, grâce au  $\lambda$ .

Posons

$$(118) \quad \mathbf{A}(\mathbf{x}) = \mathbf{B}(\mathbf{x}) + \mathbf{L}(\mathbf{x}),$$

où  $\mathbf{B}(\mathbf{x})$  représente les ondes transversales et  $\mathbf{L}(\mathbf{x})$  les ondes longitudinales, de sorte que

$$(119) \quad A_0(\mathbf{x}) = L_0(\mathbf{x}).$$

Nous pouvons évaluer  $L_\mu(\mathbf{x})\chi$  (avec  $\mu = 1, 2, 3$ ) dans (113) de la même façon que  $A_0(\mathbf{z})\chi$ ; nous trouvons

$$(120) \quad L_\mu(\mathbf{z})\chi = -\frac{1}{4} \sum_{m \neq n} e_m \left\{ \frac{(\mathbf{z}_{0n} - \mathbf{z}_{0m} + \lambda_0)(\mathbf{z}_{\mu n} - \mathbf{z}_{\mu m} + \lambda_\mu)}{r^3(\mathbf{z}_n - \mathbf{z}_m + \lambda)} + \frac{(\mathbf{z}_{0n} - \mathbf{z}_{0m} - \lambda_0)(\mathbf{z}_{\mu n} - \mathbf{z}_{\mu m} - \lambda_\mu)}{r^3(\mathbf{z}_n - \mathbf{z}_m - \lambda)} \right\} \chi,$$

cette fois encore le terme correspondant à  $m = n$  étant nul.

En vertu de (113), nous pouvons écrire les équations d'onde (83) sous la forme

$$\Pi \{ \delta(\alpha - a) \delta(\beta - b) \} \{ [\mathbf{p}_n - e_n \mathbf{A}(\mathbf{z}_n)]^2 - m_n^2 \} \chi = 0,$$



qui se réduit à

$$(121) \quad \{ [\mathbf{p}_n - e_n(\mathbf{B}(\mathbf{z}_n) + \mathbf{L}(\mathbf{z}_n))]^2 - m_n^2 \} \chi = 0,$$

où  $L_0$  a la valeur donnée par (119) et (117) et les autres composantes de  $\mathbf{L}$  les valeurs données par (120).

Nous avons donc obtenu les équations d'onde après l'élimination des ondes longitudinales.

**12. Discussion des ondes transversales.** — Une question intéressante se pose maintenant, à savoir, si les infinis correspondant aux ondes transversales dans la théorie de Heisenberg et Pauli disparaîtront dans la théorie actuelle. Nous allons examiner cette question pour le cas d'un seul électron. Pour ce cas,  $L_\mu = 0$ , et nous pouvons écrire l'équation d'onde sous la forme

$$(122) \quad (G_0 - e G_1 + e^2 G_2) \chi = 0,$$

où

$$(123) \quad G_0 = \mathbf{p}^2 - m^2,$$

$$(124) \quad G_1 = 2(\mathbf{p}\mathbf{B}),$$

$$(125) \quad G_2 = \mathbf{B}^2.$$

Cherchons une solution de (122) sous forme d'un développement suivant les puissances de la charge électrique  $e$ , supposée petite. Posons

$$(126) \quad \chi = \chi_0 + e\chi_1 + e^2\chi_2 + \dots$$

En négligeant  $e^3$ , on aura

$$(127) \quad G_0\chi_0 = 0,$$

$$(128) \quad G_0\chi_1 = G_1\chi_0,$$

$$(129) \quad G_0\chi_2 = G_1\chi_1 - G_2\chi_0.$$

Une solution de (127), qui correspond au cas de l'absence de photons, est donnée par

$$(130) \quad \chi_0 = e^{-\frac{i(\mathbf{p}'\cdot\mathbf{z})}{\hbar}},$$

où le vecteur  $\mathbf{p}'$  satisfait à

$$(131) \quad \mathbf{p}'^2 = m^2.$$

D'après (124) et (89)

$$(132) \quad G_1 = 2 \iiint \left\{ e^{i(\mathbf{kz})}(\mathbf{p}, \xi_{\mathbf{k}}) + e^{-i(\mathbf{kz})}(\mathbf{p}, \bar{\xi}_{\mathbf{k}}) \right\} \frac{1}{k_0} dk_1 dk_2 dk_3,$$

où  $\xi_{\mathbf{k}}$  est la partie de  $\eta_{\mathbf{k}}$  qui se rapporte aux ondes transversales. Donc  $\xi_{0\mathbf{k}} = 0$ . L'ordre des facteurs  $e^{i(\mathbf{kz})}$  et  $(\mathbf{p}, \xi_{\mathbf{k}})$  dans (132) n'est pas important, puisque  $(\mathbf{p}, \xi_{\mathbf{k}})$  contient seulement les composantes de  $\mathbf{p}$  dans les directions des ondes transversales, et ces composantes commutent avec  $(\mathbf{kz})$ .

Les opérateurs  $\bar{\xi}_{\mathbf{k}}$  correspondent à la disparition d'un photon, et par conséquent donneront zéro s'ils sont appliqués à l'état  $\chi_0$  pour lequel il n'existe pas de photons.

Donc, l'équation (128) se réduit à

$$G_0 \chi_1 = 2 \iiint e^{i(\mathbf{kz})}(\mathbf{p}, \xi_{\mathbf{k}}) e^{-\frac{i(\mathbf{p}, \mathbf{z})}{\hbar}} \frac{1}{k_0} dk_1 dk_2 dk_3,$$

dont la solution est

$$(133) \quad \chi_1 = 2 \iiint \frac{1}{(\mathbf{p}' - \mathbf{k}\hbar)^2 - m^2} (\mathbf{p}', \xi_{\mathbf{k}}) e^{i\left(\mathbf{k} - \frac{\mathbf{p}'}{\hbar}, \mathbf{z}\right)} \frac{1}{k_0} dk_1 dk_2 dk_3.$$

Au second membre de (129), la partie intéressante est celle qui se rapporte à des états sans photons, parce que c'est cette partie qui est infiniment grande dans la théorie de Heisenberg et Pauli. La contribution à cette partie de  $G_1 \chi_1$  que nous désignerons par  $(G_1 \chi_1)^{(0)}$  viendra seulement des termes de (132) contenant un  $\bar{\xi}$ , appliqués à (133), c'est-à-dire des termes

$$(134) \quad \begin{aligned} & 4 \iiint \iiint \iiint e^{-i(\mathbf{k}'\mathbf{z})} \frac{(\mathbf{p}, \bar{\xi}_{\mathbf{k}'}) (\mathbf{p}', \xi_{\mathbf{k}})}{(\mathbf{p}' - \mathbf{k}\hbar)^2 - m^2} \\ & \times e^{i\left(\mathbf{k} - \frac{\mathbf{p}'}{\hbar}, \mathbf{z}\right)} \frac{1}{k_0} dk'_1 dk'_2 dk'_3 \frac{1}{k_0} dk_1 dk_2 dk_3. \end{aligned}$$

Nous pouvons remplacer  $(\mathbf{p}, \bar{\xi}_{\mathbf{k}'}) (\mathbf{p}', \xi_{\mathbf{k}})$  ou  $p_\mu p'_\nu \bar{\xi}_{\mathbf{k}'}^\mu \xi_{\mathbf{k}}^\nu$  par

$$(135) \quad p_\mu p'_\nu (\bar{\xi}_{\mathbf{k}'}^\mu \xi_{\mathbf{k}}^\nu - \xi_{\mathbf{k}}^\nu \bar{\xi}_{\mathbf{k}'}^\mu),$$

parce que le terme additionnel serait équivalent à zéro dans (134). D'après (98), l'opérateur (135) devient

$$(p_a p'_a + p_b p'_b) \frac{\hbar}{4\pi^2} \cos(\mathbf{k}\lambda) k_0 \delta(k_1 - k'_1) \delta(k_2 - k'_2) \delta(k_3 - k'_3),$$

où  $a$  et  $b$  signifient les directions des ondes transversales. Ainsi l'expres-

sion (134) devient

$$(136) \quad \frac{\hbar}{\pi^2} \iiint e^{-i(\mathbf{kz})} \frac{(p_a p'_a + p_b p'_b)}{(\mathbf{p}' - \mathbf{k}\hbar)^2 - m^2} e^{i\left(\mathbf{k} - \frac{\mathbf{p}'}{\hbar}, \mathbf{z}\right)} \cos(\mathbf{k}\lambda) \frac{1}{k_0} dk_1 dk_2 dk_3.$$

L'opérateur  $p_a$  produit le même effet que la multiplication par  $p'_a - k_a \hbar$ , qui est le même que  $p'_a$ , puisque  $\mathbf{k}$  n'a pas de composante dans la direction  $a$ . De la même façon,  $p_b$  est équivalent à  $p'_b$ . Ainsi, à l'aide de (131), l'expression (136) se réduit à

$$(137) \quad -\frac{1}{\pi^2} e^{-\frac{i(\mathbf{p}'\mathbf{z})}{\hbar}} \iiint \frac{p_a'^2 + p_b'^2}{2(\mathbf{p}', \mathbf{k})} \cos(\mathbf{k}\lambda) \frac{1}{k_0} dk_1 dk_2 dk_3.$$

Nous pouvons évaluer cette intégrale en posant

$$dk_1 dk_2 dk_3 = k_0^2 dk_0 d\omega,$$

$d\omega$  étant un petit angle solide en trois dimensions autour de la direction du vecteur  $(k_1, k_2, k_3)$ , et en prenant d'abord l'intégrale par rapport à  $k_0$ . Cette intégrale par rapport à  $k_0$  est de la forme

$$(138) \quad \int_0^\infty \cos(\mathbf{k}\lambda) dk_0.$$

Une telle intégrale, dont la valeur oscille autour de la valeur zéro, peut toujours être remplacée sans inconvénient par zéro en mécanique quantique; donc  $(G_1 \chi_1)^{(0)}$  est nulle.

Par un calcul analogue, on trouve que

$$(139) \quad \begin{aligned} -(G_2 \chi_0)^{(0)} &= -\iiint \iiint \int \int \int \int \int \left\{ \bar{\xi}_{\mu\mathbf{k}'} \xi_{\mu\mathbf{k}}^\mu - \xi_{\mathbf{k}}^\mu \bar{\xi}_{\mu\mathbf{k}'} \right\} \\ &\quad \times \frac{1}{k_0'} dk_1' dk_2' dk_3' \frac{1}{k_0} dk_1 dk_2 dk_3 \chi_0 \\ &= -\frac{\hbar}{2\pi^2} \iiint \cos(\mathbf{k}\lambda) \frac{1}{k_0} dk_1 dk_2 dk_3 \chi_0. \end{aligned}$$

Prenons un système de coordonnées tel que le vecteur  $\lambda$  soit dans la direction de l'axe  $x_0$ . L'expression (139) devient

$$(140) \quad \begin{aligned} &-\frac{\hbar}{2\pi^2} \iiint \cos(k_0 \lambda_0) \frac{1}{k_0} dk_1 dk_2 dk_3 \chi_0 \\ &= -\frac{2\hbar}{\pi} \int_0^\infty \cos(k_0 \lambda_0) k_0 dk_0 \chi_0 \\ &= -\frac{2\hbar}{\pi} \left[ \frac{k_0}{\lambda_0} \sin(k_0 \lambda_0) + \frac{1}{\lambda_0^2} \cos(k_0 \lambda_0) \right]_0^\infty \chi_0 = \frac{2\hbar}{\pi} \frac{1}{\lambda_0^2} \chi_0, \end{aligned}$$

en négligeant les termes oscillants.

Nous constatons ici la présence d'un terme qui devient infiniment grand quand  $\lambda \rightarrow 0$ . Il subsiste donc encore un infini dans notre théorie, infini qui n'a d'ailleurs pas d'analogue classique puisqu'il contient le facteur  $\hbar$ . Cet infini est cependant tellement simple que nous pouvons l'éliminer en ajoutant une constante à la fonction d'Hamilton. Si nous prenons donc la nouvelle fonction hamiltonienne

$$(141) \quad F = [\mathbf{p} - e \mathbf{B}(\mathbf{z})]^2 - m^2 + \frac{2e^2 \hbar}{\pi \lambda^2},$$

nous n'aurons plus d'infinis dans la solution de l'équation d'ondes, jusqu'au deuxième ordre  $e^2$ . Cette nouvelle constante introduite dans la fonction hamiltonienne n'a pas de signification physique.

La question de savoir si d'autres infinis subsistent quand on va au delà du second ordre, n'a pas encore été tranchée.

**13. L'électron avec spin.** — La théorie précédente peut être facilement appliquée à des électrons avec spin, pour lesquels la fonction hamiltonienne est linéaire en  $p_\mu$ . La suite des calculs destinés à éliminer les ondes longitudinales est la même que pour l'électron sans spin, et conduit aux mêmes résultats (117) et (120).

Les calculs relatifs aux ondes transversales sont un peu différents dans le cas du spin. L'équation d'onde est maintenant de la forme (122) avec

$$(142) \quad G_0 = (\alpha, \mathbf{p}) + m,$$

$$(143) \quad G_1 = (\alpha, \mathbf{B}),$$

$$G_2 = 0,$$

où les  $\alpha$  sont les matrices de spin qui satisfont à

$$(144) \quad \alpha_\mu \alpha_\nu + \alpha_\nu \alpha_\mu = 2g_{\mu\nu}.$$

Pour déterminer  $\chi_0$ ,  $\chi_1$  et  $\chi_2$ , nous avons toujours les équations (127), (128) et (129).

Nous prenons comme solution de (127)

$$(145) \quad \chi_0 = u_0 e^{-\frac{i(\mathbf{p}'\mathbf{z})}{\hbar}},$$

où (131) est toujours satisfaite et  $u_0$  est une quantité à quatre compo-

santes, sur laquelle opèrent les matrices  $\alpha$ , et qui satisfait à

$$(146) \quad \{(\alpha, \mathbf{p}') + m\} u_0 = 0.$$

Nous avons maintenant pour  $\chi_1$ , au lieu de (133),

$$(147) \quad \chi_1 = \iiint \frac{1}{(\alpha, \mathbf{p}' - \mathbf{k}\hbar) + m} (\alpha, \xi_{\mathbf{k}}) u_0 e^{i\left(\mathbf{k} - \frac{\mathbf{p}'}{\hbar}, \mathbf{z}\right)} \frac{1}{k_0} dk_1 dk_2 dk_3;$$

et au lieu de (136) nous aurons

$$(148) \quad (G_1 \chi_1)^{(0)} = \frac{\hbar}{4\pi^2} \iiint e^{-i(\mathbf{k}\mathbf{z})} \\ \times \left\{ \alpha_a \frac{1}{(\alpha, \mathbf{p}' - \mathbf{k}\hbar) + m} \alpha_a + \alpha_b \frac{1}{(\alpha, \mathbf{p}' - \mathbf{k}\hbar) + m} \alpha_b \right\} u_0 \\ \times e^{i\left(\mathbf{k} - \frac{\mathbf{p}'}{\hbar}, \mathbf{z}\right)} \cos(\mathbf{k}\lambda) \frac{1}{k_0} dk_1 dk_2 dk_3.$$

Or, en vertu de (144), nous avons

$$\alpha_a \frac{1}{(\alpha, \mathbf{p}' - \mathbf{k}\hbar) + m} \alpha_a u_0 = \alpha_a \frac{1}{(\mathbf{p}' - \mathbf{k}\hbar)^2 - m^2} \{(\alpha, \mathbf{p}' - \mathbf{k}\hbar) - m\} \alpha_a u_0 \\ = \frac{1}{(\mathbf{p}' - \mathbf{k}\hbar)^2 - m^2} \{(\alpha, \mathbf{p}' - \mathbf{k}\hbar) + m - 2\alpha_a p'_a\} u_0,$$

et en employant (131) et (146), cela est égal à

$$\frac{1}{2(\mathbf{p}', \mathbf{k})\hbar} \{(\alpha, \mathbf{k})\hbar + 2\alpha_a p'_a\} u_0.$$

De la même façon

$$\alpha_b \frac{1}{(\alpha, \mathbf{p}' - \mathbf{k}\hbar) + m} \alpha_b u_0 = \frac{1}{2(\mathbf{p}'\mathbf{k})\hbar} \{(\alpha\mathbf{k})\hbar + 2\alpha_b p'_b\} u_0.$$

En substituant ces résultats dans l'équation (148), celle-ci devient

$$(149) \quad (G_1 \chi_1)^{(0)} = \frac{1}{4\pi^2} \iiint \frac{1}{(\mathbf{p}'\mathbf{k})} \{(\alpha\mathbf{k})\hbar + \alpha_a p'_a + \alpha_b p'_b\} u_0 \\ \times e^{-\frac{i(\mathbf{p}'\mathbf{z})}{\hbar}} \cos(\mathbf{k}\lambda) \frac{1}{k_0} dk_1 dk_2 dk_3.$$

Les termes  $\alpha_a p'_a + \alpha_b p'_b$  donnent une intégrale de la forme (138), qui est nulle. Donc, en appelant  $\chi_2^{(0)}$  la partie de  $\chi_2$  qui se rapporte aux états sans photons, on aura

$$(150) \quad \{(\alpha\mathbf{p}) + m\} \chi_2^{(0)} = (G_1 \chi_1)^{(0)} = \frac{\hbar}{4\pi^2} \iiint \frac{(\alpha\mathbf{k})}{(\mathbf{p}'\mathbf{k})} \cos(\mathbf{k}\lambda) \frac{1}{k_0} dk_1 dk_2 dk_3 \chi_0.$$

Multiplions les deux membres de cette équation par l'opérateur  $(\alpha \mathbf{p}) - m$ . Il en résulte

$$(151) \quad \{ \mathbf{p}^2 - m^2 \} \chi_2^{(0)} = \frac{\hbar}{4\pi^2} \iiint \frac{\{ (\alpha \mathbf{p}) - m \} (\alpha \mathbf{k})}{(\mathbf{p}' \mathbf{k})} \cos(\mathbf{k} \lambda) \frac{1}{k_0} dk_1 dk_2 dk_3 \chi_0.$$

Or, d'après (144),

$$\{ (\alpha \mathbf{p}') - m \} (\alpha \mathbf{k}) = -(\alpha \mathbf{k}) \{ (\alpha \mathbf{p}') + m \} + 2(\mathbf{p}' \mathbf{k})$$

et le premier terme au second membre donne zéro quand il est appliqué à  $\chi_0$ . Ainsi (151) se réduit à

$$(152) \quad (\mathbf{p}^2 - m^2) \chi_2^{(0)} = \frac{\hbar}{2\pi^2} \iiint \cos(\mathbf{k} \lambda) \frac{1}{k_0} dk_1 dk_2 dk_3 \chi_0 = -\frac{2\hbar}{\pi} \frac{1}{\lambda^2} \chi_0,$$

d'après (140).

Nous avons ici la même espèce d'infini que dans le cas de l'électron sans spin, et nous pouvons l'éliminer de la même façon en ajoutant une constante à la fonction hamiltonienne. Prenons comme nouvelle fonction hamiltonienne

$$(153) \quad (\alpha, \mathbf{p} - e \mathbf{B}) + m + e^2 c,$$

où  $c$  est une constante. Il y aura donc dans  $\chi_2^{(0)}$  un nouveau terme  $\chi_2^{(0)'}$ , donné par

$$\{ (\alpha \mathbf{p}) + m \} \chi_2^{(0)'} = -c \chi_0$$

ou

$$(\mathbf{p}^2 - m^2) \chi_2^{(0)'} = -c \{ (\alpha \mathbf{p}) - m \} \chi_0 = 2cm \chi_0.$$

Donc, il faut prendre

$$(154) \quad c = \frac{\hbar}{\pi m \lambda^2},$$

pour que la valeur totale de  $\chi_2^{(0)}$  soit nulle.

Il est donc prouvé que la théorie permet d'éliminer tous les infinis dans le cas d'un seul électron, jusqu'à l'ordre  $e^2$ .

FIN.