Ann. I. H. Poincaré – PR 37, 5 (2001) 523–554

S0246-0203(01)01082-2/FLA

VALEURS LIMITES POUR LES ÉLÉMENTS DES CHAOS

Gilles HARGÉ

Université d'Evry, équipe d'analyse et de probabilités Bd F. Mitterrand, 91025 Evry Cedex, France

Received 03 January 2000, revised 05 February 2001

RÉSUMÉ. – On montre, essentiellement sans utiliser d'inégalité de décorrélation, que certains éléments des chaos sur l'espace de Wiener possèdent une limite approximative par rapport à tout représentant de toute norme mesurable au sens de Gross (1962, 1967). On utilise d'autre part une intégrale construite pour la première fois par Nualart et Zakai (1986) et Ogawa (1979, 1984) et qui a été exploitée dans le sens qui nous intéresse ici par Rosinski (1989) et Sugita (1989). L'existence d'une limite approximative telle qu'elle est définie dans l'article est liée à l'existence de cette intégrale. © 2001 Éditions scientifiques et médicales Elsevier SAS

Mots Clés: Espace de Wiener; Chaos; Analyse stochastique

AMS classification: 28C20; 60H05

ABSTRACT. – Without using correlation inequalities, we show that a family of variables of the Wiener chaos possess an approximate limit with respect to mesurable norms defined by Gross (1962, 1967). We also use a stochastic integral which was first constructed by Nualart and Zakai (1986) and Ogawa (1979, 1984) and then used by Rosinski (1989) and Sugita (1989). The existence of an approximate limit like the one we use here is related to the existence of this integral. © 2001 Éditions scientifiques et médicales Elsevier SAS

1. Introduction et notations

L'objet de cet article est la recherche de valeurs limites pour un élément $X(w)$ du nième chaos de Wiener lorsque w se rapproche d'un élément de l'espace de Cameron–Martin. Un grand nombre de résultats concernant ce type de questions utilisent des inégalités de décorrélation pour la mesure gaussienne sur $\mathbb{R}^n$; il s'agit soit d'inégalités du type F.K.G., soit d'une inégalité permettant de décorréler deux convexes symétriques dans $\mathbb{R}^n$. Cette dernière inégalité, sous sa forme la plus générale, en est encore au stade de la conjecture (voir [6] pour un historique de la question). Nous allons voir dans cet article que l'inégalité de décorrélation la plus générale n'est pas nécessaire pour obtenir des résultats sur le comportement des éléments des chaos par rapport à ces problèmes de limites.

E-mail address: harge@lami.univ-evry.fr (G. Hargé).

On note W l'espace de Wiener :

$$W = \{f \in C([0,1], \mathbb{R}^d),\ f(0) = 0\}$$

muni de la mesure de Wiener notée P.

On considère w_t la réalisation canonique du mouvement brownien.

Soit H l'espace de Cameron–Martin :

$$H = \{h \in W,\ h \text{ est absolument continue et } \dot{h} \in L^2([0,1], \mathbb{R}^d)\}$$

et $\mathcal{F}_t = \sigma(w_s, s \leqslant t)$.

Rappelons tout d'abord des résultats connus (voir par exemple [12]).

On note $\underline{H} = L^2([0,1], \mathbb{R}^d)$ muni de son produit scalaire habituel $\langle , \rangle$.

Soit $T = [0,1] \times \{1, \ldots, d\}$ muni de la mesure m obtenue comme produit tensoriel de la mesure de Lebesgue et de la mesure de comptage. On obtient alors : $\underline{H}^{\odot n} \simeq \{f \in L^2(T^n),\ f \text{ symétrique}\}$ où $\underline{H}^{\odot n}$ désigne le produit tensoriel symétrique de $\underline{H}$ n fois avec lui-même.

On considère $(\overline{w}(f),\ f \in \underline{H})$ la mesure gaussienne d'intensité m. Pour $f \in \underline{H}^{\odot n}$, on note:

$$\delta^n(f) = \int_{T^n} f(s_1, \ldots, s_n)\, \mathrm{d}\overline{w}_{s_1} \cdots \mathrm{d}\overline{w}_{s_n}$$

$\delta^n(f)$ représente un élément quelconque du n^{ième} chaos de $L^2(W)$. On peut écrire :

$$\begin{aligned}\delta^n(f) &= n! \sum_{i_1, \ldots, i_n = 1}^{d} \int_{0 < t_1 < \cdots < t_n < 1} \tilde{f}_{i_1, \ldots, i_n}(t_1, \ldots, t_n)\, \mathrm{d}w_{t_1}^{i_1} \cdots \mathrm{d}w_{t_n}^{i_n} \\ &= n! \int_{0 < t_1 < \cdots < t_n < 1} \tilde{f}(t_1, \ldots, t_n).(\mathrm{d}w_{t_1} \otimes \cdots \otimes \mathrm{d}w_{t_n})\end{aligned}$$

avec $\tilde{f}_{i_1, \ldots, i_n}(t_1, \ldots, t_n) = f((t_1, i_1), \ldots, (t_n, i_n))$ (dans la suite, f et $\tilde{f}$ seront notées de la même façon).

Enfin, on désignera sous le terme de base d'un espace de Hilbert séparable toute famille orthonormée maximale de cet espace de Hilbert.

Nous étudions dans cet article l'existence d'une limite en un sens faible pour $\delta^n(f)$ en tant que fonctionnelle de la variable w lorsque w se rapproche d'un élément h de H. Cette notion de limite dite approximative fait intervenir les normes mesurables sur H, notées N et leurs représentants $\widetilde{N}$ sur l'espace de Wiener. Précisons que la notion de norme mesurable intervenant dans cet article sera toujours celle définie par Gross [4,5].

Nous allons montrer sous des conditions assez fortes sur f que $\delta^n(f)$ admet une limite relativement à $\widetilde{N}$ indépendante du choix de N. La valeur de la limite de $\delta^n(f)$ sera donnée par les formules de Hu–Meyer qui relient dans les bons cas $\delta^n(f)$ avec des intégrales de Stratonovich ou, dans le cadre de cet article, avec des intégrales que nous appelerons intégrales itérées d'Ogawa. Le résultat le plus fort obtenu ici est l'existence d'une limite approximative pour exp $|\mathring{\delta}^n(f)|^{2/n}$ (sous certaines conditions), où $\mathring{\delta}^n(f)$ est l'intégrale itérée d'Ogawa de f.

1.1. L'intégrale d'Ogawa itérée

Nous allons donc utiliser les formules de Hu–Meyer [8] dont le domaine de validité est lié à l'existence de traces (elles permettent par exemple de donner un sens à "$\int_0^1 f(s,s)\,\mathrm{d}s$" quand $f \in L^2([0,1]^2)$). Nous utilisons ici la notion de trace itérée dont nous allons rappeler la définition (pour plus de détails, voir [17] et [19]). Il existe d'autres notions de traces qu'on pourra trouver dans des articles de Solé et Utzet [22], Carmona et Nualart [3], Johnson et Kallianpur [10] et Budhiraja et Kallianpur [2]. Des comparaisons entre ces différentes définitions se trouvent aussi dans ces articles ainsi que dans un article de Nualart et Zakaï [14].

Parmis tous les articles cités ci-dessus, seuls ceux de Carmona et Nualart [3] et de Sugita [19] s'intéressent à l'existence de limites approximatives (ou à des notions proches) pour les éléments des chaos et leurs liens avec des traces; nous en reparlerons plus loin.

DEFINITION 1 ([17]). – *Soit $\mathcal{H}$ un espace de Hilbert réel séparable. On considère $k : T^2 \to \mathcal{H}$ mesurable symétrique tel que $\int_{T^2} \| k(s,t) \|^2 \,\mathrm{d}m(s)\,\mathrm{d}m(t) < +\infty$.*

Soit $K : L^2(T) \to L^2(T,\mathcal{H})$ défini par:

$$K\varphi(t) = \int_T \varphi(s)k(s,t)\,\mathrm{d}m(s) \quad \textit{pour } \varphi \in L^2(T)$$

On dit que K (ou k) admet une trace si pour toute base (φ_n) de $L^2(T)$, la série $\sum_n \int_{T^2} \varphi_n(s)k(s,t)\varphi_n(t)\,\mathrm{d}m(s)\,\mathrm{d}m(t)$ converge dans $\mathcal{H}$. On montre que la limite ne dépend pas du choix de (φ_n) (voir [17] *et* [19]). *On la note $\mathrm{Tr}\,K$ ou $\mathrm{Tr}\,k$.*

DEFINITION 2. – *Soit $f \in \underline{H}^{\odot n}$, on dit que f admet une trace si $\mathrm{Tr}\,k$ existe pour $k(s,t) = f(.,s,t)$. On pose $Tf = \mathrm{Tr}\,k$.*

Pour $0 \leqslant q \leqslant [n/2]$, on définit par récurrence $T^q(f)$ $(T^0(f) = f)$.

On peut maintenant définir les intégrales itérées d'Ogawa.

DEFINITION 3. – *On note $\mathrm{Dom}\,\mathring{\delta}^n = \{f \in \underline{H}^{\odot n},\ \forall k \in \{0,\dots,[n/2]\},\ T^k(f) \text{ existe}\}$.*

Pour $f \in \mathrm{Dom}\,\mathring{\delta}^n$, on pose:

$$\mathring{\delta}^n(f) = \sum_{k=0}^{[n/2]} \left(\frac{1}{2}\right)^k \frac{n!}{k!(n-2k)!} \delta^{n-2k}(T^k f).$$

On montre ensuite la formule suivante:

$$\delta^n(f) = \sum_{k=0}^{[n/2]} \left(-\frac{1}{2}\right)^k \frac{n!}{k!(n-2k)!} \mathring{\delta}^{n-2k}(T^k f).$$

Ces deux formules sont les formules de Hu–Meyer [8].

Remark 1. –

1. Dans la définition 1, le fait que K admette une trace ne signifie pas que K est nucléaire au sens habituel [1]. Il faudrait en effet avoir:
   Pour toutes les bases (φ_k) de $L^2(T)$ et (ψ_k) de $L^2(T,\mathcal{H})$, $\sum_k |\langle K\varphi_k,\psi_k\rangle| < +\infty$.
2. Par contre, si $\mathcal{H}=\mathbb{R}$, K est un opérateur de Hilbert–Schmidt symétrique. Dans ce cas, dire que K est nucléaire signifie alors [1, théorème 3.4.3]:

$$\text{Pour toute base } B=(e_i) \text{ de } \underline{H}, \quad \sum_{i=1}^{\infty} |\langle k, e_i\otimes e_i\rangle| < +\infty.$$

   Ce qui, grâce à la théorie sur les séries commutativement convergentes, est équivalent à :
   $\forall B=(e_i)$, $\sum_{i=1}^{\infty}\langle k, e_i\otimes e_i\rangle$ converge. On retrouve ici exactement la définition 1. Plus précisément, on obtient pour $f\in \underline{H}^{\odot 2}$:

$$f \in Dom\,\mathring{\delta}^2 \Leftrightarrow K \text{ est nucléaire}$$

   avec $K:\underline{H}\to\underline{H}$ défini par $Kh(s)=\int_T h(s)f(s,t)\,\mathrm{d}m(t)$.
3. On démontre en appendice quelques résultats complémentaires concernant $Dom\,\mathring{\delta}^n$. En particulier, on donne une caractérisation dans certains cas de l'appartenance de f à $Dom\,\mathring{\delta}^n$ en terme de nucléarité d'opérateurs.

$\mathring{\delta}^n(f)$ va se révéler être un bon intermédiaire de calcul pour étudier les "limites" de $\delta^n(f)$. En effet, nous verrons que la limite approximative de $\mathring{\delta}^n(f)$ lorsque w se rapproche d'un élément h de H s'écrit :

$$\int_{[0,1]^n} f(t_1,\ldots,t_n).\big(\dot h(t_1)\otimes\cdots\otimes\dot h(t_n)\big)\,\mathrm{d}t_1\ldots\mathrm{d}t_n$$

ce qui revient à remplacer formellement $\mathrm{d}w_t$ par $\dot h(t)\,\mathrm{d}t$ dans $\delta^n(f)$.

Enonçons maintenant un résultat qui nous sera utile. À partir de la proposition 2 de [19], on peut écrire:

PROPOSITION 1. – *Soit $B=(e_q)$ une base de $\underline{H}$. Si $f\in\underline{H}^{\odot n}$, on note*:

$$f_R=\sum_{i_1,\ldots,i_n=1}^{R}\langle f, e_{i_1}\otimes\cdots\otimes e_{i_n}\rangle e_{i_1}\otimes\cdots\otimes e_{i_n}.$$

Alors $f_R\in Dom\,\mathring{\delta}^n$ et:

$$\mathring{\delta}^n(f_R)=\sum_{i_1,\ldots,i_n=1}^{R}\langle f, e_{i_1}\otimes\cdots\otimes e_{i_n}\rangle X_{i_1}\cdots X_{i_n} \quad \text{où } X_i=\int_0^1 e_i(s).\mathrm{d}w(s)$$

De plus, si $f\in Dom\,\mathring{\delta}^n$, on a:

$$\mathring{\delta}^n(f)=L^2-\lim_{R\to\infty}\mathring{\delta}^n(f_R).$$

Enfin, précisons la notation suivante qui sera utilisée tout au long de cet article. Pour $f \in \underline{H}^{\odot n}$ et $x \in \underline{H}^{\otimes k}$ avec $k \leqslant n$, on pose:

$$\langle f, x\rangle = \int_{T^k} f(t_1,\ldots,t_k,.)x(t_1,\ldots,t_k)\,\mathrm{d}m(t_1)\ldots\mathrm{d}m(t_k)$$

1.2. La notion de limite approximative

On reprend les définitions introduites dans [7]. Nous allons travailler avec la notion de semi-normes mesurables introduite par Gross [4,5], voir aussi Kuo [11].
On munit H de la norme $\| \ \|$ associée au produit scalaire :

$$\langle h, g\rangle = \langle \dot{h}, \dot{g}\rangle_{\underline{H}} \quad \text{pour } h, g \text{ dans } H.$$

Soit $Q : H \to H$ une projection orthogonale telle que *dim* $QH < \infty$. Q s'écrit :

$$Qh = \sum_{i=1}^{n} \langle h_i, h\rangle h_i$$

où $(h_1,\ldots,h_n)$ est une base orthonormée de QH.

On peut ainsi définir :

$$Qw = \sum_{i=1}^{n}\left(\int_0^1 \dot{h}_i(s).\mathrm{d}w_s\right)h_i \quad \text{pour } w \in W$$

(Qw est indépendant du choix de $(h_1,\ldots,h_n)$).

Une suite croissante de projections orthogonales Q_n est appelée une suite approximante de projections si :

$$\textit{dim}\, Q_n H < \infty \quad \text{et} \quad Q_n h \text{ tend vers } h \text{ dans } H \text{ pour tout } h \text{ dans } H.$$

DEFINITION 4. – *Une semi-norme N sur H est dite mesurable si il existe une variable aléatoire $\widetilde{N}(w) < +\infty$ p.s. telle que pour toute suite approximante de projections Q_n, la suite $N(Q_n(w))$ converge en probabilité vers $\widetilde{N}(w)$. Si de plus N est une norme sur H, on dit que N est une norme mesurable.*

La norme sup sur W notée

$$|\, w\,|_\infty = \sup_{s\in[0,1]}\left(\sum_{i=1}^{d}\left(w_s^i\right)^2\right)^{1/2}$$

est une norme mesurable, ainsi que les normes höldériennes d'indice strictement plus petit que $1/2$ ([4, paragraphe 5]).

Soit N une semi-norme mesurable sur H. D'après le théorème 1 de [4], pout tout $\eta > 0$, $P(\widetilde{N} < \eta) > 0$; on peut donc introduire la définition suivante :

DEFINITION 5. – *Soit N une semi-norme mesurable. Pour $F \in L^1(W)$, $A \in \mathcal{F}_1$, $h \in H$ et $\eta > 0$ on pose*:

$$E^N_{\eta,h}(F) = E\Big(F\frac{1_{\widetilde{N}(w-h)<\eta}}{P(\widetilde{N}(w-h)<\eta)}\Big) \quad et \quad P^N_{\eta,h}(A) = \frac{P(A, \widetilde{N}(w-h)<\eta)}{P(\widetilde{N}(w-h)<\eta)}.$$

Si $h = 0$, on omettra l'indice h.

DEFINITION 6. – *Soient $F \in L^1(W)$, N une semi-norme mesurable, $h \in H$ et $p \in [1, +\infty[$.*

On dit que F admet une L^0_N, respectivement L^p_N, limite approximative en h si il existe un réel l tel que:

$$\forall \varepsilon > 0, \quad \lim_{\eta\to 0} P^N_{\eta,h}\big(|F-l| > \varepsilon\big) = 0$$

respectivement:

$$\lim_{\eta\to 0} E^N_{\eta,h}\big(|F-l|^p\big) = 0$$

l est noté $F(h)$.

On voit facilement que si F admet une L^p_N-limite approximative alors F admet une L^r_N-limite approximative pour $r < p$.

Cette question a déjà été abordée par de nombreux auteurs (voir [7] pour une liste de références). Dans cet article, nous allons montrer que dans certains cas, $\delta^n(f)$ admet une limite approximative par rapport à toute norme mesurable N et que $\delta^n(f)(h)$ ne dépend pas du choix de N. Rappelons les résultats suivants ([18,20], voir aussi [7]) :

THEOREM 1. – *Soit N une norme mesurable sur H, alors*:

$$\forall h \in \underline{H}, \quad \lim_{\eta\to 0} E^N_\eta\big(\exp(\delta(h))\big) = 1.$$

On en déduit:

$$\forall p > 0,\ \forall h \in \underline{H}, \quad \lim_{\eta\to 0} E^N_\eta\big(|\delta(h)|^p\big) = 0.$$

THEOREM 2. – *Soit N une semi-norme mesurable sur H et h un élément de $\underline{H}$, alors*:

$$\forall \varepsilon > 0,\ \forall \eta > 0, \quad P\big(\widetilde{N} \leqslant \varepsilon, |\delta(h)| \leqslant \eta\big) \geqslant P(\widetilde{N} \leqslant \varepsilon)P\big(|\delta(h)| \leqslant \eta\big).$$

2. Construction de *Dom* $\mathring{\delta}^n$ sans la notion de trace

Nous allons établir une caractérisation de l'appartenance d'un élément de $\underline{H}^{\odot n}$ à *Dom* $\mathring{\delta}^n$. Pour cela nous avons besoin de deux lemmes. Dans la suite, nous désignerons par $S(f)$ le symétrisé de f si $f \in \underline{H}^{\otimes n}$.

LEMMA 1. – *Soient $f \in \underline{H}^{\odot n}$ et $g \in \underline{H}^{\odot p}$ avec $n \geqslant 1$ et $p \geqslant 1$. Si Tf et Tg existent, alors $S(f \otimes g)$ possède une trace et*:

$$T\bigl(S(f\otimes g)\bigr)=\frac{1}{(n+p)(n+p-1)}\bigl[n(n-1)S(Tf\otimes g)+p(p-1)S(f\otimes Tg)\bigr] + \frac{2np}{(n+p)(n+p-1)}S\Bigl(\int_T f(.,t)\otimes g(.,t)\,\mathrm{d}m(t)\Bigr)$$

(*si* $n=1$ *on pose* $Tf=0$).

Proof. – Soit (e_q) une base de $\underline{H}$. On note (E_I) une base de $\underline{H}^{\odot n+p-2}$. On doit étudier la limite lorsque R tend vers l'infini de:

$$\sum_{q=1}^{R}\bigl\langle S(f\otimes g), e_q\otimes e_q\bigr\rangle.$$

Or $\langle S(f\otimes g), e_q\otimes e_q\otimes E_I\rangle=\langle f\otimes g, S(e_q\otimes e_q\otimes E_I)\rangle$ et :

$$S(e_q\otimes e_q\otimes E_I)(t_1,\dots,t_{n+p})=\frac{2}{(n+p)(n+p-1)}\sum_{1\leqslant i<j\leqslant n+p}e_q(t_i)e_q(t_j) \times E_I(t_1,\dots,t_{i-1},t_{i+1},\dots,t_{j-1},t_{j+1},\dots,t_{n+p}).$$

D'où :

$$\bigl\langle S(f\otimes g), e_q\otimes e_q\otimes E_I\bigr\rangle=\frac{2}{(n+p)(n+p-1)}\Bigl(\sum_{1\leqslant i<j\leqslant n}\bigl\langle\langle f, e_q\otimes e_q\rangle\otimes g, E_I\bigr\rangle + \sum_{1\leqslant i\leqslant n}\ \sum_{n+1\leqslant j\leqslant n+p}\bigl\langle\langle f, e_q\rangle\otimes\langle g, e_q\rangle, E_I\bigr\rangle + \sum_{n+1\leqslant i<j\leqslant n+p}\bigl\langle f\otimes\langle g, e_q\otimes e_q\rangle, E_I\bigr\rangle\Bigr)$$

$$\Rightarrow \bigl\langle S(f\otimes g), e_q\otimes e_q\otimes E_I\bigr\rangle=\frac{2}{(n+p)(n+p-1)}\Bigl(\frac{n(n-1)}{2}\bigl\langle\langle f, e_q\otimes e_q\rangle\otimes g, E_I\bigr\rangle + np\bigl\langle\langle f, e_q\rangle\otimes\langle g, e_q\rangle, E_I\bigr\rangle + \frac{p(p-1)}{2}\bigl\langle f\otimes\langle g, e_q\otimes e_q\rangle, E_I\bigr\rangle\Bigr)$$

$$\Rightarrow \bigl\langle S(f\otimes g), e_q\otimes e_q\bigr\rangle=\frac{1}{(n+p)(n+p-1)}\bigl[n(n-1)S(\langle f, e_q\otimes e_q\rangle\otimes g) + p(p-1)S(f\otimes\langle g, e_q\otimes e_q\rangle)\bigr] + \frac{2np}{(n+p)(n+p-1)}S(\langle f, e_q\rangle\otimes\langle g, e_q\rangle).$$

On remarque ensuite :

$$\sum_{q=1}^{R}\langle f, e_q\otimes e_q\rangle \underset{R\to\infty}{\longrightarrow} Tf \quad \text{et} \quad \sum_{q=1}^{R}\langle g, e_q\otimes e_q\rangle \underset{R\to\infty}{\longrightarrow} Tg \quad \text{dans } L^2.$$

Pour étudier $\sum_{q=1}^{R}\langle f, e_q\rangle\otimes\langle g, e_q\rangle$, on constate :

- $\sum_{q=1}^{R} e_q \otimes \langle g, e_q\rangle \underset{R\to\infty}{\longrightarrow} g$ dans L^2.
- Pour presque tout $(u,v) \in T^{n-1} \times T^{p-1}$, $f(.,u)g(.,v) \in L^1(T)$ et :

$$\begin{aligned}
&\left\| \sum_{q=1}^{R} \langle f, e_q\rangle \otimes \langle g, e_q\rangle - \int_T f(.,t) \otimes g(.,t)\, \mathrm{d}m(t) \right\|^2 \\
&\quad = \left\| \int_T f(.,t) \otimes \left(\sum_{q=1}^{R} e_q(t) \langle g, e_q\rangle \right) \mathrm{d}m(t) - \int_T f(.,t) \otimes g(t,.)\, \mathrm{d}m(t) \right\|^2 \\
&\quad = \int_{T^{n+p-2}} \left[\int_T f(u,t) \left(\sum_{q=1}^{R} e_q(t) \langle g, e_q\rangle(v) - g(t,v) \right) \mathrm{d}m(t) \right]^2 \mathrm{d}m^{\otimes n-1}(u) \\
&\qquad \otimes \mathrm{d}m^{\otimes p-1}(v) \\
&\quad \leqslant \|f\|^2 \left\| \sum_{q=1}^{R} e_q \otimes \langle g, e_q\rangle - g \right\|^2.
\end{aligned}$$

Ce qui termine la démonstration du lemme. □

LEMMA 2. – *Soit $f \in \underline{H}^{\odot n}$, on suppose que f admet une trace. Notons $f_R = \sum_{q=1}^{R} \langle f, e_q\rangle \otimes e_q$ où (e_q) est une base de $\underline{H}$, alors $S(f_R)$ admet une trace et $T(S(f_R))$ tend vers Tf dans $\underline{H}^{\odot n-2}$.*

Proof. – On applique le lemme précédent, il est en effet facile de montrer que $\langle f, e_q\rangle$ admet une trace et qu'elle vaut $\langle Tf, e_q\rangle$. D'où :

$$\begin{aligned}
T\big(S(f_R)\big) &= \sum_{q=1}^{R} \left[\frac{n-1}{n+1} S(\langle Tf, e_q\rangle \otimes e_q) + \frac{2}{n+1} S\big(\langle\langle f, e_q\rangle, e_q\rangle\big) \right] \\
&= \frac{n-1}{n+1} S\left(\sum_{q=1}^{R} \langle Tf, e_q\rangle \otimes e_q \right) + \frac{2}{n+1} S\left(\sum_{q=1}^{R} \langle f, e_q \otimes e_q\rangle \right) \\
\Rightarrow \lim_{R\to\infty} T\big(S(f_R)\big) &= \frac{n-1}{n+1} S(Tf) + \frac{2}{n+1} S(Tf) = Tf. \qquad \square
\end{aligned}$$

THEOREM 3. – *Soit $f \in \underline{H}^{\odot n}$ ($n \geqslant 2$), on a:*

$$f \in \mathit{Dom}\, \mathring{\delta}^n \Leftrightarrow \begin{cases} \forall h \in \underline{H},\ \langle f, h\rangle \in \mathit{Dom}\, \mathring{\delta}^{n-1}, \\ \textit{Pour toute base } (e_q) \textit{ de } \underline{H},\ \sum_{q=1}^{R} \mathring{\delta}^{n-1}\big(\langle f, e_q\rangle\big)\delta(e_q) \textit{ converge dans } L^2. \end{cases}$$

On a alors $\mathring{\delta}^n(f) = \lim_{R\to\infty} \sum_{q=1}^{R} \mathring{\delta}^{n-1}(\langle f, e_q\rangle)\delta(e_q)$.

Proof. – Commençons par le sens $\Rightarrow$.

- Soit h un élément de $\underline{H}$. On montre facilement que $T(\langle f, h\rangle)$ existe et vaut $\langle Tf, h\rangle$. On montre de même que $T^k(\langle f, h\rangle)$ existe et vaut $\langle T^k f, h\rangle$. Donc $\langle f, h\rangle \in \mathit{Dom}\, \mathring{\delta}^{n-1}$.

- Considérons maintenant (e_q) une base de $\underline{H}$, on a:

$$\mathring{\delta}^{n-1}(\langle f, e_q\rangle)\delta(e_q) = \sum_{k=0}^{[\frac{n-1}{2}]}\left(\frac{1}{2}\right)^k \frac{(n-1)!}{k!(n-1-2k)!}\delta^{n-1-2k}\big(T^k(\langle f, e_q\rangle)\big)\delta(e_q).$$

Or $T^k(\langle f, e_q\rangle) = \langle T^k f, e_q\rangle$. D'autre part, d'après une formule due à Itô ([9, théorème 2.2]) :

$$\begin{aligned}&\delta^{n-1-2k}\big(\langle T^k f, e_q\rangle\big)\delta(e_q)\\ &\quad = \delta^{n-2k}\big(\langle T^k f, e_q\rangle \otimes e_q\big) + (n-1-2k)\delta^{n-2-2k}\big(\langle T^k f, e_q \otimes e_q\rangle\big)\end{aligned}$$

si $n-1-2k \geqslant 1$.

D'où deux formules ; si $n = 2p$:

$$\begin{aligned}\sum_{q=1}^{R}\mathring{\delta}^{n-1}(\langle f, e_q\rangle)\delta(e_q) &= \sum_{k=0}^{p}\left(\frac{1}{2}\right)^k \frac{(n-1)!}{k!(n-1-2k)!}\delta^{n-2k}\left(\sum_{q=1}^{R}\langle T^k f, e_q\rangle \otimes e_q\right)\\ &\quad + \sum_{k=0}^{p}\left(\frac{1}{2}\right)^k \frac{(n-1)!}{k!(n-2-2k)!}\delta^{n-2-2k}\left(\sum_{q=1}^{R}\langle T^k f, e_q \otimes e_q\rangle\right). \quad (1)\end{aligned}$$

Et si $n = 2p+1$:

$$\begin{aligned}\sum_{q=1}^{R}\mathring{\delta}^{n-1}(\langle f, e_q\rangle)\delta(e_q) &= \sum_{k=0}^{p-1}\left(\frac{1}{2}\right)^k \frac{(n-1)!}{k!(n-1-2k)!}\delta^{n-2k}\left(\sum_{q=1}^{R}\langle T^k f, e_q\rangle \otimes e_q\right)\\ &\quad + \sum_{k=0}^{p-1}\left(\frac{1}{2}\right)^k \frac{(n-1)!}{k!(n-2-2k)!}\delta^{n-2-2k}\left(\sum_{q=1}^{R}\langle T^k f, e_q \otimes e_q\rangle\right)\\ &\quad + \left(\frac{1}{2}\right)^p \frac{(2p)!}{p!}\delta\left(\sum_{q=1}^{R}\langle T^p f, e_q\rangle e_q\right). \quad (2)\end{aligned}$$

On en déduit le résultat à l'aide de la formule de Hu–Meyer en constatant que :

$$L^2 - \lim_{R\to\infty}\sum_{q=1}^{R}\langle T^k f, e_q\rangle \otimes e_q = T^k f \quad \text{et} \quad L^2 - \lim_{R\to\infty}\sum_{q=1}^{R}\langle T^k f, e_q \otimes e_q\rangle = T^{k+1} f.$$

On obtient donc :

$$\mathring{\delta}^n(f) = L^2 - \lim_{R\to\infty}\sum_{q=1}^{R}\mathring{\delta}^{n-1}(\langle f, e_q\rangle)\delta(e_q).$$

Démontrons la réciproque. On peut écrire les formules suivantes (similaires à (1) et (2)).

Si $n = 2p$:

$$\sum_{q=1}^{R}\mathring{\delta}^{n-1}(\langle f, e_q\rangle)\delta(e_q) = \sum_{k=0}^{p}\left(\frac{1}{2}\right)^k \frac{(n-1)!}{k!(n-1-2k)!}\delta^{n-2k}\left(\sum_{q=1}^{R}T^k(\langle f, e_q\rangle) \otimes e_q\right)$$

$$+\sum_{k=0}^{p}\left(\frac{1}{2}\right)^k\frac{(n-1)!}{k!(n-2-2k)!}\delta^{n-2-2k}\left(\sum_{q=1}^{R}\left\langle T^k\big(\langle f,e_q\rangle\big),e_q\right\rangle\right).$$

Et si $n=2p+1$:

$$\begin{aligned}\sum_{q=1}^{R}\mathring{\delta}^{n-1}\big(\langle f,e_q\rangle\big)\delta(e_q)&=\sum_{k=0}^{p-1}\left(\frac{1}{2}\right)^k\frac{(n-1)!}{k!(n-1-2k)!}\delta^{n-2k}\left(\sum_{q=1}^{R}T^k\big(\langle f,e_q\rangle\big)\otimes e_q\right)\\&\quad+\sum_{k=0}^{p-1}\left(\frac{1}{2}\right)^k\frac{(n-1)!}{k!(n-2-2k)!}\delta^{n-2-2k}\left(\sum_{q=1}^{R}\left\langle T^k\big(\langle f,e_q\rangle\big),e_q\right\rangle\right)\\&\quad+\left(\frac{1}{2}\right)^p\frac{(2p)!}{p!}\delta\left(\sum_{q=1}^{R}T^p\big(\langle f,e_q\rangle\big)e_q\right).\end{aligned}$$

La difficulté provient du fait qu'on ne sait pas si T^kf existe et on ne peut donc pas remplacer $T^k(\langle f,e_q\rangle)$ par $\langle T^kf,e_q\rangle$. Prenons par exemple le cas $n=2p$ et projetons la quantité obtenue sur le $(n-2)$ième chaos, on en déduit :

$$\frac{1}{2}(2p-1)(2p-2)\delta^{2p-2}\left(\sum_{q=1}^{R}T\big(\langle f,e_q\rangle\big)\otimes e_q\right)+(2p-1)\delta^{2p-2}\left(\sum_{q=1}^{R}\big\langle\langle f,e_q\rangle,e_q\big\rangle\right)$$

converge dans L^2 lorsque R tend vers l'infini. Et donc :

$$\Phi_R=(2p-1)(p-1)\sum_{q=1}^{R}S\big(T(\langle f,e_q\rangle)\otimes e_q\big)+(2p-1)\sum_{q=1}^{R}\langle f,e_q\otimes e_q\rangle$$

a une limite dans $\underline{H}^{\odot n-2}$, notons la l.

Pour montrer que Tf existe, nous devons montrer que le deuxième terme de Φ_R possède une limite quand R tend vers l'infini.

Travaillons sur $S(T(\langle f,e_q\rangle)\otimes e_q)$ (si $n=2$, c'est-à-dire si $p=1$, ce terme n'apparaît pas) :

$$\begin{aligned}&S\big(T(\langle f,e_q\rangle)\otimes e_q\big)(s_1,\dots,s_{n-2})\\&\quad=\frac{1}{n-2}\sum_{j=1}^{n-2}T\big(\langle f,e_q\rangle\big)(s_1,\dots,s_{j-1},s_{j+1},\dots,s_{n-2})e_q(s_j)\\&\Rightarrow\left\langle S\big(T(\langle f,e_q\rangle)\otimes e_q\big),e_i\right\rangle\\&\quad=\int_T S\big(T(\langle f,e_q\rangle)\otimes e_q\big)(.,s_{n-2})\,e_i(s_{n-2})\,\mathrm{d}m(s_{n-2})\\&\quad=\frac{n-3}{n-2}S\big(\langle T(\langle f,e_q\rangle),e_i\rangle\otimes e_q\big)+\frac{1}{n-2}T(\langle f,e_q\rangle)\delta_{q,i}.\end{aligned}$$

$\langle f,e_q\rangle\in Dom\,\mathring{\delta}^{n-1}$ donc $\langle\langle f,e_q\rangle,e_i\rangle\in Dom\,\mathring{\delta}^{n-2}$ et :

$$\left\langle T(\langle f,e_q\rangle),e_i\right\rangle=T\big(\langle\langle f,e_q\rangle,e_i\rangle\big)=T(\langle f,e_q\otimes e_i\rangle).$$

En utilisant le lemme 1, on obtient :

$$T\big(S(\langle f, e_q \otimes e_i\rangle \otimes e_q)\big) = \frac{n-3}{n-1} S\big(T(\langle f, e_q \otimes e_i\rangle) \otimes e_q\big) + \frac{2}{n-1}\langle f, e_q \otimes e_q \otimes e_i\rangle.$$

D'où :

$$\begin{aligned} &S\big(\langle T(\langle f, e_q\rangle), e_i\rangle \otimes e_q\big) \\ &\quad = \frac{n-1}{n-3} T\big(S(\langle f, e_q \otimes e_i\rangle \otimes e_q)\big) - \frac{2}{n-3}\langle f, e_q \otimes e_q \otimes e_i\rangle \\ &\Rightarrow \sum_{q=1}^{R} S\big(\langle T(\langle f, e_q\rangle), e_i\rangle \otimes e_q\big) \\ &\quad = \frac{n-1}{n-3} T\left(S\left(\sum_{q=1}^{R} \big\langle \langle f, e_i\rangle, e_q\big\rangle \otimes e_q\right)\right) - \frac{2}{n-3}\sum_{q=1}^{R}\big\langle \langle f, e_i\rangle, e_q \otimes e_q\big\rangle. \end{aligned}$$

D'après le lemme 2, $T(S(\sum_{q=1}^{R}\langle\langle f, e_i\rangle, e_q\rangle \otimes e_q))$ tend vers $T(\langle f, e_i\rangle)$ lorsque R tend vers l'infini. On en déduit :

$$\lim_{R\to\infty}\sum_{q=1}^{R} S\big(\langle T(\langle f, e_q\rangle), e_i\rangle \otimes e_q\big) = \frac{n-1}{n-3} T(\langle f, e_i\rangle) - \frac{2}{n-3} T(\langle f, e_i\rangle) = T(\langle f, e_i\rangle).$$

Puis on obtient :

$$\lim_{R\to\infty}\sum_{q=1}^{R}\big\langle S\big(T(\langle f, e_q\rangle) \otimes e_q\big), e_i\big\rangle = T(\langle f, e_i\rangle).$$

Le calcul de $\langle \Phi_R, e_i\rangle$ donne :

$$\begin{aligned} \langle \Phi_R, e_i\rangle = (2p-1)(p-1)\sum_{q=1}^{R}\big\langle S\big(T(\langle f, e_q\rangle) \otimes e_q\big), e_i\big\rangle \\ + (2p-1)\sum_{q=1}^{R}\big\langle \langle f, e_i\rangle, e_q \otimes e_q\big\rangle. \end{aligned}$$

D'où :

$$\begin{aligned} \lim_{R\to\infty}\langle \Phi_R, e_i\rangle &= (2p-1)(p-1)T(\langle f, e_i\rangle) + (2p-1)T(\langle f, e_i\rangle) \\ &= p(2p-1)\,T(\langle f, e_i\rangle). \end{aligned}$$

Or $\langle \Phi_R, e_i\rangle$ tend aussi vers $\langle l, e_i\rangle$ et $l = \sum_{i=1}^{\infty}\langle l, e_i\rangle \otimes e_i$. On en déduit que $\sum_{i=1}^{\infty} T(\langle f, e_i\rangle) \otimes e_i$ converge. En reprenant l'expression de Φ_R, on obtient que $\sum_{q=1}^{R}\langle f, e_q \otimes e_q\rangle$ converge pour toute base (e_q) et donc f admet une trace.

Avec les projections sur les différents chaos, on montre que f admet des traces de tout ordre, ainsi $f \in Dom\,\mathring{\delta}^n$. Ce qui termine la démonstration. □

Ce théorème permet de donner une nouvelle définition de $\mathring{\delta}^n(f)$ équivalente à la définition 3 :

DEFINITION 7. – 1. *Pour* $f \in \underline{H}$, *on pose* $\mathring{\delta}(f) = \delta(f)$ *et* $Dom\,\mathring{\delta} = \underline{H}$.

2. *Pour* $n \geqslant 2$, *on dit qu'un élément* f *de* $\underline{H}^{\odot n}$ *est dans* $Dom\,\mathring{\delta}^n$ *si et seulement si*:

$$\begin{cases} \forall h \in \underline{H},\ \langle f, h\rangle \in Dom\,\mathring{\delta}^{n-1}, \\ \textit{Pour toute base } (e_q) \textit{ de } \underline{H},\ \sum_{q=1}^{R} \mathring{\delta}^{n-1}\big(\langle f, e_q\rangle\big)\delta(e_q) \textit{ converge dans } L^2. \end{cases}$$

Dans ce cas, la limite ne dépend pas du choix de (e_q) *et on la note* $\mathring{\delta}^n(f)$.

3. Existence et valeur de la limite pour certains éléments des chaos

Dans toute la suite, on fixe une fois pour toute une norme mesurable N sur H.

Le résultat suivant est démontré dans [7] :

THEOREM 4. – *Soit* $f \in \underline{H} \odot \underline{H}$ *telle que* $f \in Dom\,\mathring{\delta}^2$, *alors, pour tout* p, $\delta^2(f)$ *admet une* L^p_N*-limite approximative en tout point* h *de* H *et on a*:

$$\delta^2(f)(h) = -Tf + \langle f, \dot{h} \otimes \dot{h}\rangle.$$

Commençons par rappeler des notations connues (voir par exemple [1]) .

Soit $\mathcal{H}$ un espace de Hilbert réel séparable. Si $K : \mathcal{H} \to \mathcal{H}$ est un opérateur de Hilbert–Schmidt symétrique, on note $|K|_\tau$ sa norme nucléaire, c'est-à-dire:

$$|K|_\tau = \sum_{k=1}^{\infty} |\lambda_k| \quad \text{où les réels } \lambda_k \text{ sont les valeurs propres de } K.$$

On pose $Tr\,K = \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k$ si $|K|_\tau < \infty$ (c'est-à-dire si K est nucléaire).

À un élément f de $\mathcal{H}^{\odot 2}$, on associe $K(f) : \mathcal{H} \to \mathcal{H}$ défini par $\langle K(f)h_1, h_2\rangle = \langle f, h_1 \otimes h_2\rangle$. Lorsqu'il n'y aura pas d'ambiguité, $K(f)$ sera noté K. On pose $|f|_\tau = |K|_\tau$.

On a :

$$|f|_\tau = \sup_{(u_k)\ \text{base de}\ \mathcal{H}} \left(\sum_{k=1}^{\infty} \big|\langle f, u_k \otimes u_k\rangle\big| \right).$$

On utilisera par exemple cette définition pour des éléments f de $\underline{H}^{\odot 2n}$. On peut écrire dans ce cas : $f \in \mathcal{H}^{\odot 2}$ avec $\mathcal{H} = \underline{H}^{\odot n}$ (ou $\mathcal{H} = \underline{H}^{\otimes n}$).

3.1. Les hypothèses

Si $f \in Dom\,\mathring{\delta}^n$, d'après la proposition 2.1 de [17], on peut affirmer que $K(\langle f, h\rangle)$ est nucléaire pour tout h dans $\underline{H}^{\otimes n-2}$ et donc $|\langle f, h\rangle|_\tau < \infty$.

Les hypothèses que nous allons faire sur un élément f de $\underline{H}^{\odot n}$ pour $n \geqslant 2$ seront les suivantes :

$$\exists B = (e_k) \text{ base de } \underline{H}, \qquad \sum_{i_1,\dots,i_{n-2}=1}^{\infty} \big|\langle f, e_{i_1} \otimes \cdots \otimes e_{i_{n-2}}\rangle\big|_\tau < \infty, \tag{3}$$

$$\exists B=(e_k) \text{ base de } \underline{H}, \qquad \sum_{i_1,\ldots,i_n=1}^{\infty} \left|\langle f, e_{i_1}\otimes\cdots\otimes e_{i_n}\rangle\right| < \infty. \tag{4}$$

Remark 2. – L'hypothèse (4) est la plus facile à vérifier; cependant, l'hypothèse (3) va se révéler être la plus générale.

Nous allons établir les liens entre ces hypothèses et l'existence de $\mathring{\delta}^n f$.

PROPOSITION 2. – *Si $n=2$ alors* (3) $\Leftrightarrow$ (4) $\Leftrightarrow$ $f\in Dom\,\mathring{\delta}^2$.
Et dans ce cas $|f|_\tau = \inf\{\sum_{i,j=1}^{\infty} |\langle f, u_i\otimes u_j\rangle|,\ (u_i)$ *base de* $\underline{H}\}$.

Proof. – Pour $n=2$, l'hypothèse (3) s'écrit par convention $|f|_\tau<\infty$, ce qui est équivalent à $f\in Dom\,\mathring{\delta}^2$.
Pour l'hypothèse (4), l'équivalence à démontrer est :

$$K(f) \text{ est nucléaire} \Leftrightarrow \exists B=(e_k) \text{ base de } \underline{H}, \qquad \sum_{i,j=1}^{\infty}\left|\langle f, e_i\otimes e_j\rangle\right|<\infty.$$

Cette équivalence est certainement connue mais l'auteur n'a pas trouvé de références.
Si $K(f)$ est nucléaire, alors f s'écrit : $f=\sum_{i=1}^{\infty}\lambda_i e_i\otimes e_i$ avec $\sum_{i=1}^{\infty}|\lambda_i|<\infty$, (e_i) étant une base de $\underline{H}$ diagonalisant K; le sens $\Rightarrow$ en découle.
Pour la réciproque, considérons $B'=(u_k)$ une base quelconque de $\underline{H}$. En écrivant $f=\sum_{i,j=1}^{\infty}\langle f, e_i\otimes e_j\rangle e_i\otimes e_j$, on obtient :

$$\sum_{k=1}^{\infty}\left|\langle f, u_k\otimes u_k\rangle\right| \leqslant \sum_{i,j=1}^{\infty}\left|\langle f, e_i\otimes e_j\rangle\right|.$$

Donc $K(f)$ est nucléaire.
Maintenant, si $K(f)$ est nucléaire, considérons (v_k) une base de $\underline{H}$ diagonalisant K. Avec un calcul similaire à celui donnant l'inégalité précédente, on montre :

$$\sum_{i=1}^{\infty}\left|\langle f, v_i\otimes v_i\rangle\right| \leqslant \sum_{i,j=1}^{\infty}\left|\langle f, u_i\otimes u_j\rangle\right| \quad \text{pour toute base } (u_i) \text{ de } \underline{H}.$$

et donc :

$$\begin{aligned}|f|_\tau &= \sum_{i=1}^{\infty}\left|\langle f, v_i\otimes v_i\rangle\right| = \sum_{i,j=1}^{\infty}\left|\langle f, v_i\otimes v_j\rangle\right| \\ &= \inf\left\{\sum_{i,j=1}^{\infty}\left|\langle f, u_i\otimes u_j\rangle\right|,\ (u_i) \text{ base de } \underline{H}\right\}. \qquad \square\end{aligned}$$

Pour $n\geqslant 3$, on a le résultat suivant :

PROPOSITION 3. – *Pour $n\geqslant 3$,* (3) $\Rightarrow$ $f\in Dom\,\mathring{\delta}^n$.

Proof. – D'après la proposition 2.1 de [17], pour montrer que Tf existe, il suffit de montrer que $\forall h\in\underline{H}^{\otimes n-2}$, $|\langle f,h\rangle|_\tau<\infty$. On obtient, en utilisant la continuité de l'application $h \mapsto \langle f, h\rangle$:

$$\langle f, h\rangle = \sum_{i_1,\dots,i_{n-2}=1}^{\infty} \langle h, e_{i_1} \otimes \cdots \otimes e_{i_{n-2}}\rangle \langle f, e_{i_1} \otimes \cdots \otimes e_{i_{n-2}}\rangle.$$

Soit $B' = (u_k)$ une base de $\underline{H}$:

$$\sum_{k=1}^{R} \big\langle \langle f, h\rangle, u_k \otimes u_k \big\rangle = \sum_{i_1,\dots,i_{n-2}=1}^{\infty} \langle h, e_{i_1} \otimes \cdots \otimes e_{i_{n-2}}\rangle \sum_{k=1}^{R} \langle f, e_{i_1} \otimes \cdots \otimes e_{i_{n-2}} \otimes u_k \otimes u_k\rangle$$

Or

$$\lim_{R\to\infty} \sum_{k=1}^{R} \langle f, e_{i_1} \otimes \cdots \otimes e_{i_{n-2}} \otimes u_k \otimes u_k\rangle = T\big(\langle f, e_{i_1} \otimes \cdots \otimes e_{i_{n-2}}\rangle\big).$$

De plus :

$$\begin{aligned}
&\sum_{i_1,\dots,i_{n-2}=1}^{\infty} \big|\langle h, e_{i_1} \otimes \cdots \otimes e_{i_{n-2}}\rangle\big| \sum_{k=1}^{\infty} \big|\langle f, e_{i_1} \otimes \cdots \otimes e_{i_{n-2}} \otimes u_k \otimes u_k\rangle\big| \\
&\quad \leqslant \|h\| \sum_{i_1,\dots,i_{n-2}=1}^{\infty} \big|\langle f, e_{i_1} \otimes \cdots \otimes e_{i_{n-2}}\rangle\big|_{\tau}
\end{aligned}$$

(on rappelle que

$$|g|_\tau = \sup_{(u_k)\ \text{base de}\ \underline{H}} \left(\sum_{k=1}^{\infty} \big|\langle g, u_k \otimes u_k\rangle\big| \right)$$

si $g \in \underline{H} \odot \underline{H}$).

On obtient donc, pour toute base $B' = (u_k)$ de $\underline{H}$:

$$\lim_{R\to\infty} \sum_{k=1}^{R} \big\langle \langle f, h\rangle, u_k \otimes u_k \big\rangle = \sum_{i_1,\dots,i_{n-2}=1}^{\infty} \langle h, e_{i_1} \otimes \cdots \otimes e_{i_{n-2}}\rangle T\big(\langle f, e_{i_1} \otimes \cdots \otimes e_{i_{n-2}}\rangle\big).$$

$K(\langle f, h\rangle)$ est donc nucléaire et :

$$\begin{aligned}
T\big(\langle f, h\rangle\big) &= \sum_{i_1,\dots,i_{n-2}=1}^{\infty} \langle h, e_{i_1} \otimes \cdots \otimes e_{i_{n-2}}\rangle T\big(\langle f, e_{i_1} \otimes \cdots \otimes e_{i_{n-2}}\rangle\big) \\
&= \langle Tf, h\rangle \quad \text{([17, corollaire 2.2]).}
\end{aligned}$$

Tf est un élément de $\underline{H}^{\odot n-2}$, montrons que Tf vérifie l'hypothèse (3).

Soit $B' = (u_k)$ une base de $\underline{H}$:

$$\begin{aligned}
&\sum_{k=1}^{R} \big|\big\langle \langle Tf, e_{i_1} \otimes \cdots \otimes e_{i_{n-4}}\rangle, u_k \otimes u_k \big\rangle\big| \\
&\quad = \sum_{k=1}^{R} \big|\langle Tf, e_{i_1} \otimes \cdots \otimes e_{i_{n-4}} \otimes u_k \otimes u_k\rangle\big|
\end{aligned}$$

$$\leqslant \sum_{k=1}^{R} \sum_{i_{n-3},i_{n-2}=1}^{\infty} \left|\langle u_k, e_{i_{n-3}}\rangle\right|\left|\langle u_k, e_{i_{n-2}}\rangle\right|\left|T\left(\langle f, e_{i_1}\otimes\cdots\otimes e_{i_{n-2}}\rangle\right)\right|$$
$$\leqslant \sum_{i_{n-3},i_{n-2}=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{R} \left|\langle u_k, e_{i_{n-3}}\rangle\right|\left|\langle u_k, e_{i_{n-2}}\rangle\right|\left|\langle f, e_{i_1}\otimes\cdots\otimes e_{i_{n-2}}\rangle\right|_\tau$$
$$\leqslant \sum_{i_{n-3},i_{n-2}=1}^{\infty} \left|\langle f, e_{i_1}\otimes\cdots\otimes e_{i_{n-2}}\rangle\right|_\tau$$
$$\Rightarrow \left|\langle Tf, e_{i_1}\otimes\cdots\otimes e_{i_{n-4}}\rangle\right|_\tau \leqslant \sum_{i_{n-3},i_{n-2}=1}^{\infty} \left|\langle f, e_{i_1}\otimes\cdots\otimes e_{i_{n-2}}\rangle\right|_\tau$$
$$\Rightarrow \sum_{i_1,\ldots,i_{n-4}=1}^{\infty} \left|\langle Tf, e_{i_1}\otimes\cdots\otimes e_{i_{n-4}}\rangle\right|_\tau < \infty.$$

Tf vérifie donc l'hypothèse (3). Par itération, on montre ainsi que $T^k f$ existe pour tout k et donc $f \in Dom\,\mathring{\delta}^n$. □

Enfin, la relation entre l'hypothèse (3) et l'hypothèse (4) est donnée par :

PROPOSITION 4. – (4) $\Rightarrow$ (3).

Proof. – D'après la proposition 2,

$$\left|\langle f, e_{i_1}\otimes\cdots\otimes e_{i_{n-2}}\rangle\right|_\tau = \inf_{B'=(u_k)} \sum_{i,j=1}^{\infty} \left|\langle f, e_{i_1}\otimes\cdots\otimes e_{i_{n-2}}\otimes u_i\otimes u_j\rangle\right|$$
$$\leqslant \sum_{i_{n-1},i_n=1}^{\infty} \left|\langle f, e_{i_1}\otimes\cdots\otimes e_{i_n}\rangle\right|$$

et donc (4) $\Rightarrow$ (3). □

Nous allons voir que l'hypothèse (3) permet de montrer l'existence de limites approximatives. L'auteur n'a pas réussi à l'affaiblir et la question d'une éventuelle généralisation reste ouverte.

3.2. Résultat principal

THEOREM 5. – *Soit* $f \in \underline{H}^{\odot n}$ *vérifiant* (3) ($n \geqslant 2$) *alors*:

$$\forall p \geqslant 1, \quad \lim_{\eta\to 0} E_\eta^N\left(\left|\mathring{\delta}^n f\right|^p\right) = 0.$$

Proof. – Pour $n = 2$, il s'agit du théorème 4. Supposons $n > 2$.
D'après le théorème 3, $\langle f, e_k\rangle \in Dom\,\mathring{\delta}^{n-1}$ et :

$$\mathring{\delta}^n(f) = L^2 - \lim_{R\to\infty} \sum_{i_1=1}^{R} \mathring{\delta}^{n-1}\left(\langle f, e_{i_1}\rangle\right)\delta(e_{i_1}).$$

D'où, en utilisant le lemme de Fatou :

$$
\begin{aligned}
E_\eta^N\big(\big|\mathring{\delta}^n(f)\big|^p\big)^{1/p} &\leqslant \sum_{i_1=1}^{\infty} E_\eta^N\big(\big|\delta(e_{i_1})\big|^p\big|\mathring{\delta}^{n-1}\big(\langle f, e_{i_1}\rangle\big)\big|^p\big)^{1/p} \\
&\leqslant \sum_{i_1=1}^{\infty} E_\eta^N\big(\big|\delta(e_{i_1})\big|^{2p}\big)^{1/2p} E_\eta^N\big(\big|\mathring{\delta}^{n-1}\big(\langle f, e_{i_1}\rangle\big)\big|^{2p}\big)^{1/2p}.
\end{aligned}
$$

Puis, on écrit :

$$
\begin{aligned}
&E_\eta^N\big(\big|\mathring{\delta}^{n-1}\big(\langle f, e_{i_1}\rangle\big)\big|^{2p}\big)^{1/2p} \\
&\quad\leqslant \sum_{i_2=1}^{\infty} E_\eta^N\big(\big|\delta(e_{i_2})\big|^{4p}\big)^{1/4p} E_\eta^N\big(\big|\mathring{\delta}^{n-2}\big(\langle f, e_{i_1}\otimes e_{i_2}\rangle\big)\big|^{4p}\big)^{1/4p}.
\end{aligned}
$$

Et par itération, on obtient :

$$
\begin{aligned}
&E_\eta^N\big(\big|\mathring{\delta}^n(f)\big|^p\big)^{1/p} \\
&\quad\leqslant \sum_{i_1,\dots,i_{n-2}=1}^{\infty} a(p, i_1, \dots, i_{n-2}, \eta) E_\eta^N\big(\big|\mathring{\delta}^2\big(\langle f, e_{i_1}\otimes\cdots\otimes e_{i_{n-2}}\rangle\big)\big|^{2^{n-2}p}\big)^{1/2^{n-2}p}
\end{aligned}
$$

avec

$$
a(p, i_1, \dots, i_{n-2}, \eta) = \prod_{k=1}^{n-2} E_\eta^N\big(\big|\delta(e_{i_k})\big|^{2^k p}\big)^{1/2^k p}.
$$

Or, d'après le théorème 1, $E_\eta^N(|\delta(e_{i_k})|^{2^k p}) \longrightarrow_{\eta\to 0} 0$. De plus :

$$
\begin{aligned}
E_\eta^N\big(\big|\delta(e_{i_k})\big|^{2^k p}\big) &\leqslant E\big(\big|\delta(e_{i_k})\big|^{2^k p}\big) \quad \text{(théorème 2)} \\
&\leqslant E\big(\big|\delta(e_1)\big|^{2^k p}\big).
\end{aligned}
$$

Donc $a(p, i_1, \dots, i_{n-2}, \eta) \longrightarrow_{\eta\to 0} 0$ et $a(p, i_1, \dots, i_{n-2}, \eta) \leqslant c(p, n)$.

De plus, si $g \in \underline{H} \odot \underline{H}$ et si l'opérateur K associé à g est nucléaire, on peut écrire :

$$
\begin{aligned}
&\mathring{\delta}^2(g) = \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k \delta(u_k)^2 \quad \text{où } \sum |\lambda_k| < \infty \quad \text{et } (u_k) \text{ diagonalise } K \\
&\Rightarrow E_\eta^N\big(\big|\mathring{\delta}^2(g)\big|^q\big)^{1/q} \leqslant \sum_{k=1}^{\infty} |\lambda_k|\, E_\eta^N\big(\delta(u_k)^{2q}\big)^{1/q} \leqslant \sum_{k=1}^{\infty} |\lambda_k| E\big(\delta(u_k)^{2q}\big)^{1/q} \\
&\Rightarrow E_\eta^N\big(\big|\mathring{\delta}^2(g)\big|^q\big)^{1/q} \leqslant E\big(\delta(u_1)^{2q}\big)^{1/q} \sum_{k=1}^{\infty} |\lambda_k| \\
&\Rightarrow E_\eta^N\big(\big|\mathring{\delta}^2(g)\big|^q\big)^{1/q} \leqslant \widetilde{c}(q)|g|_\tau \quad \text{où } \widetilde{c}(q) \text{ ne dépend pas de } g \text{ ni de } \eta.
\end{aligned}
$$

On en déduit :

$$
E_\eta^N\big(\big|\mathring{\delta}^2\big(\langle f, e_{i_1}\otimes\cdots\otimes e_{i_{n-2}}\rangle\big)\big|^{2^{n-2}p}\big)^{1/2^{n-2}p} \leqslant \widetilde{c}(2^{n-2}p)\big|\langle f, e_{i_1}\otimes\cdots\otimes e_{i_{n-2}}\rangle\big|_\tau.
$$

On conclut en utilisant l'hypothèse (3). □

Remark 3. – Au cours de la démonstration, on a montré l'inégalité :

$$E_\eta^N\left(\left|\mathring{\delta}^n(f)\right|^p\right)^{1/p} \leqslant k(p,n) \sum_{i_1,\ldots,i_{n-2}=1}^{\infty} \left|\langle f, e_{i_1}\otimes\cdots\otimes e_{i_{n-2}}\rangle\right|_\tau.$$

3.3. Conséquences

COROLLARY 1. – *Soit f vérifiant l'hypothèse* (3)*, alors, pour tout $p\geqslant 1$, $\delta^n(f)$ admet une L_N^p-limite approximative en* 0 *et*:

$$\delta^n(f)(0) = \begin{cases} 0 & \textit{si n est impair,} \\ \left(-\dfrac{1}{2}\right)^{n/2} \dfrac{n!}{(n/2)!} T^{n/2}(f) & \textit{si n est pair.} \end{cases}$$

Proof. – $f\in Dom\,\mathring{\delta}^n \Rightarrow \forall k\leqslant [n/2],\ T^k f\in Dom\,\mathring{\delta}^{n-2k}$ et on a :

$$\delta^n(f) = \sum_{k=0}^{[n/2]} \left(-\frac{1}{2}\right)^k \frac{n!}{k!(n-2k)!} \mathring{\delta}^{n-2k}\left(T^k f\right).$$

Pour $1\leqslant k\leqslant [n/2]-1$, on montre que $T^k f$ vérifie l'hypothèse (3) ($T^k f\in \underline{H}^{\odot n-2k}$ et si $k\leqslant [n/2]-1$ alors $n-2k\geqslant 2$). Pour cela, on doit montrer :

$$\sum_{i_1,\ldots,i_{n-2k-2}=1}^{\infty} \left|\left\langle T^k f, e_{i_1}\otimes\cdots\otimes e_{i_{n-2k-2}}\right\rangle\right|_\tau < \infty$$

Remarquons tout d'abord :

$$\begin{aligned}
&\left\langle T^k f, e_{i_1}\otimes\cdots\otimes e_{i_{n-2k}}\right\rangle \\
&\quad= \lim_{R_1\to\infty} \sum_{j_1=1}^{R_1} \left\langle T^{k-1} f, e_{i_1}\otimes\cdots\otimes e_{i_{n-2k}}\otimes e_{j_1}^{\otimes 2}\right\rangle \\
&\quad= \lim_{R_1\to\infty}\cdots\lim_{R_k\to\infty} \sum_{j_1=1}^{R_1}\cdots\sum_{j_k=1}^{R_k} \left\langle f, e_{i_1}\otimes\cdots\otimes e_{i_{n-2k}}\otimes e_{j_1}^{\otimes 2}\otimes\cdots\otimes e_{j_k}^{\otimes 2}\right\rangle.
\end{aligned}$$

Soit $B'=(u_q)$ une base de $\underline{H}$, on a :

$$\begin{aligned}
&\sum_{q=1}^{R} \left|\left\langle\langle T^k f, e_{i_1}\otimes\cdots\otimes e_{i_{n-2k-2}}\rangle, u_q\otimes u_q\right\rangle\right| \\
&\quad\leqslant \sum_{i_{n-2k-1},i_{n-2k}=1}^{\infty} \left|\left\langle T^k f, e_{i_1}\otimes\cdots\otimes e_{i_{n-2k}}\right\rangle\right| \\
&\quad\leqslant \sum_{i_{n-2k-1},i_{n-2k}=1}^{\infty} \left(\sum_{j_1,\ldots,j_k=1}^{\infty} \left|\left\langle f, e_{i_1}\otimes\cdots\otimes e_{i_{n-2k}}\otimes e_{j_1}^{\otimes 2}\otimes\cdots\otimes e_{j_k}^{\otimes 2}\right\rangle\right|\right)
\end{aligned}$$

$$\leqslant \sum_{i_{n-2k-1},i_{n-2k}=1}^{\infty} \sum_{j_1,\ldots,j_{k-1}=1}^{\infty} \left|\left\langle f, e_{i_1} \otimes \cdots \otimes e_{i_{n-2k}} \otimes e_{j_1}^{\otimes 2} \otimes \cdots \otimes e_{j_{k-1}}^{\otimes 2} \right\rangle\right|_\tau$$

$$\Rightarrow \left|\left\langle T^k f, e_{i_1} \otimes \cdots \otimes e_{i_{n-2k-2}} \right\rangle\right|_\tau$$

$$\leqslant \sum_{i_{n-2k-1},i_{n-2k}=1}^{\infty} \sum_{j_1,\ldots,j_{k-1}=1}^{\infty} \left|\left\langle f, e_{i_1} \otimes \cdots \otimes e_{i_{n-2k}} \otimes e_{j_1}^{\otimes 2} \otimes \cdots \otimes e_{j_{k-1}}^{\otimes 2} \right\rangle\right|_\tau$$

$$\Rightarrow \sum_{i_1,\ldots,i_{n-2k-2}=1}^{\infty} \left|\left\langle T^k f, e_{i_1} \otimes \cdots \otimes e_{i_{n-2k-2}} \right\rangle\right|_\tau$$

$$\leqslant \sum_{i_1,\ldots,i_{n-2k}=1}^{\infty} \sum_{j_1,\ldots,j_{k-1}=1}^{\infty} \left|\left\langle f, e_{i_1} \otimes \cdots \otimes e_{i_{n-2k}} \otimes e_{j_1}^{\otimes 2} \otimes \cdots \otimes e_{j_{k-1}}^{\otimes 2} \right\rangle\right|_\tau$$

$$\leqslant \sum_{i_1,\ldots,i_{n-2}=1}^{\infty} |\langle f, e_{i_1} \otimes \cdots \otimes e_{i_{n-2}} \rangle|_\tau .$$

En conclusion, pour $1 \leqslant k \leqslant [n/2] - 1$, $T^k f$ vérifie l'hypothèse (3) et on peut donc lui appliquer le théorème 5.

Pour $k = [n/2]$:

- Si n est pair, $T^k f$ est un réel.
- Si n est impair, $T^k f \in \underline{H}$ et donc $\mathring{\delta}^{n-2k}(T^k f)$ admet 0 pour L_N^p-limite approximative en 0 (théorème 1).

On obtient donc le résultat annoncé. □

Remark 4. – Ce résultat est à comparer à celui de Carmona et Nualart [3]. Carmona et Nualart obtiennent sous des conditions plus faibles l'existence d'une limite approximative par rapport à la norme uniforme. Ici, les conditions sont plus fortes, mais on obtient l'existence d'une limite par rapport à toute norme mesurable (voir [7] pour une comparaison plus précise dans le cas $n = 2$). Il faut noter de plus que Carmona et Nualart travaillent à partir d'un mouvement brownien réel alors qu'ici, le résultat porte sur un mouvement brownien à valeurs dans $\mathbb{R}^d$. Leur méthode semble difficilement prolongeable au cas d-dimensionnel.

COROLLARY 2. – *Pour $n \geqslant 2$, soit $f \in \underline{H}^{\odot n}$ et soit $B = (e_k)$ une base de $\underline{H}$ telle que f vérifie l'hypothèse*:

$$\sum_{i_1,\ldots,i_n=1}^{\infty} \left|\langle f, e_{i_1} \otimes \cdots \otimes e_{i_n} \rangle\right|^{2/n} < \infty$$

alors:

$$\exists \alpha_0 > 0,\ \forall \alpha \in [-\alpha_0, \alpha_0], \quad \lim_{\eta \to 0} E_\eta^N \left(\mathrm{e}^{\alpha |\mathring{\delta}^n(f)|^{2/n}}\right) = 1.$$

Proof. – On remarque tout d'abord que f vérifie nécessairement l'hypothèse (4) puis on écrit:

$$\left|E_\eta^N \left(\mathrm{e}^{\alpha |\mathring{\delta}^n(f)|^{2/n}}\right) - 1\right| \leqslant \alpha_0 E_\eta^N \left(|\mathring{\delta}^n(f)|^2\right)^{1/n} E_\eta^N \left(\mathrm{e}^{\frac{n}{n-1}\alpha_0 |\mathring{\delta}^n(f)|^{2/n}}\right)^{(n-1)/n}.$$

D'après la proposition 1:

$$\mathring{\delta}^n(f) = L^2 - \lim_{R\to\infty} \sum_{i_1,\ldots,i_n=1}^{R} \langle f, e_{i_1}\otimes\cdots\otimes e_{i_n}\rangle X_{i_1}\cdots X_{i_n}.$$

D'où :

$$\begin{aligned}
&E_\eta^N\big(\mathrm{e}^{\frac{n}{n-1}\alpha_0|\mathring{\delta}^n(f)|^{2/n}}\big)\\
&\quad\leqslant \liminf_{R\to+\infty} E_\eta^N \exp\left(\frac{n}{n-1}\alpha_0\left(\sum_{i_1,\ldots,i_n=1}^{R} |\langle f, e_{i_1}\otimes\cdots\otimes e_{i_n}\rangle||X_{i_1}|\cdots|X_{i_n}|\right)^{2/n}\right)\\
&\quad\leqslant \liminf_{R\to+\infty} E_\eta^N \exp\left(\frac{n}{n-1}\alpha_0\sum_{i_1,\ldots,i_n=1}^{R} |\langle f, e_{i_1}\otimes\cdots\otimes e_{i_n}\rangle|^{2/n}|X_{i_1}|^{2/n}\cdots|X_{i_n}|^{2/n}\right).
\end{aligned}$$

On note $J_R = \{(i_1,\ldots,i_n)\in\{1,\ldots,R\}^n, \langle f, e_{i_1}\otimes\cdots\otimes e_{i_n}\rangle \neq 0\}$. Pour $(i_1,\ldots,i_n)\in J_R$, on pose:

$$r_{i_1,\ldots,i_n} = \frac{A_R}{|\langle f, e_{i_1}\otimes\cdots\otimes e_{i_n}\rangle|^{2/n}} \quad \text{avec} \quad A_R = \sum_{i_1,\ldots,i_n=1}^{R} \big|\langle f, e_{i_1}\otimes\cdots\otimes e_{i_n}\rangle\big|^{2/n}$$

$$\Rightarrow E_\eta^N\big(\mathrm{e}^{\frac{n}{n-1}\alpha_0|\mathring{\delta}^n(f)|^{2/n}}\big) \leqslant \liminf_{R\to+\infty} \prod_{(i_1,\ldots,i_n)\in J_R} E_\eta^N\big(\mathrm{e}^{\frac{n}{n-1}\alpha_0 A_R|X_{i_1}|^{2/n}\cdots|X_{i_n}|^{2/n}}\big)^{\frac{1}{r_{i_1,\ldots,i_n}}}.$$

Posons $A = \sum_{i_1,\ldots,i_n=1}^{\infty} |\langle f, e_{i_1}\otimes\cdots\otimes e_{i_n}\rangle|^{2/n}$. En utilisant le théorème 2, on obtient:

$$\begin{aligned}
E_\eta^N\big(\mathrm{e}^{\frac{n}{n-1}\alpha_0 A_R|X_{i_1}|^{2/n}\cdots|X_{i_n}|^{2/n}}\big) &\leqslant E_\eta^N\big(\mathrm{e}^{\frac{n}{n-1}\alpha_0 A|X_{i_1}|^{2/n}\cdots|X_{i_n}|^{2/n}}\big)\\
&\leqslant \int_0^{+\infty} P_\eta^N\left(|X_{i_1}|^{2/n}\cdots|X_{i_n}|^{2/n} \geqslant \frac{(n-1)\ln(x)}{n\alpha_0 A}\right)\mathrm{d}x\\
&\leqslant \sum_{k=1}^{n}\int_0^{+\infty} P_\eta^N\left(|X_{i_k}|^2 \geqslant \frac{(n-1)\ln(x)}{n\alpha_0 A}\right)\mathrm{d}x\\
&\leqslant \sum_{k=1}^{n}\int_0^{+\infty} P\left(|X_{i_k}|^2 \geqslant \frac{(n-1)\ln(x)}{n\alpha_0 A}\right)\mathrm{d}x\\
&\leqslant n\int_0^{+\infty} P\big(\mathrm{e}^{\frac{n}{n-1}\alpha_0 A|X_1|^2} \geqslant x\big)\,\mathrm{d}x\\
&\leqslant nE\big(\mathrm{e}^{\frac{n}{n-1}\alpha_0 A|X_1|^2}\big)
\end{aligned}$$

$$\Rightarrow E_\eta^N\big(\mathrm{e}^{\frac{n}{n-1}\alpha_0|\mathring{\delta}^n(f)|^{2/n}}\big) \leqslant nE\big(\mathrm{e}^{\frac{n}{n-1}\alpha_0 A|X_1|^2}\big) < \infty \quad \text{si } \alpha_0 \text{ est assez petit.}$$

On conclut en utilisant le théorème 5. □

Remark 5. – Ce résultat est du même type que celui énoncé dans le théorème 8 de [7] qui traite du cas $n=2$ (l'hypothèse est la même grâce à la proposition 2). Par contre, dans le cas où n est quelconque, l'hypothèse utilisée n'est pas satisfaisante mais l'auteur n'a pas réussi à l'affaiblir. Il semble que l'existence d'une inégalité de décorrélation soit essentielle pour améliorer ce résultat.

On peut cependant modifier le résultat du corollaire en formulant une hypothèse plus forte.

D'après le lemme 1 de [7], on peut trouver une base $B = (e_i)$ (dépendante de N) telle que, si on note $Q_k(h) = \sum_{i=1}^{k} < h,\ \xi_i > \xi_i$ où $\xi_i(t) = \int_0^t e_i(s)\,\mathrm{d}s$, on ait:

$$\forall k \geqslant 1, \exists c_k > 0, \quad N\big(Q_k(w)\big) \leqslant c_k \widetilde{N}(w) \quad \text{p.s.}$$

COROLLARY 3. – *Soit (e_i) une base adaptée à N au sens précédent. Supposons qu'un élément f de $\underline{H}^{\odot n}$ $(n \geqslant 2)$ vérifie*:

$$\sum_{i_1,\dots,i_n=1}^{\infty} \big|\langle f, e_{i_1} \otimes \cdots \otimes e_{i_n}\rangle\big|^{2/n} < \infty \tag{5}$$

alors:

$$\lim_{\eta\to 0} E_\eta^N\big(\mathrm{e}^{|\mathring{\delta}^n(f)|^{2/n}}\big) = 1.$$

Remark 6. – Si f vérifie l'hypothèse (5) pour une certaine base B, f ne vérifie pas nécéssairement la même hypothèse pour toutes les bases de $\underline{H}$. Il suffit en effet de considérer l'exemple suivant. Soit (v_i) une base de $\underline{H}$, notons $h = \sum_{i=1}^{\infty} 1/i\ v_i$ et $f = h \otimes h$. Choisissons (e_i) une base de $\underline{H}$ telle que $h = \|h\| e_1$. On a:

$$\sum_{i,j} \big|\langle f, e_i \otimes e_j\rangle\big| < \infty \quad \text{et} \quad \sum_{i,j} \big|\langle f, v_i \otimes v_j\rangle\big| = \infty.$$

Démonstration du corollaire. –

$$\sum_{i_1,\dots,i_n=1}^{\infty} \big|\langle f, e_{i_1} \otimes \cdots \otimes e_{i_n}\rangle\big|^{2/n} = A_R + A'_R \quad \text{où} \quad A_R = \sum_{i_1,\dots,i_n \leqslant R} \big|\langle f, e_{i_1} \otimes \cdots \otimes e_{i_n}\rangle\big|^{2/n}.$$

$\lim_{R\to\infty} A'_R = 0$, on peut donc choisir R tel que $E(\exp(\frac{2n}{n-1} A'_R |X_1|^2)) < \infty$ où $X_i = \int_0^1 e_i(s).\mathrm{d}w_s$.

Notons :

$$f_R = \sum_{i_1,\dots,i_n=1}^{R} \langle f, e_{i_1} \otimes \cdots \otimes e_{i_n}\rangle e_{i_1} \otimes \cdots \otimes e_{i_n} \quad \text{et} \quad g_R = f - f_R.$$

On écrit :

$$\begin{aligned}&\Big|E_\eta^N\big(\mathrm{e}^{|\mathring{\delta}^n(f)|^{2/n}}\big) - 1\Big| \\ &\quad \leqslant E_\eta^N\big(|\mathring{\delta}^n(f)|^2\big)^{1/n} E_\eta^N\big(\mathrm{e}^{\frac{2n}{n-1}|\mathring{\delta}^n(f_R)|^{2/n}}\big)^{(n-1)/2n} E_\eta^N\big(\mathrm{e}^{\frac{2n}{n-1}|\mathring{\delta}^n(g_R)|^{2/n}}\big)^{(n-1)/2n}.\end{aligned}$$

De la même façon que dans le corollaire 2, on montre grâce au choix de R que:

$$E_\eta^N\left(\mathrm{e}^{\frac{2n}{n-1}|\mathring{\delta}^n(g_R)|^{2/n}}\right)^{(n-1)/2n} < c \quad \text{où } c \text{ est une constante indépendante de } \eta.$$

Il suffit donc de montrer que :

$$\limsup_{\eta\to 0} E_\eta^N\left(\mathrm{e}^{\frac{2n}{n-1}|\mathring{\delta}^n(f_R)|^{2/n}}\right)^{(n-1)/2n} < \infty.$$

Sur l'événement $\{\widetilde{N} < \eta\}$, on a $N(Q_R(w)) \leqslant c_R\ \eta$ p.s. Les normes étant toutes équivalentes dans $\mathbb{R}^R$, on en déduit :

$$\forall i \leqslant R, \quad |X_i| \leqslant c'_R N\left(Q_R(w)\right) \leqslant C_R \eta \quad \text{p.s.}$$

D'où :

$$E_\eta^N\left(\mathrm{e}^{\frac{2n}{n-1}|\mathring{\delta}^n(f_R)|^{2/n}}\right) \leqslant E_\eta^N\left(\mathrm{e}^{\frac{2n}{n-1}\sum_{i_1,\ldots,i_n=1}^R |\langle f, e_{i_1}\otimes\cdots\otimes e_{i_n}\rangle|^{2/n}|X_{i_1}|^{2/n}\cdots|X_{i_n}|^{2/n}}\right) \leqslant \mathrm{e}^{c'\eta^2}.$$

Ce qui termine la démonstration. □

COROLLARY 4. – *Soit $f \in \underline{H}^{\odot n}$ vérifiant l'hypothèse* (3) ($n \geqslant 2$)*, alors pour tout p et tout $h \in H$, $\delta^n(f)$ admet une L_N^p-limite approximative en h et*:

$$\delta^n(f)(h) = \sum_{k=0}^{[n/2]}\left(-\frac{1}{2}\right)^k \frac{n!}{k!(n-2k)!}\langle T^k f, \dot{h}^{\otimes n-2k}\rangle.$$

Proof. – D'après la proposition 1 de [7], il suffit de montrer que $\delta^n f(\cdot + h)$ admet pour tout p une L_N^p-limite approximative en 0. On a:

$$\delta^n(f)(\cdot + h) = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k}\delta^k\left(\langle f, \dot{h}^{\otimes n-k}\rangle\right).$$

Il suffit donc de montrer que $\langle f, \dot{h}^{\otimes n-k}\rangle$ vérifie (3), ce qui découle de l'inégalité:

$$\sum_{i_1,\ldots,i_{k-2}=1}^{\infty}\left|\langle f, \dot{h}^{\otimes n-k}\otimes e_{i_1}\otimes\cdots\otimes e_{i_{k-2}}\rangle\right|_\tau$$
$$\leqslant \|h\|^{n-k}\sum_{i_1,\ldots,i_{n-2}=1}^{\infty}\left|\langle f, e_{i_1}\otimes\cdots\otimes e_{i_{n-2}}\rangle\right|_\tau. \qquad □$$

3.4. Un théorème du support

De façon classique, on peut déduire de ce qui précède le théorème suivant.

THEOREM 6. – *Soit $f \in \underline{H}^{\odot n}$ vérifiant l'hypothèse* (3) ($n \geqslant 2$) *alors*:

$$\mathit{Supp}\left(P_{\delta^n(f)}\right) = \overline{\left\{\delta^n(f)(h), h \in H\right\}}$$

(Supp$(P_{\delta^n(f)})$ *désigne le plus petit fermé* F *vérifiant* $P(\delta^n(f) \in F) = 1)$.

Proof. – Soit (v_k) une base de $\underline{H}$. Notons

$$f_R = \sum_{i_1,\dots,i_n=1}^{R} \langle f_n, v_{i_1} \otimes \cdots \otimes v_{i_n} \rangle v_{i_1} \otimes \cdots \otimes v_{i_n}.$$

On a :

$$\delta^n(f) = L^2 - \lim_{R\to\infty} \delta^n(f_R).$$

De plus,

$$\delta^n(f_R) = \sum_{k=0}^{[n/2]} \left(-\frac{1}{2}\right)^k \frac{n!}{k!(n-2k)!} \mathring{\delta}^{n-2k}\left(T^k f_R\right),$$

et d'après la proposition 1 :

$$\mathring{\delta}^{n-2k}\left(T^k f_R\right) = \sum_{i_1,\dots,i_{n-2k}=1}^{R} \left\langle T^k f, v_{i_1} \otimes \cdots \otimes v_{i_{n-2k}} \right\rangle X_{i_1} \cdots X_{i_{n-2k}}$$

$$\text{où} \quad X_i = \int_0^1 v_i(s).\mathrm{d}w(s)$$

$$\Rightarrow \mathring{\delta}^{n-2k}\left(T^k f_R\right) = \left\langle T^k f, \dot{w}_R^{\otimes n-2k} \right\rangle \quad \text{où} \quad w_R = \sum_{i=1}^{R} X_i \int_0^{\cdot} v_i(s)\,\mathrm{d}s.$$

D'où : $\delta^n(f_R) = \delta^n(f)(w_R)$. On obtient donc : $\delta^n(f) = L^2 - \lim_{R\to\infty} \delta^n(f)(w_R)$.

Or $P(\delta^n(f)(w_R) \in \overline{\{\delta^n(f)(h), h \in H\}}) = 1$ et donc :

$$P(\delta^n(f) \in \overline{\{\delta^n(f)(h), h \in H\}}) = 1.$$

De plus, on montre facilement grâce au corollaire 4 (utilisé pour $p = 0$) que pour tout fermé F vérifiant $P(\delta^n(f) \in F) = 1$: $\overline{\{\delta^n(f)(h), h \in H\}} \subset F$ (on utilise aussi le fait que $P(\widetilde{N}(w-h) < \eta) > 0$). □

Remark 7. – On retrouve ainsi une partie du corollaire 2 de [19] (ce résultat apparait dans cet article comme la conséquence du théorème principal de [19] dont la démonstration comporte une erreur, voir la note en bas de la page 261 de [21]).

3.5. Quelques liens possibles avec des résultats de [7]

Indiquons tout d'abord que ce paragraphe pose plus de questions qu'il n'en résout.

Soit $\Lambda = (\lambda_n)_{n\geqslant 1}$ une famille de réels tels que $\lambda_n > 0$ et $\sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n < \infty$. Soit (e_i) une base de $\underline{H}$. On définit pour h dans H:

$$N_\Lambda(h) = \sqrt{\sum_{i=1}^{\infty} \lambda_i \langle \dot{h}, e_i \rangle^2}.$$

N_Λ est une norme mesurable sur H [4] et $\widetilde{N}_\Lambda = \sqrt{\mathring{\delta}^2(f_\Lambda)}$ où $f_\Lambda = \sum_{i=1}^{\infty} \lambda_i e_i \otimes e_i$. Dans [7], l'auteur montre que toute semi-norme mesurable sur H admet pour tout p et pour tout h une $\mathrm{L}^p_{N_\Lambda}$-limite approximative en h. Considérons maintenant $f \in Dom\,\mathring{\delta}^n$. Si on peut relier en un sens à préciser, $\mathring{\delta}^n f$ avec un nombre fini de semi-normes mesurables, on peut alors espérer montrer que $\mathring{\delta}^n f$ admet une $\mathrm{L}^p_{N_\Lambda}$-limite approximative en h. La question qui se pose est donc de construire des semi-normes mesurables à partir de f.

Le lemme suivant est du à Gross [4, lemme 3.3]:

LEMMA 3. – *Soit $f \in \underline{H}^{\odot n}$ avec $n \geqslant 2$ alors*:

$$\big(\forall (h_1, h_2) \in (\underline{H})^2, \langle f, h_1^{\otimes 2} \otimes h_2^{\otimes n-2}\rangle \geqslant 0\big)$$
$$\Leftrightarrow \big(h \mapsto \langle f, \dot{h}^{\otimes n}\rangle \text{ est la puissance nième d'une semi-norme}\big).$$

Nous allons donner une série d'exemples basée sur ce lemme.

Exemple 1. – Soit $f \in \underline{H}^{\odot n}$ avec $n \geqslant 2$ telle que:

$$\forall p \in \left\{1, \ldots, \left[\frac{n}{2}\right]\right\},\ \forall (h_1, \ldots, h_p) \in \underline{H}^p,\ \forall h_{p+1} \in \underline{H},$$
$$\big\langle f, (h_1 \otimes \cdots \otimes h_p)^{\otimes 2} \otimes h_{p+1}^{\otimes n-2p}\big\rangle \geqslant 0.$$

Si $f \in Dom\,\mathring{\delta}^n$, alors pour tout k dans $\{0, \ldots, [\frac{n}{2} - 1]\}$:

$$\forall (h_1, h_2) \in \underline{H} \times \underline{H}, \quad \big\langle T^k f, h_1^{\otimes 2} \otimes h_2^{\otimes n-2k-2}\big\rangle \geqslant 0$$

et donc $h \mapsto \langle T^k f, \dot{h}^{\otimes n-2k}\rangle^{1/(n-2k)}$ est une semi-norme.

Pour le démontrer, il suffit d'écrire:

$$T^k f = L_2 - \lim_{R_1 \to \infty} \cdots \lim_{R_k \to \infty} \sum_{q_1=1}^{R_1} \cdots \sum_{q_k=1}^{R_k} \big\langle f, e_{q_1}^{\otimes 2} \otimes \cdots \otimes e_{q_k}^{\otimes 2}\big\rangle$$

où (e_q) est une base de $\underline{H}$.

Exemple 2. – Si $f \in \underline{H}$, alors $h \mapsto |\langle f, \dot{h}\rangle|$ est une semi-norme. Il suffit de considérer $f \otimes f$.

Exemple 3. – Soit $f \in \underline{H}^{\odot n}$. On note $f \mathbin{\hat{\otimes}} f$ le symétrisé de $f \otimes f$. Si f vérifie:

$$\forall (h_1, h_2) \in \underline{H} \times \underline{H}, \quad \big\langle f \mathbin{\hat{\otimes}} f, h_1^{\otimes 2} \otimes h_2^{\otimes 2n-2}\big\rangle \geqslant 0$$

alors $h \mapsto \langle f \mathbin{\hat{\otimes}} f, \dot{h}^{\otimes 2n}\rangle^{1/2n} = |\langle f, \dot{h}^{\otimes n}\rangle|^{1/n}$ est une semi-norme.

La généralisation de l'exemple 1 à l'aide de cette idée est compliquée car $T(f \mathbin{\hat{\otimes}} f)$ ne s'exprime pas simplement en fonction de Tf.

Exemple 4. – Soit $f \in \underline{H}^{\odot n}$ telle que $K(f \mathbin{\hat{\otimes}} f) \geqslant 0$, alors $h \mapsto |\langle f, \dot{h}^{\otimes n}\rangle|^{1/n}$ est une semi-norme. C'est un cas particulier de l'exemple précédent.

Exemple 5. – Soit $f \in Dom\,\overset{\circ}{\delta}{}^n$ telle que:

$$\forall k \in \left\{0, \ldots, \left[\frac{n}{2}\right]\right\}, \quad K\left(T^k f \overset{\wedge}{\otimes} T^k f\right) \geqslant 0$$

alors $\forall k \in \{0, \ldots, [\frac{n}{2}]\}$, $h \mapsto |\langle T^k f, \dot{h}^{\otimes n-2k}\rangle|^{1/(n-2k)}$ est une semi-norme.

Exemple 6. – Soit $f \in \underline{H}^{\odot n}$ et considérons $K = K(f \overset{\wedge}{\otimes} f)$. Soit $K' : \underline{H}^{\odot n} \to \underline{H}^{\odot n}$ défini par $K' = (K^* K)^{1/2}$. K' est un opérateur positif et il est associé à un élément g de $\underline{H}^{\odot n} \odot \underline{H}^{\odot n}$ ($\neq \underline{H}^{\odot 2n}$ si $n \geqslant 2$). Si on suppose que g est dans $\underline{H}^{\odot 2n}$, alors $N(h) = \langle g, \dot{h}^{\otimes 2n}\rangle^{1/2n}$ est une semi-norme et:

$$\left|\left\langle f, \dot{h}^{\otimes n}\right\rangle\right|^{1/n} = \left|\left\langle f \overset{\wedge}{\otimes} f, \dot{h}^{\otimes 2n}\right\rangle\right|^{1/2n} \leqslant N(h).$$

Exemple 7. – Soit $f \in Dom\,\overset{\circ}{\delta}{}^{2n}$. Si $K(f) \geqslant 0$ alors $\forall k \in \{0, \ldots, n\}$, $h \mapsto \langle T^k f, \dot{h}^{\otimes 2n-2k}\rangle^{1/(2n-2k)}$ est une semi-norme.

En effet, on montre facilement que pour tout k, $K(T^k f)$ est positif ou bien on suit la même démarche que dans l'exemple 1.

Exemple 8. – Soit $f \in Dom\,\overset{\circ}{\delta}{}^{2n+1}$ telle que pour tout h dans $\underline{H}$, $K(\langle f, h\rangle) \geqslant 0$, alors:

$$\forall k \in \{0, \ldots, n\}, \quad h \mapsto \left\langle T^k f, \dot{h}^{\otimes 2n+1-2k}\right\rangle^{1/(2n+1-2k)} \text{ est une semi-norme}.$$

On procède comme dans l'exemple 1.

Nous allons maintenant énoncer deux hypothèses qui permettent d'obtenir des résultats concernant l'existence de limites.

DEFINITION 8. – *Soit $f \in Dom\,\overset{\circ}{\delta}{}^n$. On dira que f vérifie l'hypothèse $\mathbb{H}_1$ si*:

$$\forall k \in \left\{0, \ldots, \left[\frac{n}{2}\right]\right\}, \quad N_k : h \mapsto \left|\left\langle T^k f, \dot{h}^{\otimes n-2k}\right\rangle\right|^{1/(n-2k)} \quad \textit{est une semi-norme}.$$

Les exemples 1, 5, 7 et 8 rentrent dans ce cadre.

De plus, si un élément f de $Dom\,\overset{\circ}{\delta}{}^n$ vérifie l'hypothèse $\mathbb{H}_1$, on voit grâce à la proposition 2 de [19] que N_k est une semi-norme mesurable et on a:

$$\widetilde{N}_k = \left|\overset{\circ}{\delta}{}^{n-2k}\left(T^k f\right)\right|^{1/(n-2k)}.$$

DEFINITION 9. – *Soit $f \in \underline{H}^{\odot n}$. On dira que f vérifie l'hypothèse $\mathbb{H}_2$ si il existe une semi-norme mesurable N telle que*:

$$\forall h \in H, \quad \left|\left\langle f, \dot{h}^{\otimes n}\right\rangle\right|^{1/n} \leqslant N(h).$$

Soit $f \in Dom\,\overset{\circ}{\delta}{}^n$. Si f vérifie $\mathbb{H}_2$ alors $|\overset{\circ}{\delta}{}^n f|^{1/n} \leqslant \widetilde{N}$. L'exemple 6 entre dans ce cadre si on suppose $K(f \overset{\wedge}{\otimes} f)$ nucléaire. En effet, $K(g)$ est alors nucléaire, ce qui implique $g \in Dom\,\overset{\circ}{\delta}{}^{2n}$ (voir plus loin la proposition 7) et donc N est mesurable.

En ce qui concerne l'exemple 6, remarquons de plus que l'hypothèse $f \in Dom\,\mathring{\delta}^n$ permet d'obtenir $f \stackrel{\wedge}{\otimes} f \in Dom\,\mathring{\delta}^{2n}$ (voir en appendice) mais ceci ne signifie pas que g est dans $Dom\,\mathring{\delta}^{2n}$ (d'où la nécessité de supposer $K(g)$ nucléaire ou $K(f \stackrel{\wedge}{\otimes} f)$ nucléaire, ce qui est équivalent). En effet, si $g \in Dom\,\mathring{\delta}^{2n}$, étant donné que $K(g)$ est positif, on obtient que $K(g)$ est nucléaire (voir plus loin la proposition 8). Ceci implique que $K(F)$ est nucléaire avec $F = f \stackrel{\wedge}{\otimes} f$. Or on peut construire des éléments F de $Dom\,\mathring{\delta}^{2n}$ tels que $K(F)$ ne soit pas nucléaire (voir plus loin l'exemple 9). En conclusion:

$$f \stackrel{\wedge}{\otimes} f \in Dom\,\mathring{\delta}^{2n} \nRightarrow g \in Dom\,\mathring{\delta}^{2n}.$$

Remark 8. – D'une manière générale, on ne peut pas espérer écrire un élément f de $Dom\,\mathring{\delta}^{2n}$ sous la forme:

$$f = \sum_{i=1}^{p} g_i \quad \text{avec } g_i \in Dom\,\mathring{\delta}^{2n} \text{ et } g_i \text{ vérifie } K(g_i) \geqslant 0 \text{ ou } K(g_i) \leqslant 0.$$

En effet, cela signifierait que $K(g_i)$ est nucléaire (proposition 8) et donc $K(f)$ serait nucléaire. Or, toujours d'après l'exemple 9, il existe des éléments f de $Dom\,\mathring{\delta}^{2n}$ tels que $K(f)$ ne soit pas nucléaire.

En utilisant les hypothèses $\mathbb{H}_1$ et $\mathbb{H}_2$, on obtient :

PROPOSITION 5. – *Soit $f \in Dom\,\mathring{\delta}^n$ vérifiant $\mathbb{H}_1$, alors pour tout $p \geqslant 1$, $\delta^n(f)$ admet une $L^p_{N_\Lambda}$-limite approximative en* 0 *et*:

$$\delta^n(f)(0) = \begin{cases} 0 & \textit{si n est impair,} \\ \left(-\frac{1}{2}\right)^{n/2} \frac{n!}{(n/2)!} T^{n/2}(f) & \textit{si n est pair.} \end{cases}$$

Proof. – Il suffit d'utiliser la formule de Hu–Meyer ainsi que le théorème 12 de [7] pour conclure. □

PROPOSITION 6. – *Soit $f \in Dom\,\mathring{\delta}^n$ vérifiant $\mathbb{H}_2$, alors pour tout $p \geqslant 1$, $\mathring{\delta}^n(f)$ admet* 0 *pour $L^p_{N_\Lambda}$-limite approximative en* 0.

Proof. – On utilise à nouveau le théorème 12 de [7]. □

Remarquons que ces deux propositions donnent uniquement des limites en 0 et qu'il faudrait faire des hypothèses supplémentaires pour obtenir des limites en h.

En conclusion, devant le grand nombre d'hypothèses possibles pour obtenir des théorèmes de limites, il semble donc essentiel de répondre à la question suivante:

Quels sont les liens existant entre $Dom\,\mathring{\delta}^n$ et les semi-normes mesurables sur H?

4. Appendice

4.1. Lien entre $Dom\,\mathring{\delta}^n$ et opérateurs nucléaires

Si $f \in \underline{H}^{\odot 2n}$, rappelons que $K(f): \underline{H}^{\otimes n} \to \underline{H}^{\otimes n}$ est défini par $\langle K(f)h_1, h_2\rangle = \langle f, h_1 \otimes h_2\rangle$.

Dans [19], Sugita affirme que l'équivalence suivante est vraie.

Si $f \in \underline{H}^{\odot 2n}$ $(n \geqslant 1)$ alors :

$$K(f) \text{ est nucléaire} \Leftrightarrow f \in Dom\,\mathring{\delta}^{2n}.$$

Cette équivalence est fausse. On peut en effet constater à l'aide d'un exemple qu'il existe des éléments f de $Dom\,\mathring{\delta}^{2n}$ tels que $K(f)$ ne soit pas nucléaire. Une telle fonction doit être recherchée au minimum dans le quatrième chaos car ces deux notions sont équivalentes dans le deuxième chaos.

Exemple 9. – Je remercie Denis Feyel pour m'avoir indiqué cet exemple.

Pour $i, j \geqslant 2$, on considère $a_{i,j} = \frac{(-1)^{i+j}}{i^2+j^2}$. On a:

1. $\sum_{i,j\geqslant 2} a_{i,j}^2 < \infty$.
2. $\sum_{i\geqslant 2}(\sum_{j\geqslant 2} |a_{i,j}|)^2 < \infty$.
3. $\sum_{j\geqslant 2} |a_{i,j}| < \infty$.
4. $\sum_{i\geqslant 2} |\sum_{j\geqslant 2} a_{i,j}| < \infty$.

On définit pour $i \geqslant 2$: $a_{i,1} = a_{1,i} = -\sum_{j\geqslant 2} a_{i,j}$ et on pose $a_{1,1} = -\sum_{j\geqslant 2} a_{1,j}$ ($a_{1,1}$ est bien défini grâce à 4). On obtient $\sum_{i,j\geqslant 1} a_{i,j}^2 < \infty$.

Soit (e_i) une base de $\underline{H}$. On note pour $i \neq j$:

$$E_{i,j} = \frac{1}{2}(e_i \otimes e_i \otimes e_j \otimes e_j + e_i \otimes e_j \otimes e_i \otimes e_j + e_i \otimes e_j \otimes e_j \otimes e_i \\ + e_j \otimes e_i \otimes e_j \otimes e_i + e_j \otimes e_i \otimes e_i \otimes e_j + e_j \otimes e_j \otimes e_i \otimes e_i)$$

et $E_{i,i} = e_i \otimes e_i \otimes e_i \otimes e_i$.

Les $E_{i,j}$ sont orthogonaux entre eux.

On définit f dans $\underline{H}^{\odot 4}$ par:

$$f = \sum_{i,j\geqslant 1} a_{i,j} E_{i,j}.$$

On montre facilement pour $p \neq q$:

$$K(f)(e_p \otimes e_q + e_q \otimes e_p) = 2a_{p,q}(e_p \otimes e_q + e_q \otimes e_p).$$

On en déduit:

$$\left|K(f)\right|_\tau \geqslant 2\sum_{p\neq q} |a_{p,q}| \geqslant +\infty.$$

$K(f)$ n'est donc pas nucléaire.

Montrons maintenant que $f \in Dom\,\mathring{\delta}^4$. Soit (v_k) une base de $\underline{H}$, notons Q_R la projection orthogonale sur l'espace vectoriel engendré par $v_1, \ldots, v_R$. Après quelques lignes de calcul, on obtient:

$$\sum_{k=1}^{R} \langle f, v_k \otimes v_k\rangle = \sum_{i=1}^{\infty}\left(\sum_{j=1}^{\infty} a_{i,j}\left\|Q_R(e_j)\right\|^2\right) e_i \otimes e_i \\ + 2\sum_{i<j} a_{i,j}\langle Q_R(e_i), Q_R(e_j)\rangle(e_i \otimes e_j + e_j \otimes e_i)$$

$$\Rightarrow \left\|\sum_{k=1}^{R}\langle f, v_k\otimes v_k\rangle\right\|^2=\sum_{i=1}^{\infty}\left(\sum_{j=1}^{\infty}a_{i,j}\left\|Q_R(e_j)\right\|^2\right)^2+8\sum_{i<j}a_{i,j}^2\left(\left\langle Q_R(e_i), Q_R(e_j)\right\rangle\right)^2.$$

Grâce aux propriétés de $a_{i,j}$, on en déduit que Tf existe et vaut 0. On obtient donc $f\in \mathit{Dom}\,\mathring{\delta}^4$.

Les deux propositions qui suivent précisent les liens existants entre les opérateurs nucléaires et $\mathit{Dom}\,\mathring{\delta}^{2n}$.

PROPOSITION 7. – *Soit $f\in \underline{H}^{\odot 2n}$ ($n\geqslant 1$). Si $K(f)$ est nucléaire alors $f\in \mathit{Dom}\,\mathring{\delta}^{2n}$ et $\mathit{Tr}\,K(f)=T^n f$.*

Proof. – Nous allons commencer par montrer que Tf existe. D'après la proposition 2.1 de [17], il suffit de montrer:

$$\forall h\in \underline{H}^{\otimes 2n-2},\quad \left|\langle f,h\rangle\right|_\tau<\infty.$$

Or, si $h\in \underline{H}^{\otimes 2n-2}$, f étant symétrique, on a: $\langle f,h\rangle=\langle f,\hat h\rangle$ où $\hat h$ désigne le symétrisé de h. Il suffit donc de montrer :

$$\forall h\in \underline{H}^{\odot 2n-2},\quad \left|\langle f,h\rangle\right|_\tau<\infty.$$

Soit $h\in \underline{H}^{\odot 2n-2}$, $h\in \underline{H}^{\otimes n-1}\odot \underline{H}^{\otimes n-1}$ donc h s'écrit :

$$h=\sum_i \mu_i\theta_i\otimes\theta_i\quad \text{où } (\theta_i) \text{ est une base de } \underline{H}^{\otimes n-1} \text{ et } \sum \mu_i^2<\infty.$$

Soit (u_i) une base de $\underline{H}$:

$$\begin{aligned}\sum_i\left|\left\langle\langle f,h\rangle, u_i\otimes u_i\right\rangle\right| &= \sum_i\left|\sum_j \mu_j\left\langle f,(\theta_j\otimes u_i)^{\otimes 2}\right\rangle\right|\\ &\leqslant \|h\|\sum_{i,j}\left|\left\langle f,(\theta_j\otimes u_i)^{\otimes 2}\right\rangle\right|\\ &\leqslant \|h\|\,\left|K(f)\right|_\tau\quad \text{car } (\theta_j\otimes u_i) \text{ est une base de } \underline{H}^{\otimes n}\end{aligned}$$

$\Rightarrow |\langle f,h\rangle|_\tau\leqslant \|h\||K(f)|_\tau$.

Donc Tf existe. Montrons maintenant que $K(Tf)$ est nucléaire.

Soit (θ_i) est une base de $\underline{H}^{\otimes n-1}$ et soit (u_j) une base de $\underline{H}$.

$$\begin{aligned}\sum_i\left|\langle Tf,\theta_i\otimes\theta_i\rangle\right| &= \sum_i\left|\left\langle \sum_j\langle f,u_j\otimes u_j\rangle,\theta_i\otimes\theta_i\right\rangle\right|\\ &\leqslant \sum_{i,j}\left|\left\langle f,(u_j\otimes\theta_i)^{\otimes 2}\right\rangle\right|\\ &\leqslant \left|K(f)\right|_\tau.\end{aligned}$$

Donc $K(Tf)$ est nucléaire et $|K(Tf)|_\tau\leqslant |K(f)|_\tau$.

Par itération, on obtient que $T^k f$ existe pour tout k et :

$$\left|K\left(T^{k+1}f\right)\right|_\tau \leqslant \left|K\left(T^k f\right)\right|_\tau \leqslant \left|K(f)\right|_\tau.$$

Considérons maintenant (u_i) une base de $\underline{H}$, $(u_{i_1}\otimes\cdots\otimes u_{i_n})$ est une base de $\underline{H}^{\otimes n}$, d'où :

$$\mathit{Tr}\,K(f) = \sum_{i_1,\dots,i_n=1}^{\infty} \left\langle f, u_{i_1}^{\otimes 2}\otimes\cdots\otimes u_{i_n}^{\otimes 2}\right\rangle \quad \text{(cette série est absolument convergente).}$$

De plus

$$T^n f = \lim_{R_1\to\infty}\cdots\lim_{R_n\to\infty}\sum_{i_1=1}^{R_1}\cdots\sum_{i_n=1}^{R_n}\left\langle f, u_{i_1}^{\otimes 2}\otimes\cdots\otimes u_{i_n}^{\otimes 2}\right\rangle,$$

donc $T^n f = \mathit{Tr}\,K(f)$. □

PROPOSITION 8. – *Soit* $f\in\underline{H}^{\odot 2n}$ $(n\geqslant 1)$. *On a*:

$$f\in \mathit{Dom}\,\mathring{\delta}^{2n} \text{ et } K(f) \text{ est positif} \Rightarrow K(f) \text{ est nucléaire}.$$

LEMMA 4. – *Soit* $f\in\underline{H}^{\odot 2n}$ $(n\geqslant 1)$ *tel que* $K(f)$ *soit positif, alors*:

$$Tf \text{ existe et } K(Tf) \text{ est nucléaire} \Rightarrow K(f) \text{ est nucléaire}.$$

Démonstration du lemme. – $K(Tf)$ étant nucléaire, on peut trouver une base (e_i) de $\underline{H}^{\otimes n-1}$ telle que Tf s'écrive:

$$Tf = \sum_i \mu_i e_i\otimes e_i \quad \text{avec } \sum_i |\mu_i| < \infty.$$

D'autre part, on peut trouver une base (E_i) de $\underline{H}^{\otimes n}$ telle que:

$$f = \sum_j \lambda_j E_j\otimes E_j, \quad \sum_j \lambda_j^2 < \infty \quad \text{et} \quad \lambda_j \geqslant 0.$$

Soit (v_k) une base de $\underline{H}$, on a :

$$E_j = \sum_{i,k}\alpha_{i,k}^j\, e_i\otimes v_k$$

$$\Rightarrow \langle f, e_i\otimes v_k\otimes e_{i'}\otimes v_{k'}\rangle = \sum_j \lambda_j \langle E_j, e_i\otimes v_k\rangle\,\langle E_j, e_{i'}\otimes v_{k'}\rangle = \sum_j \lambda_j \alpha_{i,k}^j\,\alpha_{i',k'}^j.$$

Or $Tf = \sum_q \langle f, v_q\otimes v_q\rangle$ (cette série converge dans $\underline{H}^{\odot 2n-2}$). On en déduit, en utilisant la symétrie de f:

$$\langle Tf, e_i\otimes e_{i'}\rangle = \sum_q \langle f, e_i\otimes v_q\otimes e_{i'}\otimes v_q\rangle.$$

D'où :

$$\sum_q \left(\sum_j \lambda_j \alpha_{i,q}^j \alpha_{i',q}^j \right) = \delta_{i,i'} \mu_i \Rightarrow \sum_i \sum_q \left(\sum_j \lambda_j (\alpha_{i,q}^j)^2 \right) = \sum_i \mu_i.$$

Tous les termes étant positifs, on obtient :

$$\sum_i \mu_i = \sum_j \lambda_j \sum_i \sum_q (\alpha_{i,q}^j)^2 = \sum_j \lambda_j \|E_j\|^2 = \sum_j \lambda_j.$$

On en déduit $\sum_j \lambda_j < \infty$ et $K(f)$ est donc nucléaire. □

La démonstration de la proposition en découle. Il suffit de remarquer que si f est dans $Dom\,\mathring{\delta}^{2n}$ alors $K(T^{n-1}f)$ est nucléaire.

4.2. Un résultat complémentaire concernant $Dom\,\mathring{\delta}^n$

Nous allons terminer par un résultat qui montre que si $f \in Dom\,\mathring{\delta}^n$ et si $g \in Dom\,\mathring{\delta}^p$ alors $S(f \otimes g) \in Dom\,\mathring{\delta}^{n+p}$. Ce résultat est déjà énoncé par Sugita dans [19]. Il semble cependant utile d'en donner ici une démonstration à cause de la confusion faite dans [19] entre la notion d'appartenance à $Dom\,\mathring{\delta}^n$ et celle de nucléarité d'opérateur. Nous allons commencer par établir un lemme qui généralise le lemme 1.

LEMMA 5. – *Soit $k \in \mathbb{N}$. Soient $f \in \underline{H}^{\odot n}$ et $g \in \underline{H}^{\odot p}$ avec $n \geqslant k+1$ et $p \geqslant k+1$. Si Tf et Tg existent, alors $S(\int_{T^k} f(.,t) \otimes g(.,t)\, \mathrm{d}m^{\otimes k}(t))$ possède une trace et*:

$$\begin{aligned}
&T\left(S\left(\int_{T^k} f(.,t) \otimes g(.,t)\,\mathrm{d}m^{\otimes k}(t)\right)\right) \\
&\quad = \frac{1}{(n+p-2k)(n+p-2k-1)}\Bigg[(n-k)(n-k-1) \\
&\qquad \times S\left(\int_{T^k} Tf(.,t) \otimes g(.,t)\,\mathrm{d}m^{\otimes k}(t)\right) + (p-k)(p-k-1) \\
&\qquad \times S\left(\int_{T^k} f(.,t) \otimes Tg(.,t)\,\mathrm{d}m^{\otimes k}(t)\right)\Bigg] \\
&\qquad + \frac{2(n-k)(p-k)}{(n+p-2k)(n+p-2k-1)} S\left(\int_{T^{k+1}} f(.,t) \otimes g(.,t)\,\mathrm{d}m^{\otimes k+1}(t)\right)
\end{aligned}$$

(*si $n = 1$ on pose toujours $Tf = 0$*).

Remark 9. – Si f admet une trace, on ne peut pas affirmer que pour presque tout t dans T, $f(.,t)$ admet une trace. Il faudrait écrire :

$$\text{Pour presque tout} \quad t, \sum_{q=1}^{R} \langle f, e_q \otimes e_q \rangle (.,t) \xrightarrow[R\to\infty]{} Tf(.,t) \quad \text{dans } L^2.$$

Par contre, nous allons utiliser dans la démonstration du lemme le résultat suivant :

$$\int_{T^k} \sum_{q=1}^{R} \langle f, e_q \otimes e_q \rangle (., t)\, \mathrm{d}m^{\otimes k}(t) \underset{R\to\infty}{\longrightarrow} \int_{T^k} Tf(., t)\, \mathrm{d}m^{\otimes k}(t) \quad \text{dans } L^2.$$

Ce lemme ne peut donc pas être vu comme une conséquence du lemme 1.

Démonstration du lemme. – De la même façon que dans le lemme 1, on obtient, si (e_q) est une base de $\underline{H}$:

$$\begin{aligned}
&\left\langle S\Bigl(\int_{T^k} f(., t) \otimes g(., t)\, \mathrm{d}m^{\otimes k}(t)\Bigr), e_q \otimes e_q \right\rangle \\
&\quad = \frac{1}{(n+p-2k)(n+p-2k-1)} \Bigl[(n-k)(n-k-1) \\
&\qquad \times S\Bigl(\int_{T^k} \langle f, e_q \otimes e_q \rangle (., t) \otimes g(., t)\, \mathrm{d}m^{\otimes k}(t)\Bigr) + (p-k)(p-k-1) \\
&\qquad \times S\Bigl(\int_{T^k} f(., t) \otimes \langle g, e_q \otimes e_q \rangle (., t)\, \mathrm{d}m^{\otimes k}(t)\Bigr)\Bigr] \\
&\qquad + \frac{2(n-k)(p-k)}{(n+p-2k)(n+p-2k-1)} S\Bigl(\int_{T^k} \langle f, e_q \rangle (., t) \otimes \langle g, e_q \rangle (., t)\, \mathrm{d}m^{\otimes k}(t)\Bigr).
\end{aligned}$$

Puis on écrit :

$$\begin{aligned}
&\left\| \int_{T^k} \sum_{q=1}^{R} \langle f, e_q \otimes e_q \rangle (., t) \otimes g(., t)\, \mathrm{d}m^{\otimes k}(t) - \int_{T^k} Tf(., t) \otimes g(., t)\, \mathrm{d}m^{\otimes k}(t) \right\|^2 \\
&\quad = \int_{T^{n+p-2-2k}} \left[\int_{T^k} \left(\sum_{q=1}^{R} \langle f, e_q \otimes e_q \rangle (u, t) - Tf(u, t)\right) g(v, t)\, \mathrm{d}m^{\otimes k}(t)\right]^2 \\
&\qquad \times \mathrm{d}m^{\otimes n-2-k}(u)\, \mathrm{d}m^{\otimes p-k}(v) \\
&\quad \leqslant \left\| \sum_{q=1}^{R} \langle f, e_q \otimes e_q \rangle - Tf \right\|^2 \|g\|^2.
\end{aligned}$$

D’où :

$$\lim_{R\to\infty} \int_{T^k} \sum_{q=1}^{R} \langle f, e_q \otimes e_q \rangle (., t) \otimes g(., t)\, \mathrm{d}m^{\otimes k}(t) = \int_{T^k} Tf(., t) \otimes g(., t)\, \mathrm{d}m^{\otimes k}(t).$$

On traite de même le terme où on a échangé les rôles de f et g. Pour le dernier terme, on écrit :

$$\left\| \int_{T^k} \sum_{q=1}^{R} \langle f, e_q \rangle (., t) \otimes \langle g, e_q \rangle (., t)\, \mathrm{d}m^{\otimes k}(t) - \int_{T^{k+1}} f(., t) \otimes g(., t)\, \mathrm{d}m^{\otimes k+1}(t) \right\|^2$$

$$= \int \left[\int f(u,s,t) \left(\sum_{q=1}^{R} e_q(s) \langle g, e_q \rangle (v,t) - g(v,s,t) \right) \mathrm{d}m(s)\, \mathrm{d}m^{\otimes k}(t) \right]^2$$
$$\times\, \mathrm{d}m^{\otimes n-1-k}(u)\, \mathrm{d}m^{\otimes p-1-k}(v)$$
$$\leqslant \|f\|^2 \left\| \sum_{q=1}^{R} e_q \otimes \langle g, e_q \rangle - g \right\|^2.$$

Ce qui permet de conclure. □

PROPOSITION 9. – *Si* $f \in Dom\, \mathring{\delta}^n$ *et si* $g \in Dom\, \mathring{\delta}^p$ (*avec* $n \geqslant 1$ *et* $p \geqslant 1$) *alors* $S(f \otimes g) \in Dom\, \mathring{\delta}^{n+p}$ *et* $\mathring{\delta}^{n+p}(S(f \otimes g)) = \mathring{\delta}^n(f)\mathring{\delta}^p(g)$.

Proof. – Le lemme précédent permet de montrer que $S(f \otimes g) \in Dom\, \mathring{\delta}^{n+p}$. On reprend ensuite la démonstration de Sugita [19]. Soit (e_q) une base de $\underline{H}$, notons :

$$f_R = \sum_{i_1,\dots,i_n=1}^{R} \langle f, e_{i_1} \otimes \cdots \otimes e_{i_n} \rangle e_{i_1} \otimes \cdots \otimes e_{i_n}.$$

On définit de même g_R, $S(f \otimes g)_R$ et on note $A_R = \sum_{i=1}^{R} \delta(e_i)\, e_i$. D'après la proposition 1, $\mathring{\delta}^n(f_R)$ tend dans L^2 vers $\mathring{\delta}^n(f)$ (de même pour g_R et $S(f \otimes g)_R$). De plus :

$$\begin{aligned} \mathring{\delta}^n(f_R)\mathring{\delta}^p(g_R) &= \langle f, A_R^{\otimes n} \rangle \langle g, A_R^{\otimes p} \rangle \quad \text{(proposition 1)} \\ &= \langle S(f \otimes g), A_R^{\otimes n+p} \rangle \\ &= \mathring{\delta}^{n+p}\big(S(f \otimes g)_R\big). \qquad \square \end{aligned}$$

REFERENCES

[1] Balakrishnan A.V., Applied Functional Analysis, Springer-Verlag, New York, 1963.

[2] Budhiraja A., Kallianpur G., Hilbert space valued traces and multiples Stratonovich integrals with statistical applications, Probab. Math. Statist. 15 (1995) 127–163.

[3] Carmona R.A., Nualart D., Traces of random variables on Wiener space and Onsager–Machlup functional, J. Funct. Anal. 107 (2) (1992) 402–438.

[4] Gross L., Measurable Functions on Hilbert space, Trans. Amer. Math. Soc. 105 (1962) 372–390.

[5] Gross L., Abstract Wiener spaces, in: Proceedings of the Fifth Berkeley Symp. Math. Statist. Prob. II, Part I, 1967, pp. 31–42.

[6] Hargé G., A particular case of correlation inequality for the Gaussian measure, Ann. Probab. 27 (4) (1999) 1939–1951.

[7] Hargé G., Limites approximatives sur l'espace de Wiener, à paraître dans Potential Analysis.

[8] Hu Y.Z., Meyer P.A., Sur les intégrales multiples de Stratonovitch, in : Séminaire de probabilités XXII, pp. 72–81

[9] Itô K., Multiple Wiener integral, J. Math. Soc. Japan 3 (1951) 157–169.

[10] Johnson G.W., Kallianpur G., Homogeneous chaos, p-forms, scaling and the Feynman integral, Trans. Amer. Math. Soc. 340 (2) (1993) 503–548.

[11] Kuo H.H., Gaussian measures in Banach spaces, Lecture Notes in Math., Vol. 463, Springer, Berlin, 1975.
[12] Nualart D., The Malliavin Calculus and Related Topics, Springer-Verlag, Berlin, 1995.
[13] Nualart D., Zakai M., Generalized stochastic integrals and the Malliavin calculus, Probab. Theory Related Fields 73 (1986) 255–280.
[14] Nualart D., Zakai M., On the relation between the Stratonovitch and Ogawa integrals, Ann. Probab. 17 (1989) 1536–1540.
[15] Ogawa S., Sur le produit direct du bruit blanc par lui-même, C. R. Acad. Sci. Paris (Série A) 288 (1979) 359–362.
[16] Ogawa S., Quelques propriétés de l'intégrale stochastique du type non causal, Japan J. Appl. Math. 1 (1984) 405–416.
[17] Rosinski J., On stochastic integration by series of Wiener integrals, Appl. Math. Optim. 19 (1989) 137–155.
[18] Shepp L.A., Zeitouni O., A note on conditional exponential moments and Onsager–Machlup functionals, Ann. Probab. 20 (1992) 652–654.
[19] Sugita H., Hu–Meyer's mutiple Stratonovich integral and essential continuity of multiple Wiener integral, Bull. Sci. Math. 113 (1989) 463–474.
[20] Sugita H., Various topologies in the Wiener space and Lévy's stochastic area, Probab. Theory Related Fields 91 (3/4) (1992) 283–296.
[21] Sugita H., Taniguchi S., Oscillatory integrals with quadratic phase function on a real abstract Wiener space, J. Funct. Anal. 155 (1998) 229–262.
[22] Solé J.L., Utzet F., Stratonovitch integral and trace, Stochastics and Stochastics Reports 29 (2) (1990) 203–220.