ANNALES DE L'I. H. P., SECTION B

C. COCOZZA-THIVENT
M. ROUSSIGNOL

Techniques de couplage en fiabilité

Annales de l'I. H. P., section B, tome 31, nº 1 (1995), p. 119-141
<http://www.numdam.org/item?id=AIHPB_1995__31_1_119_0>

Ann. Inst. Henri Poincaré, (In Memoriam C. KIPNIS)

Vol. 31, n° 1, 1995, p. 119-141. *Probabilités et Statistiques*

Techniques de couplage en fiabilité

par

C. COCOZZA-THIVENT

Équipe d'Analyse et de Mathématiques Appliquées,
Université de Marne la Vallée, 2, rue de la Butte Verte,
93166 Noisy le Grand Cedex, France.

et

M. ROUSSIGNOL

Laboratoire de Statistique et Probabilités,
Université des Sciences et Technologies de Lille,
59655 Villeneuve d'Ascq Cedex, France.

ABSTRACT. – We use coupling methods to compare reliability and other related variables of complex systems made with interacting components, reparaible or not. As an application, we obtain an upper bound for the mean time to failure.

Key words: Coupling method, reliability, availability, mean time to failure, Markov processes.

1. INTRODUCTION

Les techniques de couplage entre variables aléatoires et entre processus ont été utilisées dans de nombreux domaines des probabilités (*cf.* [3] pour un panorama complet). Dans le cadre du groupe de travail animé par C. Kipnis qui dans les années 1980 étudiait les systèmes infinis de particules, nous

Classification A.M.S.: 60 J 27, 90 B 25.

avons été amenés à étudier et utiliser ces méthodes (*cf.* [1] et [2]). Dans cet article nous reprenons des techniques semblables dans un cadre nouveau, celui de l'étude de la fiabilité d'un système de composants réparables dont les taux de défaillance et de réparation sont constants.

Les processus markoviens de sauts fournissent un modèle pour l'étude de tels systèmes (*cf.* [4]). On dispose alors de formules matricielles pour calculer la fiabilité, la disponibilité et le temps moyen de première panne du système. Cependant quand le nombre de composants est important, ces formules ne sont pas calculables analytiquement et il n'est pas possible de repérer dans ces formules l'influence de tel ou tel coefficient sur la fiabilité ou la disponibilité. Pourtant on se doute bien que si on diminue le taux de défaillance ou si on augmente le taux de réparation d'un composant, la fiabilité et la disponibilité du système vont augmenter.

Nous proposons une méthode de couplage qui permet de démontrer ce type de résultat. Dans le paragraphe 2 nous donnons une représentation de la matrice génératrice du processus adaptée à notre problème. Nous décrivons ensuite un exemple de système soumis à des défaillances de mode commun et comportant des composants en redondance passive. Cet exemple correspond à des systèmes réels; il est suffisamment complexe pour que les dépendances de la fiabilité et de la disponibilité vis-à-vis des différents paramètres ne soient pas simples à démontrer, même s'ils sont intuitivement clairs. Dans le paragraphe 3 nous introduisons la notion de couplage croissant qui permet de comparer deux processus. Dans le paragraphe 4 nous définissons le couplage de base. Dans le paragraphe 5, nous introduisons un couplage plus sophistiqué qui permet de traiter l'exemple générique introduit dans le premier paragraphe. Enfin dans le dernier paragraphe, nous appliquons cette technique de couplage pour obtenir un encadrement du temps moyen de première panne du système.

2. LE PROCESSUS ASSOCIÉ À UN SYSTÈME DE COMPOSANTS RÉPARABLES

Nous nous proposons d'étudier un système formé d'un nombre fini de composants. Chaque composant peut être en bon état ou en panne. Un composant en bon état peut être en fonctionnement ou en attente s'il sert de composant de secours. On note C l'ensemble des composants. Pour tout composant x on peut prendre comme ensemble d'états $E_x = \{0, 1\}$ où 1 représente le cas où x est en bon état et 0 le cas où x est en panne.

L'ensemble des états possible du système vaut $E = \prod_{x \in C} E_x$. Si η est une configuration de E, on identifie souvent η avec la partie de C égale à $\{x \in C / \eta(x) = 1\}$. Parmi ces états, certains correspondent à un état de panne du système, les autres à un état de marche du système. Nous noterons $\mathcal{P}$ la partie de E correspondant aux pannes du système et $\mathcal{M}$ la partie de E correspondant aux états de marche du système ($\mathcal{M}$ est le complément de $\mathcal{P}$ dans E).

L'ensemble E_x des états de chaque composant x est ordonné naturellement en supposant que l'état 1 est plus grand que l'état 0. La relation d'ordre sur les E_x induit une relation d'ordre sur E. La configuration η_1 est plus petite que la configuration η_2 si $\eta_1 \subset \eta_2$. On va supposer le système cohérent, c'est-à-dire que si un état η de E est dans $\mathcal{M}$, alors tout état plus grand que η est encore dans $\mathcal{M}$, et que si un état η de E est dans $\mathcal{P}$, alors tout état plus petit que η est encore dans $\mathcal{P}$.

Les composants sont réparables. Le système évolue dans le temps. Il passe de marche en panne et de panne en marche suivant l'évolution de l'état de ses composants. On suppose que l'évolution temporelle de l'état du système est décrite par un processus markovien de sauts homogène à valeurs dans E. On note A la matrice génératrice de ce processus :

$$A f(\eta) = \sum_{v \in E} A(\eta, \nu)(f(\nu) - f(\eta))$$

pour une fonction f de E dans $\mathbb{R}$.

Différents types de transitions peuvent être considérés. Si les transitions consistent en le changement d'un seul composant à la fois, la matrice génératrice A peut s'écrire :

$$A f(\eta) = \sum_{x \in C} \sum_{j \in E_x} b(\eta, \{x\}, j)(f(\eta^{x, j}) - f(\eta))$$

en notant $b(\eta, \{x\}, j)$ l'élément de la matrice génératrice correspondant au saut de la configuration η à la configuration $\eta^{x, j}$ définie par : $\eta^{x, j}(x) = j$ et $\eta^{x, j}(y) = \eta(y) \, \forall y \neq x$.

Plus généralement, si des transitions consistent en le changement de plusieurs composants à la fois, la matrice génératrice A peut s'écrire :

$$A f(\eta) = \sum_{B \subset C} A_B f(\eta)$$

avec

$$A_B f(\eta) = \sum_{\xi \in E_B} b(\eta, B, \xi)(f(\eta^{B, \xi} - f(\eta)) \tag{2.1}$$

où B est une partie de l'ensemble C des composants, $E_B = \prod_{x \in B} E_x$ représente l'ensemble des configurations possibles pour les composants dans B et pour ξ dans E_B la configuration $\eta^{B,\xi}$ est la configuration égale à ξ sur B et à η en dehors de B. Le nombre $b(\eta, B, \xi)$ est l'élément de la matrice génératrice correspondant au saut de la configuration η à la configuration $\eta^{B,\xi}$. Cette représentation de la patrice génératrice n'est pas unique. Dans la suite on choisira une représentation de ce type adaptée au couplage que l'on cherchera à réaliser.

On suppose que les seules transitions possibles correspondent soit à une détérioration soit à une amélioration du système. Cela signifie que les coefficients $b(\eta, B, \xi)$ sont nuls lorsque la configuration ξ n'est pas soit plus petite, soit plus grande que la restriction de η à B. Cette hypothèse amène à une nouvelle écriture de la matrice génératrice. Pour ceci on note η/B la restriction à B de la configuration η et on définit les quantités :

$$L(\eta, B) = \sum_{\{\xi \subset \eta/B\}} b(\eta, B, \xi)$$

$$p(\eta, B, \xi) = \frac{b(\eta, B, \xi)}{L(\eta, B)} \quad \text{si} \quad \xi \in E_B,\ \xi \subset \eta/B \quad \text{et} \quad L(\eta, B) \neq 0$$

$$M(\eta, B) = \sum_{\{\xi \supset \eta/B\}} b(\eta, B, \xi)$$

$$q(\eta, B, \xi) = \frac{b(\eta, B, \xi)}{M(\eta, B)} \quad \text{si} \quad \xi \in E_B,\ \xi \supset \eta/B \quad \text{et} \quad M(\eta, B) \neq 0.$$

On peut se représenter les coefficients $L(\eta, B)$ et $M(\eta, B)$ comme des taux de défaillance et de réparation globaux sur B. Les quantités $\{p(\eta, B, \xi), \xi \subset \eta/B\}$ (respectivement $\{q(\eta, B, \xi), \xi \supset \eta/B\}$) sont des lois de probabilité sur les configurations de B dégradées par rapport à η (respectivement améliorées par rapport à η).

On peut alors écrire :

$$\begin{aligned} A_B f(\eta) &= \sum_{\{\xi \subset \eta/B\}} b(\eta, B, \xi)(f(\eta^{B,\xi}) - f(\eta)) \\ &\quad + \sum_{\{\xi \supset \eta/B\}} b(\eta, B, \xi)(f(\eta^{B,\xi}) - f(\eta)) \\ &= L(\eta, B) \sum_{\{\xi \subset \eta/B\}} p(\eta, B, \xi)(f(\eta^{B,\xi}) - f(\eta)) \\ &\quad + M(\eta, B) \sum_{\{\xi \supset \eta/B\}} q(\eta, B, \xi)(f(\eta^{B,\xi}) - f(\eta)) \quad (2.2) \end{aligned}$$

Pour illuster ceci, nous allons étudier un système (S) formé de plusieurs types de composants. Un ensemble $C_D = \{x_1, \ldots, x_p\}$ est formé de p composants doublés par un ensemble $C_S = \{y_1, \ldots, y_p\}$ de p composants de secours. Chaque composant y_j est en redondance passive par rapport au composant $x_j\,(1 \leqq j \leqq p)$. Un ensemble $C_I = \{c_1, \ldots, c_n\}$ est formé de n composants non doublés. L'ensemble C est la réunion des ensembles C_I, C_D et C_S. Lorsque la configuration du système vaut η, chaque composant x de C a un taux de défaillance égal à $\lambda(x, \eta)$ et un taux de réparation égal à $\mu(x, \eta)$. Le fait que le taux de défaillance de x puisse dépendre de la configuration η du système permet de tenir compte du fait que le composant x peut être plus ou moins sollicité suivant l'état des autres composants (nous verrons un exemple ci-dessous dans le cas de la redondance passive). La dépendance (éventuelle) en η du taux de réparation permet par exemple de tenir compte d'un nombre de réparateurs limité et d'une priorité que l'on s'est donnée dans l'ordre des réparations.

Les pannes et les réparations d'un composant c de C_I sont décrits par un terme $A_{\{c\}}$ du générateur dont les coefficients valent :

– si $\eta(c) = 0\; b(\eta, \{c\}, 1) = M(\eta, \{c\}) = \mu(c, \eta)$

d'où $q(\eta, \{c\}, 1) = 1$

– si $\eta(c) = 1\; b(\eta, \{c\}, 0) = L(\eta, \{c\}) = \lambda(c, \eta)$

d'où $p(\eta, \{c\}, 0) = 1$.

Les lois de probabilité p et q sont dégénérées puisqu'il y a une seule valeur possible pour ξ dans chaque cas. Lorsque les taux de réparation et de défaillance $\mu(x, \eta)$ et $\lambda(x, \eta)$ ne dépendent que du composant x et non de l'état des autres composants, l'évolution de l'état de chaque composant se fait indépendamment des autres composants.

Deux composants x de C_D et y de C_S en redondance passive interagissent de la manière suivante. Ces composants ont des taux de défaillancce $\lambda(x, \eta)$ et $\lambda(y, \eta)$ et des taux de réparation $\mu(x, \eta)$ et $\mu(y, \eta)$. Le composant y est un composant de secours pour le composant x. Lorsque x fontionne, y est en attente et ne peut donc pas tomber en panne. Lorsque x tombe en panne et y est en attente, on essaie de démarrer instantanément y, celui-ci refuse de démarrer (et passe donc instantanément en panne) avec probabilité $\gamma(y)\; (0 \leq \gamma(y) \leq 1)$ et il se met instantanément en marche avec probabilité $1 - \gamma(y)$. On définit alors trois termes $A_{\{x\}}$, $A_{\{y\}}$,et $A_{\{x, y\}}$.

Les termes $A_{\{x\}}$ et $A_{\{y\}}$, traduisent les réparations des composants x et y. Ces termes sont de la même forme; si z est égal à x ou à y alors :

– si $\eta(z) = 0$ on a $b(\eta, \{z\}, 1) = \mu(z, \eta)$

d'où $M(\eta, \{z\}) = \mu(z, \eta)$ et $q(\eta, \{z\}, 1) = 1$;

– si $\eta(z) = 1$ on a $b(\eta, \{z\}, 0) = L(\eta, \{z\}) = 0$.

Les termes $A_{\{z\}}$ pour $z \in C_D \cup C_S$ sont donc différents des termes $A_{\{z\}}$ pour $z \in C_I$.

Le terme $A_{\{x,y\}}$ traduit les pannes des composants x et y. La redondance passive impose la description des pannes par $A_{\{x,y\}}$ et non pas par $A_{\{x\}}$ et $A_{\{y\}}$. Les coefficients non nuls de $A_{\{x,y\}}$ valent :

– si $\{\eta(x), \eta(y)\} = \{1, 0\}$ on a $b(\eta, \{x, y\}, \{0, 0\}) = \lambda(x, \eta)$

d'où $L(\eta, \{x, y\}) = \lambda(x, \eta)$ et $p(\eta, \{x, y\}, \{0, 0\}) = 1$

– si $\{\eta(x), \eta(y)\} = \{0, 1\}$ on a $b(\eta, \{x, y\}, \{0, 0\}) = \lambda(x, \eta)$

d'où $L(\eta, \{x, y\}) = \lambda(y, \eta)$ et $p(\eta, \{x, y\}, \{0, 0\}) = 1$

– si $\{\eta(x), \eta(y)\} = \{1, 1\}$ on a

- $b(\eta, \{x, y\}, \{0, 0\}) = \gamma(y)\,\lambda(x, \eta)$
- $b(\eta, \{x, y\}, \{0, 1\}) = (1 - \gamma(y))\,\lambda(x, \eta)$

d'où

- $L(\eta, \{x, y\}) = \lambda(x, \eta)$
- $p(\eta, \{x, y\}, \{0, 0\}) = \gamma(y)$
- $p(\eta, \{x, y\}, \{0, 1\}) = 1 - \gamma(y)$.

On suppose que des défaillances de mode commun peuvent apparaître. Lorsque la configuration du système vaut η un événement arrive avec un taux $\Lambda(\eta)$ et entraîne la défaillance de chaque composant x de C en bon état avec une probabilité $m(x, \eta)$ et ceci indépendamment des autres composants. Certains composants, par exemple les composants alors en attente, peuvent ne pas être affectés et pour ceux-ci la probabilité $m(x, \eta)$ est nulle. Lorsqu'un composant x_j de C_D est affecté, le composant y_j de secours, s'il est encore en bon état, se met en marche avec la probabilité $1 - \gamma(y_j)$ et tombe en panne avec la probabilité $\gamma(y_j)$. Le terme A_C qui s'ajoute au générateur pour décrire ces défaillances a un coefficient de défaillance global égal à $\Lambda(\eta)$ et une loi de probabilité $(p(\eta, C, \xi), \xi \subset \eta)$ qui vaut pour $\xi \subset \eta$:

$$p(\eta, C, \xi) = \prod_{i=1}^{n} P_I(\eta, \eta(c_i), \xi(c_i)) \prod_{j=1}^{p} P_{D,S}(\eta, \eta(x_j), \eta(y_j), \xi(x_j), \xi(y_j))$$

avec $P_I(\eta, \eta(c), \xi(c))$ la probabilité en $\xi(c)$ définie pour tout $\eta(c)$ par :

$\xi(c)$ \ $\eta(c)$	0	1
0	1	0
1	$m(c, \eta)$	$1 - m(c, \eta)$

et $P_{D,S}(\eta, \eta(x), \eta(y), \xi(x), \xi(y))$ la probabilité en $(\xi(x), \xi(y))$ définie pour tout $(\eta(x), \eta(y))$ par le tableau suivant dans lequel chaque ligne (resp. chaque colonne) correspond aux différentes valeurs de $(\eta(x), \eta(y))$ (resp. $(\xi(x), \xi(y))$:

	(0, 0)	(0, 1)	(1, 0)	(1, 1)
(0, 0)	1	0	0	0
(0, 1)	$m(y, \eta)$	$1 - m(y, \eta)$	0	0
(1, 0)	$m(x, \eta)$	0	$1 - m(x, \eta)$	0
(1, 1)	$\gamma(y)\, m(x, \eta)\,[1 - m(y, \eta)] + m(x, \eta)\, m(y, \eta)$	$m(x, \eta)\,[1 - \gamma(y)] \times [1 - m(y, \eta)]$	$[1 - m(x, \eta)]\, m(y, \eta)$	$[1 - m(x, \eta)]\,[1 - m(y, \eta)]$

Alors le générateur associé au système (S) vaut :

$$A = \sum_{i=1}^{n} A_{\{c_i\}} + \sum_{j=1}^{p} (A_{\{x_j\}} + A_{\{y_j\}} + A_{\{x_j, y_j\}}) + A_C.$$

Les coefficients qui interviennent dans ce générateur et qui déterminent l'évolution du système (S) sont les taux de défaillance $\lambda(x, \eta)$ et de réparation $\mu(x, \eta)$ des composants x, les probabilités de refus de démarrage $\gamma(y)$ des composantes de secours y, le taux d'arrivée $\Lambda(\eta)$ du mode commun et les probabilités $m(x, \eta)$ que le composant x soit affecté par ce mode commun.

3. COUPLAGE CROISSANT

Pour pouvoir comparer deux évolutions lorsque les paramètres sont différents, ou lorsque l'état initial est différent, nous allons chercher à définir un processus couplé, c'est-à-dire un processus markovien de sauts à valeurs dans $E \times E$ dont chaque composante est un processus markovien de sauts dont les caractéristiques respectives sont celles des deux évolutions à comparer.

DÉFINITION 3.1. – *Soient deux processus markoviens de sauts à valeurs dans E associés aux matrices génératrices A_1 et A_2. Nous dirons qu'il existe un couplage croissant entre ces deux processus (ou plus simplement un couplage croissant pour le processus considéré si $A_1 = A_2$) s'il existe un processus markovien de sauts $(\eta^1(t), \eta^2(t))_{t\geq 0}$ à valeurs dans $E \times E$ tel que :*

– les processus $(\eta^1(t))_{t\geq 0}$ et $(\eta^2(t))_{t\geq 0}$ sont des processus markoviens de sauts de matrices génératrices A_1 et A_2 respectivement,

– si les configurations initiales η^1 et η^2 sont telles que $\eta^1 \subset \eta^2$, alors à tout instant t les configurations $\eta^1(t)$ et $\eta^2(t)$ sont telles que $\eta^1(t) \subset \eta^2(t)$.

L'existence d'un couplage croissant entre deux processus markoviens permet de comparer leurs évolutions. On peut en particulier comparer les disponibilités et fiabilités des systèmes de composants associés. Pour le processus i ($i = 1$ ou 2), lorsque l'état initial vaut η_i, on note $R_i(t, \eta_i)$ la fiabilité du système au temps t, $MTTF_i(\eta_i)$ le temps moyen de première panne du système et $D_i(t, \eta_i)$ la disponibilité du système.

PROPOSITION 3.2. – *Si les évolutions temporelles de deux systèmes cohérents sont décrites par deux processus markoviens de sauts de matrices génératrices A_1 et A_2 et s'il existe un couplage croissant entre ces deux processus, alors pour tous états initiaux η_1 et η_2 tels que $\eta_1 \subset \eta_2$ et tout temps t nous avons :*

$$R_1(t, \eta_1) \leq R_2(t, \eta_2)$$
$$D_1(t, \eta_1) \leq D_2(t, \eta_2)$$
$$MTTF_1(\eta_1) \leq MTTF_2(\eta_2)$$

Démonstration. – L'existence du couplage croissant implique que pour tout temps t, $\eta_1(t) \subset \eta_2(t)$. Les inégalités sont alors claires puisque dans ce cas $\eta_2(t) \in \mathcal{P}$ implique $\eta_1(t) \in \mathcal{P}$ et $\eta_1(t) \in \mathcal{M}$ implique $\eta_2(t) \in \mathcal{M}$. ■

Il est donc possible de comparer deux processus différents admettant un couplage croissant partant de deux configurations initiales emboîtées. Il est aussi possible de comparer l'évolution du même système partant de deux configurations initiales emboîtées si ce processus admet un couplage croissant.

4. LE COUPLAGE DE BASE

Si A_1 et A_2 sont les générateurs de deux processus markoviens de sauts de paramètres $b_1(\eta, B, \xi)$ et $b_2(\eta, B, \xi)$, nous écrivons pour $i = 1$ et 2 :

$$A_i f(\eta) = \sum_{B \subset C} \sum_{\{\xi \in E_B\}} b_i(\eta, B, \xi)(f(\eta^{B,\xi}) - f(\eta))$$

et nous supposons comme dans le paragraphe 2 que les coefficients $b_i(\eta, B, \xi)$ sont nuls lorsque la configuration ξ n'est pas soit plus petite, soit plus grande que la restriction de η à B.

Dans toute la suite, nous noterons $a \wedge b$ le minimum de a et b, $a \vee b$ le maximum de a et b et a_+ le maximum de a et de 0.

Nous définissons alors une matrice $\underline{A}$ sur $\{E \times E, E \times E\}$ de la manière suivante :

$$\underline{A} f(\eta_1, \eta_2) = \sum_{B \subset C} \underline{A}_B f(\eta_1, \eta_2) \tag{4.1}$$

pour toute fonction f de $E \times E$ dans $\mathbb{R}$, avec :

$$\begin{aligned} &\underline{A}_B f(\eta_1, \eta_2) \\ &\quad = \sum_{\{\xi \in E_B\}} b_1(\eta_1, B, \xi) \wedge b_2(\eta_2, B, \xi)(f(\eta_1^{B,\xi}, \eta_2^{B,\xi}) - f(\eta_1, \eta_2)) \\ &\qquad + \sum_{\{\xi \in E_B\}} [b_1(\eta_1, B, \xi) - b_1(\eta_1, B, \xi) \wedge b_2(\eta_2, B, \xi)] \\ &\qquad \times (f(\eta_1^{B,\xi}, \eta_2) - f(\eta_1, \eta_2)) \\ &\qquad + \sum_{\{\xi \in E_B\}} [b_2(\eta_2, B, \xi) - b_1(\eta_1, B, \xi) \wedge b_2(\eta_2, B, \xi)] \\ &\qquad \times (f(\eta_1, \eta_2^{B,\xi}) - f(\eta_1, \eta_2)) \end{aligned}$$

PROPOSITION 4.1. – *La matrice $\underline{A}$ réalise un couplage de A_1 et A_2, c'est-à-dire qu'elle est la matrice génératrice d'un processus markovien de sauts à valeurs dans $E \times E$ dont les processus marginaux sont des processus markoviens de sauts associés aux matrices génératrices A_1 et A_2.*

Démonstration. – Il suffit de montrer que si la fonction f de $E \times E$ dans $\mathbb{R}$ ne dépend que d'une coordonnée, alors $\underline{A} f$ est égal à $A_1 f$ ou $A_2 f$. Par exemple si $f(\eta_1, \eta_2) = g(\eta_1)$, il est facile de voir que $\underline{A} f(\eta_1, \eta_2) = A_1 g(\eta_1)$. ■

Pour obtenir la propriété de couplage croissant, il faut que dans le processus couplé les transitions qui risqueraient de détruire l'ordre entre les deux configurations n'existent pas. La proposition suivante donne des conditions pour cela.

PROPOSITION 4.2. – *Si les conditions suivantes sont vérifiées pour tout ensemble B de composants et toutes configurations η_1 et η_2 telles que $\eta_1 \subset \eta_2$:*

1) *si* $\xi \subset \eta_1/B : b_1(\eta_1, B, \xi) \geq b_2(\eta_2, B, \xi)$

2) *si* $\xi \supset \eta_2/B : b_1(\eta_1, B, \xi) \leq b_2(\eta_2, B, \xi)$

alors il existe un couplage croissant entre les processus associés aux matrices génératrices A_1 et A_2 définies par la formule (2.1)

Démonstration. – Si $f(\eta_1, n_2)$ est égale à la fonction indicatrice de l'événement $\{\eta_1 \subset \eta_2\}$, on constate que : $\underline{A} f(\eta_1, \eta_2) = 0$. Il est alors facile d'en déduire la propriété. ■

Pour illustrer les résultats précédents, reprenons l'exemple décrit dans le paragraphe précédent. D'abord dans le cas simple où il n'existe qu'un seul ensemble C_I de composants non doublés et où il n'y a pas de défaillance de mode commun, ont constate que les conditions d'existence d'un couplage croissant entre deux systèmes ayant des taux de défaillance et de réparation différents s'écrivent pour tout composant x et toutes configurations η_1 et η_2 telles que $\eta_1 \subset \eta_2$:

– $\lambda_1(x, \eta_1) \geq \lambda_2(x, \eta_2)$ lorsque $\eta_1(x) = 1 (= \eta_2(x))$

– $\mu_1(x, \eta_1) \leq \mu_2(x, \eta_2)$ lorsque $\eta_2(x) = 0 (= \eta_1(x))$.

Ces conditions sont naturelles. Lorsque l'on considère l'exemple avec des composants doublés, on obtient en plus des conditions précédentes les conditions suivantes pour tout couple x et y en redondance passive :

– $(1 - \gamma_1(y)) \lambda_1(x, \eta_1) \geq (1 - \gamma_2(y)) \lambda_2(x, \eta_2)$ lorsque $\eta_1(x) = 1 (= \eta_2(x))$

– $\gamma_1(y) \lambda_1(x, \eta_1) \geq \gamma_2(y) \lambda_2(x, \eta_2)$ lorsque $\eta_1(x) = 1 (= \eta_2(x))$.

Ces conditions ne sont pas satisfaisantes. Si on ajoute la possibilité de défaillances de mode commun, les conditions obtenues dans ce cas aussi ne sont pas satisfaisantes. On est alors amené à définir un couplage plus sophistiqué.

5. UN COUPLAGE PLUS SOPHISTIQUÉ

Si A_1 et A_2 sont les générateurs de deux processus markoviens de sauts de paramètres $b_1(\eta, B, \xi)$ et $b_2(\eta, B, \xi)$, nous écrivons comme dans le paragraphe 2 pour $i = 1$ et 2 :

$$A_i f(\eta) = \sum_{B \subset C} A_{i,B} f(\eta)$$

avec

$$\begin{aligned} A_{i,B} f(\eta) = {} & L_i(\eta, B) \sum_{\{\xi \subset \eta / B\}} p_i(\eta, B, \xi)(f(\eta^{B,\xi}) - f(\eta)) \\ & + M_i(\eta, B) \sum_{\{\xi \supset \eta / B\}} q_i(\eta, B, \xi)(f(\eta^{B,\xi}) - f(\eta)) \end{aligned}$$

Nous définissons alors une matrice $\underline{A}$ sur $\{E \times E, E \times E\}$ de la manière suivante pour toute fonction f de $E \times E$ dans $\mathbb{R}$:

$$\underline{A} f(\eta_1, \eta_2) = \sum_{B \subset C} \underline{A}_B f(\eta_1, \eta_2) \tag{5.1}$$

avec

$$\begin{aligned} & \underline{A}_B f(\eta_1, \eta_2) \\ & = L_1(\eta_1, B) \wedge L_2(\eta_2, B) \sum_{\{\xi_1 \subset \eta_1 / B, \xi_2 \subset \eta_2 / B\}} \underline{p}(\eta_1, \eta_2, B, \xi_1, \xi_2) \\ & \quad \times (f(\eta_1^{B,\xi_1}, \eta_2^{B,\xi_2}) - f(\eta_1, \eta_2)) \\ & \quad + [L_1(\eta_1, B) - L_1(\eta_1, B) \wedge L_2(\eta_2, B)] \sum_{\{\xi \subset \eta_1 / B\}} p_1(\eta_1, B, \xi) \\ & \quad \times (f(\eta_1^{B,\xi}, \eta_2) - f(\eta_1, \eta_2)) \\ & \quad + [L_2(\eta_2, B) - L_1(\eta_1, B) \wedge L_2(\eta_2, B)] \sum_{\{\xi \subset \eta_2 / B\}} p_2(\eta_2, B, \xi) \\ & \quad \times (f(\eta_1, \eta_2^{B,\xi}) - f(\eta_1, \eta_2)) \\ & \quad + [M_1(\eta_1, B) \wedge M_2(\eta_2, B) \sum_{\{\xi_1 \supset \eta_1 / B, \xi_2 \supset \eta_2 / B\}} \underline{q}(\eta_1, \eta_2, B, \xi_1, \xi_2) \\ & \quad \times (f(\eta_1^{B,\xi_1}, \eta_2^{B,\xi_2}) - f(\eta_1, \eta_2)) \end{aligned}$$

$$+ [M_1(\eta_1, B) - M_1(\eta_1, B) \wedge M_2(\eta_2, B)] \sum_{\{\xi \supset \eta_1/B\}} q_1(\eta_1, B, \xi)$$
$$\times (f(\eta_1^{B,\xi}, \eta_2) - f(\eta_1, \eta_2))$$
$$+ [M_2(\eta_2, B) - M_1(\eta_1, B) \wedge M_2(\eta_2, B)] \sum_{\{\xi \supset \eta_2/B\}} q_2(\eta_2, B, \xi)$$
$$\times (f(\eta_1, \eta_2^{B,\xi}) - f(\eta_1, \eta_2))$$

où $\{\underline{p}(\eta_1, \eta_2, B, \xi_1, \xi_2);\ \xi_1 \subset \eta_1/B,\ \xi_2 \subset \eta_2/B\}$ est une loi de probabilité en ξ_1 et ξ_2 de lois marginales égales à $\{p_1(\eta_1, B, \xi_1);\ \xi_1 \subset \eta_1/B\}$ et $\{p_2(\eta_2, B, \xi_2);\ \xi_2 \subset \eta_2/B\}$ et où $\{\underline{q}(\eta_1, \eta_2, B, \xi_1, \xi_2);\ \xi_1 \supset \eta_1/B,\ \xi_2 \supset \eta_2/B\}$ est une loi probabilité en ξ_1 et ξ_2 de lois marginales égales à $\{q_1(\eta_1, B, \xi_1);\ \xi_1 \supset \eta_1/B\}$ et $\{q_2(\eta_2, B, \xi_2);\ \xi_2 \supset \eta_2/B\}$. On dira que la loi de probabilité $\underline{p}$ (resp. $\underline{q}$) sur $E_B \times E_B$ réalise un couplage des lois de probabilité p_1 et p_2 (resp. q_1 et q_2) sur E_B.

PROPOSITION 5.1. – *La matrice $\underline{A}$ réalise un couplage de A_1 et A_2, c'est à dire qu'elle est la matrice génératrice d'un processus markovien de sauts à valeurs dans $E \times E$ dont les processus marginaux sont des processus markoviens de sauts associés aux matrices génératrices A_1 et A_2.*

La démonstration est analogue à celle de la proposition 4.1.

Nous allons donner des conditions pour que ce couplage réalise un couplage croissant.

PROPOSITION 5.2. – *Si les conditions suivantes sont vérifiées pour tout ensemble B de composants et toutes configurations η_1 et η_2 telles que $\eta_1 \subset \eta_2$:*

1) $L_1(\eta_1, B) \geq L_2(\eta_2, B)$

2) *si $L_2(\eta_2, B) > 0$, il existe une loi de probabilité $\underline{p}(\eta_1, \eta_2, B, \xi_1, \xi_2)$ en (ξ_1, ξ_2) tels que $\xi_1 \subset \eta_1/B$ et $\xi_2 \subset \eta_2/B$ qui couple les lois de probabilités $p_1(\eta_1, B, \xi_1)$ et $p_2(\eta_2, B, \xi_2)$ et telle que :*

$$\underline{p}(\eta_1, \eta_2, B, \xi_1, \xi_2) = 0 \qquad si \quad \xi_1 \not\subset \xi_2$$

3) $M_1(\eta_1, B) \leq M_2(\eta_2, B)$

4) *si $M_1(\eta_1, B) > 0$, il existe une loi de probabilité $\underline{q}(\eta_1, \eta_2, B, \xi_1, \xi_2)$ en (ξ_1, ξ_2) tels que $\xi_1 \supset \eta_1/B$ et $\xi_2 \supset \eta_2/B$ qui couple les lois de probabilités $q_1(\eta_1, B, \xi_1)$ et $q_2(\eta_2, B, \xi_2)$ et telle que :*

$$\underline{q}(\eta_1, \eta_2, B, \xi_1, \xi_2) = 0 \qquad si \quad \xi_1 \not\subset \xi_2.$$

alors il existe un couplage croissant entre les processus associés aux matrices génératrices A_1 A_2 définies par les formules (2.1) *et* (2.2).

La démonstration est analogue à celle de la proposition 4.2.

Les conditions de croissance de la proposition précédente sont de deux types. les conditions 1) et 3) se vérifient directement. Par contre les conditions 2) et 4) sur les lois couplées $\underline{p}$ et $\underline{q}$ nécessitent d'abord la construction de ces lois. Lorsqu'au moins une des lois à coupler est concentrée sur une seule configuration ξ, un seul couplage est possible. Par exemple si $p_1(\eta_1, B, \xi) = 1$ pour une configuration $\xi \subset \eta_1/B$, alors $\underline{p}(\eta_1, \eta_2, B, \xi_1, \xi_2)$ vaut 0 si ξ_1 est différent de ξ et vaut $p_2(\eta_2, B, \xi_2)$ si ξ_1 est égal à ξ. Dans ce cas la condition 2) devient : $p_2(\eta_2, B, \xi_2) = 0$ si $\xi \not\subset \xi_2$. Lorsque aucune des lois à coupler n'est dégénérée, il faut construire explicitement un couplage.

Nous allons traduire les conditions de la proposition 4.2 pour le système (S) défini dans le premier paragraphe. Nous supposons que nous disposons de deux jeux de coefficients pour le système (S) indexés par 1 ou 2.

Nous avons vu que pour les composants x de C_I les quantités $M(\eta, \{x\})$ et $L(\eta, \{x\})$ sont égales à $\mu(x, \eta)$ et $\lambda(x, \eta)$ et les lois de probabilité $p(\eta, \{x\}, \xi)$ et $q(\eta, \{x\}, \xi)$ sont concentrées sur une seule valeur. Les conditions de croissance s'écrivent alors :

$$\text{si} \quad \eta_1 \subset \eta_2 : \begin{cases} \mu_1(x, \eta_1) \leq \mu_2(x, \eta_2) \text{ lorsque } \eta_2(x) = 0 \, (= \eta_1(x)) \\ \lambda_2(x, \eta_2) \leq \lambda_1(x, \eta_1) \text{ lorsque } \eta_1(x) = 1 \, (= \eta_2(x)) \end{cases}$$

Pour les couples en redondance passive, nous avons vu que les réparations sont traitées comme pour les composants de C_I. Les conditions de croissance s'écrivent donc :

$$\text{si} \quad \eta_1 \subset \eta_2 \;\; \mu_1(x, \eta_1) \leq \mu_2(x, \eta_2) \text{ lorsque } \eta_2(x) = 0 \; = \eta_1(x))$$

Par contre pour les défaillances apparaissent les conditions suivantes :

– si $\eta_1 \subset \eta_2$ $\lambda_2(x, \eta_2) \leq \lambda_1(x, \eta_1)$ lorsque $\eta_1(x) = 1 \, (= \eta_2(x))$

– il existe une loi de probabilité $\underline{p}(\eta_1, \eta_2, \{x, y\}, \xi_1, \xi_2)$ sur $\{(0, 0), (0, 1), (1, 0), (1, 1)\}^2$ de lois marginales $p_1(\eta_1, \{x, y\}, \xi_1)$ et $p_2(\eta_2, \{x, y\}, \xi_2)$ nulle si $\xi_1 \not\subset \xi_2$.

La deuxième condition est automatiquement vérifiée sauf lorsque $(\eta_1(x), \eta_1(y)) = (1, 1)$ et $(\eta_2(x), \eta_2(y)) = (1, 1)$. Dans ce cas la loi $\underline{p}(\eta_1, \eta_2, \{x, y\}, \xi_1, \xi_2)$ est concentrée sur $\{(0, 0), (0, 1)\}^2$ (puisque le composant y en attente ne peut tomber en panne et dans la mesure où on ne considère pas ici les défaillances de mode commun) et on choisit le couplage qui donne la meilleure condition de croissance. Les valeurs de

$\underline{p}(\eta_1, \eta_2, \{x, y\}, \xi_1, \xi_2)$ sont données ci-dessous en fonction des valerus prises par $(\xi_1(x), \xi_1(y))$ et $(\xi_2(x), \xi_2(y))$:

– pour $(0, 0)$ et $(0, 0)$: $\gamma_1(y) \wedge \gamma_2(y)$

– pour $(0, 0)$ et $(0, 1)$: $\gamma_1(y) - \gamma_1(y) \wedge \gamma_2(y)$

– pour $(0, 1)$ et $(0, 0)$: $\gamma_2(y) - \gamma_1(y) \wedge \gamma_2(y)$

– pour $(0, 1)$ et $(0, 1)$: $1 - \gamma_1(y) \vee \gamma_2(y)$

La condition s'écrit alors : $\gamma_2(y) \leq \gamma_1(y)$

Dans le cas où apparaissent des défaillances par mode commun, les conditions de la proposition 2.4 imposent d'abord que :

$$\text{si } \eta_1 \subset \eta_2 \ \Lambda_1(\eta_1) \geq \Lambda_2(\eta_2)$$

Ensuite il faut réaliser un couplage des deux lois de probabilités $(k = 1 \text{ et } 2)$:

$$p_k(\eta, C, \xi) = \prod_{i=1}^{n} P_{k,I}(\eta, \eta(c_i), \xi(c_i))$$
$$\times \prod_{j=1}^{p} P_{k,D,S}(\eta, \eta(x_j), \eta(y_j), \xi(x_j), \xi(y_j)) \ \xi \subset \eta$$

Ce couplage est de la forme pour $\xi_1 \subset \eta_1$ et $\xi_2 \subset \eta_2$:

$$\underline{p}(\eta_1, \eta_2, C, \xi_1, \xi_2) = \prod_{i=1}^{n} \underline{P}_I(\eta_1, \eta_2, \eta_1(c_i), \eta_2(c_i), \xi_1(c_i), \xi_2(c_i))$$
$$\times \prod_{j=1}^{p} \underline{P}_{D,S}(\eta_1, \eta_2, \eta_1(x_j), \eta_1(y_j), \eta_2(x_j), \eta_2(y_j),$$
$$\xi_1(x_j), \xi_1(y_j), \xi_2(x_j), \xi_2(y_j)).$$

La quantité $\underline{P}_I(\eta_1, \eta_2, \eta_1(c), \eta_2(c), \xi_1(c), \xi_2(c))$ est une loi de probabilité en $(\xi_1(c), \xi_2(c))$ définie par le tableau suivant où chaque ligne correspond aux différentes valeurs de $(\eta_1(c), \eta_2(c))$ et chaque colonne aux différentes valeurs de $(\xi_1(c), \xi_2(c))$:

	(0, 0)	(0, 1)	(1, 0)	(1, 1)
(0, 0)	1	0	0	0
(0, 1)	$m_2(c, \eta_2)$	$1 - m_2(c, \eta_2)$	0	0
(1, 0)	$m_1(c, \eta_1)$	0	$1 - m_1(c, \eta_1)$	0
(1, 1)	$m_1(c, \eta_1) \wedge m_2(c, \eta_2)$	$[m_1(c, \eta_1)$ $-m_2(c, \eta_2)]_+$	$[m_2(c, \eta_2)$ $-m_1(c, \eta_1)]_+$	$1 - m_1(c, \eta_1)$ $\vee m_2(c, \eta_2)$

La quantité $\underline{P}_{D,S}(\eta_1, \eta_2, \eta_1(x), \eta_1(y), \eta_2(x), \eta_2(y), \xi_1(x), \xi_1(y), \xi_2(x), \xi_2(y))$ et une loi de probabilité en $(\xi_1(x), \xi_1(y), \xi_2(x), \xi_2(y))$ définie pour chaque valeur de $(\eta_1(x), \eta_1(y), \eta_2(x), \eta_2(y))$. Il faut donc définir seize lois de probabilités en $(\xi_1(x), \xi_1(y), \xi_2(x), \xi_2(y))$ correspondant aux différentes valeurs de $(\eta_1(x), \eta_1(y), \eta_2(x), \eta_2(y))$.

Lorsque $(\eta_1(x), (\eta_1(y))$ vaut $(0, 0)$, le couple $(\xi_1(x), \xi_1(y))$ vaut nécessairement $(0, 0)$ et la transition de $(\eta_2(x), \eta_2(y))$ vers $(\xi_2(x), \xi_2(y))$ est définie par $P_{2,D,S}(\eta_2, \eta_2(x), \eta_2(y), \xi_2(x), \xi_2(y))$. Une situation semblable se rencontre lorsque $(\eta_2(x_j), \eta_2(y_j))$ vaut $(0, 0)$. Ceci définit sept des seize lois de probabilités.

Lorsque $(\eta_1(x_j), (\eta_1(y_j))$ vaut $(1, 0)$, et $(\eta_2(x_j), \eta_2(y_j))$ vaut $(0, 1)$ ou lorsque $(\eta_1(x_j), \eta_1(y_j))$ vaut $(0, 1)$ et $(\eta_2(x_j), \eta_2(y_j))$ vaut $(1, 0)$, on peut utiliser n'importe quel couplage de $P_{1,D,S}(\eta_1, \eta_1(x_j), \eta_1(y_j), \xi_1(x_j), \xi_1(y_j))$ et $P_{,D,S}(\eta_2, \eta_2(x_j), \eta_2(y_j), \xi_2(x_j), \xi_2(y_j))$, par exemple le produit des lois.

Lorsque $(\eta_1(x), (\eta_1(y))$ vaut $(1, 0)$, et $(\eta_2(x), \eta_2(y))$ vaut $(1, 0)$, il n'y a que quatre valeurs possibles pour $(\xi_1(x), \xi_1(y))$ et $(\xi_2(x), \xi_2(y))$ dont les probabilités valent :

– pour $(1, 0)$ et $(0, 0)$: $m_2(x, \eta_2) - m_1(x, \eta_1) \wedge m_2(x, \eta_2))$

– pour $(1, 0)$ et $(1, 0)$: $1 - m_1(x, \eta_1) \vee m_2(x, \eta_2))$

– pour $(0, 0)$ et $(0, 0)$: $m_1(x_j, \eta_1) \wedge m_2(x_j, \eta_2))$

– pour $(0, 0)$ et $(1, 0)$: $m_1(x, \eta_1) - m_1(x, \eta_1) \wedge m_2(x, \eta_2))$

Une situation semblable se rencontre lorsque $(\eta_1(x), \eta_1(y))$ vaut $(0, 1)$ et $(\eta_2(x), \eta_2(y))$ vaut $(0, 1)$.

Lorsque $(\eta_1(x), \eta_1(y))$ vaut $(1, 0)$ et $(\eta_2(x), \eta_2(y))$ vaut $(1, 1)$, il y a huit valeurs possibles pour $(\xi_1(x), \xi_1(y))$ et $(\xi_2(x), \xi_2(y))$ dont les probabilités valent :

– pour $(0, 0)$ et $(0, 0)$: $m_1(x, \eta_1) \wedge m_2(x, \eta_2)\ \{\gamma_2(y)[1 - m_2(y, \eta_2)] + m_2(y, \eta_2)\}$

– pour $(0, 0)$ et $(0, 1)$: $m_1(x, \eta_1) \wedge m_2(x, \eta_2)\ \gamma_2(y)[1 - m_2(y, \eta)]$

– pour $(0, 0)$ et $(1, 0)$: $[m_1(x, \eta_1) - m_1(x, \eta_1) \wedge m_2(x, \eta_2)]\ m_2(y, \eta_2)$

– pour $(0, 0)$ et $(1, 1)$: $[m_1(x, \eta_1) - m_1(x, \eta_1) \wedge m_2(x, \eta_2)]\ [1 - m_2(y, \eta_2)]$

– pour $(1, 0)$ et $(0, 0)$: $[m_2(x, \eta_2) - m_1(x, \eta_1) \wedge m_2(x, \eta_2)]\ \{\gamma_2(y)[1 - m_2(y, \eta)] + m_2(y, \eta)\}$

– pour $(1, 0)$ et $(0, 1)$: $[m_2(x, \eta_2) - m_1(x, \eta_1) \wedge m_2(x, \eta_2)]\ [1 - \gamma_2(y)][1 - m_2(y, \eta)]$

– pour $(1, 0)$ et $(1, 0)$: $[1 - m_1(x, \eta) \vee m_2(x, \eta)]\ m_2(y, \eta)$

– pour $(1,\ 0)$ et $(1,\ 1)$: $[1 - m_1(x,\ \eta_1) \vee m_2(x,\ \eta_2)]\ [1 - m_2(y,\ \eta_2)]$

Une situation semblable se rencontre lorsque $(\eta_1(x_j),\ \eta_1(y_j),\ \eta_2(x_j),\ \eta_2(y_j))$ vaut $(0,\ 1,\ 1,\ 1)$ $(1,\ 1,\ 1,\ 0)$ et $(1,\ 1,\ 0,\ 1)$.

Lorsque $(\eta_1(x),\ \eta_1(y))$ vaut $(1,\ 1)$ et $(\eta_2(x),\ (\eta_2(y))$ vaut $(1,\ 1)$, il y a seize valeurs possibles pour $(\xi_1(x),\ \xi_1(y))$ et $(\xi_2(x),\ \xi_2(y))$ dont les probabilités valent :

– pour $(0,\ 0)$ et $(0,\ 0)$:

$$\begin{aligned} m_1(x,\ \eta) \wedge m_2(x,\ \eta)\ \{&m_1(y,\ \eta) \wedge m_2(y,\ \eta) \\ &+ [1 - m_1(y,\ \eta) \wedge m_2(y,\ \eta)]\,\gamma_1(y) \wedge \gamma_2(y) \\ &+ [m_1(y,\ \eta) - m_1(y,\ \eta) \wedge m_2(y,\ \eta)]\,\gamma_2(y) \\ &+ [m_2(y,\ \eta) - m_1(y,\ \eta) \wedge m_2(y,\ \eta)]\,\gamma_1(y)\} \end{aligned}$$

– pour $(0,\ 0)$ et $(0,\ 1)$:

$$\begin{aligned} m_1(x,\ \eta) \wedge m_2(x,\ \eta)\ &\{[m_1(y,\ \eta) - m_1(y,\ \eta) \wedge m_2(y,\ \eta)]\,[1 - \gamma_2(y)] \\ &+ [1 - m_1(y,\ \eta) \vee m_2(y,\ \eta)]\,[\gamma_1(y) - \gamma_1(y) \wedge \gamma_2(y)]\} \end{aligned}$$

– pour $(0,\ 0)$ et $(1,\ 0)$:

$$\begin{aligned} [m_1(x,\ \eta) - m_1(x,\ \eta) \wedge m_2(x,\ \eta)]\{&m_1(y,\ \eta) \wedge m_2(y,\ \eta) \\ &+ [m_2(y,\ \eta) - m_1(y,\ \eta) \wedge m_2(y,\ \eta)]\,\gamma_1(y)\} \end{aligned}$$

– pour $(0,\ 0)$ et $(1,\ 1)$:

$$\begin{aligned} [m_1(x,\ \eta) - m_1(x,\ \eta) \wedge m_2(x,\ \eta)]\ &\{[m_1(y,\ \eta) - m_1(y,\ \eta) \wedge m_2(y,\ \eta)] \\ &+ [1 - m_1(y,\ \eta) \vee m_2(y,\ \eta)]\ \gamma_1(y)\} \end{aligned}$$

– pour $(0,\ 1)$ et $(0,\ 0)$:

$$\begin{aligned} m_1(x,\ \eta) \wedge m_2(x,\ \eta)\ &\{[1 - m_1(y,\ \eta) \vee m_2(y,\ \eta)]\,[\gamma_2(y) - \gamma_1(y) \wedge \gamma_2(y)] \\ &+ [m_2(y,\ \eta) - m_1(y,\ \eta) \wedge m_2(y,\ \eta)]\,[1 - \gamma_1(y)]\} \end{aligned}$$

– pour $(0,\ 1)$ et $(0,\ 1)$:

$$m_1(x,\ \eta) \wedge m_2(x,\ \eta)\,[1 - m_1(y,\ \eta) \vee m_2(y,\ \eta)]\,[1 - \gamma_1(y) \vee \gamma_2(y)]$$

– pour $(0,\ 1)$ et $(1,\ 1)$:

$$[m_1(x,\ \eta) - m_1(x,\ \eta) \wedge m_2(x,\ \eta)]\,[1 - m_1(y,\ \eta) \vee m_2(y,\ \eta)]\,[1 - \gamma_1(y)]$$

– pour $(1,\ 0)$ et $(0,\ 0)$:

$$\begin{aligned} [m_2(x,\ \eta) - m_1(x,\ \eta) \wedge m_2(x,\ \eta)]\ \{&m_1(y,\ \eta) \wedge m_2(y,\ \eta) \\ &+ [m_1(y,\ \eta) - m_1(y,\ \eta) \wedge m_2(y,\ \eta)]\,\gamma_2(y) \end{aligned}$$

– pour (1, 0) et (0, 1) :

$$[m_2(x,\eta)-m_1(x,\eta)\wedge m_2(x,\eta)]\,[m_1(y,\eta)-m_1(y,\eta)\wedge m_2(y,\eta)]\,[1-\gamma_2(y)]$$

– pour (1, 0) et (1, 0) :

$$[1-m_1(x,\eta)\vee m_2(x,\eta)]\,m_1(y,\eta)\wedge m_2(y,\eta)$$

– pour (1, 0) et (1, 1) :

$$[1-m_1(x,\eta)\vee m_2(x,\eta)]\,[m_1(y,\eta)-m_1(y,\eta)\wedge m_2(y,\eta)]$$

– pour (1, 1) et (0, 0) :

$$[m_2(x,\eta)-m_1(x,\eta)\wedge m_2(x,\eta)]\,\{m_2(y,\eta)-m_1(y,\eta)\wedge m_2(y,\eta) + [1-m_1(y,\eta)\vee m_2(y,\eta)]\,\gamma_2(y)\}$$

– pour (1, 1) et (0, 1) :

$$[m_2(x,\eta)-m_1(x,\eta)\wedge m_2(x,\eta)]\,[1-m_1(y,\eta)\vee m_2(y,\eta)]\,[1-\gamma_2(y)]$$

– pour (1, 1) et (1, 0) :

$$[1-m_1(x,\eta)\vee m_2(x,\eta)]\,[m_2(y,\eta)-m_1(y,\eta)\wedge m_2(y,\eta)]$$

– pour (1, 1) et (1, 1) :

$$[1-m_1(x,\eta)\vee m_2(x,\eta)]\,[1-m_1(y,\eta)\vee m_2(y,\eta)].$$

On constate sur ces couplages que les conditions de la proposition 2.3 sont vérifiées si lorsque $\eta_1 \subset \eta_2$ on a pour tout composant x :

$$m_2(x,\eta_2) \leq m_1(x,\eta_1) \text{ lorsque } \eta_1(x) = 1\,(= \eta_2(x))$$

et pour tout composant de secours y :

$$\gamma_2(y) \leq \gamma_1(y)$$

Les résultats obtenus sont résumés dans la proposition suivante.

PROPOSITION 5.3. – *On considère deux processus markoviens de sauts décrivant l'évolution d'un système de composants réparables dont les caractéristiques sont données lorsque la configuration du système vaut η (pour $i = 1$ et 2) :*

– le taux de défaillance de chaque composant x vaut $\lambda_i(x,\eta)$ et le taux de réparation vaut $\mu_i(x,\eta)$

– lorsqu'un composant y est en redondance passive avec un autre composant, la probabilité de refus de démarrage du composant de secours y vaut $\gamma_i(y)$

– des défaillances de mode commun affectent l'ensemble des composants avec un taux $\Lambda_i(\eta)$, chaque composant x étant affecté avec une probabilité $m_i(x, \eta)$

Si lorsque $\eta_1 \subset \eta_2$ on a :

– $\forall x \in C$, $\mu_1(x, \eta_1) \leq \mu_2(x, \eta_2)$ *lorsque* $\eta_2(x) = 0 (= \eta_1(x))$

– $\forall x \in C$, $\lambda_2(x, \eta_2) \leq \lambda_1(x, \eta_2)$ *lorsque* $\eta_1(x) = 1 (= \eta_2(x))$

– $\forall y$ *en redondance passive* $\gamma_2(y) \leq \gamma_1(y)$

– $\Lambda_2(\eta_2) \leq \Lambda_1(\eta_1)$

– $\forall x \in C$, $m_2(x, \eta_2) \leq m_1(x, \eta_1)$ *lorsque* $\eta_1(x) = 1 (= \eta_2(x))$ *alors il existe un couplage croissant entre le premier et le deuxième processus.*

Lorsque les conditions de la proposition précédente sont vérifiées, nous pouvons appliquer la proposition 3.2 lorsque le système est cohérent : si la configuration initiale du processus 1 est plus petite que la configuration initiale du processus 2, la fiabilité, la disponibilité et le temps moyen de première panne sont plus petits pour le système 1 que pour le système 2.

6. ENCADREMENT DU TEMPS MOYEN DE PREMIÈRE PANNE

Dans ce paragraphe nous allons utiliser le couplage de base pour obtenir un encadrement du temps moyen de première panne d'un système. Pour cela nous allons définir un nouveau processus qui pourra être couplé de manière croissante avec le processus initial et dont on pourra calculer explicitement les caractéristiques.

Nous commençons à chercher une majoration et nous reprenons les notations du premier paragraphe. Le générateur du processus considéré est écrit sous la forme :

$$A f(\eta) = \sum_{B \subset C} A_B f(\eta)$$

avec :

$$\begin{aligned} A_B f(\eta) &= \sum_{\xi \in E_B} b(\eta, B, \xi)(f(\eta^{B,\xi}) - f(\eta)) \\ &= \sum_{B \subset C} \sum_{\xi \subset \eta/B} b(\eta, B, \xi)(f(\eta^{B,\xi}) - f(\eta)) \\ &\quad + \sum_{B \subset C} \sum_{\xi \supset \eta/B} b(\eta, B, \xi)(f(\eta^{B,\xi}) - f(\eta)) \end{aligned}$$

Pour toute configuration η du système nous définissons deux ensembles $A(\eta)$, respectivement $B(\eta)$, qui correspondent aux configurations obtenues à partir de η par réparation, respectivement par dégradation :

$$A(\eta) = \{\underline{\eta} \supset \eta / \exists B, \exists \xi \in E_B : \eta^{B,\xi} = \underline{\eta} \quad \text{et} \quad b(\eta, B, \xi) > 0\}$$

$$B(\eta) = \{\underline{\eta} \subset \eta / \exists B, \exists \xi \in E_B : \eta^{B,\xi} = \underline{\eta} \quad \text{et} \quad b(\eta, B, \xi) > 0\}$$

Nous considérons une partition $(G_i,\ 0 \leq i \leq s)$ de l'ensemble des états de marche du système. Chaque ensemble G_i est l'ensemble des états de marche ayant i composants en panne. Ainsi G_0 est formé d'un seul élément, l'état de marche parfait η_0.

Soit k un entier compris entre 0 et s tel qu'il existe une suite d'états $(\eta_{i,}\ 0 \leq i \leq k)$ vérifiant les propriétés suivantes :

– η_0 est l'état de marche parfaite

– $\eta_0 \supset \eta_1 \supset \ldots \supset \eta_{k-1} \supset \eta_k$

– pour tout i tel que $0 < i \leq k-1 : \eta_i \in G_i$ et $\eta_i \in B(\eta_{i-1})$

– η_k est un état de panne

Nous définissons enfin des sous ensembles H_i $(0 \leq i \leq k)$ par :

– $H_k = \mathcal{P}$

– si $0 \leq i \leq k-1 : H_i = \{\eta \in G_i / B(\eta) \cap H_{i+1} \neq \emptyset\}$

La définition de l'indice k implique que $H_0 = G_0 = \{n_0\}$.

Nous allons définir un nouveau processus de sauts. Ce processus aura les coefficients de sauts $\underline{b}(\eta, B, \xi)$ suivants :

– si $\eta \in H_k : \underline{b}(\eta, B, \xi) = b(\eta, B, \xi)$

– si $\eta \notin \bigcup\limits_{i=0}^{k} H_i$ et si $\eta^{B,\xi} \subset \eta : \underline{b}(\eta, B, \xi) = 0$

– si $\eta \notin \bigcup\limits_{i=0}^{k} H_i$ et si $\eta^{B,\xi} \supset \eta : \underline{b}(\eta, B, \xi) = b(\eta, B, \xi)$

– si $\eta \in H_i$ et si $\eta^{B,\xi} \notin H_{i+1} \cup H_{i-1}$: $\underline{b}(\eta, B, \xi) = 0$

– si $\eta \in H_i$ $(0 < i \leq k-1)$ et si $\eta^{B,\xi} \in H_{i-1}$ on choisit des coefficients $\underline{b}(\eta, B, \xi)$ tels que

• $\underline{b}(\eta, B, \xi) \geq b(\eta, B, \xi)$

• $\displaystyle\sum_{\{B, \xi / \eta^{B,\xi} \in H_{i-1}\}} \underline{b}(\eta, B, \xi) = \sup_{\{\eta \in H_i\}} \sum_{\{B, \xi / \eta^{B,\xi} \in H_{i-1}\}} b(\eta, B, \xi)$

– si $\eta \in H_i$ $(0 \leq i \leq k-1)$ et si $\eta^{B,\xi} \in H_{i+1}$ on choisit des coefficients $\underline{b}(\eta, B, \xi)$ tels que

• $\underline{b}(\eta, B, \xi) \leq b(\eta, B, \xi)$

• $\displaystyle\sum_{\{B, \xi / \eta^{B,\xi} \in H_{i+1}\}} \underline{b}(\eta, B, \xi) = \inf_{\{\eta \in H_i\}} \sum_{\{B, \xi / \eta^{B,\xi} \in H_{i+1}\}} b(\eta, B, \xi)$

Il est toujours possible de définir des coefficients $\underline{b}(\eta, B, \xi)$ satisfaisant les conditions ci-dessus.

Nous allons faire une hypothèse qui permettra de réaliser un couplage croissant :

$$\begin{gathered}\text{pour tout } i \text{ tel que } 1 \leq i \leq k-1 \text{ et tout } \eta \text{ dans } H_i \text{ on a :}\\ A(\eta) \subset H_{i-1}.\end{gathered} \tag{H1}$$

Pour le système décrit dans le premier paragraphe, l'hypothèse (H1) est vérifiée à la condition suivante : si deux composants x et y sont en redondance passive, deux configurations identiques en dehors de x et y et égales à $(0, 1)$ et $(1, 0)$ sur $\{x, y\}$ sont toutes les deux en même temps soit à un état de marche du système, soit à un état de panne du système. Cette hypothèse est souvent vérifiée en pratique.

PROPOSITION 6.1. – *Lorsque la conditiion* (H1) *est vérifiée, il existe un couplage croissant entre les processus définis par les coefficients* $b(\eta, B, \xi)$ *et* $\underline{b}(\eta, B, \xi)$.

Démonstration. – Les coefficients du nouveau processus correspondant à des dégradation du système sont par construction plus petits que ceux du processus initial. Les coefficients du nouveau processus correspondant à des réparations du système sont par construction plus grands que ceux du processus initial lorsque η appartient à H_i $(0 \leq i \leq k-1)$ et $\eta^{B,\xi}$ appartient à H_{i-1}. L'hypothèse $A(\eta) \subset H_{i-1}$ implique la nullité de ces coefficients si $\eta^{B,\xi}$ n'appartient pas à H_{i-1}. Dans ce cas les coefficients des deux processus sont nuls. Les hypothèses de la proposition 4.2 sont donc vérifiées. ■

Si l'hypothèse (H1) est vérifiée, le temps moyen de première panne du processus initial est majoré par celui du nouveau processus s'il ont le même état au temps 0. Ce nouveau procesus est constuit de manière à pouvoir regrouper les états de chaque $H_i\,(0 \leq i \leq k-1)$.

PROPOSITION 6.2. – *Le processus associé aux coefficients* $\underline{b}\,(\eta, B, \xi)$ *partant d'un état initial dans* $H_i\,(0 \leq i \leq k-1)$ *a même temps de première panne que le processus de naissance et mort sur les entiers compris entre* 0 *et* k *tel que :*

- *l'état* k *est l'état de panne*
- *les états* $\{0,\, 1,\, \ldots,\, k-1\}$ *sont des états de marche*
- *les taux de transition de l'état* i *à l'état* $i+1\,(0 \leq i \leq k-1)$ *valent :*

$$a_i = \inf_{\{\eta \in H_i\}} \sum_{\{B,\, \xi / \eta^{B,\, \xi} \in H_{i+1}\}} b\,(\eta,\, B,\, \xi)$$

- *les taux de transition de l'état* i *à l'état* $i-1\,(0 < i \leq k-1)$ *valent :*

$$b_i = \sup_{\{\eta \in H_i\}} \sum_{\{B,\, \xi / \eta^{B,\, \xi} \in H_{i-1}\}} b\,(\eta,\, B,\, \xi)$$

Démonstration. – Sous l'hypothèse (H1), la classe $\bigcup_1 H_i$ est fermée. Si η est dans H_i, la somme des taux de transitions de η vers les configurations de H_{i-1} ne dépend pas de η. Il en est de même pour les transitions vers H_{i+1}. On peut donc regrouper les états de H_i et définir un nouveau processus de Markov. La propriété de la proposition est alors claire. ■

La définition des ensembles H_i implique que les taux de dégradation $a_i\,(0 \leq i \leq k-1)$ ne sont pas nuls. Les taux de réparations $b_i (0 < i \leq k-1)$ ne sont évidemment pas nuls également. On déduit de la proposition précédente une majoration du temps moyen de première panne du processus initial.

COROLLAIRE 6.3. – *Sous l'hypothèse* (H1), *si le processus initial part au temps* 0 *d'une configuration dans* $H_p\,(0 \leq p \leq k-1)$, *le temps moyen de première panne est majoré par :*

$$u_p = \sum_{i=p+1}^{k} \sum_{j=0}^{i-1} \frac{1}{a_j} \prod_{1=j+1}^{i-1} \frac{b_1}{a_1}$$

Démonstration. – Il suffit de calculer le temps moyen de première panne du processus de naissance et mort définit ci-dessus. ■

Il est possible d'obtenir par des méthodes semblables une minoration du temps moyen de première panne. Par exemple pour le système décrit dans le premier paragraphe, dans le cas simple où il n'existe qu'un seul ensemble C_I de composants non doublés et où il n'y a pas de défaillance de mode commun, il est facile de reprendre ce qui a été fait ci-dessus en inversant majorations et minorations. Le temps moyen de première panne est alors minoré par :

$$\sum_{i=p+1}^{k} \sum_{j=0}^{i-1} \frac{1}{A_j} \prod_{1=j+1}^{i-1} \frac{B_1}{A_1}$$

avec

$$A_i = \sup_{\{\eta \in H_i\}} \sum_{\{B, \xi / \eta^{B, \xi} \in H_{i+1}\}} b(\eta, B, \xi)$$

et

$$B_i = \inf_{\{\eta \in H_i\}} \sum_{\{B, \xi / \eta^{B, \xi} \in H_{i-1}\}} b(\eta, B, \xi).$$

PERSPECTIVES

Dans l'étude de systèmes de grande taille, la modélisation markovienne n'est pas adaptée car l'espace d'états est trop important pour permettre une quantification. Lorsque les différents composants du système peuvent être considérés comme fonctionnant indépendamment, il est possible d'effectuer un calcul de disponibilité (probabilité pour que le système soit en marche à un instant t donné). Par contre, le calcul de la fiabilité (probabilité pour que le système ait fonctionné sur tout l'intervalle de temps $[0, t]$) ne peut se faire facilement. Une des méthodes employées est l'approximation par la méthode de Vésely (ou méthode des états de marche critique [4]), dont la justification mathématique reste à établir. Lorsque les taux de défaillance sont d'ordre ε par rapport aux taux de réparation, d'autres couplages nous permettront, dans un article à venir, de majorer l'erreur relative sur l'une des approximations utilisées par un terme d'ordre $\varepsilon^{k+1} \times$ *durée moyenne de bon fonctionnement du système* (avec les notations du paragraphe précédent). Les majorations obtenues ci-dessus nous permettent alors de montrer que cette durée moyenne de bon fonctionnement est d'ordre $\frac{1}{\varepsilon^k}$ ce qui entraînera que l'erreur relative étudiée tend vers 0 quand ε tend vers 0.

RÉFÉRENCES

[1] C. COCOZZA et M. ROUSSIGNOL, Unicité d'un processus de naissance et mort sur la droite réelle. *Annales I.H.P.B.*, vol. **XV**, n° 1, 1979, p. 93-105.

[2] C. COCOZZA et M. ROUSSIGNOL, Théorèmes ergodiques pour un processus de naissance et mort sur la droite réelle. *Annales I.H.P.B.*, vol. **XVI**, n° 1, 1980, p. 75-85.
[3] T. LINDVALL, *Lectures on the coupling method*, Wiley, 1992.
[4] A. PAGÈS et M. GONDRAN, *Fiabilité des systèmes*. Eyrolles, Collection de la Direction des Études et Recherches d'Électricité de France, 1980.

(Manuscrit reçu le 18 mars 1994;
révisé le 25 juin 1994.)