ANNALES DE L'I. H. P., SECTION B

T. JEULIN

Processus gaussiens à variation finie

Annales de l'I. H. P., section B, tome 29, n° 1 (1993), p. 153-160

<http://www.numdam.org/item?id=AIHPB_1993__29_1_153_0>

© Gauthier-Villars, 1993, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Annales de l'I. H. P., section B » (http://www.elsevier.com/locate/anihpb) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (http://www.numdam.org/conditions). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
http://www.numdam.org/

Ann. Inst. Henri Poincaré,

Vol. 29, n° 1, 1993, p. 153-160. *Probabilités et Statistiques*

Processus gaussiens à variation finie

par

T. JEULIN

U.F.R. de Mathématiques et U.R.A. n° 1321,
Université Paris-VII, Tour n° 45-55,
2, place Jussieu, 75251 Paris Cedex 05

RÉSUMÉ. – On établit une bijection entre fonctions à variation bornée sur [0, 1] et mesures bornées sur un certain espace mesurable. Soit $(G_t)_{t \in [0,1]}$ un processus gaussien séparable, dont les trajectoires sont à variation finie; presque sûrement la mesure ν_G est absolument continue par rapport à ν_g où g est la variation de G dans L^1.

ABSTRACT. – We construct a bijective transformation $f \to \nu_f$ between functions with bounded variation on [0, 1] and bounded measures on some measurable space. Let $(G_t)_{t \in [0,1]}$ be a separable gaussian process, whose trajectories are of bounded variation; almost surely ν_G is absolutely continuous with respect to ν_g where g is the L^1 – variation of G.

On se propose d'établir les deux résultats élémentaires suivants :

PROPOSITION 1. – *Soit* $t \in [0, 1]$, C_t *le sous-ensemble de*

$$[0,1]^{\sim} \equiv \{0, 1\} \times [0, 1]$$

Classification A.M.S. : 28 A, 60 G.

défini par

$$C_t = \{(0, u) \mid 0 \leqq u \leqq t\} \cup \{(1, u) \mid 0 \leqq u < t\};$$

$\tilde{\mathcal{B}}$ *est la tribu sur* $[0, 1]^{\sim}$ *engendrée par* $\{C_t \mid 0 \leqq t \leqq 1\}$.

Soit f *une fonction à variation finie sur* $[0, 1]$*; il existe une (unique) mesure [signée]* ν_f *sur* $\tilde{\mathcal{B}}$*, portée par* C_1*, telle que :*

$$\forall t \in [0, 1], \quad \nu_f(C_t) = f(t).$$

PROPOSITION 2. — *Soit* $(G_t)_{t \in [0, 1]}$ *un processus gaussien séparable défini sur l'espace probabilisé* $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$*, à variation finie sur un ensemble de probabilité non nulle.*

(i) G *est p. s. à variation finie,* $g_1 = \mathbb{E}\left[\int |d\nu_G|\right]$ *est fini; plus précisément,* $\mathbb{E}\left[\exp \alpha \left(\int |d\nu_G|\right)^2\right]$ *est fini si* $\pi\alpha g_1^2 < \frac{1}{4}$.

(ii) *Soit* g *la fonction croissante définie sur* $[0, 1]$ *par* $g(t) = \mathbb{E}\left[\int_{C_t} |d\nu_G|\right]$*; presque sûrement, la mesure* ν_G *est absolument continue par rapport à* ν_g.

Par souci de clarté (et pour préciser les notations) rappelons quelques faits bien connus (*voir* par exemple Lebesgue [5] ou Riesz-Nagy [6]).

Pour f: $[0, 1] \to \mathbb{R}$ et $\tau = \{0 = t_0 \leqq t_1 \leqq \ldots \leqq t_n \leqq t_{n+1} = 1\}$ subdivision de l'intervalle $[0, 1]$, la variation $V(f, \tau)$ de f le long de τ est :

$$V(f, \tau) = |f(0)| + \sum_0^n |f(t_{i+1}) - f(t_i)|;$$

f est à variation finie si $V(f) \equiv \sup_\tau V(f, \tau)$ est fini.

En considérant pour $u \in [0, 1]$ la variation $V_u(f)$ de $t \to f(u \wedge t)$, on montre que f est à variation finie si et seulement si f est différence de deux fonctions croissantes [que l'on peut prendre égales à $t \to V_t(f)$ et à $t \to V_t(f) - f(t)$] f est alors réglée et :

$$f(t+) \equiv \lim_{s > t} f(s) = \lim_{\substack{s > t \\ s \in \mathbb{Q}}} f(s),$$

$$f(t-) \equiv \lim_{s < t} f(s) = \lim_{\substack{s < t \\ s \in \mathbb{Q}}} f(s)$$

(on convient : $f \equiv 0$ sur $]-\infty, 0[$, $f \equiv f(1)$ sur $[1, \infty[$); si $\mathbb{D}_f$ est l'ensemble (dénombrable) des discontinuités de f, on a :

$$\mathbb{D}_f = \{t \mid V_{t+}(f) \neq V_{t-}(f)\}$$

et

$$\sum_{d \in \mathbb{D}_f} (|f(d+)-f(d)| + |f(d)-f(d-)|) < \infty;$$

soit

$$f^{(d)} \equiv \sum_{d \in \mathbb{D}_f} ((f(d+)-f(d-)) 1_{[d, \infty[} + (f(d)-f(d+)) 1_{\{d\}})$$

$$(= \sum_{d \in \mathbb{D}_f} ((f(d+)-f(d-)) 1_{]d, \infty[} + (f(d)-f(d-)) 1_{\{d\}}));$$

$f^{(c)} \equiv f - f^{(d)}$ est continue, à variation finie.

($f^{(c)}$ est la partie *diffuse* de f, $f^{(d)}$ sa partie *totalement discontinue*).

Si f est une fonction à variation finie sur [0, 1], on lui associe une forme linéaire [continue] $\mathfrak{F}$ sur l'espace des fonctions continues sur [0, 1] par

$$\mathscr{F}(\vartheta) = \lim_{|\tau| \to 0} \left(\vartheta(0) f(0) + \sum_0^n \vartheta(t_i) \{ f(t_{i+1}) - f(t_i) \} \right)$$

($\tau = \{ 0 = t_0 \leqq t_1 \leqq \ldots \leqq t_n \leqq t_{n+1} = 1 \}$ subdivision de l'intervalle [0, 1]); d'après le théorème de Riesz, on a aussi :

$$\mathscr{F}(\vartheta) = \int \vartheta \, d\mu_f,$$

où μ_f est la *mesure de Stieljes définie par f*; μ_f est *la* mesure sur la tribu borélienne $\mathscr{B}$ de [0, 1], telle que :

$$\forall t \in [0, 1], \quad \mu_f([0, t]) = f(t+)$$

et le théorème de Riesz établit une bijection entre mesures [signées] sur $\mathscr{B}$ et fonctions à variation finie, continues à droite. La proposition 1 traite le cas des fonctions à variation finie *non nécessairement continues à droite*, au prix d'un « *dédoublement des atomes* ».

Démonstration de la proposition 1. — On établit aisément les propriétés suivantes :

(i) soit $\mathscr{P}$ la tribu sur $[0, 1]^{\sim}$ engendrée par les points,

$$\mathscr{U} = \{ \{0, 1\} \times \Lambda \mid \Lambda \in \mathscr{B} \};$$

on a :

$$\tilde{\mathscr{B}} = \sigma \{ \mathscr{P}, \mathscr{U} \}$$

et

$$\tilde{\mathscr{B}} = \{ A \cup D \mid A \in \mathscr{U}, D \subseteqq \{0, 1\} \times [0, 1], D \text{ dénombrable} \}$$
$$= \{ A \cup (\{0\} \times D_0) \cup (\{1\} \times D_1), A \in \mathscr{U}, D_0, D_1 \subseteqq [0, 1],$$
$$D_0, D_1 \text{ dénombrables et } D_0 \cap D_1 = \varnothing \}.$$

(ii) Si ϑ est une mesure diffuse sur $\mathscr{U}$, la ϑ-complétée $\mathscr{U}^{\vartheta}$ de $\mathscr{U}$ contient $\tilde{\mathscr{B}}$. $\{ C_t \mid 0 \leqq t \leqq 1 \}$ étant stable par intersection finie, il suffit maintenant d'établir l'existence de ν_f; ε_a étant la masse de Dirac en $a \in [0, 1]^{\sim}$, $\nu_{f(d)}$

est la restriction à $\tilde{\mathscr{B}}$ de

$$\sum_{d \in \mathbb{D}_f} ((f(d+)-f(d))\,\varepsilon_{(1,d)}+(f(d)-f(d-))\,\varepsilon_{(0,d)});$$

on définit enfin une mesure diffuse ρ sur $\mathscr{U}$ par

$$\rho(H)=\int_{[0,1]} 1_H(0,t)\,d\mu)f^{(c)}(t);$$

ρ se prolonge à $\mathscr{U}^\rho$ et $\nu_{f(c)}$ est la restriction de ρ à $\tilde{\mathscr{B}}$; $\nu_f=\nu_{f(d)}+\nu_{f(c)}$ □

Il y a correspondance biunivoque entre mesures [signées] sur $\tilde{\mathscr{B}}$ (portées par C_1) et fonctions à variation finie sur [0, 1]; f est *continue à droite* (*resp. à gauche*) si et seulement si:

$$\forall t \in [0,1], \quad \nu_f[(1,t)]=0 \quad (\text{resp. } \nu_f[(0,t)]=0).$$

On notera les égalités:

$$V(f)=\int d|\nu_f|=\int_{[0,1]} d|\mu_{f^{(c)}}|(t)+\sum_{d\in\mathbb{D}_f}(|f(d+)-f(d)|+|f(d)-f(d-)|).$$

En outre, si φ est $\tilde{\mathscr{B}}$-mesurable, $|\nu_f|$-intégrable, $h(t)\equiv\int_{C_t}\varphi\,d\nu_f$ est à variation finie, $V(h)=\int_{C_1}|\varphi|\,|d\nu_f|$.

Inversement si k est à variation finie sur [0, 1] et vérifie:

$$|k(0)|\leqq|f(0)| \qquad \text{et} \qquad \forall 0\leqq s\leqq t\leqq 1,$$
$$|k(t)-k(s)|\leqq|f(t)-f(s)|$$

ν_k est absolument continue par rapport à ν_f, à densité ν_f-p.s. bornée par 1.

Plus généralement, soit $\mathscr{F}=(f_r)_{r\geqq 0}$ une suite de fonctions sur [0, 1]; si τ est une subdivision de [0, 1], la variation de $\mathscr{F}$ le long de τ est

$$V(\mathscr{F},\tau)=\|\mathscr{F}(0)\|+\sum_0^n\|\mathscr{F}(t_{i+1})-\mathscr{F}(t_i)\|$$

où, pour $x\in\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$, $\|x\|=(\sum_{r\geqq 0}x_r^2)^{1/2}$ et $\mathscr{F}$ est à variation finie si $\sup_\tau V(\mathscr{F},\tau)$ est fini.

LEMME 3. — *Soit $\mathscr{F}=(f_r)_{r\geqq 0}$ une suite de fonctions à variation finie sur* [0, 1], ϑ *une mesure positive sur $\tilde{\mathscr{B}}$ telle que:* $\forall r\in\mathbb{N}$, $\nu_{f_r}\ll\vartheta$.

Si $\nu_{f_r}=\varphi_r\,.\,\vartheta$, $\Phi=(\varphi_r)_{r\geqq 0}$, *on a:* $\sup_\tau V(\mathscr{F},\tau)=\int_{C_1}\|\Phi\|\,d\vartheta$.

Démonstration. – Soit $(U_r)_{r\geq 0}$ une suite de variables aléatoires indépendantes, de même loi gaussienne centrée réduite; pour

$$m\geq 1, \qquad t\in[0,\,1], \qquad W_m(t)\equiv\sum_0^m f_r(t)\,U_r=\int_{C_t}\left(\sum_0^m \varphi_r(s)\,U_r\right)d\vartheta(s);$$

W_m est à variation finie et $V(W_m)=\int_{C_1}\left|\sum_0^m \varphi_r(s)\,U_r\right|d\vartheta(s)$.

Il existe en outre une suite $(\tau_k)_{k\geq 1}$ [déterministe] de partitions de plus en plus fines, telles que $V(W_m)=\sup_k V(W_m,\,\tau_k)$; on a aussi:

$$\mathbb{E}[V(W_m,\,\tau)]=\left[\sum_{i=1}^n\left\{\sum_{r=0}^m (f_r(t_{i+1})-f_r(t_i))^2\right\}^{1/2}\right]\mathbb{E}[\,|U_1|\,]$$

et, par convergence monotone,

$$\mathbb{E}[V(W_m)]=\sup_\tau\left[\sum_{i=1}^n\left\{\sum_{r=0}^m (f_r(t_{i+1})-f_r(t_i))^2\right\}^{1/2}\right]\mathbb{E}[\,|U_1|\,]$$

$$=\left(\int_{C_1}\left\{\sum_0^m\varphi_r^2(s)\right\}^{1/2}d\vartheta(s)\right)\mathbb{E}[\,|U_1|\,],$$

d'où le résultat puisque:

$$\sup_\tau V(\mathcal{F},\,\tau)=\sup_\tau\sup_m\sum_{i=1}^n\left\{\sum_{r=0}^m (f_r(t_{i+1})-f_r(t_i))^2\right\}^{1/2}$$

$$=\sup_m\sup_\tau\sum_{i=1}^n\left\{\sum_{r=0}^m (f_r(t_{i+1})-f_r(t_i))^2\right\}^{1/2} \qquad \square$$

Venons en à la démonstration de la proposition 2. Le point (i) est essentiellement dû à Fernique [1]; le point (ii) est latent dans Jain-Monrad [4].

Soit $\mathbb{S}$ un sous-ensemble de séparation du processus G (avec $\mathbb{S}\supseteq\mathbb{Q}\cap[0,\,1]$). On a:

$$V(G)=\sup\{V(G,\,\tau),\ \tau \text{ subdivision à points dans } \mathbb{S}\};$$

V(G) est donc mesurable, finie *par hypothèse* avec probabilité non nulle; par suite, il existe $M\in\mathbb{R}_+$ avec: $\mathbb{P}[V(G)\leq M]>0$.

LEMME 4 [3]. – *Il existe* $\Delta:[0,\,1]\to\mathbb{R}_+$ *avec* $\Delta(0)=0$, $\Delta(x)>0$ *si* $x>0$ *telle que, pour* N *variable aléatoire gaussienne centrée réduite,* σ, $m\in\mathbb{R}$, $A\in\mathcal{A}$, *on ait:*

$$\mathbb{E}[\,|\sigma N+m|\,1_A]\geq(|\sigma|+|m|)\,\Delta\circ\mathbb{P}[A]$$

Démonstration. — Quitte à imposer $\Delta(x) \leqq x$, on peut se limiter à $\sigma = 1$. Pour tous A, B dans $\mathscr{A}$, on a : $\mathbb{P}[A \cap B] \geqq (\mathbb{P}[A] - \mathbb{P}[B^c])$; par ailleurs, pour tout $x > 0$,

$$m \to \mathbb{P}[x > |N+m|] = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-x-m}^{x-m} \exp -\frac{1}{2}u^2 \, du$$

est maximum en 0; par suite :

$$\mathbb{E}[|N+m| 1_A] = \int_{\mathbb{R}_+} \mathbb{P}[\{x \leqq |N+m|\} \cap A] \, dx$$

$$\geqq \int_{\mathbb{R}_+} (\mathbb{P}[A] - \mathbb{P}[x > |N+m|])_+ \, dx$$

$$\geqq \int_{\mathbb{R}_+} (\mathbb{P}[A] - \mathbb{P}[\{x > |N|\})_+ \, dx \equiv H \circ \mathbb{P}[A];$$

H est non nul sur]0, 1] ($H(u) = \mathbb{E}[|N|; |N| \leqq \vartheta]$ où $\mathbb{P}[|N| \leqq \vartheta] = u$); si $|m| \leqq 1$, $\mathbb{E}[|N+m| 1_A] \geqq \frac{1}{2}(1 + |m|) H \circ \mathbb{P}[A]$.

De même,

$$\mathbb{E}[||N+m|| 1_A] \geqq \mathbb{E}[||N| - |m|| 1_A]$$

$$\geqq \int_{\mathbb{R}_+} (\mathbb{P}[A] - \mathbb{P}[\{x > ||N| - |m||\})_+ \, dx$$

$$= |m| \int_{\mathbb{R}_+} (\mathbb{P}[A] - \mathbb{P}[\{y|m| > ||N - |m||\})_+ \, dy$$

$$\geqq |m| \int_0^1 (\mathbb{P}[A] - \mathbb{P}[\{|m|(1-y) < |N| < |m|(1+y)\})_+ \, dy$$

$$\equiv |m| \kappa(\mathbb{P}[A], |m|)$$

Pour tout $\vartheta \in]0, 1]$, $m \in [1, \infty[\to \kappa(\vartheta, m)$ est continue, strictement positive; $\liminf_{m \to \infty} \kappa(\vartheta, m) = \vartheta$; $K(\vartheta) \equiv \inf_{m \geqq 1} \kappa(\vartheta, m)$ est donc strictement positive.

Si $|m| \geqq 1$, $\mathbb{E}[|N+m| 1_A] \geqq \frac{1}{2}(1 + |m|) K \circ \mathbb{P}[A]$.

$\Delta : u \in]0, 1] \to \Delta(u) = \frac{1}{2} \inf(u, H(u), K(u))$ a les propriétés souhaitées. □

Démonstration de la proposition 2. — On rappelle que pour N gaussienne centrée réduite,

$$\mathbb{E}[|N|] = \left(\frac{2}{\pi}\right)^{1/2} \quad \text{et} \quad \mathbb{E}\left[\exp \frac{1}{2}\beta N^2\right] = (1-\beta)^{-1/2} \quad \text{si } \beta < 1.$$

(i) Soit $m(t) \equiv \mathbb{E}[G_t]$, $\tilde{G} = G - m$, $A = \{ V(G) \leqq M \}$; d'après le lemme 4, pour toute subdivision τ, on a :

$$M \geqq \mathbb{E}[V(G)\, 1_A] \geqq \mathbb{E}[V(G, \tau)\, 1_A] \geqq \left(\left(\frac{\pi}{2} \right)^{1/2} \mathbb{E}[V(\tilde{G}, \tau)] + V(m, \tau) \right) \Delta \circ \mathbb{P}[A];$$

m est donc à variation finie, $\tilde{G}$ est séparable et $\mathbb{E}[V(\tilde{G})]$ est fini. En fait,

$$V(m) \leqq \mathbb{E}[V(G)], \qquad \mathbb{E}[V(\tilde{G})] \leqq 2\, \mathbb{E}[V(G)].$$

Si $\tau = \{ 0 = t_0 \leqq t_1 \leqq \ldots \leqq t_n \leqq t_{n+1} = 1 \}$, l'inégalité de Hölder donne :

$$\| V(\tilde{G}, \tau) \|_p \leqq \sum_1^m \| \tilde{G}(t_{i+1}) - \tilde{G}(t_i) \|_p$$

$$= \sum_1^m \| \tilde{G}(t_{i+1}) - \tilde{G}(t_i) \|_2 \, \| N_p \| = \| V(\tilde{G}, \tau) \|_1 \frac{\| N \|_p}{\| N \|_1}$$

ainsi,

$$\| V(\tilde{G}) \|_p = \sup_\tau \| V(\tilde{G}, \tau) \|_p \leqq 2 g_1 \frac{\| N \|_p}{\| N \|_1}$$

et

$$\mathbb{E}[\exp \alpha V(\tilde{G})^2] \leqq \mathbb{E}[\exp 2\pi\alpha g_1^2 N].$$

(ii) Soit $p > 1$, $p' = \dfrac{p}{p-1}$, Z une v. a. de L^p et $z(t) = \mathbb{E}[Z G_t]$ $(t \in [0, 1])$; comme $|z(t) - z(s)| \leqq \mathbb{E}[|Z|\,|G_t - G_s|]$ $(0 \leqq s \leqq t \leqq 1)$, on a :

$$V(z) \leqq \mathbb{E}[|Z|\, V(G)] < \infty;$$

plus précisément,

$$|z(t) - z(s)| \leqq |\mathbb{E}[Z]|\,|\mathbb{E}[G_t - G_s]| + \mathbb{E}\left[|Z - \mathbb{E}[Z]| \int_{C_t - C_s} |d\nu_{\tilde{G}}| \right]$$

$$\leqq |\mathbb{E}[Z]|\,|m(t) - m(s)| + \| Z - \mathbb{E}[Z] \|_p \left\| \int_{C_t - C_s} |d\nu_{\tilde{G}}| \right\|_{p'}$$

$$\leqq \left(1 + 4 \frac{\| N \|_p}{\| N \|_1} \right) \| Z \|_p \, (g(t) - g(s));$$

z est à variation finie et ν_z est absolument continue par ν_g.

Soit en particulier $Z_0 = 1$ et $(Z_n)_{n \geqq 1}$ une suite de v. a. gaussiennes centrées réduites engendrant l'espace gaussien de $\tilde{G}$ (ce dernier est séparable, un sous-ensemble total est $\{ \tilde{G}_r,\ r \in \mathbb{Q}$ ou $g(r+) \neq g(r-) \}$);

$f_n(t) \equiv \mathbb{E}[G_t Z_n]$; φ_n est la densité de ν_{f_n} par rapport à ν_g;

$$H_r(t) \equiv \sum_{k=0}^{r} Z_k f_k(t);$$

on a p. s. pour chaque t,

$$G_t = \sum_0^\infty Z_k f_k(t),\ G_t - H_r(t) = \sum_{r+1}^\infty Z_k f_k(t);$$

$$\mathbb{E}[V(G-H_r)] = \mathbb{E}[|N|]\, V(f^{(r+1)}) \qquad \text{où} \quad f_n^{(r+1)} \equiv f_n 1_{\{n>r\}}.$$

Ainsi G est indistinguable du processus $\int_{C.} \left(\sum_0^\infty \varphi_r(s) Z_r \right) d\nu_g(s)$ □

Remarques. – 1. On peut supposer $\|\varphi(s)\| < \infty$ pour tout s de [0, 1]; $\zeta_s = \sum_0^\infty \varphi_r(s) Z_r$ est alors un processus gaussien, de moyenne $\varphi_0(s)$; $\mathbb{E}[|\zeta_s|] = 1\ \nu_g$ – p. s.; si G est centré, $\varphi_0 = 0$ et $\|\varphi(s)\| = 1\ \nu_g$ – p. s.

2. Si G est stationaire centré de mesure spectrale μ,

$$\mathbb{E}[|G_t - G_s|^2] = 2\int (1 - \cos x(t-s))\, d\mu(x) = 2\int \left(\sin \frac{x}{2}(t-s) \right)^2 d\mu(x);$$

si G est à variation finie, en prenant $t_i = \frac{i}{n} (0 \leqq i \leqq n)$, on obtient :

$$\sup_n \int \left(n \sin \frac{x}{2n} \right)^2 d\mu(x) < \infty \qquad \text{et} \qquad x^2\, d\mu(x) < \infty \quad (\textit{Fatou});$$

ainsi : $g(t) = t \left(\int x^2\, d\mu(x) \right)^{1/2}$ et G est p. s. absolument continu (*voir* [2]).

RÉFÉRENCES

[1] X. FERNIQUE, Intégrabilité des vecteurs gaussiens, *C. R. Acad. Sci. Paris*, t. **270**, série A, 1970, p. 1698-1699.

[2] I. A. IBRAGIMOV, Properties of Sample Functions for Stochastic Processes and Embedding Theorems, *Theor. Prob. Appl.*, vol. **18**, 1973, p. 442-453.

[3] T. JEULIN, Sur la convergence absolue de certaines intégrales, *Séminaire de Probabilités 16, L. N. in Math.*, n° **920**, Springer, 1982, p. 248-256.

[4] N. JAIN et D. MONRAD, Gaussian Quasimartingales, *Z.f.W.*, vol. **59**, 1982, p. 139-159.

[5] H. LEBESGUE, *Leçons sur l'intégration et la recherche des fonctions primitives*, Gauthier-Villars, Paris, 1904.

[6] F. RIESZ et B. NAGY, *Leçons d'analyse fonctionnelle*, Gauthier-Villars, Paris, 1955.

(*Manuscrit reçu le* 19 *novembre* 1991.)