ANNALES DE L'I. H. P., SECTION B

HUBERT HENNION

Dérivabilité du plus grand exposant caractéristique des produits de matrices aléatoires indépendantes à coefficients positifs

Annales de l'I. H. P., section B, tome 27, n^o 1 (1991), p. 27-59

<http://www.numdam.org/item?id=AIHPB_1991__27_1_27_0>

Ann. Inst. Henri Poincaré,

Vol. 27, n° 1, 1991, p. 27-59. *Probabilités et Statistiques*

Dérivabilité du plus grand exposant caractéristique des produits de matrices aléatoires indépendantes à coefficients positifs

par

Hubert HENNION

I.R.M.A.R., Université de Rennes I,
Campus de Beaulieu, 35042 Rennes Cedex, France

RÉSUMÉ. — Soit $(X_n(s))_{n \geqq 1}$ une suite de matrices aléatoires indépendantes, identiquement distribuées dont les coefficients sont positifs et dépendent d'un paramètre réel s, les propriétés de quasi-compacité de l'opérateur de transition sur l'espace projectif associé à $X_1(s)$ permettent d'obtenir des conditions suffisantes pour la dérivabilité de l'exposant caractéristique $\gamma(s) = \lim_n \text{p. s.} \frac{1}{n} \log \| X_n(s) \ldots X_1(s) \|$.

Mots clés : Matrices aléatoires, exposants caractéristiques.

ABSTRACT. — Let $(X_n(s))_{n \geqq 1}$ be a sequence of independent identically distributed random matrices whose coefficients are positive and depend on a real parameter s, the quasi-compacity properties of the transition operator on the projective space associated to $X_1(s)$ allow us to obtain sufficient conditions for the derivability of the characteristic exposent $\gamma(s) = \lim_n \text{p. s.} \frac{1}{n} \log \| X_n(s) \ldots X_1(s) \|$.

Key words : random matrices, characteristic exponents.

Classification A.M.S. : 60 B 99, 60 F 15, 60 J 15.

Soit $(X_n)_{n \geqq 1}$ une suite stationnaire et ergodique de matrices aléatoires inversibles telle que

$$E[\log^+ \|X_1\|] < +\infty \text{ et } E[\log^+ \|X_1^{-1}\|] < +\infty,$$

le théorème de Furstenberg-Kesten prouve l'existence d'une constante γ, appelée plus grand exposant caractéristique des produits $X_n \ldots X_1$, $n \geqq 1$, telle que

$$\lim_n \text{p. s.} \frac{1}{n} \log \|X_n \ldots X_1\| = \gamma.$$

Lorsque les coefficients des matrices X_n dépendent d'un paramètre la question de la régularité de γ comme fonction de ce paramètre a son importance par exemple dans l'étude de l'opérateur de Schrödinger aléatoire [7] ou en mécanique statistique dans le cas des matrices à coefficients positifs [10]. Dans [10] un résultat d'analyticité est établi pour des suites aléatoires stationnaires et ergodiques prises dans un compact de matrices à coefficients strictement positifs. Considérant ici le cas de suites de matrices aléatoires indépendantes à coefficients positifs ou nuls soumises à des conditions de moments et contenant suffisamment de matrices à coefficients strictement positifs nous prouvons qu'une régularité différentielle d'ordre $k+2$ des coefficients se traduit par une régularité d'ordre k de γ.

ÉNONCÉ DU RÉSULTAT

Soit J un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$, $(\Omega, \mathscr{F}, p)$ un espace de probabilité et $(s, \omega) \to g_s(\omega)$ une application mesurable de $J \times \Omega$ dans l'ensemble des matrices $d \times d$ inversibles à coefficients positifs de déterminant ± 1.

Nous supposons que les coefficients $a_{ij}(s, \omega)$, $i, j = 1 \ldots d$ de $g_s(\omega)$ s'écrivent

$$a_{ij}(s, \omega) = b_{ij}(\omega) \exp c_{ij}(s, \omega)$$

et satisfont aux conditions suivantes:

(C1) pour tout I compact, $I \subset J$, il existe ε, $\varepsilon > 0$, tel que, pour tout i, $j \in \{1 \ldots d\}$

$$\sup \left\{ \int [\log^+ a_{ij}(s, \omega)]^{1+\varepsilon} dp(\omega) : s \in I \right\} < +\infty,$$

(C2) les variables aléatoires b_{ij} sont telles que

$$p\left(\bigcap_{ij=1}^{d}\{\omega : b_{ij}(\omega)>0\}\right)>0,$$

(C3) c_{ij} est mesurable de $J\times\Omega$ dans $\mathbb{R}$,
pour un entier k, $k\geqq 1$, $c_{ij}(.,\omega)$ est $k+2$ continûment dérivable sur J pour tout $\omega\in\Omega$ et, pour tout compact I, $I\subset J$, il existe une variable aléatoire positive w (indépendante de s, $s\in I$) satisfaisant à

$$\int w^{k+2}(\omega)\,dp(\omega)<+\infty$$

telle que, pour tout $i, j=1\ldots d$, $l=1\ldots k+2$, $s\in I$ et $\omega\in\Omega$,

$$\left|\frac{\partial^l}{\partial s^l}c_{ij}(s,\omega)\right|\leqq w^l(\omega).$$

THÉORÈME. — *Sous les hypothèses précédentes, le plus grand exposant caractéristique* $\gamma(s)$ *des produits de matrices aléatoires indépendantes de même loi que* g_s *est* k *fois continûment dérivable sur* J.

Si le déterminant de g_s n'est pas ± 1, (C1) doit être complétée par

$$\sup\left\{\int[\log|a'_{ij}(s,\omega)|]^{1+\varepsilon}\,dp(\omega) : s\in I\right\}<+\infty$$

où $a'_{ij}(s,\omega)$ désignent les coefficients de $g_s^{-1}(\omega)$.

Indiquons les grandes lignes de la démonstration.

Dans le cas général ([2], [3], [4]) le calcul du plus grand exposant caractéristique $\gamma(\mu)$ des produits de matrices aléatoires indépendantes de loi μ est lié à l'action des éléments du support de μ sur $\mathbb{R}^d$ et sur l'espace projectif associé $\mathbb{P}_d$, dans le cas où μ est portée par l'ensemble G_+ des matrices à coefficients positifs et où son support contient une matrice à coefficients strictement positifs, nous montrons (§ 1) que l'on peut leur substituer le cône C des vecteurs à composantes strictement positives et son image $\tilde{C}$ dans $\mathbb{P}_d$; ainsi l'on pourra calculer $\gamma(\mu)$ à l'aide des probabilités sur $\tilde{C}$ invariantes par l'opérateur de transition $P(\mu)$ associé à μ. Les matrices de G_+ définissent des contractions de $\tilde{C}$ lorsque celui-ci est muni de la distance de Hilbert, ce fait est exploité pour obtenir (§ 2.2) des propriétés de quasi-compacité de $P(\mu)$ sur l'espace L des fonctions lipschitziennes sur $\tilde{C}$; ces propriétés sont ensuite étendues (§ 2.3) à des espaces de fonctions différentiables choisis de telle façon que le plus grand d'entre eux soit un sous-espace isométrique de L. Dès lors pour étudier la régularité de γ nous emploierons (§ 3) la méthode de [7] qui consiste à exprimer la probabilité $P(\mu)$-invariante sur $\tilde{C}$ à l'aide de la résolvante $R(z, \mu)$ de $P(\mu)$ et, pour une famille $(\mu_s)_s$ de probabilités, à déduire (§ 3.1) les régularités de $s \to R(z, \mu_s)$ de celles de $s \to P(\mu_s)$ lesquelles seront finalement vérifiées (§ 3.2) à partir des hypothèses faites sur les coefficients.

Dans les études antérieures des propriétés de quasi-compacité pour l'action de $P(\mu)$ sur certains espaces fonctionnels ont été établies en tirant partie d'une hypothèse de densité ou de contraction ([6], [7], [8]). Dans ce dernier cas elles sont vérifiées directement si la distance sous-jacente est bornée et, sinon, obtenue comme conséquence du théorème de Ionescu-Tulcea-Marinescu [9]; nous utiliserons ici un résultat (proposition 2.0) adapté à la situation envisagée.

PREUVE DU THÉORÈME

Notations - Formulaire

Soient $x = (x_i)_{i=1}^d \in \mathbb{R}^d$ et $g \in \mathrm{Gl}(d, \mathbb{R})$, on pose

$$\|x\| = \sum_{i=1}^{d} |x_i| \qquad \text{et} \qquad l(g) = \sup\{\log^+ \|g\|, \log^+ \|g^{-1}\|\}.$$

G_+ désigne l'ensemble des matrices à coefficients positifs de $Gl(d, \mathbb{R})$, et, pour $\alpha \geqq 0$, $\mathscr{P}_+^\alpha$ l'ensemble des probabilités μ portées par G_+ telles que $l^\alpha(\mu) = \int l^\alpha(g)\, d\mu(g) < +\infty$ muni de la topologie de la convergence faible.

Le cône

$$C = \{x : x = (x_i)_{i=1}^d \in \mathbb{R}^d, x_i > 0\}$$

est invariant par tout $g \in G_+$, son image $\tilde{C}$ dans l'espace projectif $\mathbb{P}_d$ associé à $\mathbb{R}^d$ sera représentée par

$$M = C \cap \{x : x \in \mathbb{R}^d, \|x\| = 1\}$$

où l'on distinguera le point χ dont toutes les coordonnées sont égales.

Soient x, $y \in M$, $x \neq y$, et a, b les points d'intersection de la droite (x, y) avec $F_r(M) = \bar{M} \setminus M$, la distance de Hilbert de x à y est définie par

$$d(x, y) = |\log(a, b, x, y)|$$

où (a, b, x, y) est le birapport des points a, b, x, y;

si $x=(1-\lambda_1)\,a+\lambda_1\,b$ et $y=(1-\lambda_2)\,a+\lambda_2\,b$, on a

$$d(x,y)=\left|\log\frac{\lambda_1}{1-\lambda_1}:\frac{\lambda_2}{1-\lambda_2}\right|; \tag{A}$$

si $(x_i)_{i=1}^d$ et $(y_i)_{i=1}^d$ sont des vecteurs de C proportionnels à x, $y\in$ M

$$d(x,y)=\log\max\left\{\frac{x_i\,y_j}{y_i\,x_j}:i,j=1\,.\,.\,.\,d\right\}; \tag{B}$$

l'action de $g\in G_+$ sur M définie par la formule

$$g\,.\,x=\frac{gx}{\|gx\|},$$

où gx est l'image du vecteur x par l'automorphisme g, est homologue à l'action de g sur $\tilde{C}$ et définit une contraction de l'espace métrique (M, d); plus précisément l'image $g.M$ de M par g est un polygône ouvert de M de diamètre $\lambda(g)$ [dans (M, d)] et, en posant

$$c(g)=th\frac{\lambda(g)}{4}\leqq 1,$$

on a, pour tout x, $y\in$ M,

$$d(g\,.\,x, g\,.\,y)\leqq c(g)\,d(x,y). \tag{C}$$

La matrice $g\in G_+$ a des coefficients strictement positifs si et seulement si $c(g)<1$ (*cf.* [11] ou [1] p. 59 pour les preuves de (A), (B) et (C)).

Soit $\mu\in\mathscr{P}_+^0$, on pose

$$c(\mu)=\int c(g)\,d\mu(g);$$

l'hypothèse $c(\mu)<1$ est vérifiée si et seulement si le support μ contient une matrice à coefficients strictement positifs, elle sera essentielle pour l'étude de l'opérateur de transition défini pour f borélienne bornée sur M par

$$x\in M,\qquad P(\mu)f(x)=\int f(g\,.\,x)\,d\mu(g).$$

Pour clore ce paragraphe rappelons que

$$\text{si}\quad g=[a_{ij}]_{ij=1\dots d},\qquad \|g\|=\sup\left\{\sum_{i=1}^{d}|a_{ij}|:j=1\,.\,.\,.\,d\right\}, \tag{D}$$

jointe à (B) cette formule permet (*cf.* preuve du théorème 1) d'établir l'inégalité :

$$\text{pour tout } g \in G_+, d(\chi, g \cdot \chi) \leqq 2 \log d + l(g). \tag{E}$$

1. Action de μ sur les éléments positifs de $\mathbb{R}^d$

On pose

$$\bar{C} = \{ x; x = (x_i)_{i=1}^d \in \mathbb{R}^d, x_i \geqq 0 \}$$

et

$$\bar{M} = \bar{C} \cap \{ x : x \in \mathbb{R}^d, \| x \| = 1 \}.$$

La convolée $\mu * \nu$ de la probabilité μ sur G_+ et de la probabilité ν sur $\bar{M}$ est la probabilité sur $\bar{M}$ définie par

$$\mu * \nu(A) = \int 1_A(g \cdot x) \, d\mu(g) \, d\nu(x),$$

si $\mu * \nu = \nu$, ν est dite μ-invariante.

A partir du théorème d'Oseledec [5], on établit le

THÉORÈME 1. — *Soit* $\mu \in \mathscr{P}_+^1$ *et* $X = (X_n)_{n \geqq 1}$ *une suite de matrices aléatoires indépendantes de loi* μ, *alors*

(i) *pour tout* $x \in C$

$$\lim_n \text{p. s.} \frac{1}{n} \log \| X_n \ldots X_1 x \| = \gamma(\mu),$$

(ii) *il existe sur* $\bar{M}$ *une probabilité* ν μ*-invariante telle que*

$$\gamma(\mu) = \int \log \| gx \| \, d\mu(g) \, d\nu(x),$$

si, de plus, le support de μ *contient une matrice à coefficients strictement positifs*,

(i′) *la convergence énoncée en* (i) *a lieu pour tout* $x \in \bar{C} \setminus \{ 0 \}$,

(ii′) *il n'existe sur* $\bar{M}$ *qu'une probabilité* μ*-invariante, elle est portée par* M *et telle que*

$$\int d(\chi, x) \, d\nu(x) < +\infty.$$

Démonstration. — Soit $(\Omega, \mathscr{F}, P, \theta)$ le système dynamique de la représentation canonique de la suite X. Posons $X^n = X_n \ldots X_1$, d'après le théorème d'Oseledec joint à l'hypothèse $\mu(G_+)=1$, il existe $N\in\mathscr{F}$, invariant négligeable tel que : à tout $\omega\notin N$ est associé un sous-espace vectoriel strict $V(\omega)$ de $\mathbb{R}^d$ ayant les propriétés suivantes :

$$\text{si}\quad x\notin V(\omega),\qquad \lim_n \frac{1}{n}\log\|X^n(\omega)x\|=\gamma(\mu),$$

$$\text{si}\quad x\in V(\omega)\setminus\{0\},\qquad \lim_n \frac{1}{n}\log\|X^n(\omega)x\|<\gamma(\mu),$$

d'autre part, pour tout $\omega\notin N$ et tout n, $X^n(\omega)C\subset C$.

Supposons $\omega\notin N$ et $V(\omega)\cap C\neq\varnothing$, alors si $y\in V(\omega)\cap C$ et $x\in C\setminus V(\omega)$, on a

$$\lim_n \frac{\|X^n(\omega)y\|}{\|X^n(\omega)x\|}=0,$$

choisissons $\varepsilon>0$ tel que $y-\varepsilon x\in C$, il résulte de la relation

$$X^n(y-\varepsilon x)=\|X^n x\|\left(\frac{X^n y}{\|X^n x\|}-\varepsilon\frac{X^n x}{\|X^n x\|}\right)$$

qu'il existe n tel que $X^n(\omega)(y-\varepsilon x)\notin C$, ce qui est absurde, on conclut que $V(\omega)\cap C=\varnothing$.

Sous l'hypothèse supplémentaire $c(\mu)<1$, il existe N' négligeable $N'\supset N$, tel que à tout $\omega\notin N'$ on puisse associer un $n_0(\omega)$ satisfaisant à

$$X^{n_0(\omega)}(\omega)(\bar{C}\setminus\{0\})\subset C,$$

Soit alors $\omega\notin N'$ et $x\in V(\omega)\cap\bar{C}\setminus\{0\}$, puisque

$$\lim_n \frac{1}{n}\log\|X^{n+n_0(\omega)}(\omega)x\|<\gamma(\mu),$$

on a

$$X^{n_0(\omega)}(\omega)x\in V(\theta^{n_0(\omega)}(\omega)),\quad \text{mais}\quad X^{n_0(\omega)}(\omega)x\in C$$

donc $V(\theta^{n_0(\omega)}(\omega))\cap C\neq\varnothing$, ce qui, compte tenu de l'invariance de N, est en contradiction avec l'assertion précédemment établie, finalement $V(\omega)\cap\bar{C}=\{0\}$.

Établissons maintenant (ii).

Soit $x_0\in M$, la suite de probabilités sur $\bar{M}$

$$\nu_n=\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}\mu^{*k}*\delta_{x_0}$$

est relativement compacte, soit ν une de ses valeurs d'adhérence, il vient $\mu * \nu = \nu$. Si $\bar{\sigma}$ désigne la fonction continue sur $\bar{M}$

$$\bar{\sigma}(x) = \int \log \| gx \| \, d\mu(g),$$

l'on a d'après (i)

$$\gamma(\mu) = \lim_n \frac{1}{n} \log \| X^n x_0 \| = \lim_n \frac{1}{n} E[\log \| X^n x_0 \|]$$

$$= \lim_k \int \bar{\sigma} \, d\nu_{n_k} = \int \log \| gx \| \, d\mu(g) \, d\nu(x)$$

si $\lim_k \nu_{n_k} = \nu$.

Supposons maintenant $c(\mu) < 1$.

En remarquant que, pour $g \in G_+$, $g^{-1}(\mathrm{Fr}(M)) \subset M^c$ tandis que, si $c(g) < 1$, $g^{-1}(\mathrm{Fr}(M)) \cap \mathrm{Fr}(M) = \varnothing$, on a pour ν μ-invariante sur $\bar{M}$

$$\nu(\mathrm{Fr}(M)) = \int \nu(g^{-1}(\mathrm{Fr}(M)) \cap \mathrm{Fr}(M)) \, d\mu(g) \leqq \nu(\mathrm{Fr}(M)) \, \mu(\{ g : c(g) = 1 \})$$

de sorte que $\nu(\mathrm{Fr}(M)) = 0$.

De l'inégalité

$$x, y \in M, \qquad d(X^n . x, X^n . y) \leqq \prod_{i=1}^{n} c(X_i) \, d(x, y)$$

on déduit

$$\lim_n \text{p. s. } d(X^n . x, X^n . y) = 0;$$

si ν_1 et ν_2 sont deux probabilités μ-invariantes sur M et φ une fonction continue à support compact sur M, un passage à la limite dans l'égalité

$$\nu_1(\varphi) - \nu_2(\varphi) = \int E[\varphi(X^n . x) - \varphi(X^n . y)] \, d\nu_1(x) \, d\nu_2(y)$$

montre que $\nu_1(\varphi) = \nu_2(\varphi)$, ce qui établit l'unicité.

Soit ν l'unique probabilité μ-invariante sur M,

$$\nu = \lim_n \nu_n \qquad \text{où} \quad \nu_n = \frac{1}{n} [\delta_\chi + \mu * \delta_\chi + \ldots + \mu^{*(n-1)} * \delta_\chi].$$

Posons, pour $k \geqq 1$,

$$m_k = \int d(\chi, x)\, d\mu^{*k} * \delta_\chi(x),$$

d'après (E)

$$m_1 = \int d(\chi, g.\chi)\, d\mu(g) \leqq 2 \log d + l^1(\mu) < +\infty,$$

pour $k \geqq 2$, on a successivement

$$\begin{aligned} m_k = \int d(\chi, (g_1 g_2).\chi)\, d\mu^{*(k-1)}(g_1)\, d\mu(g_2) \\ \leqq \int d(\chi, g_1.\chi)\, d\mu^{*(k-1)}(g_1) \\ + \int d(g_1.\chi, (g_1 g_2).\chi)\, d\mu^{*(k-1)}(g_1)\, d\mu(g_2) \\ \leqq m_{k-1} + \int c(g_1)\, d(\chi, g_2.\chi)\, d\mu^{*(k-1)}(g_1)\, d\mu(g_2) \\ \leqq m_{k-1} + c(\mu^{*(k-1)})\, m_1 \leqq m_{k-1} + (c(\mu))^{k-1} m_1, \end{aligned}$$

il vient

$$m_k \leqq m_1 [1 + c(\mu) + \ldots + (c(\mu))^{k-1}] < \frac{m_1}{1 - c(\mu)},$$

l'existence d'un moment pour ν résulte alors de ce que, pour tout n,

$$\int d(\chi, x)\, d\nu_n(x) \leqq \frac{m_1}{1 - c(\mu)}.$$

Achevons la preuve de ce théorème en établissant l'inégalité (E).

Soit $(e_i)_{i=1}^d$ la base canonique de $\mathbb{R}^d$ et g^* la transposée de g,

$$g\chi = \sum_{i=1}^{d} \| g^* e_i \| e_i,$$

puisque

$$(d \| g^{-1} \|)^{-1} \leqq \| g^{*-1} \|^{-1} \leqq \| g^* e_i \| \leqq \| g^* \| \leqq d \| g \|$$

il vient, d'après (B),

$$\begin{aligned} d(\chi, g.\chi) = \log \max \left\{ \frac{\| g^* e_i \|}{\| g^* e_j \|} : i, j = 1 \ldots d \right\} \leqq \log d^2 \| g \| \| g^{-1} \| \\ = 2 \log d + \log^+ \| g \| . \| g^{-1} \| \leqq 2 \log d + l(g). \end{aligned}$$

Il résulte de ce théorème que les $\mu \in \mathscr{P}_+$ tels que $c(\mu) < 1$ sont des points de continuité de γ, plus précisément :

COROLLAIRE 1. — *Soit* μ, μ_n, $n \in \mathbb{N}$, *des éléments de* $\mathscr{P}^1_+$ *tels que*

(i) $\lim_n \mu_n = \mu$,

(ii) $\lim_{N \to +\infty} \sup \left\{ \int_{\{g : l(g) \geqq N\}} l(g)\, d\mu_n(g) : n \in \mathbb{N} \right\} = 0,$

(iii) *le support de* μ *contient une matrice à coefficients strictement positifs, alors* $\lim_n \gamma(\mu_n) = \gamma(\mu)$.

Démonstration. — D'après le point (ii) du théorème 1, pour tout n, il existe ν_n sur $\bar{M}$ μ_n-invariante telle que

$$\gamma(\mu_n) = \int \log \| gx \| \, d\mu_n(g)\, d\nu_n(x),$$

la suite ν_n est relativement compacte et toutes ses valeurs d'adhérence sont des probabilités μ-invariantes sur $\bar{M}$, le point (ii′) du théorème 1, permet alors de conclure, le passage à la limite sous le signe intégral se trouvant justifié par la condition (ii).

2. Action de μ sur certains espaces fonctionnels

Dans tout ce paragraphe $\mathscr{K}$ désigne une partie de $\mathscr{P}^0_+$ ayant les propriétés suivantes :

(H1) *il existe* ε, $\varepsilon > 0$, *tel que*

$$\sup \{ l^{1+\varepsilon}(\mu) : \mu \in \mathscr{K} \} = l^{1+\varepsilon}(\mathscr{K}) < +\infty,$$

(H2) $\mathscr{K}$ *est compacte*,

(H3) $\sup \{ c(\mu) : \mu \in \mathscr{K} \} = c(\mathscr{K}) < 1$.

Remarquons que d'après la continuité de c et (H2) cette dernière hypothèse est satisfaite dès que, pour tout $\mu \in \mathscr{K}$, $c(\mu) < 1$.

Les hypothèses ci-dessus impliquent que la famille d'opérateurs $P(\mu)$, $\mu \in \mathscr{K}$, possède sur un espace de fonctions lipschitziennes tout d'abord (§ 2.2) puis par extension sur un espace de fonctions différentiables (§ 2.3) les propriétés de quasi-compacité décrites et étudiées dans un cadre abstrait au (§ 2.1). Le théorème 3 et son corollaire constituent la base des développements ultérieurs.

$\mathscr{L}(B)$ est l'algèbre des endomorphismes continus de l'espace normé B et, pour $T \in \mathscr{L}(B)$, $\sigma(T)$, $\rho(T)$, $R(z, T)$ désignent respectivement le spectre, le rayon spectral et la résolvante de T.

On pose $F(\rho)=\{z: z\in\mathbb{C}, |z|\leqq\rho\}\cup\{+1\}$.

2.1. *Famille d'opérateur et spectre*

B est un espace de Banach et $\mathscr{S}$ une partie de $\mathscr{L}(B)$ sur laquelle nous ferons l'hypothèse suivante : à tout $P\in\mathscr{S}$ est associé un projecteur continu $N(P)$ sur $\operatorname{Ker}(I-P)$ tel que $N(P)P=PN(P)$, ce qui revient à dire que, pour tout $P\in\mathscr{S}$, B est somme directe topologique de $\operatorname{Ker}(I-P)$ et d'un sous-espace G_P, tous deux stables par P.

DÉFINITION 2.1. — *$\mathscr{S}$ possède la propriété $\Pi(\rho)$, $0\leqq\rho<1$, si*

(i) *pour tout* $P\in\mathscr{S}$, $\rho(P-N(P))\leqq\rho$,

(ii) *pour tout compact* K, $K\subset F(\rho)^c$,

$$\sup\{\|R(z,P)\|,\ z\in K, P\in\mathscr{S}\}<+\infty.$$

Cette propriété sera commodément étudiée en utilisant le

LEMME 2.1. — *Soit ρ, $0\leqq\rho<1$, pour que $\mathscr{S}$ satisfasse à $\Pi(\rho)$ il suffit que soit vérifiée la condition $V(\rho)$ suivante : si $(\lambda_n)_n$ est une suite de $\mathbb{C}$ convergeant vers λ, $(P_n)_n$ une suite de $\mathscr{S}$ et $(f_n)_n$, $(\varepsilon_n)_n$ des suites de B telles que*

$$\|f_n\|=1, \lim_n\|\varepsilon_n\|=0 \qquad \text{et} \qquad \varepsilon_n=(\lambda_n-P_n)f_n$$

on a soit

(*a*) $|\lambda|\leqq\rho$ *si la suite $(P_n)_n$ est constante et si, pour tout n,* $N(P_n)f_n=0$;

(*b*) $\lambda\in F(\rho)$.

Démonstration. — Établissons $\Pi(\rho)-(i)$.

Il suffit de prouver que le rayon spectral de la restriction Q de P à l'espace de Banach $\operatorname{Ker} N(P)$ est $\leqq\rho$, or, si $\lambda\in\operatorname{Fr}(\sigma(Q))$ et si (λ_n) est une suite de $\mathbb{C}\setminus\sigma(Q)$ convergeant vers λ on a $\lim_n\|(\lambda_n-Q)^{-1}\|=+\infty$, on en déduit l'existence d'une suite $(f_n)_n$ de $\operatorname{Ker} N(P)$ telle que $\|f_n\|=1$ et $\lim_n\|(\lambda_n-Q)f_n\|=0$, $V(\rho)-(a)$ permet alors de conclure que

$$\operatorname{Fr}(\sigma(Q))\subset F(\rho)\setminus\{1\},$$

comme $\sigma(Q)$ est bornée il vient $\sigma(Q)\subset F(\rho)\setminus\{1\}$.

Établissons maintenant $\Pi(\rho)-(ii)$.

Supposons $\sup\{\|R(z,P)\|, z\in K, P\in\mathscr{S}\}=+\infty$, alors il existe $(\varepsilon_n)_n$ dans B, $(z_n)_n$ dans K et $(P_n)_n$ dans $\mathscr{S}$ telles que $\lim_n\varepsilon_n=0$ et $\|R(z_n,P_n)\varepsilon_n\|=1$, au prix d'une extraction de sous-suite et en posant $f_n=R(z_n,P_n)\varepsilon_n$ les hypothèses de $V(\rho)$ sont satisfaites, c'est-à-dire que $(z_n)_n$ a une valeur d'adhérence dans $F(\rho)$, ce qui est absurde.

Sous les hypothèses générales de ce paragraphe, l'on peut en renforçant la condition de contraction du théorème de Ionescu-Tulcea-Marinescu [9], mais sans supposer l'équicontinuité des puissances des opérateurs, expliciter un ρ pour lequel la propriété $\Pi(\rho)$ est satisfaite.

L'on pose $D=\{f: f\in B, \|f\|\leqq 1\}$.

PROPOSITION 2.0. — *Supposons*

(*a*) $\|.\|=J+m$, *où* J *est une norme et* m *une semi-norme sur* B;

(*b*) $\mathscr{S}$ *est une partie compacte de l'espace vectoriel normé des applications linéaires continues de* $(B, \|.\|)$ *dans* (B, J);

(*c*) r *étant un réel*, $0\leqq r<1$, *on a pour tout* $P\in\mathscr{S}$,

(c1) $m(f)=0$ *implique* $f\in \operatorname{Ker}(I-P)$,

(c2) *pour tout* $f\in B$, $m(Pf)\leqq r\,m(f)$,

(c3) P *est un endomorphisme continu de* (B, J),

(c4) P (D) *est relativement compact dans* (B, J),

(c5) *l'adhérence de* $D\cap \operatorname{Ker} N(P)$ *dans* (B, J) *est incluse dans* $\operatorname{Ker} N(P)$,

alors, pour tout $P\in\mathscr{S}$, $\operatorname{Ker}(I-P)$ *est le sous-espace de dimension finie* $F=\{f: f\in B, m(f)=0\}$ *et* $\mathscr{S}$ *a la propriété* $\Pi(\rho)$ *sur* $(B, \|.\|)$.

Démonstration. — Soit $f\in\operatorname{Ker}(I-P)$, d'après ($c$2), $m(f)=m(Pf)\leqq rm(f)$ et $m(f)=0$, d'où, par (c1), $\operatorname{Ker}(I-P)=F$. Des égalités

$$F\cap\{f: J(f)\leqq 1\}=F\cap\{f: \|f\|\leqq 1\}=F\cap\{Pf: \|f\|\leqq 1\}=F\cap P(D)$$

et de (c4), on déduit que $F\cap\{f: J(f)\leqq 1\}$ est relativement compact dans (F, J) donc que F est de dimension finie.

Utilisons maintenant le lemme 2.1 dont nous reprenons les notations, en supposant $\lambda\neq 0$.

D'après (b) puis (c4), il existe une sous-suite $(n_k)_k$, $P\in\mathscr{S}$ et $g\in B$ tels que

$$\lim_k \sup\{J(P_{n_k}h-Ph): \|h\|\leqq 1\}=0 \qquad \text{et} \qquad \lim_k J(Pf_{n_k}-g)=0,$$

de l'inégalité

$$J(P_{n_k}f_{n_k}-g)\leqq J(P_{n_k}f_{n_k}-Pf_{n_k})+J(Pf_{n_k}-g),$$

il résulte que $\lim_k J(P_{n_k}f_{n_k}-g)=0$, utilisant alors la relation $\lambda_n f_n=P_n f_n+\varepsilon_n$ on conclut à l'existence de $f\in B$ tel que $\lim_k J(f_{n_k}-f)=0$ et donc, d'après (c3), tel que $Pf=\lambda f$.

Supposons $f=0$, puisque $\|f_n\|=1$, on a $\lim_k m(f_{n_k})=1$ et, par passage à la limite selon (n_k) dans l'inégalité

$$|\lambda_n| m(f_n) \leqq m(P_n f_n) + m(\varepsilon_n) \leqq rm(f_n) + m(\varepsilon_n)$$

il vient $|\lambda| \leqq r$.

Supposons maintenant $f \neq 0$, puisque

$$|\lambda| m(f) = m(Pf) \leqq rm(f)$$

on a soit $|\lambda| \leqq r$, soit $m(f)=0$ et, d'après $(c\,1)$, $\lambda=1$. Cette seconde éventualité n'a pas lieu dans les conditions (a) du lemme 2.1; en effet, notant $P=P_n$ et $N=N(P_n)$, on a $f_n \in D \cap \operatorname{Ker} N$ et donc, d'après $(c\,5)$, $N(f)=0$, de sorte que, si $Pf=f$, il vient $f=Nf=0$ ce qui est contraire à l'hypothèse.

La propriété $\Pi(\rho)$ peut se transmettre à un sous-espace.

Soit $(B', \|.\|')$ un espace de Banach tel que : $B' \subset B$ et l'injection canonique de B' dans B est continue, les restrictions à B' des éléments de $\mathscr{S}$ et des projecteurs associés sont dans $\mathscr{L}(B')$.

PROPOSITION 2.1. – *Supposons qu'il existe* R *et* r, $R \geqq 0$, $0 \leqq r < 1$ *telles que, pour tout* $P \in \mathscr{S}$ *et tout* $f \in B'$

$$\|Pf\|' \leqq R\|f\| + r\|f\|'.$$

alors, si sur B $\mathscr{S}$ *a la propriété* $\Pi(\rho)$, $\mathscr{S}$ *a sur* B' *la propriété* $\Pi(\rho')$, $\rho' = \sup\{\rho, r\}$.

Démonstration. – Utilisons le lemme 2.1. Plaçons nous sous les hypothèses de $V(\rho')$, on a $\lim_n \|\varepsilon_n\|'=0$ et donc $\lim_n \|\varepsilon_n\|=0$. Montrons que $\lim_n \|f_n\|=0$. Deux cas sont à envisager correspondants au (a) et au (b) de $V(\rho')$.

(α) Pour tout n, $P_n=P$ et $f_n \in G' = \operatorname{Ker} N(P) \cap B'$, supposons $|\lambda| > \rho'$. Soit Q la restriction de P à $G = \operatorname{Ker} N(P)$, Q ayant par hypothèse un rayon spectral $\leqq \rho$, il existe n_0 tel que

$$\sup\{\|R(\lambda_n, Q)h\| : h \in G, \|h\|=1, n \geqq n_0\} < +\infty$$

et donc

$$\lim_n \|f_n\| = \lim_n \|R(\lambda_n, Q)\varepsilon_n\| = 0.$$

(β) Cas général, supposons $\lambda \notin F(\rho')$. $\lambda \notin F(\rho)$ et, d'après $\Pi(\rho)$-(ii) il existe n_0 tel que

$$\sup\{\|R(\lambda_n, P_n)h\| : h \in B, \|h\|=1, n \geqq n_0\} < +\infty$$

et comme précédemment $\lim_n \|f_n\| = 0$.

Mais $\|f_n\|' = 1$ et des inégalités

$$|\lambda_n| - \|\varepsilon_n\|' \leqq \|\lambda_n f_n - \varepsilon_n\|' = \|P_n f_n\|' \leqq R\|f_n\| + r\|f_n\|' = R\|f_n\| + r$$

il résulte par un passage à la limite en n que $|\lambda| \leqq r$, ce qui contredit les hypothèses faites tant en (α) qu'en (β).

2.2. *Action de* μ *sur les fonctions lipschitziennes*

Pour une fonction numérique sur M, on pose

$$m(f) = \sup\left\{\frac{|f(x) - f(y)|}{d(x, y)} : x, y \in M, x \neq y\right\}$$

où d est la distance de Hilbert.

L est l'espace vectoriel des f telles que $m(f) < +\infty$, si $f \in L$, on pose

$$\|f\| = |f(\chi)| + m(f)$$

où χ est le point de M dont toutes les coordonnées sont égales.

$$(L, \|.\|) \text{ est un espace de Banach.}$$

Soit $\mu \in \mathscr{K}$ et ν la probabilité μ-invariante sur M, d'après le théorème 1 et l'inégalité.

$$|f(x)| \leqq |f(\chi)| + m(f)\, d(\chi, x) \tag{1}$$

ν induit une forme linéaire continue sur L, on définit alors l'opérateur $Q(\mu)$ par

$$f \in L, \qquad Q(\mu) f = P(\mu) f - \nu(f)\, 1$$

où 1 désigne la fonction constante et égale à 1 sur M et $\nu(f) = \int f d\nu$.

Le résultat de ce paragraphe s'énonce :

THÉORÈME 2. — *Pour tout* $\mu \in \mathscr{K}$, $P(\mu)$ *et* $Q(\mu)$ *sont des endomorphismes continus de* L *tels que* :

$$\rho(Q(\mu) \leqq c(\mathscr{K}),$$

pour tout K *compact*, $K \subset F(c(\mathscr{K}))^c$,
$\sup\{\|R(z, P(\mu))\|,\ z \in K,\ \mu \in \mathscr{K}\} < +\infty$.

Dans la preuve de ce théorème nous substituerons à la norme initiale sur M la norme équivalente $\|.\|_\varepsilon$ définie par

$$f \in \mathrm{L}, \qquad \|f\|_\varepsilon = \mathrm{J}_\varepsilon(f) + m(f)$$

$$\text{où} \quad \mathrm{J}_\varepsilon(f) = \sup\left\{ \frac{|f(x)|}{(1+d(\chi, x))^{1+\varepsilon}} : x \in \mathrm{M} \right\}.$$

Notons que, d'après le théorème d'Ascoli, de toute suite $(f_n)_n$ de L telle que $\|f_n\|_\varepsilon \leqq 1$ on peut extraire une sous-suite $(f_{nk})_k$ convergeant uniformément sur tout compact vers une fonction $f \in \mathrm{L}$ telle que $\|f\| \leqq 1$ et donc, d'après (1), on a

$$\lim_k \mathrm{J}_\varepsilon(f_{n_k} - f) = 0.$$

Nous commençons (propositions 2.2 et 2.3) par préciser à l'aide de J_ε et de m l'action de P (μ) sur L, puis nous montrons que P(μ) possède vis-à-vis des projecteurs N (μ) définis par

$$f \in \mathrm{L}, \qquad \mathrm{N}(\mu) f = \nu(f) 1$$

les propriétés décrites au paragraphe 2.1.

PROPOSITION 2.2. — *Soit* $\varepsilon > 0$, *il existe des constantes* A_ε *et* B_ε *telles que, pour tout* $\mu \in \mathscr{P}_+^{1+\varepsilon}$ *et* $f \in \mathrm{L}$

$$\mathrm{J}_\varepsilon(\mathrm{P}(\mu) f) \leqq (\mathrm{A}_\varepsilon + \mathrm{B}_\varepsilon l^{1+\varepsilon}(\mu)) \mathrm{J}_\varepsilon(f),$$
$$m(\mathrm{P}(\mu) f) \leqq c(\mu) m(f).$$

Démonstration. — Soit $f \in \mathrm{L}$, $g \in \mathrm{G}_+$, en posant $f \circ g(x) = f(g.x)$ on a

$$m(f \circ g) \leqq m(f) c(g),$$
$$\mathrm{J}_\varepsilon(f \circ g) \leqq \mathrm{J}_\varepsilon(f) \sup\left\{ \left(\frac{1+d(\chi, g.x)}{1+d(\chi, x)} \right)^{1+\varepsilon} : x \in \mathrm{M} \right\},$$

en utilisant l'action contractante de g sur M puis (E) il vient

$$1 + d(\chi, g.x) \leqq 1 + d(\chi, g.\chi) + d(g.\chi, g.x)$$
$$\leqq (1 + d(\chi, g.\chi))(1 + d(\chi, x)) \leqq (1 + 2\log d + l(g))(1 + d(\chi, x))$$

et

$$\mathrm{J}_\varepsilon(f \circ g) \leqq (1 + 2\log d + l(g))^{1+\varepsilon} \mathrm{J}_\varepsilon(f) \leqq 2^{1+\varepsilon}((1+2\log d)^{1+\varepsilon} + l(g)^{1+\varepsilon}) \mathrm{J}_\varepsilon(f),$$

il suffit pour conclure d'intégrer en g.

La correspondance $\mu \to \mathrm{P}(\mu)$ a la propriété de continuité suivante:

PROPOSITION 2.3. — *Soit* $(\mu_n)_n$ *une suite d'éléments de* $\mathscr{P}_+^{1+\varepsilon}$ *convergeant vers* μ *et* P_n, P *les opérateurs de transition correspondants, alors,* *si*

$$\sup\{ l^{1+\varepsilon}(\mu_n) : n \} < +\infty \qquad (\mathrm{H}'1),$$

on a

$$\lim_n \sup\{ \mathrm{J}_\varepsilon(\mathrm{P}_n f - \mathrm{P} f) : f \in \mathrm{L}, \|f\|_\varepsilon \leqq 1 \} = 0.$$

Démonstration. — Soit $f \in \mathrm{L}$ telle que $\|f\|_\varepsilon \leqq 1$, posons $k_n = \mathrm{P}_n f - \mathrm{P} f$, d'après la proposition 2.2

$$m(k_n) \leqq 2\, m(f) \leqq 2,$$

il en résulte, d'une part que les k_n sont équi-uniformément continues sur M, d'autre part que, pour tout $x \in \mathrm{M}$ et tout n,

$$\frac{|k_n(x)|}{(1+d(\chi, x))^{1+\varepsilon}} \leqq \frac{|k_n(\chi)|}{(1+d(\chi, x))^{1+\varepsilon}} + 2\frac{d(\chi, x)}{(1+d(\chi, x))^{1+\varepsilon}};$$

il suffit donc, pour établir que $\lim_n \mathrm{J}_\varepsilon(k_n) = 0$ de prouver que, pour tout $x \in \mathrm{M}$, $\lim_n k_n(x) = 0$. Pour cela, x étant fixé, posons $h(g) = f(g \,.\, x)$, on a

$$|f(g \,.\, x) - f(x)| \leqq m(f)\, d(g \,.\, x, x) \leqq 2\, d(x, \chi) + d(\chi, g \,.\, \chi),$$

soit, d'après (E), e désignant la matrice identité,

$$|h(g)| \leqq |h(e)| + d(x, \chi) + 2 \log d + l(g)$$

de (H′1) il résulte alors que $\lim_n \mu_n(h) = \mu(h)$.

Considérons l'espace normé L′ obtenu en munissant L de la norme J_ε. D'après le théorème d'Ascoli $\mathrm{B} = \{ f : f \in \mathrm{L}, \|f\|_\varepsilon \leqq 1 \}$ est une partie compacte de L′, nous venons d'établir que la suite $(\mathrm{P}_n)_n$ converge simplement vers P sur B, puisque d'après la proposition 2.2 et (H′1) les opérateurs P_n sont équicontinus sur L′, cette convergence est uniforme, ce qu'il fallait établir.

Démonstration du théorème 2. — Vérifions que les hypothèses de la proposition 2.0 sont satisfaites avec

$$\mathrm{B} = \mathrm{L}, \qquad \mathrm{J} = \mathrm{J}_\varepsilon \qquad \text{et} \qquad \mathcal{S} = \{ \mathrm{P}(\mu) : \mu \in \mathcal{K} \}.$$

La compacité de $\mathcal{K}$ et la proposition 2.3 impliquent (*b*). Si $m(f) = 0$, f est constante donc $f \in \mathrm{Ker}\,(\mathrm{I} - \mathrm{P})$, d'où (*c* 1). (*c* 3) résulte de la proposition 2.2 qui prouve également (*c* 2) avec $r = c(\mathcal{K})$. (*c* 4) se déduit du théorème d'Ascoli et de la continuité de $\mathrm{P}(\mu)$ sur $(\mathrm{L}, \|\,.\,\|)$. Enfin pour établir (*c* 5) considérons une suite (f_n) de $\mathrm{D} \cap \mathrm{Ker}\,\mathrm{N}(\mathrm{P}(\mu))$, $\mu \in \mathcal{K}$, et $f \in \mathrm{L}$, telles que

$\lim_n J_\varepsilon (f_n - f) = 0$, on a , pour tout n et $x \in M$,

$$|f_n(x)| \leqq \sup_n |f_n(\chi)| + d(\chi, x) = h(x),$$

puisque h est intégrable par rapport à la probabilité $P(\mu)$-invariante ν, il vient

$$0 = \lim_n N(P(\mu)) f_n = \left(\lim_n \int f_n d\nu\right) 1 = \int f d\nu . 1 = N(P(\mu)) f.$$

Nous pouvons donc conclure comme indiqué.

2.3. *Action de* μ *sur les fonctions différentiables*

2.3.1. *Les espaces* $\mathscr{C}^k$

On note $\mathscr{C}^k(M)$ l'espace des fonctions k fois continûment différentiables sur M et l'on désigne par $d_x^k f$ la différentielle d'une telle fonction.

L'hyperplan d'équation $\sum_{i=1}^{d} v_i = 0$ est tangent à M, $\mathscr{V}$ désignera l'ensemble des éléments non nuls de cet hyperplan et $\mathscr{V}_1$ sa boule unité.

Si $v \in \mathscr{V}$, $S(v)$ est l'ensemble des segments ouverts de direction v dans M *i.e.* des $]a, b[= \{(1-\lambda) a + \lambda b : 0 < \lambda < 1\}$ où $a, b \in \mathrm{Fr}(M)$ et $\|v\| (b-a) = \|b-a\| v$.

On désigne par V le champ de vecteurs sur M dont les courbes intégrales, indexées par les couples (a, b) tels que $]a, b[\in S(v)$ sont les isométries de $\mathbb{R}$ sur $]a, b[$ définies par

$$\Psi_{ab}(t) = \frac{1}{1+e^t}(a + e^t b).$$

L'application réciproque de Ψ_{ab} est définie par

$$x \in]a, b[, \qquad x = (1-\lambda) a + \lambda b,$$
$$\Phi_{ab}(x) = \log \frac{\lambda}{1-\lambda}$$

de sorte que, pour $x \in]a, b[\in S(v)$ et $f \in \mathscr{C}^1(M)$,

$$Vf(x) = (f \circ \Psi_{ab})'(\Phi_{ab}(x)).$$

On remarquera que le champ de vecteurs V ne dépend que de la direction du vecteur v : si $w = kv$, $k > 0$, $W = V$. L'intérêt de considérer un tel champ de vecteurs apparaît dans le corollaire 2, conséquence du point (*i*) de la proposition suivante qui donne également une formule intrinsèque pour le calcul de $\mathrm{V}f(x)$.

PROPOSITION 2.4. — *Soit* $f \in \mathscr{C}^1(\mathrm{M})$ *et* $v \in \mathrm{V}$

(i) *pour tout* $x,\ y \in]a, b[\in \mathrm{S}(v)$, *il existe* z *dans le segment ouvert d'extrémités* x, y *tel que*

$$|f(x)-f(y)| = d(x, y)\,|\mathrm{V}f(z)|,$$

(ii) *si* $x \in]a, b[\in \mathrm{S}(v)$ *s'écrit* $x=(1-\lambda)\,a+\lambda\,b$, *l'on a*

$$\mathrm{V}f(x) = \alpha(x, v)\, d_x f(v)$$

où

$$\alpha(x, v) = \lambda(1-\lambda)\frac{\|b-a\|}{\|v\|} = \lim_{t \to 0_+} \frac{t}{d(x, x+tv)},$$

α *est une fonction continue strictement positive et majorée sur* $\mathrm{M} \times \mathscr{V}_1$.

Démonstration. — (i) Par application de la formule des accroissements finis, il existe s entre $\Phi_{ab}(x)$ et $\Phi_{ab}(y)$ tel que

$$f(x)-f(y) = f \circ \Psi_{ab}(\Phi_{ab}(x)) - f \circ \Psi_{ab}(\Phi_{ab}(y)) = (\Phi_{ab}(x) - \Phi_{ab}(y))\,(f \circ \Psi_{ab})'(s)$$

mais

$$(f \circ \Psi_{ab})'(s) = (f \circ \Psi_{ab})'(\Phi_{ab}(\Psi_{ab}(s))) = \mathrm{V}f(\Psi_{ab}(s)),$$

puisque Φ_{ab} est une isométrie de $]a, b[$ sur $\mathbb{R}$, on conclut en posant $z = \Psi_{ab}(s)$.

(ii) $\Psi'_{ab}(t) = \dfrac{e^t}{(1+e^t)^2}(b-a)$ donc $\Psi'_{ab}(\Phi_{ab}(x)) = \lambda(1-\lambda)(b-a)$ et

$$\mathrm{V}f(x) = d_x f(\Psi'_{ab}(\Phi_{ab}(x))) = \lambda(1-\lambda)\, d_x f(b-a) = \lambda(1-\lambda)\frac{\|b-a\|}{\|v\|}\, d_x f(v).$$

Les propriétés de α sur $\mathrm{M} \times \mathscr{V}_1$ sont claires. Supposons $v_i \neq 0$ et appliquons la formule de (i) à la fonction $f(x) = x_i$, pour $t > 0$ il existe θ, $0 < \theta < 1$ tel que

$$x_i - (x_i + tv_i) = d(x, x+tv)\,\alpha(x+\theta\, tv, v)\, v_i$$

d'où la définition de α comme limite.

Soit $v \in \mathscr{V}$ et $l \geqq 1$, V^l désigne le l-ième itéré de V, et pour $f \in \mathscr{C}^l(\mathrm{M})$, on pose

$$\mathrm{V}_l f(x) = [\alpha(x, v)]^l\, d_x^l f(v^l)$$

où v^l est le vecteur $(v, \ldots, v)$ de $\mathscr{V}^l$.

A ces opérateurs sont associées les semi-normes sur $\mathscr{C}^k(\mathrm{M})$, $k \geqq 1$, définies par

$$f \in \mathscr{C}^k(\mathrm{M}), \qquad \|f\|_k = |f(\chi)| + \sum_{l=1}^{k} \mathrm{J}_l(f),$$

$$\|f\|'_k = |f(\chi)| + \sum_{l=1}^{k} \mathrm{J}'_l(f)$$

où

$$\mathrm{J}_l(f) = \sup\{|\mathrm{V}_l f(x)| : x \in \mathrm{M}, v \in \mathscr{V}\},$$
$$\mathrm{J}'_l(f) = \sup\{|\mathrm{V}^l f(x)| : x \in \mathrm{M}, v \in \mathscr{V}\}.$$

$\mathscr{C}^k$ est l'espace vectoriel des $f \in \mathscr{C}^k(\mathrm{M})$ telles que $\|f\|_k < +\infty$.

COROLLAIRE 2. — *Pour* $f \in \mathscr{C}^1(\mathrm{M})$, $\mathrm{J}_1(f) = m(f)$. $(\mathscr{C}^1, \|.\|_1)$ *est un sous-espace isométrique de* $(\mathrm{L}, \|.\|)$.

Démonstration. — C'est une conséquence immédiate de la proposition 2.4.

PROPOSITION 2.5. — *Sur* $\mathscr{C}^k(\mathrm{M})$ *les semi-normes* $\|.\|_k$ *et* $\|.\|'_k$ *sont équivalentes.* $(\mathscr{C}^k, \|.\|_k)$ *est un espace de Banach.*

Démonstration. — L'équivalence des semi-normes repose sur le

LEMME 2.1. — *Les opérateurs* V^k *et* V_l *sont liés par les relations*

$$\mathrm{V}^k = \sum_{l=1}^{k-1} a_{kl} \mathrm{V}_l + \mathrm{V}_k,$$

$$\mathrm{V}_k = \sum_{l=1}^{k-1} b_{kl} \mathrm{V}^l + \mathrm{V}^k,$$

où a_{kl} *et* b_{kl} *désignent des fonctions bornées sur* M.

Démonstration du lemme. — La seconde formule est une conséquence immédiate de la première.

Soit $]a, b[\in \mathrm{S}(v)$, la fonction λ de $]a, b[$ dans $]0, 1[$ définie par $x = (1 - \lambda(x))\, a + \lambda(x)\, b$ est affine et sa différentielle est telle que $d\lambda(b - a) = 1$. Si p est un polynôme $\mathrm{V}p \circ \lambda$ est définie sur $]a, b[$ et

$$\mathrm{V}p \circ \lambda(x) = \alpha(x, v)\, d_x p \circ \lambda(v) = \lambda(x)(1 - \lambda(x)) \frac{\|b - a\|}{\|v\|} p'(\lambda(x))\, d\lambda(v)$$
$$= \lambda(x)(1 - \lambda(x))\, p' \circ \lambda(x)$$

en particulier

$$\mathrm{V}\,\alpha(\,.\,,v)(x)=\lambda(x)(1-\lambda(x))(1-2\lambda(x))\frac{\|b-a\|}{\|v\|}=(1-2\lambda(x))\,\alpha(x,v).$$

Par suite

$$\begin{aligned}\mathrm{VV}_l f(x) &= \mathrm{V}[\alpha(\,.\,,v)]^l(x)\,d_x^l f(v^l)+[\alpha(x,v)]^l\,\mathrm{V}\,d^l.f(v^l)(x)\\ &= l[\alpha(x,v)]^{l-1}(1-2\lambda(x))\,\alpha(x,v)\,d_x^l f(v^l)+[\alpha(x,v)]^{l+1}\,d_x^{l+1}f(v^{l+1}),\\ \mathrm{VV}_l f(x) &= l(1-2\lambda(x))\,\mathrm{V}_l f(x)+\mathrm{V}_{l+1}f(x).\end{aligned}$$

On a $\mathrm{V}^1=\mathrm{V}=\mathrm{V}_1$.

Faisons l'hypothèse que, pour $x\in]a,b[$,

$$\mathrm{V}^k f(x)=\sum_{l=1}^{k-1} p_{kl}\circ\lambda(x)\,\mathrm{V}_l f(x)+\mathrm{V}_k f(x)$$

où p_{kl} est un polynôme de degré $\leqq k-1$ dont les coefficients ne dépendent pas de v, il vient

$$\begin{aligned}\mathrm{V}^{k+1}f(x) &= \sum_{l=1}^{k-1}\mathrm{V}\,p_{kl}\circ\lambda(x)\,\mathrm{V}_l f(x)\\ &\quad+\sum_{l=1}^{k-1}p_{kl}\circ\lambda(x)\,\mathrm{VV}_l f(x)+\mathrm{VV}_k f(x)\\ &= \sum_{l=1}^{k-1}\lambda(x)(1-\lambda(x))\,p'_{kl}\circ\lambda(x)\,\mathrm{V}_l f(x)\\ &\quad+\sum_{l=1}^{k-1}p_{kl}\circ\lambda(x)\,[l(1-2\lambda(x))\,\mathrm{V}_l f(x)+\mathrm{V}_{l+1}f(x)]\\ &\quad+k(1-2\lambda(x))\,\mathrm{V}_k f(x)+\mathrm{V}_{k+1}f(x)\end{aligned}$$

donc

$$\mathrm{V}^{k+1}f(x)=\sum_{l=1}^{k}p_{k+1,\,l}\circ\lambda(x)\,\mathrm{V}_l f(x)+\mathrm{V}_{k+1}f(x)$$

où les $p_{k+1\,l}$ sont des polynômes de degré $\leqq k$ indépendants de v.

On conclut en remarquant que $0<\lambda(x)<1$.

Prouvons maintenant que $\mathscr{C}^k$ est un espace de Banach.

Soit $(f_n)_n$ une suite de Cauchy dans $(\mathscr{C}^k,\|\,.\,\|_k)$, puisque, pour $v\in\mathscr{V}_1$ et x dans un ouvert relativement compact U de M, α est minorée par un réel >0, une identité de polarisation classique montre que, pour $l=0\ldots k$, $(d^l f_n)_n$ est une suite de Cauchy pour la métrique de la convergence uniforme des fonctions sur $\mathrm{U}\times\mathscr{V}_1^l$, de sorte qu'il existe $f\in\mathscr{C}^k(\mathrm{M})$ telle que $(d^l f_n)_n$

converge vers $d^l f$ uniformément sur $U \times \mathscr{V}_1^l$. De l'arbitraire de U on conclut que $f \in \mathscr{C}^k$ et que $(f_n)_n$ converge vers f dans $\mathscr{C}^k$.

2.3.2. *Action de* P *sur* $\mathscr{C}^k$

On prouve le

THÉORÈME 3. — *Pour tout* $\mu \in \mathscr{K}$, $P(\mu)$ *et* $Q(\mu)$ *sont des endomorphismes continus de* $\mathscr{C}^k$ *tels que*:

$$\rho(Q(\mu) \leqq c(\mathscr{K}),$$

pour tout compact K, $K \subset F(c(\mathscr{K}))^c$,

$$\sup \{ \| R(z, P(\mu)) \| : z \in K, \mu \in \mathscr{K} \} < +\infty.$$

COROLLAIRE 3. — *Soit* Γ *le cercle de centre* 1 *et de rayon* $\frac{1}{2}(1 - c(\mathscr{K}))$ *dans* $\mathbb{C}$, *intégrant dans* $\mathscr{L}(\mathscr{C}^k)$ *on a, pour tout* $\mu \in \mathscr{K}$,

$$N(\mu) = \frac{1}{2 i \pi} \int_\Gamma R(z, P(\mu))\, dz.$$

Démonstration du corollaire. — En effet, on vérifie aisément que, pour $|z| > c(\mathscr{K})$, on a dans $\mathscr{L}(\mathscr{C}^k)$,

$$R(z, P(\mu)) = \frac{1}{z-1} N(\mu) + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{z^{n+1}} Q(\mu)^n.$$

La preuve du théorème 3 repose sur la

PROPOSITION 2.6. — *Soit* $\mu \in \mathscr{P}_+^{1+\varepsilon}$ *alors*

(i) *si* $f \in \mathscr{C}^k$, $P(\mu) f \in \mathscr{C}^k$ *et, pour* $l = 1 \ldots k$,

$$V^l P(\mu) f(x) = \int V^l f \circ g(x)\, d\mu(g),$$

(ii) *pour* $k \geqq 2$, *il existe une constante* R_k *ne dépendant que de* $l^{1+\varepsilon}(\mu)$ *telle que, pour tout* $f \in \mathscr{C}^k$,

$$\| P(\mu) f \|_k' \leqq R_k \| f \|_{k-1}' + c_k(\mu) \| f \|_k'$$

où

$$c_k(\mu) = \int c(g)^k\, d\mu(g).$$

Démonstration. — Ici g désigne la transformation projective associée à $g \in G_+$.

Puisque d'après (E) et le corollaire 2

$$|f(g.\chi)| \leqq |f(\chi)| + m(f)\, d(\chi, g.\chi) \leqq |f(\chi)| + J_1(f)\,[2 \operatorname{Log} d + l(g)],$$

l'essentiel est contenu dans le

LEMME 2.2. — *Il existe des constantes c_{kl}, $l=1\ldots k-1$, telles que, pour tout $g \in G_+$ et $f \in \mathscr{C}^k(M)$,*

$$J'_k(f \circ g) \leqq \sum_{l=1}^{k-1} c_{kl}\, J'_l f + [c(g)]^k\, J'_k f.$$

Démonstration du lemme. — Soient $v \in \mathscr{V}$, $]a, b[\in S(v)$, $g \in G_+$ et a_1, $b_1 \in \operatorname{Fr}(M)$ tels que $g(]a, b[) \subset]a_1, b_1[$, on pose

$$\Psi = \Psi_{ab}, \qquad \Phi = \Phi_{ab}, \qquad \Psi_1 = \Psi_{a_1 b_1},$$
$$\Phi_1 = \Phi_{a_1 b_1} \qquad \text{et} \qquad h = \Phi_1 \circ g \circ \Psi.$$

Si $x \in]a, b[$, en notant $t = \Phi(x)$, on a

$$\begin{aligned} V^k f \circ g(x) &= (f \circ g \circ \Psi)^{(k)}(t) = (f \circ \Psi_1 \circ h)^{(k)}(t) \\ &= \sum_{l=1}^{k-1} (f \circ \Psi_1)^{(l)}(h(t))\, r_{kl}(t) + (f \circ \Psi_1)^{(k)}(h(t))\,(h'(t))^k \\ &= \sum_{l=1}^{k-1} r_{kl}(t)\, W^l f(g.x) + (h'(t))^k\, W^k f(g.x) \end{aligned}$$

où r_{kl} est un polynôme en $h^{(l)}$, $l=1\ldots k$ et $w = b_1 - a_1$, il suffit donc de déterminer des bornes pour les dérivées $h^{(l)}$.

Soit $\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix}$, α, β, γ, $\delta \geqq 0$, la matrice dans les bases (a, b) et (a_1, b_1), de la restriction de l'endomorphisme g au sous-espace engendré par a et b, l'on a

$$h(t) = \log \frac{\gamma + \delta e^t}{\alpha + \beta e^t}.$$

De

$$h'(t) = \frac{\delta e^t}{\gamma + \delta e^t} - \frac{\beta e^t}{\alpha + \beta e^t}$$

il vient

$$\sup_t |h'(t)| = th \left| \frac{r}{4} \right|$$

où

$$|r| = \left| \log\frac{\delta}{\beta} - \log\frac{\gamma}{a} \right| = d(g.a, g.b) \leqq \operatorname{diam}(g.M) = \lambda(g)$$

soit

$$\sup_t |h'(t)| \leqq th\frac{\lambda(g)}{4} = c(g),$$

d'après (C).

En remarquant que la fonction φ définie par $\varphi(t) = \dfrac{ue^t}{v+ue^t}$,

$u > 0$, $v \geqq 0$, satisfait à $0 < \varphi(t) \leqq 1$ et $\varphi'(t) = \varphi(t)(1-\varphi(t))$

on concluera que les dérivées $h^{(l)}$ sont bornées par des constantes indépendantes de $g \in G_+$.

Soit $f \in \mathscr{C}^k$, la fonction $f \circ g$ est k fois continûment différentiable sur M et les lemmes 2.1 et 2.2 montrent que les différentielles $d_x^l f \circ g$ sont bornées en norme pour $g \in G_+$ et x dans un ouvert relativement compact de M, de sorte que, pour tout $u \in \mathscr{V}^l$ et $x \in M$,

$$d_x^l P(\mu) f(u) = \int d_k^l f \circ g(u)\, d\mu(g)$$

et

$$V_l P(\mu) f(x) = \int V_l f \circ g(x)\, d\mu(g),$$

et, par le lemme 2.1,

$$V^l P(\mu) f(x) = \int V^l f \circ g(x)\, d\mu(g),$$

le point (ii) est alors établi par application du lemme 2.2.

Démonstration du théorème 3. — D'après la proposition 2.2 et le corollaire 2, il existe une constante R telle que, pour tout $\mu \in \mathscr{K}$ et $f \in \mathscr{C}^1$,

$$\| P(\mu) f \|_1 = \| P(\mu) f \| \leqq R \| f \| + 0 \| f \|_1.$$

Il résulte alors du théorème 2 et de la proposition 2.1 que $(P(\mu))\ \mu \in \mathscr{K}$ a sur $\mathscr{C}^1$ la propriété $\Pi(c(\mathscr{K}))$; cette propriété s'étend de proche en proche à tous les espaces $\mathscr{C}^k$ en utilisant la proposition 2.6 et la proposition 2.1.

3. Régularité différentielle de γ

Nous commençons par étudier la régularité de $\gamma(\mu_s)$ lorsque $(\mu_s)_s$ est une famille de probabilités sur G_+ dépendant d'un paramètre réel, ce résultat est ensuite appliqué au cas où les coefficients des matrices eux-mêmes dépendent d'un paramètre.

3.1. *Famille de probabilités dépendant d'un paramètre*

Les arguments de ce paragraphe sont empruntés à [7], lemmes 7 et 8.

Il est commode d'introduire ici $\mathscr{C}^\infty = \bigcap_{k \geqq 1} \mathscr{C}^k$ qui muni des normes $\|.\|_i$, $i \geqq 1$, est un espace de Fréchet et l'espace $\mathscr{L}$ des endomorphismes continus de $\mathscr{C}^\infty$.

Pour $i, j \geqq 1$ et $P \in \mathscr{L}$, on pose

$$\|P\|_{ij} = \sup\left\{\frac{\|Pf\|_j}{\|f\|_i} : f \in \mathscr{C}^\infty \setminus \{0\}\right\},$$

si $r \geqq 0$, $\mathscr{L}_r$ désigne alors le sous-espace des $P \in \mathscr{L}$ tels que, pour tout $i \geqq 1$, $\|P\|_{i+r,i} < +\infty$, muni des normes $\|.\|_{i+r,i}$, $i \geqq 1$. Comme les normes $\|.\|_i$ forment une suite croissante, $\mathscr{L}_r$ est inclus dans $\mathscr{L}_{r+1}$ et l'injection canonique est continue.

Dans ce qui suit, E et F étant des ensembles munis des structures convenables, $\mathscr{C}^k(E, F)$ désigne l'espace des fonctions k fois continûment dérivables de E dans F, si $k \geqq 1$, continues de E dans F, si $k = 0$.

Soit maintenant $(\mu_s)_{s \in J}$ une famille de probabilités sur G_+ indexée par l'intervalle ouvert J de $\mathbb{R}$, on note P_s l'opérateur de transition associé sur M, l'on pose

$$\bar{\sigma}_s(x) = \int \log \|gx\| \, d\mu_s(g) \qquad \text{et} \qquad \gamma(s) = \gamma(\mu_s).$$

PROPOSITION 3.1. — *Supposons que, pour tout* I *intervalle ouvert relativement compact dans* J,

(i) $\{\mu_s : s \in \bar{I}\}$ *satisfait à* (H1), (H2), (H3),

(ii) *il existe* q *tel que* $P_. \in \mathscr{C}^k(I, \mathscr{L}_q)$,

(iii) $\bar{\sigma}_. \in \mathscr{C}^k(I, \mathscr{C}^\infty)$

alors $\gamma \in \mathscr{C}^k(J, \mathbb{R})$.

Démonstration. — Soit I comme dans l'énoncé, le théorème 3 s'applique à l'action sur tous les espaces $\mathscr{C}^l$ de $\mathscr{K} = \{\mu_s : s \in \bar{I}\}$, en particulier, en posant $U = F(c(\mathscr{K}))^c$, $R(z, s) = R(z, P_s)$ est définie et bornée sur tout compact de $U \times I$. Remarquons qu'alors $R(z, s) \in \mathscr{L}_0$.

LEMME 3.1. — *Il existe* $r \geqq 0$ *tel que*
(i) *pour* $z \in U$, $R(z, .) \in \mathscr{C}^k(I, \mathscr{L}_r)$,
(ii) *pour* $j = 0 \ldots k$, $\dfrac{\partial^j R}{\partial s^j} \in \mathscr{C}^0(U \times I, \mathscr{L}_r)$.

Démonstration du lemme. — (*a*) Prouvons l'assertion pour $k = 1$ en faisant usage de l'équation résolvante

$$R(z, s) - R(z_0, s_0) = R(z, s)((z_0 - P_{s_0}) - (z - P_s)) R(z_0, s_0).$$

Pour $i \geqq 1$

$$\begin{aligned} &\| R(z, s) - R(z_0, s_0) \|_{i+q, i} \\ &\qquad \leqq \| R(z, s) \|_{i, i} \| (z_0 - P_{s_0}) - (z - P_s) \|_{i+q, i} \| R(z_0, s_0) \|_{i+q, i+q}, \end{aligned}$$

puisque $\| R(z, s) \|_{i, i}$ est bornée sur tout compact de $U \times I$, on conclut que

$$R \in \mathscr{C}^0(U \times I, \mathscr{L}_q).$$

Par un argument similaire, on voit que

$$\frac{1}{s - s_0}[R(z, s) - R(z, s_0)] = R(z, s) \frac{1}{s - s_0}(P_s - P_{s_0}) R(z, s_0)$$

a une limite dans $\mathscr{L}_{2q}$ lorsque s tend vers s_0, donc $R(z, .)$ est dérivable de I dans $\mathscr{L}_{2q}$ et

$$\frac{\partial}{\partial s} R(z, s) = R(z, s) \frac{dP}{ds}(s) R(z, s),$$

comme $(u, v, w) \to uvw$ est continue de $(\mathscr{L}_q)^3$ dans $\mathscr{L}_{3q}$,

$$\frac{\partial R}{\partial s} \in \mathscr{C}^0(U \times I, \mathscr{L}_{3q}).$$

On posera $r = 3q$.

(*b*) Supposons le lemme établi pour l'entier $j, j \geqq 1$.

Si $P. \in \mathscr{C}^{j+1}(I, \mathscr{L}_q)$, $P. \in \mathscr{C}^j(I, \mathscr{L}_q) \subset \mathscr{C}^1(I, \mathscr{L}_q)$ et, d'après l'hypothèse de récurrence, il existe r tel que la fonction $\left(R(z, .), \dfrac{dP}{ds}(.), R(z, .)\right)$ est j fois dérivable de I dans $\mathscr{L}_r \times \mathscr{L}_q \times \mathscr{L}_r$, que ses dérivées sont continues sur $U \times I$ et l'on a $\dfrac{\partial R}{\partial s} = R \dfrac{dP}{ds} R$, comme la fonction $(u, v, w) \to uvw$ est indéfiniment différentiable de $\mathscr{L}_r \times \mathscr{L}_q \times \mathscr{L}_r$, dans $\mathscr{L}_{2r+q}$ l'assertion du lemme est prouvée pour l'entier $j + 1$.

Nous achevons maintenant la preuve de la proposition.

D'après le corollaire 3, on a par intégration dans $\mathscr{L}_0$ donc dans $\mathscr{L}_r$

$$\nu_s(.)\,1=\frac{1}{2\,i\pi}\int_{\Gamma} \mathrm{R}(z,s)\,dz$$

et il résulte du lemme qu'il existe r tel que le second membre est une fonction k fois continûment différentiable de I dans $\mathscr{L}_r$, c'est-à-dire que $\nu.$ est k fois continûment dérivable de I dans le dual $(\mathscr{C}^r)'$ de $\mathscr{C}^r$. Comme $\bar{\sigma}\in\mathscr{C}^k(\mathrm{I},\mathscr{C}^\infty)\subset\mathscr{C}^k(\mathrm{I},\mathscr{C}^r)$ et que en faisant usage du crochet de dualité $((\mathscr{C}^r)',\mathscr{C}^r)$ on a $\gamma(s)=\langle \nu_s,\bar{\sigma}_s\rangle$, on conclut que $\gamma\in\mathscr{C}^k(\mathrm{I},\mathbb{R})$.

3.2. *Famille de matrices dépendantes d'un paramètre*

Dans ce paragraphe pour achever la preuve du théorème nous vérifions que sous les conditions (C1), (C2), (C3) les lois μ_s de g_s satisfont aux hypothèses de la proposition 3.1.

Pour alléger l'écriture des matrices ou de leurs coefficients on s'autorise lorsque cela ne crée pas d'ambiguïté à omettre la variable ω.

3.2.1. *Vérification de* (i)

Pour des matrices de déterminant ± 1, (H1) se réduit à

$$\sup\left\{\int[\log^+\|g_s\|]^{1+\varepsilon}\,dp : s\in\mathrm{I}\right\}<+\infty$$

qui d'après (D), équivaut à (C1).

La continuité de $g_0(\omega)$ montre que μ_s est une fonction continue de s, puisque I est relativement compact dans J, on en déduit (H2) et également (H3) car, d'après (C2), $c(\mu_s)<1$.

3.2.2. *Définition des espaces* $\mathscr{C}^k$ *à l'aide des coordonnées*

On vérifiera plus commodément les points (ii) et (iii) en utilisant la représentation de M et les normes équivalentes aux $\|\,.\,\|_k$ suivants.

On pose $m=d-1$ et l'on identifie M à $(\mathbb{R}_+^*)^m$ à l'aide de la bijection affine :

$$(\mathbb{R}_+^*)^m\ni(x_1,\ldots,x_m)\to\left(\sum_{i=1}^m x_i+1\right)^{-1}(x_1,\ldots,x_m,1)\in\mathrm{M},$$

$\mathscr{V}$ s'identifie alors à $\mathbb{R}^m\setminus\{0\}$. Pour tout multi-entier $r=(r_1,\ldots,r_m)\in\mathbb{N}^m$, on pose $|r|=r_1+\ldots+r_m$ et l'on définit sur $\mathscr{C}^\infty$ les opérateurs ∂_r et D_r

par

$$\partial_r f(x) = \frac{\partial^{|r|} f}{\partial x_1^{r_1} \ldots \partial x_m^{r_m}}(x), \qquad D_r f(x) = x_1^{r_1} \ldots x_m^{r_m} \partial_r f(x),$$

auxquels on associe, pour $k \geqq 1$, les semi-normes sur $\mathscr{C}^\infty$

$$|\|f\||_k = |f(\chi)| + \sum_{r:|r| \leqq k} \sup\{|D_r f(x)| : x \in M\}.$$

PROPOSITION 3.2. — *$\mathscr{C}^k$ est l'espace vectoriel des $f \in \mathscr{C}^k(M)$ telles que $|\|f\||_k < +\infty$, sur $\mathscr{C}^k$ les normes $\|\cdot\|_k$ et $|\|\cdot\||_k$ sont équivalentes.*

Démonstration. — Nous utiliserons le

LEMME 3.2. — *Pour $x = (x_1, \ldots, x_m) \in M$ et $v = (v_1, \ldots, v_m) \in \mathscr{V}$, on a*

$$\alpha(x, v) = [\tau(x, v) + \tau(x, -v)]^{-1}$$

où $\tau(x, v) = \max\left\{0, \frac{v_1}{x_1}, \ldots, \frac{v_m}{x_m}\right\}$.

Démonstration du lemme. — Soit $t > 0$, on a, d'après (B), en posant $x_d = 1$ et $v_d = 0$,

$$\begin{aligned} d(x, x + tv) &= \log\max\left\{\left(1 + t\frac{v_i}{x_i}\right)\left(1 + t\frac{v_j}{x_j}\right)^{-1} : i, j = 1 \ldots d\right\} \\ &= \log[1 + t\tau(x, v)] - \mathrm{Log}[1 - t\tau(x, -v)] \end{aligned}$$

et

$$\alpha(x, v) = \lim_{t \to 0+} \frac{t}{d(x, x + tv)} = [\tau(x, v) + \tau(x, -v)]^{-1}.$$

Pour $v = (v_1, \ldots, v_m) \in \mathscr{V}$, $l \geqq 1$ et $f \in \mathscr{C}^\infty$, on a

$$V_l f(x) = \alpha(x, v)^l \left\{\sum_{r:|r| = l} v_1^{r_1} \ldots v_m^{r_m} \partial_r f(x)\right\}$$

et en posant $\alpha_i(x, v) = \alpha(x, v)\,\dfrac{v_i}{x_i}$

$$V_l f(x) = \sum_{r:|r| = l} \alpha_1(x, v)^{r_1} \ldots \alpha_m(x, v)^{r_m} D_r f(x).$$

Puisque $|\alpha_i(x, v)| \leqq 1$, il vient

$$J_l f \leqq \sum_{r:|r| = l} \sup\{|D_r f(x)| : x \in M\}$$

de sorte que $|\|\cdot\||_k$ est plus fine que $\|\cdot\|_k$.

D'autre part, x étant fixé, définissons $v \in \mathscr{V}$ par $v_m = x_m$ et $v_i = t_i x_i$, $0 \leqq t_i \leqq 1$, pour $i = 1 \ldots m$, dans ce cas

$$\alpha_m(x, v) = \alpha(x, v) = 1 \qquad \text{et} \qquad \alpha_i(x, v) = t_i, i = 1 \ldots m-1$$

d'où

$$\mathrm{V}_l f(x) = \sum_{r : |r| = l} t_1^{r_1} \ldots t_{m-1}^{r_{m-1}} \mathrm{D}_r f(x),$$

or (en utilisant, par exemple, l'équivalence des normes sur un espace vectoriel de dimension finie) il existe une constante C_l telle que pour tout polynôme à $m-1$ variables de degré $\leqq l$,

$$\mathrm{P}(t_1, \ldots, t_{m-1}) = \sum_{r : |r| \leqq l} a_r t_1^{r_1} \ldots t_{m-1}^{r_{m-1}}$$

on ait

$$\sup\{ |a_r| : r, |r| \leqq l \} \leqq \mathrm{C}_l \sup\{ |\mathrm{P}(t_1, \ldots, t_{m-1})| : t_i \in [0, 1], i = 1 \ldots m-1 \},$$

par suite, pour $f \in \mathscr{C}^\infty$ et $x \in \mathrm{M}$,

$$\sup\{ |\mathrm{D}_r f(x)| : r, |r| \leqq l \}$$
$$\leqq \mathrm{C}_l \sup\{ |\mathrm{V}_l f(x)| : t_i \in [0, 1], i = 1 \ldots m-1 \} \leqq \mathrm{C}_l \mathrm{J}_l f$$

ce qui permet de conclure à l'équivalence des normes.

3.2.3. *Vérification de* (ii)

Nous prouvons que pour un q convenable $\mathrm{P}_. \in \mathscr{C}^k(\mathrm{I}, \mathscr{L}_q)$ où I est un intervalle ouvert relativement compact dans J.

Pour $f \in \mathscr{C}^\infty$, on pose $f \circ g_s(x) = f(g_s . x)$.

LEMME 3.3. — *Soit* $f \in \mathscr{C}^\infty$ *alors, pour* $l = 1 \ldots k+2$, *on a* $\dfrac{\partial^l}{\partial s^l} f \circ g_s \in \mathscr{C}^\infty$; *de plus, pour* $r \in \mathbb{N}^m$, *il existe* $\mathrm{C}_r > 0$ *tel que: pour tout* $f \in \mathscr{C}^\infty$, $l = 1 \ldots k+2$, $s \in \mathrm{I}$, *on ait*

$$\sup\left\{ \left| \mathrm{D}_r \frac{\partial^l}{\partial s^l} f \circ g_s(x) \right| : x \in \mathrm{M} \right\} \leqq \mathrm{C}_r w^l |||f|||_{l+r}.$$

Démonstration. — On pose, pour $i = 1 \ldots m$,

$$g_{si}(x) = a_{il}(s) x_1 + \ldots + a_{im}(s) x_m + a_{id}(s)$$

et

$$g_{si} . x = \frac{g_{si}(x)}{g_{sd}(x)}$$

l'on a

$$g_s . x = (g_{s1} . x, \ldots, g_{sm} . x).$$

Les dérivées l-ième par rapport à s de ces fonctions seront signalées par l'indice supérieur (l).

LEMME 3.4. — *Pour tout $r \in \mathbb{N}^m$, il existe une constante C'_r telle que: pour $l = 1 \ldots k+2$, $i = 1 \ldots m$, $s \in I$, $x \in M$,*

$$\left| D_r \left(\frac{g_{si}^{(l)} . x}{g_{si} . x} \right) \right| \leqq C'_r w^l.$$

Démonstration du lemme 3.4. — Remarquons que, si u est l fois dérivable de I dans $\mathbb{R}_+^*$, on a

$$(\log u)^{(l)} = P_l \left(\frac{u'}{u}, \frac{u''}{u}, \ldots, \frac{u^{(l)}}{u} \right)$$

et

$$\frac{u^{(l)}}{u} = Q_l (\log u)', (\log u)'', \ldots, (\log u)^{(l)})$$

où P_l et Q_l sont des polynômes à l variables possédant la propriété d'homogénéité de degré l définie par

$$\lambda \geqq 0, \qquad S_l (\lambda X_1, \lambda^2 X_2, \ldots, \lambda^l X_l) = \lambda^l S_l (X_1, X_2, \ldots, X_l).$$

Si v est une autre fonction l fois dérivable de I dans $\mathbb{R}_+^*$, on a

$$\frac{(u/v)^{(l)}}{(u/v)} = R_l \left(\frac{u'}{u}, \frac{u''}{u}, \ldots, \frac{u^{(l)}}{u}, \frac{v'}{v}, \frac{v''}{v}, \ldots, \frac{v^{(l)}}{v} \right)$$

où

$$\begin{aligned} &R_l (X_1, \ldots, X_l, Y_1, \ldots, Y_l) \\ &\qquad = Q_l (P_1 (X_1) - P_1 (Y_1), \ldots, P_l (X_1, \ldots, X_l) - Q_l (Y_1, \ldots, Y_l)) \end{aligned}$$

est tel que, pour tout $\lambda \geqq 0$,

$$R_l (\lambda X_1, \ldots, \lambda^l X_l, \lambda Y_1, \ldots, \lambda^l Y_l) = \lambda^l R (X_1, \ldots, X_l, Y_1, \ldots, Y_l).$$

Le lemme sera donc établi si l'on prouve pour tout $r \in \mathbb{N}^m$ l'existence d'une constante C''_r telle que, pour $l = 1 \ldots k+2$, $i = 1 \ldots m$, $s \in I$ et $x \in M$

$$\left| D_r \left(\frac{g_{si}^{(l)} (x)}{g_{si} (x)} \right) \right| \leqq C''_r w^l.$$

Omettant la variable s, on écrira, pour $i=1\dots m$,

$$\frac{g_i^{(l)}(x)}{g_i(x)}=\sum_{j=1}^{m}\frac{(e^{c_{ij}})^{(l)}}{e^{c_{ij}}}g_{ij}(x)+\frac{(e^{c_{id}})^{(l)}}{e^{c_{id}}}g_{id}(x),$$

en posant

$$g_{ij}(x)=\frac{a_{ij}x_j}{g_i(x)}\qquad\text{pour}\quad i=1\dots m\qquad\text{et}\qquad g_{id}(x)=\frac{a_{id}}{g_i(x)};$$

δ_{jl} étant le symbole de Kronecker, on vérifie que, pour $j=1\dots d$ et $l=1\dots m$,

$$x_l\frac{\partial}{\partial x_l}g_{ij}(x)=\delta_{jl}g_{ij}(x)-g_{ij}(x)g_{il}(x),$$

puisque $0<g_{ij}(x)\leqq 1$, l'assertion en résulte en remarquant que $D_{r'}\circ D_r=D_{r'+r}$ et en utilisant finalement l'expression précitée de $(e^{c_{ij}})^{(l)}e^{-c_{ij}}$ à l'aide des dérivées $c_{ij}^{(l')}$, $l'=1\dots l$.

Revenons à la preuve du lemme 3.3. $\dfrac{\partial^l}{\partial s^l}f\circ g_s(x)$ est une combinaison linéaire de termes

$$d^{\lambda}_{g_s.x}f(g_s^{(l_1)}.x,\dots,g_s^{(l_\lambda)}.x)$$

où $1\leqq\lambda\leqq l$, $l_1\geqq 1,\dots,l_\lambda\geqq 1$, $l_1+\dots+l_\lambda=l$, soit encore combinaison linéaire de termes

$$\begin{aligned}A(f,s,j_1,\dots,j_\lambda,l_1,\dots,l_\lambda)(x)&\\&=\frac{\partial^\lambda f}{\partial x_{j_1}\dots\partial x_{j_\lambda}}(g_s.x)(g_{sj_1}^{(l_1)}.x)\dots(g_{sj_\lambda}^{(l_\lambda)}.x)\\&=D_{r_0}f(g_s.x)\left(\frac{g_{sj_1}^{(l_1)}.x}{g_{sj_1}.x}\right)\dots\left(\frac{g_{sj_\lambda}^{(l_\lambda)}.x}{g_{sj_\lambda}.x}\right)\end{aligned}$$

pour un $r_0\in\mathbb{N}^m$ convenable tel que $|r_0|=\lambda$.

Or, si $f\in\mathscr{C}^\infty$, $D_{r_0}f\in\mathscr{C}^\infty$ d'après la proposition 3.2 et donc, d'après le lemme 2.2, pour tout $r_1\in\mathbb{N}^m$ il existe une constante C″ telle que, pour tout $f\in\mathscr{C}^\infty$, $s\in I$, $x\in M$

$$|D_{r_1}[(D_{r_0}f)\circ g_s](x)|\leqq C''_{r_1}\,|\,\|f\|\,\|_{r_1|+\lambda};$$

on conclut alors en utilisant le lemme précédent que, pour $r\in\mathbb{N}^m$, il existe une constante C_r''' telle que, pour $f\in\mathscr{C}^\infty$, $s\in I$, $x\in M$

$$|D_rA(f,s,j_1,\dots,j_\lambda,l_1,\dots,l_\lambda)(x)|\leqq C_r'''\,|\,\|f\|\,\|_{|r|+\lambda}\,w^{l_1+\dots+l_\lambda},$$

ce qu'il fallait établir.

PROPOSITION 3.3. — $P_{.} \in \mathscr{C}^k(I, \mathscr{L}_{k+2})$.

Démonstration. — Posons, pour $l=0, \ldots, k+2$ et $f \in \mathscr{C}^\infty$

$$P_s^{(l)} f(x) = \int \frac{\partial^l}{\partial s^l} f \circ g_s(x)\, dp.$$

On déduit aisément du lemme 3.3 que cette expression a un sens, que la fonction $P_s^{(l)} f$ est indéfiniment dérivable sur M et que, pour $r \in \mathbb{N}^m$,

$$D_r (P_s^{(l)} f)(x) = \int D_r \left(\frac{\partial^l}{\partial s^l} f \circ g_s \right)(x)\, dp$$

et encore que $P_s^{(l)} \in \mathscr{L}_l$.

D'autre part la permutation des différentielles en x et des dérivations en s étant possible, on a, pour s et $s+t \in I$, $t \neq 0$ et $l=1 \ldots k+1$.

$$\begin{aligned} &\left| \frac{1}{t} \left[D_r \frac{\partial^{l-1}}{\partial s^{l-1}} f \circ g_{s+t}(x) - D_r \frac{\partial^{l-1}}{\partial s^{l-1}} f \circ g_s(x) \right] - D_r \frac{\partial^l}{\partial s^l} f \circ g_s(x) \right| \\ &\qquad \leqq \left| \frac{t}{2} \right| \sup \left\{ \left| \frac{\partial^{l+1}}{\partial s^{l+1}} D_r f \circ g_{s+u}(x) \right|, |u| \leqq |t| \right\} \\ &\qquad\qquad \leqq \left| \frac{t}{2} \right| C_r w^{l+1} \, |||f|||_{|r|+l+1} \end{aligned}$$

par intégration par rapport à p

$$\begin{aligned} &\sup \left\{ \left| D_r \left\{ \frac{1}{t} [P_{s+t}^{(l-1)} f - P_s^{(l-1)} f] - P_s^{(l)} f \right\}(x) \right| : x \in M \right\} \\ &\qquad \leqq \frac{|t|}{2} C_r \left(\int w^{l+1}\, dp \right) |||f|||_{|r|+l+1} \end{aligned}$$

de sorte que $P_{.}^{(l-1)}$ est dérivable de I dans $\mathscr{L}_{l+1}$ et de dérivée $P_{.}^{(l)}$.

Finalement $P_{.}^{(0)}$ est $k+1$ fois dérivable de I dans $\mathscr{L}^{k+2}$, d'où le résultat.

3.2.4. *Vérification de* (iii)

Rappelons que gx désigne l'image du vecteur x par l'endomorphisme g.

LEMME 3.5. — *Pour* $r \in \mathbb{N}^m$, *il existe* C_r *tel que, pour* $l=1 \ldots k+2$, $s \in I$, $x \in M$, *on ait*

$$\left| D_r \frac{\partial^l}{\partial s^l} \log \| g_s x \| \right| \leqq C_r w^l.$$

Démonstration. — Il suffit comme au lemme 3.4, d'établir que, pour $l=1\ldots k+2$, il existe C telle que, pour tout $x\in M$,

$$\left|D_r\left(\frac{1}{\|g_s x\|}\frac{\partial^l}{\partial s^l}\|g_s x\|\right)\right|\leqq C\,w^l,$$

or, avec les notations de ce lemme,

$$\frac{1}{\|g_s x\|}\frac{\partial^l}{\partial s^l}\|g_s x\|=\frac{\sum_{i=1}^{d} g_{si}^{(l)}(x)}{\sum_{k=1}^{d} g_{sk}(x)}$$
$$=\sum_{i=1}^{d}\left\{\sum_{j=1}^{m}\frac{(e^{c_{ij}(s)})^{(l)}}{e^{c_{ij}(s)}}\frac{a_{ij}(s)\,x_j}{\sum_{k=1}^{d} g_{sk}(x)}+\frac{(e^{c_{id}(s)})^{(l)}}{e^{c_{id}(s)}}\frac{a_{id}(s)}{\sum_{k=1}^{d} g_{sk}(x)}\right\}$$

et l'on conclut de façon analogue.

PROPOSITION 3.4. — $\bar{\sigma}_. \in \mathscr{C}^k(\mathrm{I},\mathscr{C}^\infty)$.

Démonstration. — Elle est similaire à celle de la proposition 3.3.

On a, pour $s\in\mathrm{I}$, $s+t\in\mathrm{I}$, $t\neq 0$, $l=1\ldots k+1$ et $r\in\mathbb{N}^m$,

$$\left|\frac{1}{t}\left[D_r\frac{\partial^{l-1}}{\partial s^{l-1}}\log\|g_{s+t}x\|-D_r\frac{\partial^{l-1}}{\partial s^{l-1}}\log\|g_s x\|\right]-D_r\frac{\partial^l}{\partial s^l}\log\|g_s x\|\right|$$
$$\leqq\left|\frac{t}{2}\right|\sup\left\{\left|\frac{\partial^{l+1}}{\partial s^{l+1}}D_r\log\|g_{s+u}x\|,\right|:|u|\leqq|t|\right\}\leqq\frac{|t|}{2}C_r\,w^{l+1},$$

soit après intégration

$$\sup\left\{\left|D_r\left\{\frac{1}{t}[\bar{\sigma}_{s+t}^{(l-1)}-\bar{\sigma}_s^{(l-1)}]-\bar{\sigma}_s^{(l)}\right\}(x)\right|:x\in M\right\}\leqq\frac{|t|}{2}C_r\int w^{(l+1)}\,dp$$

où l'on a posé, pour $l=0,\ldots,k+2$,

$$\bar{\sigma}_s^{(l)}(x)=\int\frac{\partial^l}{\partial s^l}\log\|g_s x\|\,dp,$$

il en résulte que $\bar{\sigma}_.$ est $k+1$ fois dérivable de I dans $\mathscr{C}^\infty$.

RÉFÉRENCES

[1] Ph. Bougerol et J. Lacroix, Products of Random Matrices with Applications to Schrödinger Operators. *Prog. Prob. Stat.*, vol. **8**, 1985, Birkhäuser.

[2] H. Furstenberg, Non-commuting Random Products, *Trans. Am. Math. Soc.*, vol. **108**, 1963, p. 377-428.

[3] H. Furstenberg et Y. Kifer, Random Matrix Products and Measures on Projective Spaces, *Israel J. Math.*, vol. **10**, 1983, p. 12-32.

[4] H. Hennion, Loi des grands nombres et perturbations pour des produits réductibles de matrices aléatoires, *Zeit. Wahr. verw.*, Geb, vol. **67**, 1984, p. 265-278.

[5] F. Ledrappier, Quelques propriétés des exposants caractéristiques, École d'Été de Saint-Flour, 12, 1982, *Lect. Notes Math.*, n° **1097**, Springer-Verlag.

[6] E. Le Page, Théorèmes limites pour les produits de matrices aléatoires. *Probability measures on groups*, *Lect. Notes Math.*, n° **928**, 1982, p. 258-303, Springer-Verlag.

[7] E. Le Page, Régularité du plus grand exposant caractéristique des produits de matrices aléatoires indépendantes et applications, *Ann. Inst. Henri-Poincaré*, vol. **25**, n° 2, 1989, p. 109-142.

[8] E. Le Page, Théorème de renouvellement pour les produits des matrices aléatoires, Séminaire de Rennes, 1983.

[9] F. Norman, Markov Processes and Learning Models, Academic Press, New York, 1972.

[10] D. Ruelle, Analyticity Properties of the Characteristic Exponents of Random Matrix Products, *Adv. Math.*, vol. **32**, 1979, p. 68-80.

[11] E. Seneta, Non-negative Matrices and Markov Chains, 2nd ed., Springer-Verlag.

(*Manuscrit reçu le* 18 *janvier* 1990;
corrigé le 11 *mai* 1990.)