ANNALES DE L'I. H. P., SECTION B

LAURENT SCHWARTZ

Équation différentielle stochastique (EDS) sur R^N et sur $R^N \cup \{\infty\} = S_N$

Annales de l'I. H. P., section B, tome 25, nº 3 (1989), p. 259-263
<http://www.numdam.org/item?id=AIHPB_1989__25_3_259_0>

Ann. Inst. Henri Poincaré,

Vol. 25, n° 3, 1989, p. 259-263. *Probabilités et Statistiques*

Équation différentielle stochastique (EDS) sur $\mathbf{R}^N$ et sur $\mathbf{R}^N \cup \{\infty\} = \mathbf{S}_N$

par

Laurent SCHWARTZ

37, rue Pierre-Nicole, 75005 Paris

RÉSUMÉ. — On donne une démonstration géométrique simple du fait que le flot d'une équation différentielle stochastique dans $\mathbf{R}^N$ à coefficients globalement lipschitziens s'éloigne uniformément vers l'infini quand le point de départ tend vers l'infini.

Mots clés : Equation différentielle stochastique, Flot, Semi-martingale.

ABSTRACT. — We give a simple geometric proof for the fact that the flow of a stochastic differential equation in $\mathbf{R}^N$, with globally Lipschitz coefficients, goes uniformly to infinity as the starting point tends to infinity.

Considérons une EDS dans $\mathbf{R}^N$

$$dX_t = H(t, \omega, X_t)\, dZ_t, \qquad X_0 = x,$$

où X est la semi-martingale inconnue, à valeurs dans $\mathbf{R}^N$, Z la semi-martingale directrice continue à valeurs dans $\mathbf{R}^m$, H une application de $\bar{\mathbf{R}}_+$ $(=[0, +\infty]) \times \Omega \times \mathbf{R}^N$ dans $\mathscr{L}(\mathbf{R}^m; \mathbf{R}^N)$. On suppose H champ de vecteurs localement borné et *globalement* lipschitzien :

$$|H(t, \omega, x) - H(t, \omega, y) \leqq K |x-y|.$$

Classification A.M.S. : 60 H 10, 58 G 32.

Il existe une solution unique, sans temps de mort, et on peut introduire un flot Φ, application de $\bar{\mathbf{R}}_+ \times \Omega \times \mathbf{R}^N$ dans $\mathbf{R}^N$, tel que $\Phi(t, ., x)$ soit la valeur de la solution X_t^x à l'instant t, lorsque $X_0^x = x$. On démontre un grand nombre de propriétés remarquables de ce flot [1], dont la première est que, pour $\mathbf{P}$-presque tout ω, $\Phi(., \omega, .)$ est continue. Plusieurs très belles démonstrations des diverses propriétés ont été données. On sait que le résultat subsiste si on remplace $\mathbf{R}^N$ par une variété V_N de classe C^2, mais alors la condition de Lipschitz globale n'a plus de sens, sauf si V_N est compacte, auquel cas c'est la condition de Lipschitz locale. L'équation se pose sous une autre forme, parce qu'il y a un terme en $H\,dZ$ et un terme en $\underline{H}\,d[Z, Z]$ où H est un champ de vecteurs 1-tangents et $\underline{H}$ un champ de vecteurs 2-tangents, avec des conditions de compatibilité précises. La méthode de résolution consiste à plonger V_N dans $\mathbf{R}^{2N}$, à prolonger l'EDS de V_N à $\mathbf{R}^{2N}$, à résoudre l'équation et à trouver le flot dans $\mathbf{R}^{2N}$, et juste à savoir qu'une solution qui part à l'instant 0 d'un point de $V_N \subset \mathbf{R}^{2N}$ y reste toute sa vie.

Parmi les nombreuses propriétés du flot dans $\mathbf{R}^N$, figure la suivante :

THÉORÈME 1. — *Lorsque x s'éloigne indéfiniment dans $\mathbf{R}^N$, pour $\mathbf{P}$-presque tout ω, toute la trajectoire $\varphi(., \omega, x)$ s'éloigne uniformément vers l'infini.*

La démonstration est probabiliste, du même type que pour les autres propriétés du flot, utilisant un théorème de Kolmogorov. Nous allons en donner une complètement différente, sans probabilité, purement géométrique, grâce au théorème suivant :

THÉORÈME 2. — *Si on prolonge l'EDS à $S_N = \mathbf{R}^N \cup \{\infty\}$ (compactifié d'Alexandroff, une sphère) en prenant des champs nuls au point ∞, on obtient des champs sur S_N qui sont globalement lipschitziens.*

Ceci démontrera le théorème 1. Car alors on aura un flot prolongé Φ, application de $\bar{\mathbf{R}}_+ \times \Omega \times S_N$ dans S_N, qui aura les mêmes propriétés que sur $\mathbb{R}^N$; comme les champs sont nuls au point ∞, $\Phi(., ., \infty) \equiv \infty\ \mathbf{P}-ps.$, et à cause de la continuité du flot, il en résultera bien que, si x tend vers ∞, $\Phi(., ., x)$ converge $\mathbf{P}-ps.$ uniformément vers ∞. La démonstration du théorème 2 n'est pas plus simple que celle du théorème 1 par Kolmogorov, mais le théorème 2 est élémentaire et intéressant en lui-même.

Démonstration du théorème 2. — C'est purement géométrique. On va raisonner sur la carte $S_N \setminus B$, B boule unité fermée, autour de ∞ de S_N, en appelant $\bar{x}$ l'inverse de x, $\bar{x} = \dfrac{x}{|x|^2}$, $\bar{x} = \Phi(x)$, $\Phi^{-1} = \Phi$, $x = \dfrac{\bar{x}}{|\bar{x}|^2}$, $|\Phi(x)| = |x|^{-1}$. On doit montrer que les champs sont lipschitziens en $\bar{x}$ dans $\mathring{B}$, ils seront alors lipschitziens en x sur S_N. Pour l'instant, $\infty \in S_N$ n'est pas encore intervenu, nous serons donc, pour $\bar{x}$, sur $\mathring{B} \setminus \{0\}$ ($\mathring{B}$ = boule unité ouverte).

$$\partial_i \Phi(y) = \frac{e_i}{|y|^2} - \frac{2 y y^i}{|y|^4}, \tag{2.1}$$

où $(e_k)_{k=1,2,\ldots,N}$ est la base canonique de $\mathbf{R}^N$, $(y^k)_{k=1,2,\ldots,N}$ sont les coordonnées de y. Donc $|\partial_k \Phi(y)|$ et $|D\Phi(y)| \leqq \mathrm{Cte}\, |\Phi(y)|^2 = \mathrm{Cte}\, |y|^{-2}$, où Cte voudra toujours dire une constante universelle. De même

$$\left.\begin{array}{l} |\partial_i \partial_j \Phi(y)| \quad \text{et} \quad |D^2 \Phi(y)| \leqq \mathrm{Cte}\, |\Phi(y)|^3 = \mathrm{Cte}\, |y|^{-3}, \\ |\partial_i \partial_j \partial_k \Phi(y)| \quad \text{et} \quad |D^3 \Phi(y)| \leqq \mathrm{Cte}\, |\Phi(y)|^4 = \mathrm{Cte}\, |y|^{-4}. \end{array}\right\} \tag{2.2}$$

Transformons l'EDS par inversion, pour passer de $\mathbf{R}^N \setminus B = (S^N \setminus B) \setminus \{\infty\}$ à $\mathring{B} \setminus \{0\}$:

$$\overline{dX} = D\Phi(X)\, dX + \frac{1}{2} D^2 \Phi(X)\, d[X, X] = D\Phi(\Phi^{-1}(\bar{X}))\, H(\Phi^{-1}(\bar{X}))\, dZ$$
$$+ \frac{1}{2} D^2 \Phi(\Phi^{-1}(\bar{X}))\, (H(\Phi^{-1}(\bar{X})) \odot H(\Phi^{-1}(\bar{X}))\, d[Z, Z], \tag{2.3}$$

où $H \in \mathscr{L}(\mathbf{R}^m; \mathbf{R}^N)$, $H \odot H$, carré tensoriel, $\in \mathscr{L}(\mathbf{R}^m \odot \mathbf{R}^m; \mathbf{R}^N \odot \mathbf{R}^N)$, $[Z, Z] \in \mathbf{R}^m \odot \mathbf{R}^m$.

$$\begin{gathered} d\bar{X} = L\, dZ + \frac{1}{2} \underline{L}\, d[Z, Z], \\ L(\bar{X}) \in \mathscr{L}(\mathbf{R}^m; \mathbf{R}^N),\ L(\bar{X}) = D\Phi(\Phi^{-1}(\bar{X}))\, H(\Phi^{-1}(\bar{X})) \\ \underline{L}(\bar{X}) \in \mathscr{L}(\mathbf{R}^m \odot \mathbf{R}^m; \mathbf{R}^N \odot \mathbf{R}^N), \\ \underline{L}(\bar{X}) = D^2 \Phi(\Phi^{-1}(\bar{X}))\, (H(\Phi^{-1}(\bar{X})) \odot H(\Phi^{-1}(\bar{X}))). \end{gathered} \tag{2.4}$$

C'est l'EDS obtenue pour $\bar{X}$ dans la carte $\mathring{B} \setminus \{0\}$ de $(S_N \setminus \{\infty\})$. On doit donc démontrer que les champs L, $\underline{L}$, prolongés par 0 au point O, sont lipschitziens dans $\mathring{B}$.

$$L(z) = D\Phi(\Phi^{-1}(z))\, H(\Phi^{-1}(z)). \tag{2.5}$$

Tout d'abord $|L(z)| \leqq \mathrm{Cte}\, |\Phi\Phi^{-1}(z)|^2 (1 + |\Phi^{-1}(z)|)$ car, par le caractère lipschitzien, $|H(u)| \leqq \mathrm{Cte}\,(1 + |u|)$. $|L(z)| \leqq \mathrm{Cte}\, |z|^2\, |z|^{-1}$, qui tend vers 0 quand z tend vers O; il y aura donc continuité de L si nous le prenons nul à l'origine.

Pour montrer qu'il devient lipschitzien dans $\mathring{B}$, il suffit de montrer, par continuité, qu'il l'est dans $\mathring{B} \setminus \{O\}$. Il suffit pour cela de montrer qu'il l'est au voisinage de tout point z_0 de $\mathring{B} \setminus \{O\}$, avec une constante de Lipschitz $\bar{K}$ indépendante de z_0. Car alors, si $z', z'' \in \mathring{B} \setminus \{O\}$, et si $O \notin [z', z'']$, on pourra trouver des points $z_1, z_2, \ldots, z_k \in [z', z'']$, tels que, pour chaque segment $[z', z_1], [z_1, z_2], \ldots, [z_k, z'']$, on ait l'inégalité de Lipschitz avec $\bar{K}$, et ce sera encore vrai pour $[z', z'']$. Si $O \in [z', z'']$, on choisira $z''' \notin [z', z'']$, on aura la relation de Lipschitz avec $\bar{K}$ pour $[z', z''']$,

$[z''', z'']$, donc, en faisant tendre z''' vers O, pour $[z', z'']$. Si F est une fonction continue dans $\mathring{B}\diagdown\{O\}$, on pourra majorer $|F(z')|$ et $|F(z'')|$ par Cte $|F(z_0)|$, puisque z' et z'' sont voisins de z_0, si $F(z_0) \neq 0$ (par exemple Cte$=2$), et dans tous les cas par Cte $(1+|F(z_0)|)$.

$$\begin{aligned}
|L(z')-L(z'')| &\leqq |D\Phi(\Phi^{-1}(z'))-D\Phi(\Phi^{-1}(z''))|\ |H(\Phi^{-1}(z'))| \\
&\quad +|D\Phi(\Phi^{-1}(z''))|\ |H(\Phi^{-1}(z'))-H(\Phi^{-1}(z''))| = A+B. \\
A &\leqq \mathrm{Cte}\,|D^2\Phi(\Phi^{-1}(z_0))|\ |\Phi(z')-\Phi(z'')|\,(1+|H(\Phi^{-1}(z_0))|) \\
&\leqq |D^2\Phi(\Phi^{-1}(z_0))|\ |D\Phi(z_0)|\ |z'-z''|\,(1+|H(\Phi^{-1}(z_0))|) \\
&\leqq \mathrm{Cte}\,|\Phi\Phi^{-1}(z_0)|^3\,|z_0|^{-2}\,|z'-z''|\ |z_0|^{-1} \\
&\leqq \mathrm{Cte}\,|z_0|^3\,|z_0|^{-2}\,|z_0|^{-1}\,|z'-z''| \qquad (2.6)\\
&\leqq \mathrm{Cte}\,|z'-z''|,\ \text{Cte universelle.} \\
B &\leqq \mathrm{Cte}\,|\Phi\Phi^{-1}(z_0)|^2\,K\,|\Phi(z')-\Phi(z'')| \\
&\leqq \mathrm{Cte}\,|z_0|^2\,K\,|D\Phi(z_0)|\ |z'-z''| \\
&\leqq \mathrm{Cte}\,|z_0|^2\,K\,|z_0|^{-2}\,(z'-z'') \\
&\leqq \mathrm{Cte}\,|z'-z''|,\ \text{Cte universelle.}
\end{aligned}$$

Donc L est lipschitzien dans $\mathring{B}$. Passons à $\underline{L}$:

$$\begin{gathered}
\underline{L}(z) = D^2\Phi(\Phi^{-1}(z))\,(H(\Phi^{-1}(z)) \odot H(\Phi^{-1}(z))) \\
|\underline{L}(z)| \leqq \mathrm{Cte}\,|\Phi\Phi^{-1}(z)|^3\,(1+|\Phi^{-1}(z)|)^2 \leqq \mathrm{Cte}\,|z|^3\,|z|^{-2},
\end{gathered}$$

qui tend vers 0 quand z tend vers O. Ensuite

$$\begin{aligned}
|\underline{L}(z')-\underline{L}(z'')| &\leqq \mathrm{Cte}\,|D^2\Phi(\Phi^{-1}(z')) \\
&\qquad -D^2\Phi(\Phi^{-1}(z''))|\,(1+|H(\Phi^{-1}(z_0))|^2) \\
&\quad +|D^2\Phi(\Phi^{-1}(z_0))|\ |H(\Phi^{-1}(z')) \odot H(\Phi^{-1}(z')) \\
&\qquad -H(\Phi^{-1}(z'')) \odot H(\Phi^{-1}(z''))| = A'+B' \qquad (2.7)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
A' &\leqq \mathrm{Cte}\,|D^3\Phi(\Phi^{-1}(z_0))|\ |\Phi(z')-\Phi(z'')|\,(1+|H(\Phi^{-1}(z_0))|^2) \\
&\leqq \mathrm{Cte}\,|\Phi\Phi^{-1}(z_0)|^4\,|D\Phi(z_0)|\,|z'-z''|\ |z_0|^{-2} \\
&\leqq \mathrm{Cte}\,|z_0|^4\,|z_0|^{-2}\,|z_0|^{-2}\,|z'-z''| = \mathit{Cte}\,|z'-z''| \\
B' &\leqq \mathrm{Cte}\,|\Phi\Phi^{-1}(z_0)|^3\,(1+|H(\Phi^{-1}(z_0))|)\,|H(\Phi(z'))-H(\Phi(z''))| \\
&\leqq \mathrm{Cte}\,|z_0|^3\,|z_0|^{-1}\,K\,|\Phi(z')-\Phi(z'')| \\
&\leqq \mathrm{Cte}\,|z_0|^3\,|z_0|^{-1}\,K\,|D\Phi(z_0)|\ |z'-z''| \\
&\leqq \mathrm{Cte}\,|z_0|^3\,|z_0|^{-1}\,K\,|z_0|^{-2}\,|z'-z''| \leqq \mathrm{Cte}\,|z'-z''|,
\end{aligned}$$

ce qui achève la démonstration du théorème.

RÉFÉRENCES

[1] P. A. MEYER, Flot d'une équation différentielle stochastique, *Séminaire de Probabilités* 1979-1980, 850, 1981, *Lect. Notes in Math.*, Springer-Verlag Berlin-Heidelberg-New York, p. 103-117.

(*Manuscrit reçu le* 10 *novembre* 1988.)