ANNALES DE L'I. H. P., SECTION B

CHRISTIAN LÉONARD

Une loi des grands nombres pour des systèmes de diffusions avec interaction et à coefficients non bornés

Annales de l'I. H. P., section B, tome 22, nº 2 (1986), p. 237-262

<http://www.numdam.org/item?id=AIHPB_1986__22_2_237_0>

Ann. Inst. Henri Poincaré,
Vol. 22, n° 2, 1986, p. 237-262. *Probabilités et Statistiques*

Une loi des grands nombres pour des systèmes de diffusions avec interaction et à coefficients non bornés

par

Christian LÉONARD

Laboratory for Research in Statistics, and Probability,
Carleton University, University of Ottawa, Ontario, Canada

RÉSUMÉ. — On étudie la loi des grands nombres (lorsque $N \to \infty$) pour le système d'équations différentielles stochastiques (1.1). Ce système est corrélé du fait que les coefficients de dérive et de diffusion sont des fonctions de sa mesure empirique. Ces coefficients peuvent ne pas être bornés ; en particulier, celui de dérive est soumis à une condition de monotonie. La loi des grands nombres est énoncée sous la forme de la convergence de la mesure empirique vers l'unique solution d'un problème de martingales non linéaire. Cette convergence a lieu dans un sous-espace des probabilités sur les trajectoires, muni d'une topologie éventuellement plus fine que celle de la convergence étroite.

ABSTRACT. — The law of large numbers (as $N \to \infty$) is studied for the system of stochastic differential equations (1.1). This system is correlated since the drift and diffusion coefficients depend on its empirical measure. These coefficients are allowed not to be bounded. In particular, the drift satisfies a monotony condition. The law of large numbers is stated in terms of the convergence of the empirical measure towards the unique solution of a non-linear martingale problem. This convergence takes place in a subspace of the probability measures on trajectories, the topology of which being possibly finer than the usual weak one.

Classification AMS : 60-XX.

Adresse permanente : Laboratoire de Statistiques. Bâtiment de Mathématiques, Université Paris XI[e], 91405, Orsay Cedex France.

1. INTRODUCTION

Nous considérons le système de N équations différentielles stochastiques suivant :

$$(1.1) \quad dx_i^{\mathrm{N}}(t)=\left(\frac{1}{\mathrm{N}}\sum_{j=1}^{\mathrm{N}} b(x_i^{\mathrm{N}}(t), x_j^{\mathrm{N}}(t))\right)dt+\left(\frac{1}{\mathrm{N}}\sum_{j=1}^{\mathrm{N}} \sigma(x_i^{\mathrm{N}}(t), x_j^{\mathrm{N}}(t))\right)dw_i(t) \qquad i=1,\ldots,\mathrm{N}$$

où pour tout $1 \leq i \leq \mathrm{N}$, $x_i^{\mathrm{N}}(t)$ appartient à $\mathbb{R}^d$ et $(w_i)_{1 \leq i \leq \mathrm{N}}$ est une famille de mouvements browniens indépendants à valeurs dans $\mathbb{R}^d$.

Une telle équation intervient dans la description de certains systèmes de spins avec une interaction de type champ moyen. ([Daw], [Léo]). 1.1 peut aussi décrire l'évolution dans $\mathbb{R}^d$ d'un système de N particules identiques. La variation à l'instant t, du $i^{\text{ème}}$ spin (ou de la position de la $i^{\text{ème}}$ particule) dépend non seulement de $x_i^{\mathrm{N}}(t)$, mais aussi du système global : $x^{\mathrm{N}}(t) = (x_1^{\mathrm{N}}(t), \ldots, x_{\mathrm{N}}^{\mathrm{N}}(t))$. Une forme possible de la fonction $b(x_i, x_j)$ est $b(x_i, x_j) = v(x_i) + f(x_i, x_j)$, où v est un champ de forces extérieur, dans lequel se trouve le système, et $\frac{1}{\mathrm{N}}\sum_{j=1}^{\mathrm{N}} f(x_i, x_j)$ est la force que l'ensemble du système exerce sur i (du fait de sa forme, c'est un champ moyen).

Nous nous intéressons à la limite du système 1.1, lorsque N tend vers l'infini. Puisque les N spins sont identiques, il est naturel d'étudier la limite en loi de la variable aléatoire $\overline{\mathrm{X}}_{\mathrm{N}} = \frac{1}{\mathrm{N}}\sum_{i=1}^{\mathrm{N}} \delta_{x_i^{\mathrm{N}}}$ à valeurs dans les probabilités sur $\mathrm{C}(\mathbb{R}^+, \mathbb{R}^d)$, l'ensemble des trajectoires continues de $\mathbb{R}^+$ dans $\mathbb{R}^d$.

Le résultat principal est énoncé au théorème 2.2. De nombreux auteurs se sont intéressés à une telle limite, comme par exemple McKean [McK]), Sznitman ([Szn]), Dawson ([Daw]) ou Oelschläger ([Oel]) (cette liste n'est pas exhaustive). Dans [McK], [Daw] et [Oel], la limite est étudiée à l'aide du processus :

$$(1.2) \quad \begin{cases} \mathbb{R}^+ \rightarrow \{\text{probabilités sur } \mathbb{R}^d\} \\ t \mapsto \frac{1}{\mathrm{N}}\sum_{i=1}^{\mathrm{N}} \delta_{x_i^{\mathrm{N}}(t)} \end{cases}$$

ce qui donne une convergence moins puissante que celle obtenue dans [Szn] à l'aide de $\overline{X}_N$. Comme dans [Szn], nous utiliserons des résultats d'échangeabilité (voir, par exemple : [Ald]) pour obtenir la convergence en loi de $\overline{X}_N$. D'autre part cette convergence permet de garder une formulation « backward » (problème de martingales) moins exigeante sur la régularité des coefficients b et σ, que la formulation « forward » à laquelle on aboutit en étudiant 1.2. En particulier, nous n'avons pas besoin d'approximation par des coefficients réguliers (comme en [Oel]). Nos hypothèses sur les coefficients b et σ (en particulier sur leur croissance) permettent de généraliser les résultats de [Daw] et [Oel].

Finalement, nous obtenons une convergence plus fine que celle de la convergence en loi des variables aléatoires à valeurs dans les probabilités sur $C(\mathbb{R}^+, \mathbb{R}^d)$, ce qui nous permet, par exemple d'avoir la convergence de fonctionnelles comme :

$$(1.3) \qquad E\left(\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} \sup_{0\le t\le T} |x_i^N(t)|^q\right) \quad \text{ou} \quad E\left(\sup_{0\le t\le T} |x_i^N(t)x_j^N(t)|^{q/2}\right)$$

pour $q \geqslant 0$, « pas trop grand ».

La technique de démonstration du théorème 2.2 est basée sur la trilogie traditionnelle : relative compacité-identification des valeurs d'adhérence-unicité de la valeur d'adhérence. Le cadre $\Pi(C(\mathbb{R}^+, \mathbb{R}^d))$ et l'identification (§ 5) sont empruntés à [Szn], l'unicité (§ 5) est inspirée de [Oel]; la combinaison de ces deux emprunts améliore les démonstrations précédentes. Une contribution de ce travail réside dans l'établissement d'un cadre fonctionnel approprié, d'une part à l'étude de systèmes à coefficients non bornés, et d'autre part à l'obtention d'une limite éventuellement plus puissante que la limite étroite (du type 1.3).

2. NOTATIONS. RÉSULTAT PRINCIPAL. PLAN

2 *a*) Les notations.

$|\,.\,|$ et $\langle\,.,\,.\,\rangle$ désignent la norme et le produit scalaire de $\mathbb{R}^m$.

σ^* est l'adjoint de l'opérateur linéaire σ. $\operatorname{tr}(\sigma)$ est sa trace.

$C^2(\mathbb{R}^m)$ est l'espace des fonctions numériques de $\mathbb{R}^m$, deux fois continûment dérivables.

$C^2_K(\mathbb{R}^m)$ est le sous-espace de $C^2(\mathbb{R}^m)$ constitué de ses éléments à support compact.

S_m est l'ensemble des opérateurs symétriques, définis, positifs sur $\mathbb{R}^m$.

$C(\mathbb{R}^+, \mathbb{R}^d)$, l'espace des trajectoires continues de $\mathbb{R}^+$ dans $\mathbb{R}^d$, est muni de la topologie de la convergence uniforme sur tout compact.

$D(\mathbb{R}^+, \mathbb{R}^d)$, l'espace des trajectoires « càdlàg » de $\mathbb{R}^+$ dans $\mathbb{R}^d$, est muni de la topologie de Skorokhod.

δ_x est la mesure de Dirac au point x.

$f \circ \mu$ désigne l'image de la mesure μ par la fonction mesurable f.

Si Y est une variable aléatoire $\mathscr{L}(Y)$ désigne sa loi.

Si M est un espace topologique :

$\mathscr{B}(M)$ est sa tribu de Borel.

$C(M)$ est l'ensemble des fonctions continues de M dans $\mathbb{R}$.

$C_b(M) = \{ f, f \in C(M), f \text{ bornée} \}$.

$\Pi(M)$ est l'ensemble des probabilités sur $(M, \mathscr{B}(M))$.

$\mathscr{M}_b^+(M)$ est l'ensemble des mesures positives bornées sur $(M, \mathscr{B}(M))$.

$\Pi(M)$ et $\mathscr{M}_b^+(M)$ sont munis de la topologie étroite (affaiblie par $C_b(M)$).

Si f est une fonction numérique sur M et μ est une mesure sur M on note : $\langle f, \mu \rangle = \int_M f(x)\mu(dx)$.

Si ϕ est un élément strictement positif de $C(M)$:

$$C_\phi(M) = \left\{ F \in C(M),\ \sup_{x \in M} \frac{F(x)}{\phi(x)} < +\infty \right\}$$

$\Pi_\phi(M) = \{ P \in \Pi(M), \langle \phi, P \rangle < +\infty \}$ est muni de la topologie affaiblie par $C_\phi(M)$ (i. e. de la convergence simple sur $C_\phi(M)$).

2 *b*) Un sous-espace topologique de $\Pi\{\Pi[C(\mathbb{R}^+, \mathbb{R}^d)]\} : \tilde{\mathscr{P}}_p$.

On se donne $p \geq 0$ et on considère la famille $(\phi_{T,p})_{T \geq 0}$ d'éléments de $C[C(\mathbb{R}^+, \mathbb{R}^d)]$, définie comme suit :

$$\text{Pour tout } T \geq 0,\ \phi_{T,p} : \begin{cases} C(\mathbb{R}^+, \mathbb{R}^d) \to \mathbb{R}^{+*} \\ x \mapsto 1 + \sup\limits_{0 \leq t \leq T} |x(t)|^p \end{cases}$$

$$\mathscr{P}_p = \bigcap_{T \geq 0} \Pi_{\phi_{T,p}}[C(\mathbb{R}^+, \mathbb{R}^d)]$$

est muni de la topologie affaiblie par $\bigcup_{T \geq 0} C_{\phi_{T,p}}[C(\mathbb{R}^+, \mathbb{R}^d)]$, et de la tribu de Borel correspondante : $\mathscr{B}(\mathscr{P}_p)$.

On définit pour tout $T \geq 0$, $\tilde{\phi}_{T,p} : \begin{cases} \mathscr{P}_p \to \mathbb{R}^{+*} \\ P \to \langle \phi_{T,p}, P \rangle . \end{cases}$

$\tilde{\mathscr{P}}_p = \bigcap_{T \geq 0} \Pi_{\phi_{T,p}}(\mathscr{P}_p)$ est muni de la topologie affaiblie par $\bigcup_{T \geq 0} C_{\tilde{\phi}_{T,p}}(\mathscr{P}_p)$.

2 *c*) Le cadre probabiliste.

L'espace probabilisé de base est $(\mathscr{A}, (\mathscr{F}_t)_{t \geq 0}, \mathscr{F}, \mathbb{P})$ où $(\mathscr{F}_t)_{t \geq 0}$ est une famille croissante de sous-tribus de $\mathscr{F}$ et $\mathbb{P}$ est une probabilité sur $(\mathscr{A}, \mathscr{F})$. On suppose que pour tout $t \geq 0$, $\mathscr{F}_t$ contient les ensembles $\mathbb{P}$-négligeables de $\mathscr{F}$ et que $(\mathscr{F}_t)_{t \geq 0}$ est continu à droite. $(w_i)_{i \geq 1}$ est une suite de mouvements browniens indépendants, à valeurs $\mathbb{R}^d$, construits sur $(\mathscr{A}, (\mathscr{F}_t)_{t \geq 0}, \mathscr{F}, \mathbb{P})$.

On se donne $b : \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d$ et $\sigma : \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d \to S_d$. Pour tout $N \geq 1$, $x^N = (x_i^N)_{1 \leq i \leq N}$ est une variable aléatoire sur $C(\mathbb{R}^+, \mathbb{R}^{dN}) \simeq C(\mathbb{R}^+, \mathbb{R}^d)^N$ solution de l'équation différentielle stochastique :

$$(2.1) \quad x_i^N(t) = x_i^N(0) + \int_0^t b[x_i^N(s), \overline{X}_N(s)]ds + \int_0^t \sigma[x_i^N(s), \overline{X}_N(s)]dw_i(s), \quad 1 \leq i \leq N$$

où
$$\overline{X}_N = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{N} \delta_{x_i^N} \in \Pi[C(\mathbb{R}^+, \mathbb{R}^d)]$$

et $f[x, \mu] \equiv \int f(x, y)\mu(dy), \quad \forall f : \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d$ ou $S_d, \quad \forall \mu \in \Pi(\mathbb{R}^d)$.

On note pour tout $N \geq 1$, $P_N = \mathscr{L}(x^N) \in \Pi[C(\mathbb{R}^+, \mathbb{R}^{dN})]$

$$\overline{P}_N = \mathscr{L}(\overline{X}_N) \in \Pi\{\Pi[C(\mathbb{R}^+, \mathbb{R}^d)]\}$$

X est le processus canonique sur $C(\mathbb{R}^+, \mathbb{R}^d)$.

2 *d*) Les hypothèses (H) sur les fonctions b et σ.

H_1 : $\forall x \in \mathbb{R}^d$, $b(\,.\,, x)$ est localement lipschitzienne.

Il existe une constante $K \geq 0$, telle que les conditions H_2 à H_8 suivantes soient vérifiées.

H_2 : $\forall x, y, z \in \mathbb{R}^d$, $\langle x - z, b(x, y) - b(z, y) \rangle \leq K |x - z|^2$

H_3 : $\forall x, y, z \in \mathbb{R}^d$, $|b(y, x) - b(y, z)| \leq K |x - z|$

H_4 : $\forall x, y, z \in \mathbb{R}^d$, $\operatorname{tr}[(\sigma(x, y) - \sigma(z, y))(\sigma(x, y) - \sigma(z, y))^*] + \operatorname{tr}[(\sigma(y, x) - \sigma(y, z))(\sigma(y, x) - \sigma(y, z))^*] \leq K |x - z|^2$.

On écrit : $b(x, y) = v(x) + f(x, y)$ avec $|f(x, y)| \leq f_1(x) + f_2(y)$; $f_1, f_2 \geq 0$.

H_5 : $\forall x \in \mathbb{R}^d$, $\langle x, v(x) \rangle + |x| f_1(x) \leq K(1 + |x|^2)$

H_6 : $\forall x \in \mathbb{R}^d$, $f_2(x) \leq K(1 + |x|)$

H_7 : $\exists r \geq 0$, $\forall x \in \mathbb{R}^d$, $|v(x)| + f_1(x) \leq K(1 + |x|^r)$

H_8 : $\forall x, y \in \mathbb{R}^d$, tr $[\sigma\sigma^*(x, y)] \leq K(1 + |x|^2 + |y|^2)$.

2 *e*) **Le résultat principal.**

THÉORÈME 2.2. — *On suppose que les hypothèses* (H) *sont vérifiées et que pour tout* $N \geq 1$, $X^N(0) \in L^4(\mathscr{A}, \mathscr{F}, \mathbb{P})$. *Alors : l'équation différentielle stochastique 2.1 admet une unique solution trajectorielle dans* $C(\mathbb{R}^+, \mathbb{R}^{dN})$.

Supposons en outre qu'il existe $\mu \in \Pi(\mathbb{R}^d)$, *tel que*

$$\mathscr{L}(\overline{X}_N(0)) \underset{N \to \infty}{\to} \delta_\mu \qquad (\text{étroitement dans } \Pi[\Pi(\mathbb{R}^d)])$$

et que $p \geq \max(4, 2r)$, *tel que*

$$\sup_{N \geq 1} E \int |x|^p [\overline{X}_N(0)](dx) < +\infty, \qquad (r \text{ apparaît dans } H_7).$$

Alors pour tout $0 \leq q < p$, $\mathscr{L}(\overline{X}_N) \underset{N \to \infty}{\to} \delta_P$ dans $\widetilde{\mathscr{P}}_q$ *(pour la topologie de* $\widetilde{\mathscr{P}}_q$*) où* P *est la loi de l'unique solution trajectorielle continue de l'équation différentielle stochastique non-linéaire dans* $\mathbb{R}^d$, *suivante :*

$$(2.2) \quad \begin{cases} x(t) = x(0) + \displaystyle\int_0^t b[x(s), X(s) \circ P] ds + \int_0^t \sigma[x(s), X(s) \circ P] dw_s \\ P = \mathscr{L}(x) \\ \mathscr{L}(x(0)) = X(0) \circ P = \mu . \end{cases}$$

Preuve. — La première partie du théorème est démontrée à la proposition 3.3. Compte tenu de la proposition 3.4, on peut supposer que pour tout $N \geq 1$, x^N est échangeable dans $C(\mathbb{R}^+, \mathbb{R}^d)^N$. Pour prouver la deuxième partie il suffit de prouver que la famille $\{ \overline{P}_N, N \geq 1 \}$ est relativement compacte dans $\widetilde{\mathscr{P}}_p$ et qu'elle admet une unique valeur d'adhérence qui est δ_P. Nous prouvons la relative compacité de $\{ \overline{P}_N, N \geq 1 \}$ dans $\widetilde{\mathscr{P}}_p$ au lemma 4.4. Au lemme 5.1, il est montré que si $\overline{Q}$ est une valeur d'adhérence de $\{ \overline{P}_N, N \geq 1 \}$ et si $\mathscr{E}_\mu$ est l'ensemble des solutions du problème de martingale non-linéaire associé à (2.2), alors $\overline{Q}(\mathscr{E}_\mu = 1)$. Au lemme 5.2, nous prouvons que $\mathscr{E}_\mu = \{ P \}$, ce qui achève la démonstration $\square$

Remarque. — La convergence obtenue au théorème 2.2 implique en particulier :

$$\forall \mathrm{T} \geq 0,\ \forall 0 \leq q < p,\ \lim_{\mathrm{N} \to \infty} \mathrm{E}\left(\frac{1}{\mathrm{N}} \sum_{j=1}^{\mathrm{N}} \sup_{0 \leq t \leq \mathrm{T}} |x_j^{\mathrm{N}}(t)|^q\right) = \int_{\mathrm{C}(\mathbb{R}^+, \mathbb{R}^d)} \sup_{0 \leq t \leq \mathrm{T}} |x(t)|^q \mathrm{P}(dx)$$

$2f$) Plan de la suite.

Au paragraphe 3, nous prouvons l'existence, l'unicité et l'échangeabilité des systèmes finis décrits par l'équation 2.1.

Dans la première partie du paragraphe 4 nous établissons une condition suffisante de relative compacité dans un sous-espace topologique de $\Pi[\Pi(\mathrm{S})]$, si S est un espace polonais. Dans la seconde partie, nous appliquons ce résultat pour établir la relative compacité de $\{ \overline{\mathrm{P}}_{\mathrm{N}}, \mathrm{N} \geq 1 \}$.

Au paragraphe 5, nous obtenons l'unicité de la valeur d'adhérence, de $\{ \overline{\mathrm{P}}_{\mathrm{N}}, \mathrm{N} \geq 1 \}$, et nous l'identifions.

Finalement, nous donnons quelques résultats supplémentaires, au paragraphe 6. Nous y obtenons, en particulier, la propagation du chaos et la « propagation du mélange », en utilisant des résultats d'échangeabilité.

3. EXISTENCE, UNICITÉ ET ÉCHANGEABILITÉ DES SYSTÈMES FINIS

On considère l'équation différentielle stochastique à valeurs dans $\mathbb{R}^m$:

$$\mathrm{E}(\xi_0, \tilde{b}, \tilde{\sigma}) : x(t) = \xi_0 + \int_0^t \tilde{b}(s, x(s))ds + \int_0^t \tilde{\sigma}(s, x(s))dw_s$$

où $\tilde{b} : \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m$, $\tilde{\sigma} : \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^m \to \mathrm{S}_m$ et $(w_t)_{t \geq 0}$ est un mouvement brownien à valeurs $\mathbb{R}^m$, construit sur $(\mathscr{A}, (\mathscr{F}_t)_{t \geq 0}, \mathscr{F}, \mathbb{P})$.

PROPOSITION 3.1. — *Si $\tilde{b}$ et $\tilde{\sigma}$ vérifient les hypothèses suivantes :*

$\mathrm{H}'_1 : \forall \mathrm{R} \geq 0,\ \exists \mathrm{K}_{\mathrm{R}} \geq 0,\ \forall t \geq 0,\ \forall x, y \in \mathbb{R}^m,\ (|x| \leq \mathrm{R}$ *et* $|y| \leq \mathrm{R})$
$\Rightarrow |\tilde{b}(t, x) - \tilde{b}(t, y)|^2 + \mathrm{tr}\,[(\tilde{\sigma}(t, x) - \tilde{\sigma}(t, y))(\tilde{\sigma}(t, x) - \tilde{\sigma}(t, y))^*] \leq \mathrm{K}_{\mathrm{R}} |x - y|^2$

$\mathrm{H}'_2 : \exists \mathrm{K} \geq 0,\ \forall x \in \mathbb{R}^m,\ \forall t \geq 0,\ \langle x, b(t, x) \rangle + \mathrm{tr}\,[\sigma\sigma^*(t, x)] \leq \mathrm{K}(1 + |x|^2)$

$\mathrm{H}'_3 : \xi_0$ est indépendant de $(w_t)_{t \geq 0}$

$\mathrm{H}'_4 : \xi_0 \in \mathrm{L}^4(\mathscr{A}, \mathscr{F}, \mathbb{P})$

alors, il existe une unique solution continue de $\mathrm{E}(\xi_0, \tilde{b}, \tilde{\sigma})$.

Remarque 3.2. — Rappelons que si H'_1 et H'_3 sont vérifiés, si H'_2 est remplacé par :

H''_2 : $\exists K \geq 0$, $\forall x \in \mathbb{R}^m$, $\forall t \geq 0$, $|b(t,x)|^2 + \operatorname{tr}[\sigma\sigma^*(t,x)] \leq K(1+|x|^2)$

ainsi que H'_4 par

H''_4 : $\xi_0 \in L^2(\mathscr{A}, \mathscr{F}, \mathbb{P})$

alors $E(\xi_0, \tilde{b}, \tilde{\sigma})$ admet une unique solution continue.

(Voir par exemple [GSk], Ch. 2, Th. 3).

Preuve de 3.1. — Pou tout $n \geq 1$, on définit :

$$\tilde{b}_n(x) = \begin{cases} \tilde{b}(x) & \text{si } |x| \leq n \\ \tilde{b}\left(n\dfrac{x}{|x|}\right) & \text{si } |x| \geq n \end{cases} \qquad \tilde{\sigma}_n(x) = \begin{cases} \tilde{\sigma}(x) & \text{si } |x| \leq n \\ \tilde{\sigma}\left(n\dfrac{x}{|x|}\right) & \text{si } |x| \geq n \end{cases}$$

$\tilde{b}_n$ et $\tilde{\sigma}_n$ vérifient H'_1 et H''_2, et d'après la remarque 3.2, il existe une unique solution continue de $E(\xi_0, \tilde{b}_n, \tilde{\sigma}_n)$, qu'on note x_n. L'argument de la preuve est standard et s'obtient en montrant que $\lim\limits_{n\to\infty} P\{\sup\limits_{t\leq T} |x_n(t)| > n\} = 0$.

Or cette relation résulte de la majoration uniforme :

$$\sup_{n\geq 1} E(\sup\{|x_n(s)|^4 ; 0 \leq s \leq t\}) < \infty$$

qui est obtenue à l'aide du lemme 4.5. □

A partir de maintenant on supposera H'_3.

PROPOSITION 3.3. — *Sous les hypothèses* (H), *pour tout* $N \geq 1$, *si* $E(|x^N(0)|^4) < +\infty$ *l'équation 2.1 admet une unique solution continue.*

Preuve. — Il suffit de vérifier H'_1 et H'_2 avec

$$\tilde{b}(t, x^N) = (b[x_i^N, \overline{X}_N])_{1\leq i\leq N} \text{ et } \tilde{\sigma}(t, x^N) = \begin{bmatrix} \tilde{\sigma}[x_1^N, \overline{X}_N] & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \tilde{\sigma}[x_N^N, \overline{X}_N] \end{bmatrix} \quad \square$$

DÉFINITION. — Une suite $(Y_1, \ldots, Y_N)$ de variables aléatoires est dite N-échangeable si pour toute permutation θ de $\{1, \ldots, N\}$

$$\mathscr{L}(Y_1, \ldots, Y_N) = \mathscr{L}(Y_{\theta(1)}, \ldots, Y_{\theta(N)}).$$

Une suite infinie $(Y_1, Y_2, \ldots)$ est dite échangeable si pour toute permutation finie θ de $\{1, 2, \ldots\}$ c'est-à-dire toute permutation θ telle que

$$\#\{i, \theta(i) \neq i\} < +\infty, \mathscr{L}(Y_1, Y_2, \ldots) = \mathscr{L}(Y_{\theta(1)}, Y_{\theta(2)}, \ldots).$$

Pour des résultats concernant les variables aléatoires échangeables on peut se reporter à [Ald].

Θ_N désigne l'ensemble des permutations de $\{1, \ldots, N\}$. Pour tout élément θ de Θ_N, on définit les fonctions suivantes (aussi notées θ) :

$$\theta : \begin{cases} \mathbb{R}^{dN} & \to & \mathbb{R}^{dN} \\ (x_1, \ldots, x_N) & \mapsto & (x_{\theta(1)}, \ldots, x_{\theta(N)}) \end{cases} \qquad \theta : \begin{cases} C(\mathbb{R}^+, \mathbb{R}^d)^N & \to & C(\mathbb{R}^+, \mathbb{R}^d)^N \\ (x_1, \ldots, x_N) & \mapsto & (x_{\theta(1)}, \ldots, x_{\theta(N)}) \end{cases}$$

PROPOSITION 3.4. — *On note x la solution de 2.1, de loi initiale q. $q^* = \frac{1}{N!} \sum_{\theta \in \Theta_N} \theta \circ q$ et $\mathcal{L}(x)^* = \frac{1}{N!} \sum_{\theta \in \Theta_N} \theta \circ \mathcal{L}(x)$, sont les symétrisées de q et $\mathcal{L}(x)$.*

Si $\tilde{x}$ est la solution de 2.1, de loi initiale q^*, alors $\mathcal{L}(\tilde{x}) = \mathcal{L}(x)^*$.

En particulier, la solution de 2.1 en tant que variable aléatoire sur $C(\mathbb{R}^+, \mathbb{R}^{dN}) \cong C(\mathbb{R}^+, \mathbb{R}^d)^N$ est une suite N-échangeable si et seulement si sa condition initiale est une suite N-échangeable sur $(\mathbb{R}^d)^N$. De plus, l'égalité suivante est toujours vérifiée :

$$\mathcal{L}\left(\frac{1}{N} \sum_{i=1}^{N} \delta_{x_i}\right) = \mathcal{L}\left(\frac{1}{N} \sum_{i=1}^{N} \delta_{\tilde{x}_i}\right).$$

Preuve. — Se montre aisément à l'aide de la symétrie du générateur infinitésimal associé à 2.1 et de l'unicité de la solution du problème de martingale qui lui est associé. □

4. RELATIVE COMPACITÉ

Dans la partie *a*) de ce paragraphe, nous donnons un critère assez général de relative compacité. Dans la partie *b*), nous appliquons ce critère à la suite $\{ \overline{P}_N, N \geq 1 \}$.

4 *a*) Un cadre général.

La proposition 4.1 donne une condition suffisante de relative compacité pour une suite de lois de mesures de probabilité aléatoires. La proposition 4.2 est simplement la transcription de 4.1 lorsque les probabilités aléatoires sont précisément les mesures empiriques d'une famille de systèmes échangeables. Le lemme 4.3 est utilisé dans la preuve de la proposition 4.1, laquelle est rejetée à la fin du § 4.*a*.

Dans ce sous-paragraphe, S est un espace polonais et ϕ est un élément de C(S) qui vérifie :

$$\inf_{x \in S} \phi(x) > 0.$$

PROPOSITION 4.1. — *Soit $(\alpha_N)_{N\geq 1}$ une suite de variables aléatoires à valeurs dans $\Pi_\phi(S)$. Pour tout $N \geq 1$, on pose $\bar{\alpha}_N = E(\alpha_N) \in \Pi_\phi(S)$.*

On définit : $\hat{\phi} : \begin{cases} \Pi_\phi(S) \to \mathbb{R} \\ P \mapsto \langle \phi, P \rangle \end{cases}$ *(il est clair que* $\inf_{P\in\Pi_\phi(S)} \hat{\phi}(P) > 0$*)*

alors, pour que $\{ \mathscr{L}(\alpha_N), N \geq 1 \}$ soit relativement compact dans $\Pi_{\hat{\phi}}[\Pi_\phi(S)]$, il suffit que $(\bar{\alpha}_N)_{N\geq 1}$ vérifie les conditions suivantes :

(4.1.1) *Il existe $\delta > 0$, tel que* $\sup_{N\geq 1} \langle \phi^{1+\delta}, \bar{\alpha}_N \rangle < +\infty$.

(4.1.2) *Pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un compact $K_\varepsilon \subset S$, tel que*

$$\sup_{N\geq 1} \bar{\alpha}_N(S \setminus K_\varepsilon) < \varepsilon .$$

PROPOSITION 4.2. — *Pour tout $N \in \mathbb{N}^*$, soit $\underset{\sim}{Y}^N = (Y_i^N)_{1\leq i\leq N}$ une suite N-échangeable à valeurs dans S^N. Pour que* $\left\{ \mathscr{L}\left(\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} \delta_{Y_i^N}\right); N \geq 1 \right\}$ *soit relativement compact dans $\Pi_\phi[\Pi_\phi(S)]$, il suffit que les deux conditions suivantes soient vérifiées :*

(4.2.1) *Il existe $\delta > 0$, tel que* $\sup_{N\geq 1} \langle \phi^{1+\delta}, \mathscr{L}(Y_1^N) \rangle < +\infty$

(4.2.2) $\{ \mathscr{L}(Y_1^N), N \geq 1 \}$ *est tendue uniformément dans $\Pi(S)$.*

Preuve. — C'est une conséquence immédiate de la proposition 4.1 et du fait que :

$$E\left(\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} \delta_{Y_i^N}\right) = \mathscr{L}(Y_1^N) \qquad \square$$

Soit $\psi : \begin{cases} \Pi_\phi(S) \to R(\psi) \subset \mathscr{M}_b^+(S) \\ P \mapsto \phi . P \end{cases}$, où $\phi . P$ est défini par

$$\forall A \in \mathscr{B}(S), \qquad \phi . P(A) = \langle 1_A . \phi, P \rangle$$

et $R(\psi)$, qui est l'image de $\Pi_\phi(S)$ par ψ, est muni de la topologie trace de $\mathscr{M}_b^+(S)$.

Clairement, ψ est un homéomorphisme. De plus, $\Pi_\phi(S)$ est un espace polonais. En effet, S étant un espace polonais, $\mathscr{M}_b^+(S)$ est aussi un espace polonais ([Bou], § 5, n° 4, proposition 10). Compte tenu du fait que ψ est un homéomorphisme, il suffit de remarquer que $R(\psi)$ est séquentiellement fermé.

LEMME 4.3. — *Une partie* H *de* $\Pi_\phi(S)$ *est relativement compacte si et seulement si elle vérifie les conditions suivantes :*

(4.3.1) $\sup\{\langle \phi, P\rangle, P \in H\} < +\infty$

(4.3.2) $\forall \varepsilon > 0, \exists K_\varepsilon \subset S, K_\varepsilon$ *compact, tel que*

$$\sup\{\langle 1_{S\setminus K_\varepsilon}\phi, P\rangle, P \in H\} \leq \varepsilon .$$

Preuve. — Résulte du critère de Prokhorov dans un espace polonais ([Bou], § 5, n° 5, th. 2) de compacité faible des mesures $\{\phi . P, P \in H\}$ et de ce que ψ est un homéomorphisme. □

Nous sommes maintenant en mesure de prouver la proposition 4.1.

Preuve de la proposition 4.1. — D'après le lemme 4.3, on veut montrer :

$$(4.1.3) \quad \sup_{N\geq 1}\langle \hat{\phi}, \mathscr{L}(\alpha_N)\rangle = \sup_{N\geq 1}\int_{\Pi_\phi(S)}\langle \phi, P\rangle \mathscr{L}(\alpha_N)(dP) < +\infty$$

et

(4.1.4) $\forall \varepsilon > 0, \exists \hat{K}_\varepsilon \subset \Pi_\phi(S), \hat{K}_\varepsilon$ compact, tel que :

$$\sup_{N\geq 1}\langle 1_{\Pi_\phi(S)\setminus\hat{K}_\varepsilon}.\hat{\phi}, \mathscr{L}(\alpha_N)\rangle = \sup_{N\geq 1}\int_{\Pi_\phi(S)\setminus\hat{K}_\varepsilon}\langle \phi, P\rangle \mathscr{L}(\alpha_N)(dP) \leq \varepsilon$$

Or (4.1.5 et 4.1.6) $\Rightarrow$ (4.1.3 et 4.1.4), avec :

$$(4.1.5) \quad \exists \delta > 0, \text{ t. q. } \sup_{N\geq 1}\int_{\Pi_\phi(S)}\langle \phi, P\rangle^{1+\delta}\mathscr{L}(\alpha_N)(dP) < +\infty$$

et

(4.1.6) $\forall \varepsilon > 0, \exists \tilde{K}_\varepsilon \subset \Pi_\phi(S), \tilde{K}_\varepsilon$ compact, tel que $\sup_{N\geq 1}\mathbb{P}(\alpha_N \notin \tilde{K}_\varepsilon) \leq \varepsilon$.

En effet : 4.1.5 $\Rightarrow$ 4.1.3 (inégalité de Hölder) et (4.1.5 et 4.1.6) $\Rightarrow$ 4.1.4 puisque

$$\begin{aligned}
&\sup_{N\geq 1}\langle 1_{\Pi_\phi(S)\setminus\tilde{K}_\varepsilon}.\hat{\phi}, \mathscr{L}(\alpha_N)\rangle \\
&\qquad \leq \sup_{N\geq 1}\,[\mathbb{P}(\alpha_N \notin \tilde{K}_\varepsilon)]^{\frac{\delta}{1+\delta}}[\langle \hat{\phi}^{1+\delta}, \mathscr{L}(\alpha_N)\rangle]^{\frac{1}{1+\delta}} \text{(Hölder)} \\
&\qquad \leq \varepsilon^{\frac{\delta}{1+\delta}}(\sup_{N\geq 1}\langle \hat{\phi}^{1+\delta}, \mathscr{L}(\alpha_N)\rangle)^{\frac{1}{1+\delta}}
\end{aligned}$$

Donc il suffit de montrer que : (4.1.1 et 4.1.2) $\Rightarrow$ (4.1.5 et 4.1.6). Or 4.1.1 $\Rightarrow$ 4.1.5, puisque :

$$\begin{aligned}
\sup_{N\geq 1}\int_{\Pi_\phi(S)}\langle \phi, P\rangle^{1+\delta}\mathscr{L}(\alpha_N)(dP) &\leq \sup_{N\geq 1}\int_{\Pi_\phi(S)}\langle \phi^{1+\delta}, P\rangle \mathscr{L}(\alpha_N)(dP) \\
&= \sup_{N\geq 1}\langle \phi^{1+\delta}, \bar{\alpha}_N\rangle
\end{aligned}$$

Il reste donc à prouver :

(4.1.1 et 4.1.2) $\Rightarrow$ 4.1.6.

On fixe $\varepsilon > 0$. (4.1.1 et 4.1.2) impliquent : $0 < \sup_{N \geq 1} \langle \phi, \bar{\alpha}_N \rangle = \beta < +\infty$ et $\forall j \geq 1$, $\exists K_j \subset S$, K_j compact, t. q. $\sup_{N \geq 1} \langle 1_{S \setminus K_j} \phi, \bar{\alpha}_N \rangle \leq \varepsilon 2^{-2j-1}$.

Alors, comme $E(\langle 1_{S\setminus K_j}\phi, \alpha_N \rangle) = \langle 1_{S\setminus K_j}\phi, \bar{\alpha}_N \rangle$:

$$\forall j, \quad N \geq 1, \quad \mathbb{P}(\langle 1_{S\setminus K_j}\phi, \alpha_N \rangle > 2^{-j}) \leq \varepsilon 2^{-j-1}$$

Donc en posant :

$$\mathscr{K} = \bigcap_{j \geq 1} \{ P \in \Pi_\phi(S), \langle 1_{S\setminus K_j}\phi, P \rangle \leq 2^{-j} \} \cap \left\{ P \in \Pi_\phi(S), \langle \phi, P \rangle \leq \frac{2\beta}{\varepsilon} \right\}$$

on obtient :

$$\forall N \geq 1, \quad \mathbb{P}(\alpha_N \notin \mathscr{K}) \leq \sum_{j \geq 1} \mathbb{P}(\langle 1_{S\setminus K_j}\phi, \alpha_N \rangle > 2^{-j}) + \mathbb{P}\left(\langle \phi, \alpha_N \rangle > \frac{2\beta}{\varepsilon} \right)$$

$$\leq \frac{\varepsilon}{2} \sum_{j=1}^{\infty} 2^{-j} + \frac{\varepsilon}{2} \frac{\sup_{N \geq 1} \langle \phi, \bar{\alpha}_N \rangle}{\beta} = \varepsilon$$

on conclut en remarquant que, d'après le lemme 4.3, $\mathscr{K}$ est compact. □

Remarque. — Pour que $\{ \mathscr{L}(\alpha_N), N \geq 1 \}$ soit relativement compact dans $\Pi_\phi[\Pi_\phi(S)]$, il est nécessaire que les conditions suivantes soient vérifiées :

$$\sup_{N \geq 1} \langle \phi, \bar{\alpha}_N \rangle < +\infty$$

et

$$\forall \varepsilon > 0, \quad \exists K_\varepsilon \subset S, \ K_\varepsilon \text{ compact, t. q. } \sup_{N \geq 1} \langle 1_{S\setminus K_\varepsilon} . \phi, \bar{\alpha}_N \rangle \leq \varepsilon$$

C'est une conséquence immédiate du lemme 4.3 et de la continuité de l'application :

$$\begin{cases} \Pi_{\hat{\phi}}[\Pi_\phi(S)] & \to & \Pi_\phi(S) \\ \theta & \to & \int_{\Pi_\phi(S)} P\theta(dP) \end{cases}$$

4 *b*) La relative compacité de $\{ \overline{\mathrm{P}}_{\mathrm{N}}, \mathrm{N} \geq 1 \}$.

De manière à prouver la relative compacité de $\{ \overline{\mathrm{P}}_{\mathrm{N}}, \mathrm{N} \geq 1 \}$ au lemme 4.4, nous allons utiliser la proposition 4.2 en prenant : $\mathrm{S} = \mathrm{C}(\mathbb{R}^+, \mathbb{R}^d)$, $\underset{\sim}{\mathrm{Y}}^k = x^{\mathrm{N}}$, considéré comme variable aléatoire sur $\mathrm{C}(\mathbb{R}^+, \mathbb{R}^{d\mathrm{N}}) = \mathrm{C}(\mathbb{R}^+, \mathbb{R}^d)^{\mathrm{N}}$, et

$$\phi = \phi_{\mathrm{T},p} : \begin{cases} \mathrm{C}(\mathbb{R}^+, \mathbb{R}^d) \to \mathbb{R} \\ \quad x \quad \mapsto 1 + \sup\limits_{0 \leq t \leq \mathrm{T}} | x(t) |^p \end{cases}$$

Au cours de la démonstration du lemme 4.4 nous utilisons un critère de relative compacité pour une suite de $\mathscr{D}$-semi-martingales qui est dû à M. Métivier et que nous rappelons en appendice. Nous nous servons aussi d'un résultat de non explosion qui est démontré au lemme 4.6. Le lemme technique 4.5 donne un résultat intermédiaire qui est nécessaire à la preuve de 4.6.

LEMME 4.4. — *Sous les hypothèses* $\mathrm{H}_{1,3,4,5,6,8}$ *et* H_7, *et si pour* $p \geq \max(4, r)$ *(r apparaît dans l'hypothèse* H_7*), on a*

$$(4.4.1) \qquad \exists \delta > 0, \quad \sup_{\mathrm{N} \geq 1} \mathrm{E} \langle | \, . \, |^{p+\delta}, \overline{\mathrm{X}}_{\mathrm{N}}(0) \rangle < +\infty$$

alors : $\{ \overline{\mathrm{P}}_{\mathrm{N}}, \mathrm{N} \geq 1 \}$ *est relativement compacte dans* $\tilde{\mathscr{P}}_p$.

Preuve. — Par un raisonnement simple, on obtient que la relative compacité d'une suite de $\tilde{\mathscr{P}}_p$ est équivalente à sa relative compacité dans $\Pi_{\hat{\phi}_{\mathrm{T},p}}[\Pi_{\phi_{\mathrm{T},p}}(\mathrm{S})]$, pour tout $\mathrm{T} \geq 0$.

Compte tenu de la proposition 4.2, nous devons montrer :

$$(4.4.2) \qquad \exists \delta' > 0, \quad \forall \mathrm{T} \geq 0, \quad \sup_{\mathrm{N} \geq 1} \langle (\phi_{\mathrm{T},p})^{1+\delta'}, \mathscr{L}(x_1^{\mathrm{N}}) \rangle < +\infty$$

et

(4.4.3) $\{ \mathscr{L}(x_1^{\mathrm{N}}), \mathrm{N} \geq 1 \}$ est tendue uniformément dans $\Pi[\mathrm{C}(\mathbb{R}^+, \mathbb{R}^d)]$.

Or, $$\sup_{\mathrm{N} \geq 1} \langle (\phi_{\mathrm{T},p})^{1+\delta'}, \mathscr{L}(x_1^{\mathrm{N}}) \rangle \leq \mathrm{C}(\delta') \sup_{\mathrm{N} \geq 1} \mathrm{E}(\sup_{0 \leq t \leq \mathrm{T}} | x_1^{\mathrm{N}}(t) |^{p+\delta' p})$$

donc, en prenant $\delta' = \dfrac{\delta}{p}$, 4.4.2 se déduit de 4.4.1 et du lemme 4.6. A l'aide, d'une part de H_7 et d'autre part de $\mathrm{H}_{1,3,4,5,6,8}$, de 4.4.1 et du lemme 4.6, on obtient A1 avec : $\tilde{b}^{\mathrm{N}}(\mathrm{Y}_{\mathrm{N}}(t^-), t, \omega^{\mathrm{N}}) = b[x_1^{\mathrm{N}}(t), \overline{\mathrm{X}}^{\mathrm{N}}(t)]$ et $\tilde{a}^{\mathrm{N}}(\mathrm{Y}_{\mathrm{N}}(t^-), t, \omega^{\mathrm{N}}) = \sigma\sigma^*[x_1^{\mathrm{N}}(t), \overline{\mathrm{X}}^{\mathrm{N}}(t)]$. A2 est évident, puisque $\mathrm{A}^{\mathrm{N}}(t) = t$, $\forall \mathrm{N} \geq 1$. Par conséquent la proposition A nous donne la tension uniforme de $\{ \mathscr{L}(x_1^{\mathrm{N}}), \mathrm{N} \geq 1 \}$ dans $\Pi[\mathrm{D}(\mathbb{R}^+, \mathbb{R}^d)]$. Mais (A1 et A2) implique la condition d'Aldous, et de ce fait, toute valeur d'adhérence de $\{\mathscr{L}(x_1^N), N \geq 1\}$ est dans $\Pi[C(\mathbb{R}^+, \mathbb{R}^d)]$ (cf. [JoM], lemme 3.2). On en déduit 4.4.3, par un argument classique. □

Il nous reste maintenant à prouver le lemme 4.6 à l'aide du lemme 4.5 suivant :

LEMME 4.5. — *On considère une suite* $(Y^n)_{n\geq 1}$ *de* $\mathscr{D}$*-semi-martingales continues à valeurs* $\mathbb{R}^m$, *chacun des* Y^n *étant construit sur* $(\Omega^n, (\mathscr{F}_t^n)_{t\geq 0}, \mathscr{F}^n, \mathbb{P}^n)$ *et vérifiant : Pour toute fonction* $\psi \in C^2(\mathbb{R}^m)$,

$$\begin{aligned} M_\psi^n(t, \omega^n) &= \psi(Y^n(t)) - \psi(Y^n(0)) - \int_0^t [\langle \psi'(Y^n(s)), \tilde{b}^n(Y^n(s), s, \omega^n)\rangle \\ &\quad + \frac{1}{2} \operatorname{tr}(\psi''(Y^n(s))\tilde{a}^n(Y^n(s), s, \omega^n))]ds \\ &= \int_0^t \langle \tilde{\sigma}^{n*}(Y^n(s), s, \omega^n)\psi'(Y^n(s)), dw^n(s)\rangle \end{aligned}$$

est une martingale localement de carré intégrable, où :

$\tilde{b}^n : \mathbb{R}^m \times \mathbb{R} \times \Omega^n \to \mathbb{R}^m$, $\tilde{\sigma}^n : \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^+ \times \Omega^n \to L(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^m)$, $\tilde{a}^n = \tilde{\sigma}^n \tilde{\sigma}^{n*}$

et w^n *est un mouvement brownien à valeurs* $\mathbb{R}^m$, *construit sur* $(\Omega^n, (\mathscr{F}_t^n)_{t\geq 0}, \mathscr{F}^n, \mathbb{P}^n)$. *S'il existe* $k_1 > 0$, *et une suite de processus adaptés* C_t^n, *tels que :*

(4.5.1) $\forall n \geq 1, \quad \forall y \in \mathbb{R}^m, \quad \forall \omega^n \in \Omega^n, \quad \forall t > 0,$
$$\langle y, \tilde{b}^n(y, t, \omega^n)\rangle + \operatorname{tr}(\tilde{a}^n(y, t, \omega^n)) \leq k_1(C_t^n + |y|^2).$$

S'il existe $p \geq 4$, *et* $k_2 : t \to k_2(t)$, *tels que*

(4.5.2) $\forall n \geq 1, \quad \forall 0 \leq s \leq t, \quad E|C_s^n|^{\frac{p}{2}} \leq k_2(t)(1 + E(|Y^n(s)|^p))$,

et

(4.5.3) $$\sup_{n\geq 1} E(|Y^n(0)|^p) < +\infty$$

alors : $\forall T > 0 \ \sup_{N\geq 1} E(\sup_{0\leq t\leq T} |Y^n(t)|^p) < +\infty$

Preuve de 4.5. — Soit $\psi : \begin{cases} \mathbb{R}^m \to \mathbb{R} \\ y \mapsto |y|^2 \end{cases}$, alors pour tout $n \geq 1$, il existe une suite de temps d'arrêt $(\tau_k^n)_{k\geq 1}$, tendant $\mathbb{P}^n$-presque sûrement vers l'infini et telle que :

$$|Y^n(t\wedge\tau_k^n)|^2 = |Y^n_{(0)}|^2 + \int_0^{t\wedge\tau_k^n}[2\langle Y^n(s), \tilde{b}^n(Y^n(s), s, \omega^n)\rangle + \operatorname{tr}\tilde{a}^n(Y^n(s), s, \omega^n)]ds$$
$$+ M_\psi^n(t\wedge\tau_k^n, \omega^n)$$

où $$M_\psi^n(t\wedge\tau_k^n, \omega^n) = \int_0^{t\wedge\tau_k^n} 2\langle \tilde{\sigma}^{n*}(Y^n(s), s, \omega^n)(Y_s^n), dw^n(s)\rangle$$

est une martingale réelle d'espérance nulle. On note $q = \frac{p}{2}$.

$$(4.5.4)\quad |Y^n(t\wedge\tau_k^n)|^p$$
$$\leq 3^{q-1}\left\{|Y^n(0)|^p + (2k_1)^q\left[\int_0^t |C^n_{s\wedge\tau_k^n}| + |Y^n(s\wedge\tau_k^n)|^2 ds\right]^q + |M_\psi^n(t\wedge\tau_k^n)|^q\right\}$$
$$\leq 3^{q-1}\left\{|Y^n(0)|^p + (2k_1)^q(2t)^{q-1}\left(\int_0^t |C^n_{s\wedge\tau_k^n}|^q ds + \int_0^t |Y^n(s\wedge\tau_k^n)|^p ds\right)\right.$$
$$\left.+ |M_\psi^n(t\wedge\tau_k^n, \omega^n)|^q\right\}.$$

En utilisant l'inégalité de Doob ($q > 1$) on obtient :

$$\forall 0\leq t\leq T,\quad E\left(\sup_{0\leq v\leq t}|Y^n(v\wedge\tau_k^n)|^p\right)$$
$$\leq C_1E(|Y^n(0)|^p) + C_2E(|M_\psi^n(T\wedge\tau_k^n, .)|^q) + C_3(T)\int_0^t E\left(\sup_{0\leq v\leq s}|Y^n(v\wedge\tau_k^n)|^p\right)ds.$$

D'après le lemme de Gronwald :

$$\forall 0\leq t\leq T,\quad E\left(\sup_{0\leq v\leq t}|Y^n(v\wedge\tau_k^n)|^p\right)$$
$$\leq (C_1E(|Y^n(0)|^p) + C_2E(|M_\psi^n(T\wedge\tau_k^n, .)|^q))\exp(TC_3(T)).$$

Et du lemme de Fatou, en faisant $k\to\infty$, on tire :

$$(4.5.5)\quad \forall T\geq 0,\quad \sup_{n\geq 1}E\left(\sup_{0\leq t\leq T}|Y^n(t)|^p\right)$$
$$\leq C_4(T)\left(\sup_{N\geq 1}E(|Y^n(0)|^p) + \sup_{k,n\geq 1}E(|M_\psi^n(T\wedge\tau_k^n, .)|^q)\right)$$

Donc, il nous reste à trouver une estimation de

$$\sup_{k,n\geq 1}E(|M_\psi^n(t\wedge\tau_k^n, .)|^q)$$

Posons $\xi^{n,k}(t) = M_\psi^n(t\wedge\tau_k^n, \omega^n)$. Le lemme d'Ito ($q\geq 2$), nous donne l'existence d'une suite de $(\mathscr{F}_t^n)_{t\geq 0}$-temps d'arrêt : $(\theta_l^n)_{l\geq 1}$, tendant $\mathbb{P}^n$-presque sûrement vers l'infini et telle que

$$|\xi^{n,k}(t \wedge \theta^n)|^q = \int_0^{t \wedge \tau_k^n \wedge \theta_l^n} 2q(q-1)|\xi^{n,k}(s)|^{q-2}|\tilde{\sigma}^n(\mathrm{Y}^n(s), s, \omega^n)(\mathrm{Y}^n(s))|^2 ds + \mathrm{N}^{n,k}(t \wedge \theta_l^n)$$

où $\mathrm{N}^{n,k}(t \wedge \theta_l^n)$ est une martingale d'espérance nulle, donc :

$$(4.5.6) \quad |\xi^{n,k}(t \wedge \theta_l^n)|^q \leq 2q(q-1)\int_0^{t \wedge \tau_k^n \wedge \theta_l^n} |\xi^{n,k}(s)|^{q-2} k_1 |\mathrm{Y}^n(s)|^2(\mathrm{C}_s^n + |\mathrm{Y}^n(s)|^2) ds + \mathrm{N}^{n,k}(t \wedge \theta_l^n)$$
$$\leq 3k_1 q(q-1)\int_0^{t \wedge \tau_k^n \wedge \theta_l^n} |\xi^{n,k}(s)|^{q-2}((\mathrm{C}_s^n)^2 + |\mathrm{Y}^n(s)|^4) ds + \mathrm{N}^{n,k}(t \wedge \theta_l^n)$$

A l'aide de 4.5.4 avec $p = 4$ et du lemme de Gronwald, on a :

$$(4.5.7) \quad \forall t \geq 0, \quad |\mathrm{Y}^n(t \wedge \tau_k^n)|^4 \leq \mathrm{C}_5(t)\left(|\mathrm{Y}_{(0)}^n|^4 + \int_0^t (\mathrm{C}_{s \wedge \tau_k^n}^n)^2 ds + |\xi^{n,k}(t)|^2\right)$$

Par conséquent :

$$\mathrm{E}|\xi^{n,k}(t \wedge \theta_l^n)|^q \leq \mathrm{C}_6(t)(1 + \sup_{n\geq 1} \mathrm{E}|\mathrm{Y}_{(0)}^n|^4 + \sup_{n\geq 1}\sup_{0\leq s\leq t} \mathrm{E}(\mathrm{C}_s^n)^2)\left(1 + \int_0^t \mathrm{E}|\xi^{n,k}(s \wedge \theta_l^n)|^q ds\right)$$

qui à l'aide des lemmes de Gronwald et Fatou permet d'obtenir :

$$(4.5.8) \quad \sup_{n,k\geq 1} \mathrm{E}|\xi^{n,k}(t)|^q \leq \mathrm{C}_7(\sup_{n\geq 1} \mathrm{E}|\mathrm{Y}_{(0)}^n|^4, \sup_{n\geq 1}\sup_{0\leq s\leq t} \mathrm{E}[(\mathrm{C}_s^n)^2] \exp(t\mathrm{C}_7(\ ,\ ))$$

Compte tenu de 4.5.5 et 4.5.8, il nous reste à prouver :

$$(4.5.9) \qquad \sup_{n\geq 1}\sup_{0\leq s\leq t} \mathrm{E}[(\mathrm{C}_s^n)^2] < +\infty, \quad \forall t \geq 0$$

En prenant $q = 2$ dans 4.5.6 et en le combinant avec 4.5.7, on obtient :

$$\mathrm{E}(|\mathrm{Y}^n(t \wedge \tau_k^n \wedge \theta_l^n)|^4 \leq \mathrm{C}_8(t)(1 + \mathrm{E}(|\mathrm{Y}_{(0)}^n|^4)) + \mathrm{C}_9(t)\int_0^t \mathrm{E}(|\mathrm{Y}^n(s \wedge \tau_k^n \wedge \theta_l^n)|^4) ds$$

Par conséquent :

$$\sup_{n\geq 1} \mathrm{E}(|\mathrm{Y}^n(t)|^4) \leq \mathrm{C}_{10}(t)(1 + \sup_{n\geq 1} \mathrm{E}(|\mathrm{Y}^n(0)|^4))$$

qui avec 4.5.2 nous permet d'écrire 4.5.9 :

$$\sup_{n\geq 1}\sup_{0\leq s\leq t} \mathrm{E}[(\mathrm{C}_s^n)^2] \leq \mathrm{C}_{11}(t)(1+\sup_{n\geq 1}\mathrm{E}(|\mathrm{Y}_{(0)}^n|^4)) < +\infty \qquad \square$$

Au lemme 4.6, nous allons appliquer le lemme 4.5 à la suite de processus continus à valeurs $\mathbb{R}^d$: $(x_1^{\mathrm{N}})_{\mathrm{N}\geq 1}$, où l'on note pour tout élément y^{N} de $(\mathbb{R}^d)^{\mathrm{N}}$ ou de $\mathrm{C}(\mathbb{R}^+, \mathbb{R}^d)^{\mathrm{N}}$:

$$y^{\mathrm{N}} = (y_j^{\mathrm{N}})_{1\leq j\leq \mathrm{N}}\,; \quad y_j^{\mathrm{N}} \in \mathbb{R}^d \quad \text{ou} \quad \mathrm{C}(\mathbb{R}^+, \mathbb{R}^d).$$

D'après le lemme d'Ito appliqué à une fonction $\Psi \in \mathrm{C}^2(\mathbb{R}^{d\mathrm{N}})$ de la forme : $\Psi(x^{\mathrm{N}}) = h(x_1^{\mathrm{N}})$, $\forall x^{\mathrm{N}} \in \mathbb{R}^d$, $h \in \mathrm{C}^2(\mathbb{R}^d)$, on a $\forall h \in \mathrm{C}^2(\mathbb{R}^d)$ $\forall t \geq 0$,

$$\begin{aligned} h(x_1^{\mathrm{N}}(t)) = h(x_1^{\mathrm{N}}(0)) + \int_0^t [\langle h'(x_1^{\mathrm{N}}(s)), b[x_1^{\mathrm{N}}(s), \overline{\mathrm{X}}_{\mathrm{N}}(s)]\rangle \\ + \frac{1}{2}\operatorname{tr}(h''(x_1^{\mathrm{N}}(s)\sigma\sigma^*[x_1^{\mathrm{N}}(s), \overline{\mathrm{X}}_{\mathrm{N}}(s)])]ds + \mathrm{M}_h^{\mathrm{N}}(t) \end{aligned}$$

où $\mathrm{M}_h^{\mathrm{N}}(t) = \int_0^t \langle \sigma^*[x_1^{\mathrm{N}}(s), \overline{\mathrm{X}}_{\mathrm{N}}(s)]h'(x_1^{\mathrm{N}}(s)), dw_1(s)\rangle$ est une martingale localement de carré intégrable.

Nous sommes donc dans les conditions d'application du lemme 4.5, avec pour tout $\mathrm{N}\geq 1$: $(\Omega^{\mathrm{N}}, (\mathscr{F}_t^{\mathrm{N}})_{t\geq 0}, \mathscr{F}^{\mathrm{N}}, \mathbb{P}^{\mathrm{N}}) = (\mathscr{A}, (\mathscr{F}_t)_{t\geq 0}, \mathscr{F}, \mathbb{P})$ $\mathrm{Y}^{\mathrm{N}} = x_1^{\mathrm{N}}$, $w^{\mathrm{N}} = w_1$, $\tilde{b}^{\mathrm{N}}(\mathrm{Y}^{\mathrm{N}}(t), t, \omega^{\mathrm{N}}) = b[x_1^{\mathrm{N}}(t), \overline{\mathrm{X}}_{\mathrm{N}}(t)]$ et $\tilde{\sigma}^{\mathrm{N}}(\mathrm{Y}^{\mathrm{N}}(t), t, \omega^{\mathrm{N}}) = \sigma[x_1^{\mathrm{N}}(t), \overline{\mathrm{X}}_{\mathrm{N}}(t)]$.

LEMME 4.6. — *Sous les hypothèses* $\mathrm{H}_{1,3,4,5,6,8}$ *(de la proposition 3.3), pour que, pour tout* $\mathrm{T}\geq 0$, $\sup_{\mathrm{N}\geq 1}\mathrm{E}\sup_{0\leq t\leq \mathrm{T}}|x_{\mathrm{N}}^1(t)|^p < +\infty$ $(p\geq 4)$, *il suffit que*

(4.6.1) $$\sup_{\mathrm{N}\geq 1}\mathrm{E}(|x_{\mathrm{N}}^1(0)|^p) < +\infty$$

Preuve. — Pour pouvoir appliquer le lemme 4.5, il reste à vérifier les conditions 4.5.1 et 4.5.2. On vérifie aisément que : $\forall \mathrm{N}\geq 1$, $\forall y \in \mathbb{R}^{d\mathrm{N}}$

$$\langle y_1, b[y_1, \overline{y}_{\mathrm{N}}]\rangle \leq \langle y_1, v(y_1)\rangle + |y_1|f_1(y_1) + \frac{1}{2}|y_1|^2 + \frac{1}{2\mathrm{N}}\sum_{j=1}^{\mathrm{N}} f_2(y_j)^2$$

et

$$\operatorname{tr}(\sigma\sigma^*[y_1, \overline{y}_{\mathrm{N}}]) \leq \frac{1}{\mathrm{N}}\sum_{j=1}^{\mathrm{N}}\operatorname{tr}[\sigma\sigma^*(y_1, y_j)]$$

H_5, H_6 et H_8 nous permettent de prendre : $C_t^N = 1 + \frac{1}{N}\sum_{j=1}^{N} |x_j^N(t)|^2$ dans 4.5.1. Or, $\forall t \geq 0$, $\forall p \geq 0$, $\forall N \geq 1$,

$$\begin{aligned}
E(|C_t^N|^{\frac{p}{2}}) &\leq C\left(1 + E\left(\left[\frac{1}{N}\sum_{j=1}^{N}|x_j^N(t)|^2\right]^{\frac{p}{2}}\right)\right) \\
&\leq C\left(1 + E\left(\frac{1}{N}\sum_{j=1}^{N}|x_j^N(t)|^p\right)\right) && \text{(convexité de } x^{\frac{p}{2}}) \\
&= C(1 + E(|x_1^N(t)|)^p) && \text{(échangeabilité)}
\end{aligned}$$

Ce qui donne 4.5.2. □

5. IDENTIFICATION ET UNICITÉ

5 *a*) Identification des valeurs d'adhérence de $(\bar{P}_N)_{N \geq 1}$.

On note $\Pi_p(\mathbb{R}^d) = \Pi_{\chi_p}(\mathbb{R}^d)$, où $\chi_p : \begin{cases} \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^+ \\ x \mapsto 1 + |x|^p \end{cases}$, $p \geq 0$. On définit $L : C_K^2(\mathbb{R}^d) \times \Pi_1(\mathbb{R}^d) \to \mathbb{R}^{\mathbb{R}^d}$, par :

$\forall \psi \in C_K^2(\mathbb{R}^d)$, $\forall \nu \in \Pi_1(\mathbb{R}^d)$, $\forall x \in \mathbb{R}^d$,

$$L(\psi, \nu)(x) = \langle b[x, \nu], \psi'(x) \rangle + \frac{1}{2}\operatorname{tr}(\sigma\sigma^*[x, \nu]\psi''(x))$$

Soit $\mu \in \Pi_1(\mathbb{R}^d)$, on dit que $P_\mu \in \Pi(C(\mathbb{R}^+, \mathbb{R}^d))$ est solution du problème de martingales non-linéaire (L, μ) si :

$$P_\mu(X(0) \in A) = \mu(A), \quad \forall A \in \mathscr{B}(\mathbb{R}^d)$$

et $\quad \forall \psi \in C_K^2(\mathbb{R}^d), \quad \psi(X(t)) - \psi(X(0)) - \int_0^t L(\psi, X(s) \circ P_\mu)(X_s)ds$

est une P_μ-martingale.

LEMME 5.1. — *Sous les hypothèses du lemme 4.4, si $\mathscr{E}_\mu$ est l'ensemble* *des solutions du problème de martingales non-linéaire* (L, μ), *si* $\overline{\mathrm{Q}}$ *est une valeur d'adhérence de* $(\overline{\mathrm{P}}_{\mathrm{N}})_{\mathrm{N}\geq 1}$, *et si*

$$(5.1.1) \qquad \overline{\mathrm{Q}}(\{ m \in \Pi(\mathrm{C}(\mathbb{R}^+, \mathbb{R}^d)), \mathrm{X}(0) \circ m = \mu \}) = 1,$$

alors : $\overline{\mathrm{Q}}(\mathscr{E}_\mu) = 1$.

Preuve. — On considère la fonction $\mathrm{F} : \mathscr{P}_p \to \mathbb{R}$, définie par $\forall m \in \mathscr{P}_p$,

$$\mathrm{F}(m) = \left\langle m, \left[\psi(\mathrm{X}(t)) - \psi(\mathrm{X}(s)) - \int_s^t \mathrm{L}(\psi, \mathrm{X}(u) \circ m) du \right] \mathrm{G} \right\rangle \text{ où } : 0 \leq s \leq t,$$

$\psi \in \mathrm{C}_{\mathrm{K}}^2(\mathbb{R}^d)$ et $\mathrm{G} \in \mathrm{C}_b[\mathrm{C}(\mathbb{R}^+, \mathbb{R}^d)]$ est $\mathscr{F}_s$-mesurable. Comme en [Szn], nous allons montrer que : $\mathrm{F}(m) = 0$, $\overline{\mathrm{Q}}$-presque sûrement ce qui avec 5.1.1 démontre le lemme.

F est continue pour $p \geq 1$, puisque : $\forall x \in \mathbb{R}^d$, $f(x, .) \in \mathrm{C}_{\chi_1}(\mathbb{R}^d)$, (rappelons que $b(x, y) = v(x) + f(x, y)$), et : par conséquent

$$\forall k \in \mathbb{N}^*, \quad \langle \mathrm{F}(.)^2 \wedge k, \overline{\mathrm{Q}} \rangle = \lim_{\mathrm{N}\to\infty} \langle \mathrm{F}(.)^2 \wedge k, \overline{\mathrm{P}}_{\mathrm{N}} \rangle$$

En suivant [Szn] on obtient :

$$\begin{aligned} \forall k \in \mathbb{N}, 0 &\leq \lim_{\mathrm{N}\to\infty} \langle \mathrm{F}(.)^2 \wedge k, \overline{\mathrm{P}}_{\mathrm{N}} \rangle \\ &\leq \mathrm{C}(\mathrm{G}, \psi, t) \lim_{\mathrm{N}\to\infty} \frac{1}{\mathrm{N}} (1 + \sup_{\mathrm{N}>1} \mathrm{E} \sup_{0<s<t} | x_1^{\mathrm{N}}(s) |^2) = 0 \end{aligned}$$

Ce qui donne : $\forall k \in \mathbb{N}^*$, $\langle \mathrm{F}(.)^{\mathrm{Z}} \wedge k, \overline{\mathrm{Q}} \rangle = 0$. On conclut avec Beppo-Levi. □

5 *b*) Unicité de la valeur d'adhérence de $(\overline{\mathrm{P}}_{\mathrm{N}})_{\mathrm{N}\geq 1}$.

LEMME 5.2. — *Sous les hypothèses* (H), *pour tout* $\mu \in \Pi_p(\mathbb{R}^d)$, *avec* $p > \max(4, 2r)$, $\mathscr{E}_\mu$ *est un singleton.*

Un résultat préliminaire.

$$\mathrm{W} = \{ f, f \in \mathrm{C}(\mathbb{R}^d), \| f \|_w < +\infty \},$$

où
$$\| f \|_w = \sup_{x \in \mathbb{R}^d} \frac{| f(x) |}{1 + | x |} + \sup_{\substack{x,y \in \mathbb{R}^d \\ x \neq y}} \frac{| f(x) - f(y) |}{| x - y |}$$

$(\mathrm{W}, \| \, . \, \|_{\mathrm{W}})$ est un espace normé. On note W′ son dual et $\| \, . \, \|_{\mathrm{W}'}$ la norme de W′. Il est clair que $\Pi_1(\mathbb{R}^d) \subset \mathrm{W}'$. D'autre part si X_1 et X_2 sont des variables aléatoires sur $\mathbb{R}^d$, telles que $\mathrm{E} | \mathrm{X}_1 | + \mathrm{E} | \mathrm{X}_2 | < +\infty$ alors :

$$(5.2.1) \qquad \| \mathscr{L}(\mathrm{X}_1) - \mathscr{L}(\mathrm{X}_2) \|_{\mathrm{W}'} \leq \mathrm{E} | \mathrm{X}_1 - \mathrm{X}_2 |,$$

en effet

$$|\langle f, \mathscr{L}(X_1) - \mathscr{L}(X_2) \rangle| = |E(f(X_1) - f(X_2))|$$
$$\leq \sup_{x \neq y} \frac{|f(x) - f(y)|}{|x - y|} E|X_1 - X_2| \leq \|f\|_W E|X_1 - X_2|$$

Preuve du lemme 5.2. — Puisque $\{ \overline{P}_N, N \geq 1 \}$ est relativement compact (lemme 5.1), on a : $\mathscr{E}_\mu \neq \emptyset$. Soit $m \in \mathscr{E}_\mu$; la solution de l'équation différentielle stochastique

$$\begin{cases} x(m)_t = \xi_0 + \int_0^t b[x(m)_s, X(s) \circ m] ds + \int_0^t \sigma[x(m)_s, X(s) \circ m] dw_s \\ \mathscr{L}(\xi_0) = \mu \end{cases}$$

existe et est unique (voir la proposition 3.1). Le problème de martingales linéaire $(L(.,m), \mu)$ admet par conséquent une unique solution. Puisque $m \in \mathscr{E}_\mu$, cette solution est nécessairement m. Par conséquent, tout élément m de $\mathscr{E}_\mu$ admet une représentation trajectorielle : $x(m)$.

Soit m_1 et m_2 deux éléments de $\mathscr{E}_\mu$, et $x_1 = x(m_1)$ et $x_2 = x(m_2)$: leurs représentations trajectorielles. Pour prouver le lemme il suffit de montrer :

$$(5.2.2) \qquad \forall t \geq 0, \quad E|x_1(t) - x_2(t)|^2 = 0.$$

A l'aide du lemme d'Ito et du lemme de Fatou, on obtient

$$E(|x_1(t) - x_2(t)|^2)$$
$$\leq 2 \int_0 \langle x_1(s) - x_2(s), b[x_1(s), X(s) \circ m_1] - b[x_2(s), X(s) \circ m_1] \rangle ds$$
$$+ 2 \int_0^t \langle x_1(s) - x_2(s), b[x_2(s), X(s) \circ m_1] - b[x_2(s), X(s) \circ m_2] \rangle ds$$
$$+ \int_0^t \operatorname{tr} [(\sigma[x_1(s), X(s) \circ m_1] - \sigma[x_2(s), X(s) \circ m_2])$$
$$(\sigma[x_1(s), X(s) \circ m_1] - \sigma[x_2(s), X(s) \circ m_2])^*] ds$$

Ce qui, à l'aide de H_2, H_3, H_4 et de 5.2.1 donne $\forall 0 \leq t \leq T$

$$E(|x_1(t) - x_2(t)|^2) \leq 5K \int_0^t E(|x_1(s) - x_2(s)|^2) ds$$
$$+ K \sup_{0 \leq s \leq T} \|b(x_2(s), .)\|_w^2 \int_0^t \|X(s) \circ m_1 - X(s) \circ m_2\|_{w'}^2 ds$$

Or : $\sup_{0\leq s\leq T} \| b(x_2(s), .)\|_w^2 \leq \sup_{0\leq s\leq t} \mathrm{E}[(2\mathrm{K} + |v(x_2(s)| + f_1(x_2(s)))^2]$

$$\leq \mathrm{C}_1(1 + \sup_{0\leq s\leq T} |x_2(s)|^{2r}) < +\infty$$

Compte tenu de 5.2.1, on a :

$$\mathrm{E}(|x_1(t) - x_2(t)|^2) \leq \mathrm{C}_2 \int_0^t \mathrm{E}(|x_1(s) - x_2(s)|^2)ds,$$

ce qui donne 5.2.2, avec le lemme de Gronwald. □

6. QUELQUES RÉSULTATS SUPPLÉMENTAIRES

6 *a*) En effectuant une démonstration analogue à celle du théorème 2.2, en remplaçant la proposition 3.1 par celle énoncée à la remarque 3.2 et en obtenant directement la tension de $\{\mathscr{L}(x_1^{\mathrm{N}}), \mathrm{N} \geq 1\}$, à l'aide de la proposition 2.3 de [JoM], on obtient le théorème 6.1 suivant, où les hypothèses (H) sont renforcées, mais où les conditions initiales sont dans L^2.

THÉORÈME 6.1. — *Les hypothèses* (H) *sont vérifiées, mais* H_2 *est renforcé par :*

$$\forall x, y, z, \quad |b(x, y) - b(z, y)| \leq \mathrm{K}|x - z|, \quad v = 0 \quad et \quad r = 1 \quad dans\ \mathrm{H}_7$$

Si pour tout $\mathrm{N} \geq 1$, $\mathscr{L}(x^{\mathrm{N}}(0)) \in \mathrm{L}^2(\mathscr{A}, \mathscr{F}, \mathbb{P})$ *alors, l'équation 2.1 admet une unique solution trajectorielle dans* $\mathrm{C}(\mathbb{R}^+, \mathbb{R}^{d\mathrm{N}})$.

De plus, si pour $\mu \in \Pi(\mathbb{R}^d)$, $\mathscr{L}(\overline{\mathrm{X}}_{\mathrm{N}}(0)) \underset{\mathrm{N}\to\infty}{\to} \delta_\mu$ *dans* $\Pi[\Pi(\mathbb{R}^d)]$, *et si pour* $p \geq 2$, $\sup_{\mathrm{N}\geq 1} \mathrm{E} \int_{\mathbb{R}^d} |x|^p [\overline{\mathrm{X}}_{\mathrm{N}}(0)](dx) < +\infty$ *alors, pour tout* $0 \leq q < p$, $\mathscr{L}(\overline{\mathrm{X}}_{\mathrm{N}}) \underset{\to\infty}{\to} \delta_{\mathrm{P}}$ *dans* $\tilde{\mathscr{P}}_q$, *où* P *est l'unique solution de l'équation 2.2.*

6 *b*) La forme particulière des fonctions :

$$b : \begin{cases} \mathrm{R}^d \times \Pi(\mathbb{R}^d) & \to & \mathbb{R}^d \\ (x, \mu) & \mapsto & \langle b(x, .), \mu \rangle \end{cases}$$

et

$$\sigma : \begin{cases} \mathbb{R}^d \times \Pi(\mathbb{R}^d) & \to & \mathrm{S}_d \\ (x, \mu) & \mapsto & \langle \sigma(x, .), \mu \rangle \end{cases}$$

n'intervient qu'en 3.3, 4.6 et 5.2.

On généralise immédiatement les résultats des théorèmes 2.2, 6.1, 6.2

et de la proposition 6.5, au cas où les systèmes finis de diffusions sont de la forme :

$$dx_i^N(t) = \underset{\sim}{b}[x_i^N(t), \overline{X}_N(t)]dt + \underset{\sim}{\sigma}[x_i^N(t, \overline{X}_N(t)]dw_i(t)$$

où $\underset{\sim}{b}[x, \mu]$ et $\underset{\sim}{\sigma}[x, \mu]$ vérifient les mêmes propriétés que celles que les hypothèses (H) induisent sur $\langle b(x, .), \overline{X}_N \rangle$ et $\langle \sigma(x, .), \overline{X}_N \rangle$, avec $\overline{X}_N = \mu$.

En particulier, on peut avoir

$$\underset{\sim}{b}[x, \overline{X}_N] = \int_{(\mathbb{R}^d)^n} b(x, y_1, \ldots, y_n)\overline{X}_N(dy_1) \otimes \ldots \otimes \overline{X}_N(dy_n)$$

et

$$\underset{\sim}{\sigma}[x, \overline{X}_N] = \int_{(\mathbb{R}^d)^n} \sigma(x, y_1, \ldots, y_n)\overline{X}_N(dy_1) \otimes \ldots \otimes \overline{X}_N(dy_1)$$

où $b(x, y)$ et $\sigma(x, y)$ vérifient la généralisation des hypothèses (H) où l'on remplace y par $(y_1, \ldots, y_n) \in (\mathbb{R}^d)^n$.

6 *c*) **Une généralisation des théorèmes 2.2 et 6.1.**

THÉORÈME 6.2. — *Si les hypothèses du théorème 2.2 (resp. 6.1) sont vérifiées, si* $\mathscr{L}(\overline{X}_N(0)) \underset{N\to\infty}{\to} \overline{P}_0$ *dans* $\Pi[\Pi(\mathbb{R}^d)]$, *et si pour* $p \geq \max(4, 2r)$ *(resp.* $p \geq 2$*)*

$$\sup_{N\geq 1} E \int_{\mathbb{R}^d} |x|^p [\overline{X}_N(0)](dx) < +\infty$$

alors

$$(6.2.1) \quad \mathscr{L}(\overline{X}_N) \underset{N\to\infty}{\to} \overline{P} = \int_{\Pi(\mathbb{R}^d)} \delta_{P(\mu)}\overline{P}_0(d\mu) \ \textit{dans}\ \Pi\{\Pi[C(\mathbb{R}^+, \mathbb{R}^d)]\}$$

où $P(\mu) \in \Pi[C(\mathbb{R}^+, \mathbb{R}^d)]$ *est l'unique solution de 2.2, telle que* $X(0) \circ P(\mu) = \underset{\sim}{\mu}$. *De plus, si le support de* $\overline{P}_0$ *est fini, alors la convergence 6.2.1 a lieu dans* $\tilde{\mathscr{P}}_q$, *pour tout* $0 \leq q < p$.

Preuve. — Le théorème de représentation de Skorokhod nous permet de choisir $(x^N(0))_{N\geq 1}$, tel que : $\overline{X}_N(0) \underset{N\to\infty}{\overset{p.s.}{\to}} \overline{X}(0)$, avec $\mathscr{L}(\overline{X}(0)) = \overline{P}_0$.

$$\forall F \in C(\mathscr{P}_p), \quad \langle F, \mathscr{L}(\overline{X}_N) \rangle = E(F(\overline{X}_N)) = E[E(F(\overline{X}_N) \mid \overline{X}(0))]$$

$$= \int_{\Pi(\mathbb{R}^d)} \left[\int_{\mathscr{A}} F(\overline{X}_N(\xi))\mathscr{P}(d\xi \mid \overline{X}(0) = \mu)\right]\overline{P}_0(d\mu)$$

Le théorème 2.2 (resp. 6.1), nous donne :

$$\forall \mu \in \Pi_p(\mathbb{R}^d), \quad \forall \mathrm{F} \in \bigcup_{\mathrm{T}\geq 0} \mathrm{C}_{\tilde{\phi}_{\mathrm{T},p}}(\mathscr{P}_p), \int_{\mathscr{A}} \mathrm{F}(\overline{\mathrm{X}}_{\mathrm{N}}(\xi))\mathbb{P}(d\xi \mid \overline{\mathrm{X}}(0) = \mu) \underset{\mathrm{N}\to\infty}{\to} \mathrm{F}(\mathrm{P}(\mu))$$

Si F est bornée ou si $\overline{\mathrm{P}}_0$ a un support fini, la famille :

$$\left\{ \mu \to \int_{\mathscr{A}} \mathrm{F}(\overline{\mathrm{X}}_{\mathrm{N}}(\xi))\mathbb{P}(d\xi \mid \overline{\mathrm{X}}(0) = \mu), \mathrm{N} \geq 1 \right\}$$

est $\overline{\mathrm{P}}_0$-équiintégrable et :

$$\langle \mathrm{F}, \mathscr{L}(\overline{\mathrm{X}}_{\mathrm{N}}) \rangle \underset{\mathrm{N}\to\infty}{\to} \int_{\Pi(\mathbb{R}^d)} \mathrm{F}(\mathrm{P}(\mu))\overline{\mathrm{P}}_0(d\mu) = \langle \mathrm{F}, \overline{\mathrm{P}} \rangle \qquad \square$$

6 *d*) Une autre formulation de la convergence étroite de $\mathscr{L}(\overline{\mathrm{X}}_{\mathrm{N}})$.

On suppose que, pour tout $\mathrm{N} \geq 1$, $(x_1^{\mathrm{N}}(0), \ldots, x_{\mathrm{N}}^{\mathrm{N}}(0))$ est N-échangeable, alors d'après [Ald] :

$$\mathscr{L}(\overline{\mathrm{X}}_{\mathrm{N}}) \underset{\mathrm{N}\to\infty}{\to} \overline{\mathrm{P}} \qquad (\text{étroitement dans } \Pi\{\Pi[\mathrm{C}(\mathbb{R}^+, \mathbb{R}^d)]\})$$

équivaut à :

$$(6.3) \quad \forall m \geq 1, \ \mathscr{L}(x_1^{\mathrm{N}}, \ldots, x_m^{\mathrm{N}}) \underset{\mathrm{N}\to\infty}{\to} \mathscr{L}(x_1^{\infty}, \ldots, x_m^{\infty}) \ (\text{dans } \Pi[\mathrm{C}(\mathbb{R}^+, \mathbb{R}^d)^m])$$

où $(x_1^{\infty}, x_2^{\infty}, \ldots)$ est le mélange d'i. i. d. dirigé par $\overline{\mathrm{P}}$. (Pour cette notion voir [Ald]).

6 *e*) Propagation du chaos, propagation du mélange.

Kac a introduit dans un contexte différent du nôtre ([Kac]), la notion de propagation du chaos, qui est la suivante : si la condition initiale $x^{\mathrm{N}}(0)$ a pour loi $\mu^{\otimes \mathrm{N}}$, à un instant $t > 0$ cette indépendance est détruite, mais lorsque $\mathrm{N} = +\infty$, l'indépendance se conserve tout au long de la trajectoire. Pour prouver un tel résultat, on peut montrer que :

$$(6.4) \quad \forall t > 0, \quad \lim_{\mathrm{N}\to+\infty} \mathrm{E}(f_1(x_1^{\mathrm{N}}(t)) \cdot \ldots \cdot f_m(x_m^{\mathrm{N}}(t))) = \prod_{i=1}^{m} \mathrm{E}[f_i(x_i^{\infty}(t))]$$

mais l'échangeabilité (McKean utilise dans [McK] la loi de 0-1 de Hewitt-

Savage) avec le théorème de de Finetti (voir [Ald]) et la convergence 6.3, nous permettent d'énoncer à la proposition suivante, un résultat plus fort que 6.4 (voir aussi [Szn] pour un résultat analogue), concernant la loi des processus $(X_i^\infty)_{i=1,\dots,m}$ et non seulement la loi des variables aléatoires $(X_i^\infty(t))$.

PROPOSITION 6.5. — (Propagation du chaos). *On suppose que pour tout* $N \geq 1$, $x^N(0)$ *est* N-*échangeable et que les hypothèses du théorème 6.2 sont vérifiées.*

Si $\mathscr{L}(\overline{X}_N(0)) \underset{N\to\infty}{\to} \delta_\mu$ *dans* $\Pi(\mathbb{R}^d)$ *(en particulier si* $\mathscr{L}(x^N(0)) = \mu^{\otimes N}$, $\forall N \geq 1$*), alors :* $\forall m \geq 1$, $\mathscr{L}(x_1^N, \dots, x_m^N) \underset{N\to\infty}{\to} P(\mu)^{\otimes m}$ *dans* $\Pi[C(\mathbb{R}^+, \mathbb{R}^d)^m]$.

Propagation du mélange.

De manière plus générale, la formule 6.2.1 et le théorème de de Finetti, nous disent que si les hypothèses de 6.5 sont vérifiées et si les conditions initiales $x^N(0)$ convergent au sens 6.3 vers un mélange d'i. i. d. dirigé par $\overline{P}_0$, alors les trajectoires x_N convergent au sens 6.3 vers un mélange d'i. i. d. dirigé par $\overline{P} = \int_{\Pi(\mathbb{R}^d)} \delta_{P(\mu)} \overline{P}_0(d\mu)$.

APPENDICE

$\mathscr{D}$-SEMI-MARTINGALES A VALEURS DANS $\mathbb{R}^m$

Les résultats et définitions que nous énonçons ci-dessous se trouvent dans [JoM].

Définition. — On appelle $\mathscr{D}$-semi-martingale, tout processus cadlag adapté Y, défini sur la base stochastique $(\mathscr{A}, (\mathscr{F}_t)_{t \geq 0}, \mathscr{F}, \mathbb{P})$, à valeurs dans $\mathbb{R}^m$, tel qu'il existe une fonction cadlag croissante $A(t)$, un sous-espace vectoriel $\mathscr{C} \subset C(\mathbb{R}^m)$ et une application L : $\mathscr{C} \times \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^+ \times \mathscr{A} \to \mathbb{R}$ qui ont les propriétés suivantes :

(D.1) les fonctions $\phi_i : \begin{cases} \mathbb{R}^m \to \mathbb{R} \\ y \mapsto \phi_i(y) = y_i \end{cases}$ et $\phi_i\phi_j$; $i, j = 1, \ldots, m$ appartiennent à $\mathscr{C}$.

(D.2) *i)* Pour tout $(y, t, \omega) \in \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^+ \times \mathscr{A}$, $\phi \mapsto L(\phi, y, t, \omega)$ est une forme linéaire sur $\mathscr{C}$ et $L(\phi, ., t, \omega) \in \mathscr{C}$.

ii) Pour tout $\phi \in \mathscr{C}$, $(y, t, \omega) \to L(\phi, y, t, \omega)$ est $\mathscr{B}(\mathbb{R}^m) \otimes \mathscr{G}$ mesurable, où $\mathscr{G}$ est la tribu des ensembles prévisibles.

(D.3) Pour tout $\phi \in \mathscr{C}$, le processus M^ϕ défini par $M^\phi(t, \omega) = \phi(Y_t(\omega)) - \phi(Y_0(\omega)) - \int_0^t L(\phi, Y_{s^-}(s), s, \omega) dA_s$ est une martingale localement de carré intégrable sur $(\mathscr{A}, (\mathscr{F}_t)_{t \geq 0}, \mathscr{P})$.

Définition. — Pour tout $i, j = 1, \ldots, m$, on pose

$$\tilde{b}_i(y, t, \omega) = L(\phi_i, y, t, \omega) ; \quad \tilde{a}_{ij}(y, t, \omega) = L(\phi_i\phi_j, y, t, \omega) - (\phi_i b_j + \phi_j b_i)(y, t, \omega)$$

$\tilde{b}$ et $\tilde{a}$ s'appellent les coefficients locaux.

Proposition A. — *Soit* $(Y_n)_{n \geq 1}$, *une suite de $\mathscr{D}$-semi-martingales, chacun des* Y_n *étant défini sur son propre espace probabilisé,* $(\mathscr{A}^n, \mathscr{F}^n_t)_{t \geq 0}, \mathscr{F}^n, \mathbb{P}^n)$. *Si tous les* Y^n *sont associés au même sous-espace* $\mathscr{C} \subset C(\mathbb{R}^m)$ *et si on appelle* L^n *(resp.* A^n*), l'application* $(\phi, y, t, \omega) \to L^n(\phi, y, t, \omega)$ *(resp. la fonction croissante) associée à* Y_n, *alors :*

Pour que $\{ \mathscr{L}(Y_n), n \geq 1 \}$ *soit une suite relativement compacte de* $\Pi[D(\mathbb{R}^+, \mathbb{R}^m)]$, *il suffit que les hypothèses* A1 *et* A2 *suivantes soient vérifiées.*

(A.1) *Si* $\tilde{b}^n$ *et* $\tilde{a}^n$ *désignent les coefficients locaux associés à* L^n :

i) $$\sup_{n \geq 1} E \sup_{0 \leq t \leq T} | n^n(Y_n(t^-), t, .) | < +\infty, \quad \forall T \geq 0$$

ii) $$\sup_{n \geq 1} E \sup_{0 \leq t \leq T} \operatorname{tr} | \tilde{a}^n(Y_n(t^-), t, .) | < +\infty, \quad \forall T \geq 0$$

(A.2) *Il existe une fonction* $\alpha : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ *et une suite décroissante de nombres* $(\gamma_n)_{n \geq 1}$, *telles que :* $\lim_{t \downarrow 0} \alpha(t) = 0$, $\lim_{n \uparrow \infty} \gamma^n = 0$ *et pour tous* $0 < s < t$ *et tout* $n \geq 1$:

$$A^n(t) - A^n(s) \leq \alpha(t - s) + \gamma_n.$$

Ce résultat n'est pas énoncé explicitement dans [JoM], mais sa démonstration est la même que celle de la proposition 2.3 de [JoM].

RÉFÉRENCES

[Ald] D. J. ALDOUS, *Exchangeability and related topics.* École d'été de Saint-Flour, 1983. LNM 1117 (Springer-Verlag).

[Bou] N. BOURBAKI, *Intégration.* Chapitre 9. Hermann, Paris, 1969.

[Daw] D. A. DAWSON, Critical Dynamics and Fluctuations for a Mean-Field Model of Cooperative Behavior. *Journal of Statistical Physics*, t. **31**, no. 1, 1983.

[GSk] I. I. GIHMANN and A. V. SKOROHOD, *Stochastic differential equations.* Springer-Verlag, 1972.

[JoM] A. JOFFE and M. MÉTIVIER, Weak convergence of sequences of semimartingales with applications to multiple branching processes. *Advances in Applied Probability (à paraître)*, 1985.

[Kac] M. KAC, *Probability and related topics in the physical sciences*, New York: Interscience, 1958.

[Leo] C. LÉONARD, *Thèse de 3^e^ cycle.* Université d'Orsay (France), 1984.

[McK] H. P. MCKEAN, Jr. Propagation of chaos for a class of non-linear parabolic equations. Catholic University (Washington D. C.). *Lecture Series in Differential equations*, t. **7**, 1967.

[Oel] K. OESCHLÄGER, A martingale approach to the law of large numbers for weakly interacting stochastic processes. *The Annals of Probability*, t. **12**, no. 2, 1984, p. 458-479.

[Szn] A. S. SZNITMAN, Nonlinear Reflecting Diffusion Process, and the Propagation of Chaos and Fluctuations Associated. *Journal of Functional Analysis*, t. **56**, 1984, p. 311-336.

(Manuscrit reçu le 28 mai 1985).

(Révisé le 27 janvier 1986)