

# ANNALES DE L'I. H. P., SECTION B

LAURENT SCHWARTZ

**Le mouvement brownien sur  $\mathbb{R}^N$ , en tant que  
semi-martingale dans  $S_N$**

*Annales de l'I. H. P., section B*, tome 21, n° 1 (1985), p. 15-25

[http://www.numdam.org/item?id=AIHPB\\_1985\\_\\_21\\_1\\_15\\_0](http://www.numdam.org/item?id=AIHPB_1985__21_1_15_0)

© Gauthier-Villars, 1985, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Annales de l'I. H. P., section B » (<http://www.elsevier.com/locate/anihpb>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

*Article numérisé dans le cadre du programme  
Numérisation de documents anciens mathématiques  
http://www.numdam.org/*

# Le mouvement brownien sur $\mathbb{R}^N$ , en tant que semi-martingale dans $S_N$

par

**Laurent SCHWARTZ**

Centre de Mathématiques, École Polytechnique,  
91128 Palaiseau Cedex

---

**RÉSUMÉ.** — Le mouvement Brownien sur  $\mathbb{R}^N$  est, considéré comme à valeurs dans  $S_N = \mathbb{R}^N \cup \{ \infty \}$ , une semi-martingale dans  $[0, + \infty] \times \Omega$  pour  $N \geq 3$ , pour les temps montants ou descendants.

**ABSTRACT.** — Brownian motion on  $\mathbb{R}^N$ , as a process with values in  $S_N = \mathbb{R}^N \cup \{ \infty \}$ , is a semi-martingale in  $[0, + \infty] \times \Omega$  for  $N \geq 3$  for increasing or decreasing times.

---

## § 1. ÉNONCÉ ET DÉMONSTRATION DU THÉORÈME

Soient  $(\Omega, \mathcal{O}, (\mathcal{C}_t)_{t \in \mathbb{R}_+}, \mathbb{P})$  un ensemble filtré probabilisé, vérifiant les conditions habituelles (sauf peut-être le caractère  $\mathbb{P}$ -complet des  $\mathcal{C}_t$ ), et  $B$  une martingale continue sur  $[0, + \infty[ \times \Omega$ , de loi brownienne  $\mathbb{P}$  de distribution initiale  $B_0(\mathbb{P}) = \mu$  sur  $\mathbb{R}^N (B_t - B_s)$  est gaussienne de paramètre  $\sqrt{t - s}$ , indépendante de  $\mathcal{C}_s$ ,  $0 \leq s < t < + \infty$ ). Pour  $N \geq 3$ , on sait que, quand  $t \rightarrow + \infty$ ,  $B_t$  tend p. s. vers  $\infty$  dans  $\mathbb{R}^N$ , et même que,

pour tout  $\alpha < \frac{1}{2}$ ,  $B_t/t^\alpha$  tend p. s. vers  $\infty$ , ce que nous écrirons  $|B_t|^{-1} \leq Ct^{-\alpha}$ ,

$C$  dépendant de  $\alpha$  et  $\omega$ <sup>(1)</sup>. Si alors on plonge  $\mathbb{R}^N$  dans son compactifié d'Alexandroff  $S_N = \mathbb{R}^N \cup \{\infty\}$ , la sphère munie de sa structure différentielle usuelle, on peut prolonger  $B$  en  $\bar{B}$ , défini sur  $\bar{\mathbb{R}}_+ \times \Omega$  à valeurs dans  $S_N$ , p. s. continu, en posant  $\bar{B}(+\infty) = B_{(+\infty)-} = \infty$ . On connaît la signification de semi-martingale à valeurs dans une variété différentielle<sup>(2)</sup>. Alors :

**THÉORÈME (1.1).** — Sur  $\bar{\mathbb{R}}_+ \times \Omega$ ,  $\bar{B}$  est une semi-martingale pour  $((\mathcal{F}_t)_{t \in \bar{\mathbb{R}}_+}, \mathbb{P})$ , à valeurs dans  $S_N$ , pour  $N \geq 3$ .

*Remarque.* —  $\Omega$  est quelconque, et les tribus  $\mathcal{F}_t$  sont peut-être bien plus grandes que les tribus naturelles engendrées par  $B$ .

*Démonstration.* — Nous allons montrer que  $\bar{\mathbb{R}}_+ \times \Omega$  est réunion d'une suite d'ouverts optionnels dans chacun desquels elle est restriction d'une semi-martingale<sup>(3)</sup>. C'est vrai dans  $[0, n[ \times \Omega$ ,  $n \in \mathbb{N}$ , où  $\bar{B} = B^n$ , brownien arrêté au temps  $n$ . Il suffit de le montrer pour l'ouvert  $[1, +\infty] \times \Omega$ ; il suffit pour cela qu'elle soit une semi-martingale dans  $[1, +\infty] \times \Omega$ , car, en prolongeant celle-ci par une constante dans  $[0, 1[ \times \Omega$ , on en fait une semi-martingale sur  $\bar{\mathbb{R}}_+ \times \Omega$ . On va donc montrer que  $\bar{B}$ , restreinte à  $[1, +\infty[ \times \Omega$ , est restriction d'une semi-martingale sur  $[1, +\infty] \times \Omega$  (temps initial 1). Appelons  $\Phi$  l'inversion de  $S_N$ ,  $x \mapsto \frac{x}{|x|^2}$  avec  $\Phi(0) = \infty$ ,  $\Phi(\infty) = 0$ ; il suffit de montrer que  $\Phi(\bar{B})$ , sur  $[1, +\infty[ \times \Omega$ , est restriction d'une semi-martingale sur  $[1, +\infty] \times \Omega$ . Par Ito, sur  $[1, +\infty[ \times \Omega$  :

$$(1.2) \quad \Phi(B_t) - \Phi(B_1) = \sum_{k=1}^N \int_1^t \partial_k \Phi(B_s) dB_s^k + \frac{1}{2} \int_1^t \Delta \Phi(B_s) ds = M + V,$$

ou les  $B^k$  sont les coordonnées de  $B$  dans  $\mathbb{R}^N$ . Cette formule n'est vraie que dans  $([1, +\infty[ \times \Omega')$ ,  $\Omega' = \{\omega \in \Omega; \forall t, B_t(\omega) \neq 0\}$ , mais  $B \neq 0$ ,  $\mathbb{P}$  p. s.

<sup>(1)</sup> Voir DVORETZKY et ERDÖS, *Some problems on random walk in space. Proceedings of the Second Berkeley Symposium on Probabilities*, 1951, p. 353-367.

<sup>(2)</sup> Voir L. SCHWARTZ, *Semi-martingales sur des variétés, et martingales conformes sur des variétés analytiques complexes. Lecture Notes in Mathematics*, Springer-Verlag, Berlin-Heidelberg-New York, t. 780, 1980, définition (1.2), page 6. Dans le cas vectoriel, si les  $\mathcal{F}_t$  ne sont pas  $\mathbb{P}$ -complètes, on considérera comme semi-martingale une somme  $X = V + M$ ,  $\mathcal{F}$ -adaptée,  $V$  et  $M$  adaptées pour les tribus  $\mathbb{P}$ -complétées  $\mathcal{F}_t \vee \mathcal{N}_{\mathbb{P}}$ ,  $V \mathbb{P}$  p.s. à variation finie càdlàg,  $M \mathbb{P}$  p.s. càdlàg,  $(\mathcal{F}_t \vee \mathcal{N}_{\mathbb{P}})_{t \in \bar{\mathbb{R}}_+}$ -martingale locale.

<sup>(3)</sup> L. SCHWARTZ, *loc. cit.*, proposition (2.4), page 10.

En calculant les dérivées successives de  $\Phi$ , on voit aussitôt que

$$(1.3) \quad |\partial_k \Phi(x)| \leq \text{const. } |x|^{-2}, \quad |\Delta \Phi(x)| \leq \text{const. } |x|^{-3}.$$

Le processus  $V$  est à variation finie jusqu'au temps  $+\infty$ ; en effet sa variation est

$$(1.4) \quad \int_1^{+\infty} |dV_s| \leq \text{const.} \int_1^{+\infty} |B_s|^{-3} ds \leq C \text{const.} \int_1^{+\infty} s^{-3\alpha} ds,$$

$\alpha$  quelconque  $< \frac{1}{2}$  donc  $3\alpha < \frac{3}{2}$ , donc on peut le prendre  $> 1$ . Donc  $V$  est prolongeable en  $\bar{V}$ , processus à variation finie dans  $[1, +\infty] \times \Omega$ , en posant  $\bar{V}(\infty) = V(\infty_-)$ . Ensuite  $M$  est une martingale locale sur  $[1, +\infty] \times \Omega$ ; si  $\Phi^i$  est la  $i$ -ème composante de  $\Phi$ ,  $\Phi^i(x) = x^i/|x|^2$ ,

$$(1.5) \quad |[M^i, M^j]_t| = \left| \int_1^t \sum_{k=1}^N \partial_k \Phi^i(B_s) \partial_k \Phi^j(B_s) ds \right| \leq \text{const.} \int_1^t |B_s|^{-4} ds \leq \text{const. } C \int_1^{+\infty} s^{-4\alpha} ds.$$

Comme plus haut,  $4\alpha$  peut être pris  $> 1$ , donc  $[M, M]_t$  a p. s. une limite pour  $t \rightarrow +\infty$ , et par suite  $M$  aussi, et elle est prolongeable en  $\bar{M}$ , martingale locale dans  $[1, +\infty] \times \Omega$ , avec  $\bar{M}_\infty = M_\infty_-$ , ce qui achève la démonstration. ■

REMARQUE (1.6). — Le début, pour passer de  $[0, +\infty[$  à  $[1, +\infty[$ , est lourd, par souci de dire « tout », mais on se passera dans la suite de telles précisions !

(1.7) Si  $\Omega$  est l'espace des trajectoires continues  $C([0, +\infty[; \mathbb{R}^N)$ ,  $\bar{\Omega}$  l'espace  $C([0, +\infty[; S_N)$ , chacun muni de la plus petite famille de tribus croissante et continue à droite, qui rende le processus canonique  $\pi$ ,  $\bar{\pi}$ ,  $\pi_t(\omega) = \omega_t$ ,  $\bar{\pi}_t(\omega) = \omega_t$ , adapté, bien évidemment il existe une injection naturelle  $\bar{\Omega} \rightarrow \Omega$ , les tribus de  $\bar{\Omega}$  sont les images réciproques de celles de  $\Omega$ , et  $\bar{\pi}$  est l'image réciproque de  $\pi$ . Alors l'énoncé (1.1) équivaut à dire que  $\mathbb{P}$  provient d'une  $\bar{\mathbb{P}}$  sur  $\bar{\Omega}$ , unique, et qui fait de  $\bar{\pi}$  une semi-martingale.

(1.8) Ainsi, dans  $S_N$ ,  $N \geq 3$ ,  $B$  ressemble à un pont brownien sur  $[0, +\infty[$ ; c'est une semi-martingale, qui part de  $a \in S_N$  si  $\mu = \delta_{(a)}$ , au temps 0, et qui arrive en  $\infty \in S_N$  au temps  $+\infty$  (voir à ce sujet l'article suivant de M. Yor).

**§ 2. MÊME ÉNONCÉ,  
AVEC INVERSION DU SENS DU TEMPS**

Soit  $I$  un intervalle de  $\mathbb{R}$ , ouvert, semi-ouvert ou fermé,  $(I \times I)_+$  le sous-ensemble  $\{(s, t) \in I \times I ; s < t\}$  de  $I \times I$ ,  $q$  une fonction  $> 0$  borélienne sur  $(I \times I)_+ \times \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^N$ , telle que,  $\forall x \in \mathbb{R}^N$ ,  $\forall (s, t) \in (I \times I)_+$ ,  $\int_{\mathbb{R}^N} q(s, t; x, y) dy = 1$ .

On appelle relation de Chapman-Kolmogorov la relation suivante :

$$(2.1) \quad \forall x, y \in \mathbb{R}^N, \forall r, s, t, r < s < t : \\ \int_{\mathbb{R}^N} q(r, s; x, z) q(s, t; z, y) dz = q(r, t; x, y).$$

Si cette relation est vérifiée, on dira que  $q$  définit une probabilité de transition ; la répartition conditionnelle à l'instant  $t > s$ , lorsqu'on sait que l'on part de  $x$  à l'instant  $s$ , est  $q(s, t; x, y) dy$ . Alors  $q$  permet de construire un processus ; il est indexé par les temps de  $I$  ; sa loi pour les temps  $\geq \sigma \in I$ ,  $\mathbb{P}_\sigma^\mu$ , correspondant à une répartition initiale  $\mu$  sur  $\mathbb{R}^N$  à l'instant initial  $\sigma$ , est donnée par ses projections marginales ; soient  $\sigma < t_1 < t_2 < \dots < t_n$  :

$$(2.2) \quad (\pi_0, \pi_{t_1}, \pi_{t_2}, \dots, \pi_{t_n})(\mathbb{P}_\sigma^\mu) = \\ = \mu(dx_\sigma) q(\sigma, t_1; x_\sigma, x_{t_1}) dx_{t_1} q(t_1, t_2; x_{t_1}, x_{t_2}) dx_{t_2} \dots q(t_{n-1}, t_n; x_{t_{n-1}}, x_{t_n}) dx_{t_n}.$$

La probabilité  $\mathbb{P}_\sigma^\mu$ , d'après un théorème classique de Kolmogorov, est portée par l'espace  $(\mathbb{R}^N)^I$  de toutes les trajectoires, muni de la plus petite tribu rendant toutes ses projections  $\pi_t$  mesurables, et  $\pi$  est le processus canonique,  $\pi_t(\omega) = \omega_t$ . Il ne possède, s'il n'y a pas d'hypothèses supplémentaires sur  $q$ , aucune autre propriété intéressante que la propriété simple de Markov. Le processus est dit markovien continu si les lois marginales définissent une probabilité  $\mathbb{P}_\sigma^\mu$  sur l'espace des trajectoires continues, quels que soient  $\sigma$  et  $\mu$ , et si le processus ainsi formé est fortement markovien. Le plus connu de ces processus markoviens continus est le mouvement brownien,  $I = \mathbb{R}$ , et, pour  $s < t$  :

$$(2.3) \quad \left\{ \begin{array}{l} q(s, t; x, y) = \gamma_{t-s}(y - x), \\ \gamma_\theta(\xi) = \text{gaussienne de paramètre } \sqrt{\theta} \text{ sur } \mathbb{R}^N (\theta > 0) \\ \quad = \left( \frac{1}{\sqrt{2\pi\theta}} \right)^N \exp(-|\xi|^2/2\theta). \end{array} \right.$$

A partir d'une fonction  $q$ , on peut en former une autre  $\check{q}$  sur

$$((-I) \times (-I))_- \times \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^N, \quad ((-I) \times (-I))_- = \{(t, s) \in (-I) \times (-I), t > s\},$$

en posant  $\check{q}(t, s) = q(-t, -s)$ . Il définit cette fois un processus « à temps descendant » ;  $\check{q}(t, s; x, y)dy$  est la loi conditionnelle de  $\pi_s$  lorsqu'on sait que  $\pi_t = x$  ; les lois marginales du processus pour une distribution  $v$  à l'instant initial  $\tau \in -I$ , sont données, pour  $t_1 < t_2 \dots < t_n < \tau$ , par :

$$(2.4) \quad (\pi_{t_1}, \pi_{t_2}, \dots, \pi_{t_n}, \pi_\tau)(\check{\mathbb{P}}_v^\tau) = \\ v(dx_\tau) \check{q}(\tau, t_n; x_\tau, x_{t_n}) dx_{t_n} \check{q}(t_n, t_{n-1}; x_{t_n}, x_{t_{n-1}}) dx_{t_{n-1}} \dots \check{q}(t_2, t_1; x_{t_2}, x_{t_1}) dx_{t_1}.$$

Par changement de signe du temps, on passe du processus à temps montant au processus à temps descendant, de sorte que, si  $q$  définit un processus markovien continu à temps montant, il en est de même de  $\check{q}$  à temps descendant ; c'est le cas pour  $q$  définie par (2.3), avec en plus  $\check{q}(t, s) = q(s, t) = \gamma(t - s)$  ; on obtiendra un mouvement brownien à temps descendant, pour lequel on se fixera une distribution initiale  $v$  à l'instant  $\tau$ , et  $\check{\mathbb{P}}_v^\tau$  sera portée par l'espace des trajectoires continues sur  $]-\infty, \tau]$ .

(2.4.1) On va maintenant définir les ponts browniens. Soit  $b \in \mathbb{R}^N$ ,  $\tau \in I$ . Soit  $q$  définissant un markovien continu à temps montant. Prenons une nouvelle probabilité de transition  $p$ , sur  $(I' \times I')_+ \times \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^N$ ,  $I' = I \cap [-\infty, \tau]$ , définie, pour  $s < t < \tau$ , par :

$$(2.4.2) \quad p(s, t; x, y) = q(s, t; x, y)q(t, \tau; y, b)/q(s, \tau; x, b);$$

$p$  est le conditionnement de  $q$  par  $\pi_\tau = b$ . Les  $p$  forment un nouveau système de probabilités de transition, vérifiant Chapman-Kolmogorov ; pour un départ de distribution  $\mu$  au temps  $\sigma$ ,  $\sigma < \tau$ , on a une probabilité  $\mathbb{P}_{\sigma, \tau}^{\mu, b}$  sur l'espace des trajectoires, définie par ses lois marginales, pour  $\sigma < t_1 < t_2 < \dots < t_n < \tau$  :

$$(2.5) \quad (\pi_\sigma, \pi_{t_1}, \pi_{t_2}, \dots, \pi_{t_n})(\mathbb{P}_{\sigma, \tau}^{\mu, b}) = \\ \mu(dx_\sigma) q(\sigma, t_1; x_\sigma, x_{t_1}) dx_{t_1} q(t_1, t_2; x_{t_1}, x_{t_2}) dx_{t_2} \dots \\ \dots q(t_{n-1}, t_n; x_{t_{n-1}}, x_{t_n}) dx_{t_n} q(t_n, \tau; x_{t_n}, b)/q(\sigma, \tau; x_\sigma, b)$$

On démontre alors aisément que, si les  $q$  définissent un markovien continu, les  $p$  en définissent un aussi dans  $I \cap [-\infty, \tau]$ , peut être pas dans  $I \cap [-\infty, \tau]$  ; paradoxalement, bien qu'on ait conditionné par  $\pi_\tau = b$ , on ne peut pas affirmer que,  $\mathbb{P}_{\sigma, \tau}^{\mu, b}$  — p. s.,  $\pi_t$  ait la limite  $b$  lorsque  $t < \tau$  tend vers  $\tau$ , ni même qu'il ait une limite ! Le « conditionnement par  $\pi_\tau = b$  » est donc

assez platonique. Cependant, dans le cas brownien de (2.3), on montrera plus loin que  $\mathbb{P}_{\sigma,\tau}^{\mu,b}$  est bien définie sur  $C([\sigma, \tau]; \mathbb{R}^N)$ , avec  $\pi_\tau = b$ .

Il existe bien entendu des propriétés analogues relativement à  $\check{q}$ , mais en conditionnant par  $\pi_\sigma = a \in \mathbb{R}^N$ , pour l'intervalle de temps  $(-\mathbf{I}) \cap ]\sigma, +\infty]$  ou  $(-\mathbf{I}) \cap ]\sigma, +\infty]$ . Les lois marginales de  $\check{\mathbb{P}}_{\tau,\sigma}^{v,a}$  sont :

$$(2.6) \quad (\pi_{t_1}, \pi_{t_2}, \dots, \pi_{t_n}, \pi_\tau)(\check{\mathbb{P}}_{\tau,\sigma}^{v,a})$$

$$v(dx_\tau) \check{q}(\tau, t_n; x_\tau, x_{t_n}) dx_{t_n} \check{q}(t_n, t_{n-1}; x_{t_n}, x_{t_{n-1}}) dx_{t_{n-1}} \dots$$

$$\dots \check{q}(t_2, t_1; x_{t_2}, x_{t_1}) dx_{t_1} \check{q}(t_1, \sigma; x_{t_1}, a) / \check{q}(\tau, \sigma; x_\tau, a).$$

Dans les cas où, comme pour le mouvement brownien,  $\mathbb{P}_{\sigma,\tau}^{\mu,b}$  est définie sur  $C([\sigma, \tau]; \mathbb{R}^N)$ , on peut dans (2.5), calculer aussi la projection  $(\pi_\sigma, \pi_{t_1}, \dots, \pi_{t_n}, \pi_\tau)$ , en rajoutant à la fin un facteur  $\delta_{(b)}(dx_\tau)$ , et de même, dans (2.6), en rajoutant à la fin un facteur  $\delta_{(a)}(dx_\sigma)$ .

Ce qu'on appelle plus spécialement le pont brownien, en  $a$  au temps  $\sigma$  et en  $b$  au temps  $\tau$ , est le processus canonique  $\pi, \pi_t(\omega) = \omega_t$ , sur  $\Omega = C([\sigma, \tau]; \mathbb{R}^N)$ , pour la probabilité  $\mathbb{P}_{\sigma,\tau}^{\mu,b}$  où  $\mu = \delta_{(a)}$ , ce qu'on notera  $\mathbb{P}_{\sigma,\tau}^{a,b}$ . Mais il existe aussi un pont brownien à temps descendant, relatif à  $\check{\mathbb{P}}_{\tau,\sigma}^{b,a}$ . Et c'est le même en ce sens que  $\Omega = C([\sigma, \tau]; \mathbb{R}^N)$  est le même et que  $\mathbb{P}_{\sigma,\tau}^{a,b} = \check{\mathbb{P}}_{\tau,\sigma}^{b,a}$  à cause de la parité de  $\gamma_\theta, \gamma_\theta(-\xi) = \gamma_\theta(\xi)$  :

$$(2.7) \quad (\pi_\sigma, \pi_{t_1}, \pi_{t_2}, \dots, \pi_{t_n}, \pi_\tau)(\check{\mathbb{P}}_{\tau,\sigma}^{b,a}) =$$

$$= \delta_{(b)}(dx_\tau) \gamma_{\tau-t_n}(x_{t_n} - x_\tau) dx_{t_n} \gamma_{t_n-t_{n-1}}(x_{t_{n-1}} - x_{t_n}) dx_{t_{n-1}}$$

$$\dots \gamma_{t_2-t_1}(x_{t_1} - x_{t_2}) dx_{t_1} \gamma_{t_1-\sigma}(a - x_{t_1}) \delta_{(a)}(dx_\sigma) / \gamma_{\tau-\sigma}(a - b)$$

$$= \delta_{(a)}(dx_\sigma) \gamma_{t_1-\sigma}(x_{t_1} - a) dx_{t_1} \gamma_{t_2-t_1}(x_{t_2} - x_{t_1}) dx_{t_2} \dots$$

$$\dots \gamma_{t_n-t_{n-1}}(x_{t_n} - x_{t_{n-1}}) dx_{t_n} \gamma_{\tau-t_n}(x_\tau - x_{t_n}) \delta_{(b)}(dx_\tau) / \gamma_{\tau-\sigma}(b - a)$$

$$= (\pi_\sigma, \pi_{t_1}, \pi_{t_2}, \dots, \pi_{t_n}, \pi_\tau)(\mathbb{P}_{\sigma,\tau}^{a,b}).$$

Regardons maintenant les propriétés de semi-martingales dans le cas brownien (2.3). Pour la probabilité  $\mathbb{P}_\sigma^\mu$  sur  $C([\sigma, +\infty[; \mathbb{R}^N)$ , le processus canonique  $\pi$ , brownien, est une martingale pour ses tribus naturelles. Le processus  $\pi$  est encore une semi-martingale sur  $C([\sigma, \tau[; \mathbb{R}^N)$  pour  $\mathbb{P}_{\sigma,\tau}^{\mu,b}$ .

En effet, en projection sur  $C([\sigma, \tau']; \mathbb{R}^N)$ ,  $\tau' < \tau$ ,  $\mathbb{P}_\sigma^a$  et  $\mathbb{P}_{\sigma,\tau}^{a,b}$  sont des mesures équivalentes ; ceci est vrai en général, pas seulement dans le cas gaussien [Appelons  $\Omega'$  l'ensemble  $C([\sigma, \tau']; \mathbb{R}^N)$ . Alors les lois marginales (2.2), (2.5), montrent que  $\mathbb{P}_{\sigma,\tau}^{\prime a,b}(d\omega') = \frac{\mathbb{P}_\sigma^{\prime a}(d\omega')q(\tau', \tau; \omega'(\tau'), b)}{q(\sigma, \tau; a, b)}$ , ce qui montre bien l'équivalence] ; alors Girsanov montre bien que  $\pi'$  est une  $(\mathbb{P}_{\sigma,\tau}^{a,b})$ -semi-martingale sur  $[\sigma, \tau'] \times C([\sigma, \tau']; \mathbb{R}^N)$ , donc aussi  $\pi$  sur  $[\sigma, \tau[ \times C([\sigma, \tau[; \mathbb{R}^N)$ .

Ensuite les lois marginales montrent aussitôt que  $\mathbb{P}_{\sigma,\tau}^{\mu,b} = \int_{\mathbb{R}^N} \mathbb{P}_{\sigma,\tau}^{a,b} \mu(da)$ ,

donc  $\pi$  est une  $(\mathbb{P}_{\sigma,\tau}^{\mu,b})$ -semi-martingale sur  $[\sigma, \tau[ \times C([\sigma, \tau[ \times \mathbb{R}^N)$  par le théorème de convexité de Jacod<sup>(4)</sup>. Mais considérons  $\mathbb{P}_{\sigma,\tau}^{\mu,b}$  sur  $\Omega = C([\sigma, \tau[; \mathbb{R}^N)$  et les tribus naturelles ; nous allons voir que  $\pi_t$  a non seulement une limite p.s. lorsque  $t < \tau$  tend vers  $\tau$ , mais que  $\pi$  se prolonge en une semi-martingale  $\bar{\pi}$  sur  $[\sigma, \tau] \times \bar{\Omega} = C([\sigma, \tau]; \mathbb{R}^N)$  et les tribus naturelles, et la probabilité  $\mathbb{P}_{\sigma,\tau}^{\mu,b}$  sur  $\bar{\Omega} = C([\sigma, \tau]; \mathbb{R}^N)$ .

On doit, pour le voir, utiliser des propriétés très particulières dues à la loi gaussienne. On montre<sup>(5)</sup> que, pour les tribus montantes, et  $\mathbb{P}_{\sigma,\tau}^{a,b}$  sur  $\Omega = C([\sigma, \tau[; \mathbb{R}^N)$ , si on pose  $M_t = \frac{b - \pi_t}{\tau - t}$ ,  $M$  est une martingale dont le crochet, à valeurs dans  $\mathbb{R}^N \odot \mathbb{R}^N$ , est donné par

$$(2.8) \quad [M, M]_t - [M, M]_\sigma = \frac{\theta}{\tau - t} - \frac{\theta}{\tau - \sigma}, \quad \theta = \sum_{k=1}^N e_k \odot e_k,$$

où  $(e_k)_{k=1,2,\dots,N}$  est la base de  $\mathbb{R}^N$ . Ito donne

$$(2.9) \quad b - \pi_t = (\tau - t) \cdot M + M \cdot (\tau - t),$$

en notant  $(\tau - t)$  le processus  $t \mapsto \tau - t$ . Alors  $M \cdot (\tau - t)$  est un processus  $V$  à variation localement finie dans  $[\sigma, \tau[$ , avec :

$$(2.10) \quad \int_\sigma^t |dV_s| = \int_\sigma^t |M_s| ds,$$

$$(2.10.1) \quad \mathbb{E}_{\sigma,\tau}^{a,b} \int_\sigma^t |dV_s| \leq \mathbb{E}_{\sigma,\tau}^{a,b} \int_\sigma^t M_s^* ds = \int_\sigma^t (\mathbb{E}_{\sigma,\tau}^{a,b} M_s^*) ds \\ \leq \text{const.} \int_\sigma^t (\mathbb{E}_{\sigma,\tau}^{a,b} [M, M]_s^{1/2}) ds \leq \text{const.} \int_\sigma^t \left( \frac{1}{\tau - s} \right)^{1/2} ds \leq \text{const.}$$

<sup>(4)</sup> Ce théorème, vrai pour une intégrale de probabilités, est un peu partout démontré dans le cas d'une combinaison convexe *dénombrable* (voir par exemple J. JACOD : Calcul stochastique et problèmes de martingales, *Lecture Notes in Mathematics*, Springer Verlag, Berlin-Heidelberg-New York, t. 714, 1979, chap. VII, 2, § e, Théorème (7.42), page 235), mais, semble-t-il, ne figure nulle part avec une intégrale ! Cela tient à ce que Jacod a démontré le théorème avant le critère de Dellacherie pour les semi-martingales ; depuis que ce critère est connu, le théorème de Jacod est devenu trivial, même pour une intégrale de mesures.

<sup>(5)</sup> Voir T. JEULIN et M. YOR, Inégalité de Hardy, semi-martingales, et faux-amis. Séminaire de Probabilités XIII, 1977-1978, *Lecture Notes in Mathematics*, Springer-Verlag, Berlin-Heidelberg-New York, t. 721, 1979, p. 332-359.

quand  $t \rightarrow \tau$ , où  $\|\cdot\|$  est la norme dans  $\mathbb{R}^N \odot \mathbb{R}^N$ , et  $M_s^* = \sup_{\sigma \leq s' \leq s} |M_{s'}|$ .

Donc  $\int_{\sigma}^{\tau} |dV_s| < +\infty$  p.s., et  $V$  se prolonge en  $\bar{V}$ , à variation finie sur  $[\sigma, \tau] \times \Omega$ ,  $\bar{V}_{\tau} = V_{\tau-}$ .

Ensuite  $(\tau - t)M$  est une martingale  $N$  dans  $[\sigma, \tau] \times \Omega$ , et pour  $t < \tau$ :

$$(2.11) \quad [N, N]_t = \int_{\sigma}^t (\tau - s)^2 d[M, M]_s \\ \leq \text{const.} \int_{\sigma}^t (\tau - s)^2 d\left(\frac{1}{\tau - s}\right) = \text{const.} \int_0^t (\tau - s)^2 \frac{ds}{(\tau - s)^2} \leq \text{const.}$$

quand  $t \rightarrow \tau$ .

Donc  $[N, N]$  est borné quand  $t < \tau$  tend vers  $\tau$ , et par suite  $N$  se prolonge en une martingale  $\bar{N}$  sur  $[\sigma, \tau] \times \Omega$ ,  $\bar{N}_{\tau} = N_{\tau-}$ .

Donc  $\pi$  se prolonge en une semi-martingale  $\bar{\pi}$  sur  $[\sigma, \tau] \times \Omega$ , donc aussi sur  $[\sigma, \tau] \times \bar{\Omega}$ ,  $\bar{\Omega} = C([\sigma, \tau]; \mathbb{R}^N)$  muni de ses tribus naturelles. Par le théorème de convexité de Jacod, c'est aussi vrai pour  $\mathbb{P}_{\sigma, \tau}^{\mu, b} = \int_{\mathbb{R}^N} \mathbb{P}_{\sigma, \tau}^{a, b} \mu(da)$ .

Le même résultat est valable à temps descendant, avec  $\check{\mathbb{P}}_{\tau, \sigma}^{v, a}$  sur  $C([\sigma, \tau]; \mathbb{R}^N)$ ; ce qui remplace  $M$  est  $\check{M}$ ,  $\check{M}_t = \frac{\pi_t - a}{t - \sigma}$ .

Il est donc légitime de chercher un énoncé analogue au théorème (1.1), mais à temps descendant :

**THÉORÈME (2.12).** — Sur  $\Omega = C([0, +\infty[; \mathbb{R}^N)$ , ou  $C([0, +\infty[; S_N)$  pour  $N \geq 3$ , le processus canonique  $\pi$ , pour la plus petite famille de tribus décroissante et continue à gauche rendant  $\pi$  adapté, est une semi-martingale pour la probabilité du mouvement brownien montant  $\mathbb{P}^{\mu} = \mathbb{P}_0^{\mu}$ , de distribution  $\mu$  au temps 0.

*Démonstration.* — Reprenons l'intervalle  $[0, \tau]$ ,  $0 < \tau < +\infty$ , c'est-à-dire  $[\sigma, \tau]$  avec  $\sigma = 0$ . Nous venons de voir que  $\check{M}_t = \frac{\pi_t - a}{t - \sigma}$ , est une martingale sur  $C([0, \tau]; \mathbb{R}^N)$ , pour la plus petite famille de tribus décroissante et continue à gauche rendant  $\pi$  adapté et la probabilité  $\check{\mathbb{P}}_{\tau, 0}^{b, a}$ . Soit alors  $0 < s < t < t_1 < t_2 < \dots < t_n$ ,  $f$  une fonction borélienne bornée sur  $\mathbb{R}^{N+1}$ ; en prenant  $\tau = t_n$ , on aura :

$$\check{\mathbb{E}}_{t_n, 0}^{b, a} \check{M}_s f(\pi_t, \pi_{t_1}, \pi_{t_2}, \dots, \pi_{t_n}) = \check{\mathbb{E}}_{t_n, 0}^{b, a} \check{M}_t f(\pi_t, \pi_{t_1}, \pi_{t_2}, \dots, \pi_{t_n}).$$

Mais  $\pi_s$ ,  $\pi_t$ , donc  $\check{M}_s$ ,  $\check{M}_t$ , sont intégrables pour  $\mathbb{P}^a = \mathbb{P}_0^a$ , et  $\mathbb{P}^a$  est une intégrale des  $\mathbb{P}_{0,\tau}^{a,b} = \check{\mathbb{P}}_{\tau,0}^{b,a}$ , comme le montrent (2.2) et (2.5) :

$$(2.14) \quad \mathbb{P}^a = \int_{\mathbb{R}^N} \check{\mathbb{P}}_{\tau,0}^{b,a} \gamma_t(b-a) db.$$

Donc on a aussi :

$$(2.14.1) \quad \mathbb{E}^a \check{M}_s f(\pi_t, \pi_{t_1}, \pi_{t_2}, \dots, \pi_{t_n}) = \mathbb{E}^a \check{M}_t f(\pi_t, \pi_{t_1}, \pi_{t_2}, \dots, \pi_{t_n}).$$

Par un théorème évident de classes monotones, cela montre que, si  $\Omega = C([0, +\infty[; \mathbb{R}^N)$ ,  $C([0, +\infty[; S_N)$  pour  $N \geq 3$ , muni de la famille de tribus, décroissante et continue à gauche, la plus petite qui rende  $\pi$  adapté, et de la probabilité  $\mathbb{P}^a$  du brownien à temps croissant partant de  $a$  à l'instant 0,  $\check{M}$  est une martingale sur  $[0, +\infty[ \times \Omega$ . On ne peut pas parler de son crochet, puisqu'il n'y a pas le temps initial  $+\infty$ . Mais séparons en  $[0, \rho]$  et  $[\rho, +\infty[$ ,  $0 < \rho < +\infty$ . Sur  $[0, \rho] \times \Omega$ ,  $[\check{M}, \check{M}]_t - [\check{M}, \check{M}]_\rho = \frac{\theta}{t} - \frac{\theta}{\rho}$ , pour  $\check{\mathbb{P}}_{\rho,0}^{b,a}$  quel que soit  $a$ , donc aussi pour leur intégrale  $\mathbb{P}^a$  (formule (2.14) pour  $\tau = \rho$ ). Prenons des intégrales stochastiques à temps descendant à partir de  $\rho$ <sup>(6)</sup>,  $\pi - a = (t) \cdot \check{M} + \check{M} \cdot (t)$ ; exactement comme on l'a fait à temps montant après (2.9), on voit que  $\pi$  est, pour  $\mathbb{P}^a$ , une semi-martingale à temps descendant sur  $[0, \rho] \times \Omega$ , donc aussi sur  $[0, +\infty[ \times \Omega$ ,  $N$  quelconque. Dans  $[\rho, +\infty[$ ,  $N \geq 3$ , c'est moins simple, parce qu'il manque le temps initial  $+\infty$ . Soit  $\rho < t < +\infty$ . Nous prendrons, dans  $[\rho, t]$ , des intégrales descendantes, à partir du temps initial  $t$ . Alors :

$$(2.14.2) \quad \pi_t - a = t \check{M}_t, \quad \pi_\rho - \pi_t = \int_t^\rho s d\check{M}_s + \int_t^\rho \check{M}_s ds.$$

Comme pour la démonstration de (1.1), nous ferons l'inversion  $\Phi$ ,  $\Phi(x) = x/|x|^2$ , qui ramènera  $S_N \setminus \{0\}$  à  $\mathbb{R}^N$ , et nous rappelons que  $|\partial_k \Phi(x)| \leq \text{const. } |x|^{-2}$ ,  $|\partial_i \partial_j \Phi(x)| \leq \text{const. } |x|^{-3}$ . Alors, pour  $1 \leq t \leq +\infty$  :

$$(2.15) \quad \Phi(\pi_\rho) - \Phi(\pi_t) = \int_t^\rho \sum_{k=1}^N \partial_k \Phi(\pi_s) d\pi_s^k + \frac{1}{2} \int_t^\rho \Delta \Phi(\pi_s) (-ds)$$

(parce que  $d(\pi, \pi)_s = -\theta ds$ ,  $\geq 0$  pour  $ds \leq 0$ ; à temps descendant comme à temps montant,  $[\pi, \pi]$  est la même, au signe près!). La probabilité est ici toujours  $\mathbb{P}^a$ , et on sait déjà que  $\pi$  est, pour les temps descend-

(6) Attention : pour  $a < b$ ,  $\int_a^b$  à temps montant et  $\int_b^a$  à temps descendant ne sont pas opposés, à cause du crochet.

dants, une semi-martingale. La partie à variation finie de  $\Phi(\pi_\rho) - \Phi(\pi)$  est définie, si les  $\check{M}^k$  sont les coordonnées de  $\check{M}$ , par :

$$(2.16) \quad W_t = \int_t^\rho \left( \sum_{k=1}^N \partial_k \Phi(\pi_s) \check{M}_s^k - \frac{1}{2} \Delta \Phi(\pi_s) \right) ds$$

et la partie martingale est définie par :

$$(2.17) \quad L_t = \int_t^\rho \sum_{k=1}^N \partial_k \Phi(\pi_s) s d\check{M}_s^k.$$

On a, pour  $s \rightarrow +\infty$ , les majorations :

$$(2.18) \quad |dW_s| \leq \text{const.} (|\pi_s|^{-2} |\check{M}_s| + |\pi_s|^{-3}) |ds| \\ \leq \text{const.} (|\pi_s|^{-1} s^{-1} + |\pi_s|^{-3}) ds \leq \text{const.} C(s^{-\alpha-1} + s^{-3\alpha}) ds$$

donc  $\int_{+\infty}^\rho |dW_s| \leq \text{const.} C$ , et  $W$  se prolonge en  $\bar{W}$  à variation finie dans  $[\rho, +\infty] \times \Omega$ . Ensuite, si les  $L^k$  sont les coordonnées de  $L$  :

$$(2.19) \quad |d[L^i, L^j]_s| = \left| \sum_{k=1}^N \partial_k \Phi^i(\pi_s) \partial_k \Phi^j(\pi_s) s^2 d[M^k, M^k]_s \right| \\ \leq \text{const.} |\pi_s|^{-2} |\pi_s|^{-2} s^2 d\left(\frac{1}{s}\right) \leq \text{const.} C s^{-4\alpha} |ds|.$$

de sorte que  $[L, L] - [L, L]_t$  est  $\leq \text{const.} C$ , et  $L$  se prolonge en  $\bar{L}$  martingale locale continue sur  $[\rho, +\infty] \times \Omega$ ,  $\bar{L}_{(+\infty)} = L_{(+\infty)-}$ <sup>(7)</sup>, ce qui démontre bien que  $\pi$  est, sur  $[0, +\infty] \times \Omega$ , pour  $\mathbb{P}^a$ , une semi-martingale à temps descendant, à valeurs dans  $S_N$ . Il en est de même, par le théorème de convexité de Jacod, pour la probabilité  $\mathbb{P}^\mu = \int_{\mathbb{R}^N} \mathbb{P}^a \mu(da)$ .

*Remarque.* — Nous avons « contrarié » le sens du temps en prenant des tribus descendantes pour la probabilité  $\mathbb{P}^\mu$  du brownien à temps montant. On peut naturellement faire la même chose, mais c'est plus simple, sur  $[\sigma, \tau]$ , pour le pont brownien. En effet, pour  $\mathbb{P}_{\sigma, \tau}^{a, b}$ ,  $\pi$  est une semi-martingale à temps

<sup>(7)</sup> M. SHARPE, *Local times and singularities of continuous local martingales*, Séminaire de Probabilités XIV, 1978-1979, *Lecture Notes in Mathematics*, Springer-Verlag, Berlin-Heidelberg-New York, t. 784, 1980, prop. 39, page 95.

descendant puisque  $\mathbb{P}_{\sigma,\tau}^{a,b} = \check{\mathbb{P}}_{\tau,\sigma}^{b,a}$ ; c'est vrai aussi pour  $\mathbb{P}_{\sigma,\tau}^{\mu,b} = \int_{\mathbb{R}^N} \mathbb{P}_{\sigma,\tau}^{a,b} \mu(da)$ .

De même, pour  $\check{\mathbb{P}}_{\tau,\sigma}^{v,a}$ ,  $\pi$  est une semi-martingale à temps montant.

### § 3. QUELQUES COMPLÉMENTS

Avec les méthodes ci-dessus, on peut démontrer bien d'autres résultats, dont je me contenterai d'énoncer quelques-uns.

**PROPOSITION (3.1).** — Plaçons-nous dans les conditions du § 1. Pour  $\alpha > \frac{1}{2}$ ,  $t \mapsto B_t/t^\alpha$  (qui tend p. s. vers 0 pour  $t \rightarrow +\infty$ ),  $N \in \mathbb{N}$  quelconque, se prolonge en une semi-martingale sur  $\bar{\mathbb{R}}_+ \times \Omega$ . Pour  $\alpha$  réel  $< \frac{1}{2}$ ,  $t \mapsto B_t/t^\alpha$  (qui tend p. s. vers  $\infty$  pour  $t \rightarrow +\infty$ ) se prolonge en une semi-martingale à valeurs dans  $S_N$  sur  $\bar{\mathbb{R}}_+ \times \Omega$ , pour  $N \geq 3$ .

**PROPOSITION (3.2).** — Soient  $-\infty < \sigma < \tau < +\infty$ , et les tribus croissantes naturelles sur  $C([\sigma, \tau]; \mathbb{R}^N)$ ; si  $\pi$  est le processus canonique, alors  $t \mapsto \frac{b - \pi_t}{(\tau - t)^\alpha}$ ,  $\alpha < \frac{1}{2}$ , est une semi-martingale pour  $\mathbb{P}_{\sigma,\tau}^{\mu,b}$  (pont brownien), avec valeur  $b$  en  $\tau$ .

Pour  $\alpha > \frac{1}{2}$  et  $N \geq 3$ ,  $t \mapsto \frac{b - \pi_t}{(\tau - t)^\alpha}$  est une semi-martingale pour  $\mathbb{P}_{\sigma,\tau}^{\mu,b}$ , à valeurs dans  $S_N$ , avec valeur  $\infty$  en  $\tau$ .

*Démonstration.* — Par le changement de temps  $u = \frac{1}{\tau - t}$ , on rend la martingale  $M$  brownienne dans  $\left[ \frac{1}{\tau - \sigma}, +\infty \right[$ , et (3.2) se déduit immédiatement de (3.1).

(Manuscrit reçu le 10 Avril 1984)