

ANNALES DE L'I. H. P., SECTION B

ÉTIENNE CARNAL

Indépendance conditionnelle permutable

Annales de l'I. H. P., section B, tome 16, n° 1 (1980), p. 39-47

http://www.numdam.org/item?id=AIHPB_1980__16_1_39_0

© Gauthier-Villars, 1980, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Annales de l'I. H. P., section B » (<http://www.elsevier.com/locate/anihpb>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

Indépendance conditionnelle permutable

par

Étienne CARNAL

Département de Mathématiques,
École Polytechnique Fédérale Lausanne, avenue de Cour 61, 1007 Lausanne, Suisse.

RÉSUMÉ. — Si une suite de variables aléatoires $\{X_1, X_2, \dots\}$ est telle que pour chaque sous-ensemble fini d'indices $\{i_1, i_2, \dots, i_n\}$, la suite $\{X_{i_1}, X_{i_2}, \dots, X_{i_n}\}$ forme une chaîne de Markov, alors elle est indépendante conditionnellement à la tribu $\bigcap_i \sigma\{X_i\}$.

SUMMARY. — If a sequence $\{X_1, X_2, \dots\}$ of random variables has the property that for each finite set of indices $\{i_1, i_2, \dots, i_n\}$, the sequence $\{X_{i_1}, X_{i_2}, \dots, X_{i_n}\}$ is a Markov chain, then it is conditionally independent given the σ -algebra $\bigcap_i \sigma\{X_i\}$.

1. INTRODUCTION

Nous étudions essentiellement le problème suivant : étant données trois variables aléatoires X, Y, Z sur un espace de probabilité (Ω, Σ, P) , à valeurs dans les espaces mesurables respectifs $(E_i, \mathcal{E}_i)$, $i = 1, 2, 3$, quelles restrictions impose le système d'indépendances conditionnelles :

$$(I) \quad \begin{cases} X \text{ indép. de } Y | Z \\ Y \text{ indép. de } Z | X \\ Z \text{ indép. de } X | Y ? \end{cases}$$

Dans le cas dénombrable, nous noterons

$$p(i, j, k) = P \{ X = i, Y = j, Z = k \},$$

$(i, j, k) \in E_1 \times E_2 \times E_3$ dénombrable. Si nous supposons $p(i, j, k) > 0 \forall (i, j, k)$, les relations (I) nous permettent d'écrire sans autres

$$p(i | j, k) = p(i | j', k) = p(i | j', k')$$

$\forall i \in E_1, j, j' \in E_2, k, k' \in E_3$, si nous mettons $p(i | j, k)$ pour

$$P \{ X = i | Y = j, Z = k \}.$$

Ceci nous permet facilement de conclure à l'indépendance de X, Y, Z .

Qu'en est-il si on lève la condition de positivité dans le cas dénombrable? Y a-t-il une réponse dans le cas général? Peut-on donner une hypothèse de positivité dans le cas général qui impliquerait l'indépendance?

Si nous supposons X, Y, Z de distribution conjointe normale, centrées, de variance 1, avec $E(XY) = a, E(YZ) = b, E(XZ) = c$, le système (I) se ramène aux équations $c = ab, a = bc, b = ac$ qui imposent soit la dépendance stricte, soit l'indépendance. La réponse générale comporte ces deux alternatives comme ses deux extrêmes.

DÉFINITION. — Soit $\{X_1, X_2, \dots\}$, une suite finie ou infinie de variables aléatoires définies sur un espace de probabilité (Ω, Σ, P) à valeurs dans des espaces mesurables $(E_i, \mathcal{E}_i)$ quelconques et $\mathcal{A}_i = \sigma \{X_i\}$, $i = 1, 2, \dots$ les sous-tribus associées. On dira que la suite des X_i a la *propriété d'indépendance conditionnelle permutable* si pour tout i et pour tous sous-ensembles finis d'indices I_1 et I_2 , on a l'indépendance conditionnelle de $\sigma \{X_k, k \in I_1\}$ et $\sigma \{X_k, k \in I_2\}$ par rapport à $\mathcal{A}_i$.

Remarque. — Il revient au même de dire que pour tout sous-ensemble fini d'indices $\{i_1, i_2, \dots, i_n\}$, la suite $\{X_{i_1}, X_{i_2}, \dots, X_{i_n}\}$ forme une chaîne de Markov.

Le résultat principal s'énonce de la façon suivante :

THÉORÈME 1. — Si $\{X_i\}_{i \in I}$ est une suite finie ou dénombrable de variables aléatoires, il y a équivalence entre les deux affirmations :

- i) les X_i ont la propriété d'indépendance conditionnelle permutable,
- ii) les X_i sont indépendantes conditionnellement à la tribu $\bigcap_{i \in I} \mathcal{A}_i$.

Nous donnerons la démonstration de ce théorème au paragraphe 5, après avoir étudié le cas particulier du système (I) aux paragraphes 3 et 4 ;

au n° 3 nous traitons le cas de variables à valeurs dénombrables à part, pour lequel nous préciserons la nature de la tribu de conditionnement. Nous commençons par rappeler certaines règles sur l'indépendance conditionnelle, particulièrement utiles dans ce contexte :

2. RÈGLES SUR L'INDÉPENDANCE CONDITIONNELLE

Dans ce qui suit, $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$, $\mathcal{F}$, ... sont des sous-tribus d'une σ -algèbre Σ et nous écrirons $\mathcal{A}$ indép. $\mathcal{B} | \mathcal{F}$ pour exprimer l'indépendance conditionnelle de $\mathcal{A}$ et $\mathcal{B}$ par rapport à $\mathcal{F}$.

Le lemme suivant est issu de la liste de règles sur l'indépendance conditionnelle donnée par Hunt [1] :

LEMME 1. —

- i) $\mathcal{A}$ indép. de $\mathcal{B} | \mathcal{F}$
 $\Rightarrow \mathcal{A} \vee \mathcal{F}$ indép. de $\mathcal{B} \vee \mathcal{F} | \mathcal{F}$
- ii) $\mathcal{A}$ indép. de $\mathcal{B} | \mathcal{F} \vee \sigma(\mathcal{C})$

dès que $\mathcal{C} \subset \mathcal{A} \cup \mathcal{B}$.

Les règles suivantes permettent d'affaiblir le conditionnement, la première étant tirée de McKean [2], la deuxième ayant une démonstration immédiate :

LEMME 2. —

- i) $\mathcal{A}$ indép. de $\mathcal{B} | \mathcal{F}_i$, $\mathcal{F}_i \subset \mathcal{B}$, $i = 1, 2$
 $\Rightarrow \mathcal{A}$ indép. de $\mathcal{B} | \mathcal{F}_1 \cap \mathcal{F}_2$
- ii) $\mathcal{A}$ indép. de $\mathcal{B} | \mathcal{F}_1 \vee \mathcal{F}_2$ }
 $\mathcal{A}$ indép. de $\mathcal{F}_2 | \mathcal{F}_1$ }
 $\Rightarrow \mathcal{A}$ indép. de $\mathcal{B} \vee \mathcal{F}_2 | \mathcal{F}_1$

3. CAS DE VARIABLES DISCRÈTES

Nous donnons un énoncé détaillé dans cette situation, qui découle d'une démonstration plus constructive, mais qui équivaut en fait à celui que nous donnons plus bas dans le cas général :

PROPOSITION 1. — Si X , Y , Z sont à valeurs dans les ensembles dénombrables respectifs E_1 , E_2 , E_3 , le système (I) implique l'existence de partitions $\{A_n\}$, $\{B_n\}$, $\{C_n\}$, $n = 1, 2, \dots$ de E_1 , E_2 , E_3 telles que

i) si $F_n = A_n \times B_n \times C_n$ et μ est la mesure induite par (X, Y, Z) sur $E_1 \times E_2 \times E_3$, μ est concentrée sur $\bigcup_{n=1}^{\infty} F_n$.

ii) Si $D_n = X^{-1}(A_n)$ et $\mathcal{D} = \sigma \{ D_n, n = 1, 2, \dots \}$, alors X, Y et Z sont indépendantes conditionnellement à la tribu $\mathcal{D}$ ou, ce qui revient au même, leurs restrictions à D_n sont indépendantes $\forall n$.

Démonstration. — On suppose

$$\begin{aligned} P \{ X = i \} &> 0 & \forall i \in E_1, \\ P \{ Y = j \} &> 0 & \forall j \in E_2, \\ P \{ Z = k \} &> 0 & \forall k \in E_3, \end{aligned}$$

ce qui n'enlève rien à la généralité.

On choisit un élément quelconque i_1 dans E_1 . On dira que (A, B, C) possède la propriété (P_1) si

- i) $A \subset E_1, \quad B \subset E_2, \quad C \subset E_3$
- ii) $i_1 \in A$
- iii) $p(i, j, k) > 0 \quad \forall (i, j, k) \in A \times B \times C.$

Soit τ_1 l'ensemble des triplets (A, B, C) possédant la propriété (P_1) . On ordonne τ_1 par inclusion.

$$P \{ X = i_1 \} > 0 \Rightarrow \exists j_1 \in E_2, k_1 \in E_3$$

tels que

$$p(i_1, j_1, k_1) > 0 \Rightarrow (\{i_1\}, \{j_1\}, \{k_1\}) \in \mathcal{T}_1.$$

On peut donc appliquer le lemme de Zorn à $(\tau_1, \subset)$.

Notons (A_1, B_1, C_1) l'élément maximal.

Soit $i_2 \in E_1 \setminus A_1$. On construit (A_2, B_2, C_2) comme (A_1, B_1, C_1) , puis (A_n, B_n, C_n) , $n = 3, 4, \dots$ par récurrence.

Soit $i \in A_n$ et $j \in E_2, k \in E_3$ tels que $p(i, j, k) > 0$. Alors :

$$\begin{aligned} 0 < p(k | i, j) &= p(k | i) \\ &= p(k | i, j') & \forall j' \in B_n \\ &= p(k | i', j') & \forall i' \in A_n, j' \in B_n \end{aligned}$$

car ces deux dernières expressions ont un sens. On en déduit que

$$p(i', j', k) > 0 \quad \forall i' \in A_n, j' \in B_n$$

donc $k \in C_n$ par maximalité. On montre de même que $j \in B_n$. On déduit de ce qui précède que les A_n (resp. B_n, C_n) sont disjoints et par conséquent

qu'ils forment une partition de E_1 (resp. E_2, E_3), par maximalité et de plus, que $p(i, j, k) > 0$ si et seulement si $\exists n$ tel que $i \in A_n, j \in B_n, k \in C_n$, ce qui donne la conclusion *i*).

Soit maintenant $(i, j, k) \in A_n \times B_n \times C_n, n$ fixé.

$$\begin{aligned} p(k | i, j) &= p(k | i) = p(k | j) \\ &= p(k | j, i_n) = p(k | i_n) \\ &= a(k), \end{aligned}$$

une fonction de k , indépendamment de i et j .

De même :

$$\begin{aligned} p(j | k) &= p(j | i) = b(j), \\ p(i | j) &= p(i | k) = c(i). \end{aligned}$$

On en déduit par exemple :

$$P \{ Z = k, X = i \} = a(k) \cdot P \{ X = i \}.$$

En sommant dans les deux membres sur tous les $i \in A_n$:

$$P \{ Z = k, X \in A_n \} = a(k) \cdot P \{ X \in A_n \}.$$

Mais par ce qui précède,

$$\begin{aligned} d'où : \quad P \{ Z = k, X \in A_n \} &= P \{ Z = k \}, \\ a(k) &= P \{ Z = k \} / P \{ X \in A_n \}. \end{aligned}$$

Si l'on pose $D_n = X^{-1}(A_n) (= Y^{-1}(B_n) = Z^{-1}(C_n)$, à des ensembles négligeables près), on a :

$$\begin{aligned} a(k) &= P \{ Z = k \} / P(D_n) \\ \text{et de même :} \quad b(j) &= P \{ Y = j \} / P(D_n), \\ c(i) &= P \{ X = i \} / P(D_n). \end{aligned}$$

La conclusion *ii*) suit immédiatement.

On démontre très facilement la réciproque :

PROPOSITION 2. — Les conditions *i*) et *ii*) entraînent la validité du système (I).

Exemples. — 1. Si X, Y, Z sont indépendantes, avec les hypothèses du début de la démonstration de la proposition 1, le support de μ (définie dans la conclusion *i*) de la même proposition) est l'espace $E_1 \times E_2 \times E_3$ entier. Donc $A_1 = E_1, B_1 = E_2, C_1 = E_3$ est la partition triviale et $D_1 = \Omega$ engendre la tribu triviale dans Σ .

2. Si $X = Y = Z$ à valeurs dans $E (= E_1 = E_2 = E_3)$ dénombrable, alors le support de μ est l'intersection des plans bissecteurs dans E^3 , formée

des points (i, i, i) , $i \in E$. La tribu $\mathcal{D}$ est la même que la tribu engendrée par X (ou Y ou Z) dans Σ .

3. Soient R_n les fonctions de Rademacher.

Mettons
$$\varphi = \frac{1}{2}(1 + R_1).$$

Si on pose :

$$X = \varphi \cdot R_2, \quad Y = \varphi \cdot R_3, \quad Z = \varphi \cdot R_4,$$

on vérifie facilement (I). $A_1 = B_1 = C_1 = \{-1, +1\}$,

$$A_2 = B_2 = C_2 = \left\{ -\frac{1}{2}, +\frac{1}{2} \right\}, \quad D_1 = \left[0, \frac{1}{2} \right], \quad D_2 = \left] \frac{1}{2}, 1 \right]$$

sont les différentes partitions impliquées dans la proposition 1.

4. CAS GÉNÉRAL

Nous donnons directement un résultat sur des tribus quelconques :

PROPOSITION 3. — Soit (Ω, Σ, P) un espace de probabilité quelconque et $\mathcal{A}, \mathcal{B}, \mathcal{C}$ des sous-tribus de Σ .

Alors si

$$(II) \left\{ \begin{array}{l} \mathcal{A} \text{ indép. } \mathcal{B} | \mathcal{C}, \\ \mathcal{B} \text{ indép. } \mathcal{C} | \mathcal{A}, \\ \mathcal{C} \text{ indép. } \mathcal{A} | \mathcal{B}, \end{array} \right.$$

on a aussi $\mathcal{A}, \mathcal{B}, \mathcal{C}$ indépendantes $| \mathcal{A} \cap \mathcal{B} \cap \mathcal{C}$.

Démonstration. —

$$\begin{aligned} & \left. \begin{array}{l} \mathcal{A} \text{ indép. } \mathcal{B} | \mathcal{C} \\ \mathcal{A} \text{ indép. } \mathcal{C} | \mathcal{B} \end{array} \right\} \Leftrightarrow (\text{par le lemme 1. i}) \\ & \left. \begin{array}{l} \mathcal{A} \text{ indép. } \mathcal{B} \vee \mathcal{C} | \mathcal{C} \\ \mathcal{A} \text{ indép. } \mathcal{B} \vee \mathcal{C} | \mathcal{B} \end{array} \right\} \Leftrightarrow (\text{par le lemme 2 i}) \\ & \mathcal{A} \text{ indép. } \mathcal{B} \vee \mathcal{C} | \mathcal{B} \cap \mathcal{C}. \end{aligned}$$

Soit $E \in \mathcal{B} \cap \mathcal{C}$:

$$\Leftrightarrow P(B \cap C | \mathcal{A}) \stackrel{P.s.}{=} P(B | \mathcal{A}) \cdot P(C | \mathcal{A}) \quad \forall B \in \mathcal{B}, \quad C \in \mathcal{C}.$$

En prenant en particulier $B = C = E$:

$$P(E | \mathcal{A})^2 \stackrel{P.s.}{=} P(E | \mathcal{A}); \text{ donc}$$

$P(E | \mathcal{A})$ prend essentiellement les deux valeurs 0 et 1, ou
 $P(E | \mathcal{A}) \stackrel{\text{p.s.}}{=} 1_{\tilde{E}}$ pour un $\tilde{E} \in \mathcal{A}$. Mais

$$\int_{\tilde{E}} 1_E = \int_{\tilde{E}} 1_{\tilde{E}} \quad \text{et} \quad \int_{\mathcal{C}\tilde{E}} 1_E = \int_{\mathcal{C}\tilde{E}} 1_{\tilde{E}}$$

donnent $P(E \Delta \tilde{E}) = 0$. On en déduit :

$$(\mathcal{B} \cap \mathcal{C}) \vee \mathcal{N} = (\mathcal{B} \cap \mathcal{C} \cap \mathcal{A}) \vee \mathcal{N}$$

si $\mathcal{N}$ est la tribu des ensembles P-négligeables. D'où :

$$\begin{aligned} & \mathcal{A} \text{ indép. } \mathcal{B} \vee \mathcal{C} | \mathcal{A} \cap \mathcal{B} \cap \mathcal{C} \\ \Rightarrow P(A \cap B \cap C | \mathcal{A} \cap \mathcal{B} \cap \mathcal{C}) & \stackrel{\text{p.s.}}{=} P(A | \mathcal{A} \cap \mathcal{B} \cap \mathcal{C}) \cdot P(B \cap C | \mathcal{A} \cap \mathcal{B} \cap \mathcal{C}) \\ & \forall A \in \mathcal{A}, \quad B \in \mathcal{B}, \quad C \in \mathcal{C}. \end{aligned}$$

Les tribus ayant des rôles symétriques, on a de même

$$\begin{aligned} & \mathcal{B} \text{ indép. } \mathcal{A} \vee \mathcal{C} | \mathcal{A} \cap \mathcal{B} \cap \mathcal{C} \\ \Rightarrow P(B \cap C | \mathcal{A} \cap \mathcal{B} \cap \mathcal{C}) & \stackrel{\text{p.s.}}{=} P(B | \mathcal{A} \cap \mathcal{B} \cap \mathcal{C}) \cdot P(C | \mathcal{A} \cap \mathcal{B} \cap \mathcal{C}) \end{aligned}$$

d'où la conclusion.

On a immédiatement la réciproque :

PROPOSITION 4. — Si $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$, $\mathcal{C}$ sont indépendantes conditionnellement à la tribu $\mathcal{A} \cap \mathcal{B} \cap \mathcal{C}$, alors (II) est vérifié.

Démonstration. — Par exemple :

$$\begin{aligned} & \mathcal{A}, \mathcal{B}, \mathcal{C} \text{ indép. } | \mathcal{A} \cap \mathcal{B} \cap \mathcal{C} \\ \Rightarrow \mathcal{A} \text{ indép. } \mathcal{B} \vee \mathcal{C} | \mathcal{A} \cap \mathcal{B} \cap \mathcal{C} & \Rightarrow (\text{par le lemme 1.ii}) \\ & \mathcal{A} \text{ indép. } \mathcal{B} \vee \mathcal{C} | \mathcal{C} \\ \Rightarrow \mathcal{A} \text{ indép. } \mathcal{B} | \mathcal{C} \end{aligned}$$

Dans les exemples suivants, on a posé $\mathcal{A} = \sigma(X)$, $\mathcal{B} = \sigma(Y)$, $\mathcal{C} = \sigma(Z)$:

Exemples. — 1. Si X, Y, Z sont les trois variables à valeurs dénombrables de la proposition 1, la tribu $\mathcal{A} \cap \mathcal{B} \cap \mathcal{C}$ est exactement la tribu $\mathcal{D}$ engendrée par les $X^{-1}(A_n)$ (ou les $Y^{-1}(B_n)$ ou les $Z^{-1}(C_n)$) : il suffit pour le voir de refaire la démarche de la première partie de la démonstration de la proposition 1 pour construire la tribu $\mathcal{A} \cap \mathcal{B} \cap \mathcal{C}$. La proposition 3 est donc bien la généralisation de la proposition 1.

2. Soient X, Y, Z indépendantes à valeurs dans $(E_i, \mathcal{E}_i)$, $i = 1, 2, 3$ respectivement. Alors $\mathcal{A} \cap \mathcal{B} \cap \mathcal{C}$ est la tribu triviale.

3. Si $X = Y = Z$ à valeurs dans $(E, \mathcal{E})$, alors $\mathcal{A} \cap \mathcal{B} \cap \mathcal{C} = \mathcal{A} = \mathcal{B} = \mathcal{C}$.

COROLLAIRE. — Soient X, Y, Z trois variables aléatoires sur (Ω, Σ, P) à valeurs dans les espaces mesurables respectifs $(E_i, \mathcal{E}_i)$, $i = 1, 2, 3$ quelconques, μ_i étant les mesures induites sur ceux-ci par les variables correspondantes et μ_{12} étant la mesure induite sur $(E_1 \times E_2, \mathcal{E}_1 \otimes \mathcal{E}_2)$ par (X, Y) . Si X, Y, Z vérifient (I) et que de plus $\mu_1 \otimes \mu_2 \sim \mu_{12}$, alors X, Y, Z sont indépendantes.

Démonstration. — Si $\mathcal{A} = \sigma(X)$, $\mathcal{B} = \sigma(Y)$, $\mathcal{C} = \sigma(Z)$, alors $\mathcal{A}, \mathcal{B}, \mathcal{C}$ satisfont (II), d'où

$$X, Y, Z \text{ indép. } | \mathcal{A} \cap \mathcal{B} \cap \mathcal{C}.$$

Mais l'hypothèse d'équivalence des mesures fait que $\mathcal{A} \cap \mathcal{B}$ est la tribu triviale (aux ensembles négligeables près). En effet, s'il existe $F \in \mathcal{A} \cap \mathcal{B}$ avec $0 < P(F) = \alpha < 1$, alors $F = X^{-1}(A) = Y^{-1}(B)$ et $\mu_{12}(A \times \mathcal{C}B) = 0$; mais puisque $\mu_{12} \sim \mu_1 \otimes \mu_2$: $\mu_1(A) \cdot \mu_2(\mathcal{C}B) = 0$. Or $\mu_1(A) = \alpha$ et $\mu_2(\mathcal{C}B) = 1 - \alpha$: contradiction.

5. DÉMONSTRATION DU THÉORÈME 1

1° $i) \Rightarrow ii)$ Soient j et k fixés, i quelconque dans I ; la proposition 3 entraîne que

$$\mathcal{A}_j \text{ indép. } \mathcal{A}_k | \mathcal{A}_j \cap \mathcal{A}_k \cap \mathcal{A}_i.$$

Comme $\mathcal{A}_j \cap \mathcal{A}_k \cap \mathcal{A}_i \subset \mathcal{A}_k$ et que ceci est vrai pour tout i , on a, en utilisant le lemme 2. i) :

$$\mathcal{A}_j \text{ indép. } \mathcal{A}_k | \bigcap_{i=1}^N \mathcal{A}_i$$

dès que $N > \max \{j, k\}$. On en déduit par un théorème de convergence de martingales que

$$(1) \quad \mathcal{A}_j \text{ indép. de } \mathcal{A}_k | \bigcap_{i \in I} \mathcal{A}_i \quad \forall j, k \in I.$$

Soient maintenant $k_1, k_2, \dots, k_n \in I$. Il faut démontrer que pour tout choix d'ensembles mesurables $A_1, A_2, \dots, A_n$:

$$P \left\{ X_{k_1} \in A_1, X_{k_2} \in A_2, \dots, X_{k_n} \in A_n | \bigcap_{i \in I} \mathcal{A}_i \right\} \stackrel{p.s.}{=} \prod_{r=1}^n P \left\{ X_{k_r} \in A_r | \bigcap_{i \in I} \mathcal{A}_i \right\}.$$

Or il résulte de la définition que

$$(2) \quad \mathcal{A}_{k_1} \text{ indép. de } \bigvee_{r=2}^n \mathcal{A}_{k_r} | \mathcal{A}_{k_2}.$$

De plus, (1) donne

$$(3) \quad \mathcal{A}_{k_1} \text{ indép. de } \mathcal{A}_{k_2} \mid \bigcap_{i \in I} \mathcal{A}_i.$$

Le lemme 2.ii) combiné avec (2) et (3) entraîne :

$$\mathcal{A}_{k_1} \text{ indép. } \bigvee_{r=2}^n \mathcal{A}_{k_r} \mid \bigcap_{i \in I} \mathcal{A}_i.$$

On a la conclusion par récurrence.

2° ii) $\Rightarrow$ i) Immédiat : ii) $\Rightarrow$

$$\begin{aligned} X_i, \sigma \{ X_k, k \in I_1 \}, \quad \sigma \{ X_k, k \in I_2 \} \text{ indép. } \mid \bigcap_{j \in I} \mathcal{A}_j \\ \Rightarrow \sigma \{ X_k, k \in I_1 \} \text{ indép. } \sigma \{ X_k, k \in I_2 \} \mid \mathcal{A}_i. \end{aligned}$$

COROLLAIRE. — Pour que la suite $X_1, X_2, \dots$ ait la propriété d'indépendance conditionnelle permutable, il suffit que celle-ci soit une chaîne de Markov et que de plus chaque triplet $\{ X_i, X_j, X_k \}$ ait la propriété d'indépendance conditionnelle permutable.

Démonstration. — Il suffit de constater que la démonstration du théorème 1 n'utilise que ces hypothèses dans la partie i) $\Rightarrow$ ii).

Remarque. — Il est facile alors de donner des conditions supplémentaires imposant l'indépendance, par exemple la trivialité de la σ -algèbre de queue dans le cas d'une suite infinie, ou alors une condition du type intervenant dans le corollaire de la proposition 4.

RÉFÉRENCES

- [1] G. A. HUNT, *Martingales et processus de Markov*, Dunod, Paris, 1966.
- [2] H. P. MCKEAN, Brownian motion with a several-dimensional time. *Th. of. Prob. and Appl.*, t. 8, 1963, p. 335-354.

(Manuscrit reçu le 30 octobre 1979)