ANNALES DE L'I. H. P., SECTION B

J. B. GRAVEREAUX

J. PELLAUMAIL

Formule de Ito pour des processus non continus à valeurs dans des espaces de Banach

Annales de l'I. H. P., section B, tome 10, n° 4 (1974), p. 399-422

<http://www.numdam.org/item?id=AIHPB_1974__10_4_399_0>

© Gauthier-Villars, 1974, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Annales de l'I. H. P., section B » (http://www.elsevier.com/locate/anihpb) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (http://www.numdam.org/conditions). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
http://www.numdam.org/

Ann. Inst. Henri Poincaré, Section B :
Vol. X, n° 4, 1974, p. 399-422. *Calcul des Probabilités et Statistique.*

Formule de Ito pour des processus non continus à valeurs dans des espaces de Banach

par

J. B. GRAVEREAUX et J. PELLAUMAIL
Laboratoire de Probabilités, Rennes, ERA 250

RÉSUMÉ. — On prouve la formule de Ito pour un processus non continu à valeurs dans un espace de Banach E et de variation quadratique finie en moyenne et pour une fonction également à valeurs dans un espace de Banach G. Dans le cas où E est un espace de Hilbert et où $G = \mathbb{R}$, les hypothèses sont plus générales que celles utilisées en [3].

SUMMARY. — An Ito-formula is proved for a non continuous Banach valued process with has a mean finite quadratic variation and for a Banach valued function. Even for Hilbert space, the hypotheses are more general than those of [3].

INTRODUCTION

Dans [2] et [4], une « formule de Ito » est prouvée pour un processus réel non nécessairement à trajectoires continues. Dans [3], une formule de Ito est prouvée pour un processus non continu à valeurs dans un espace de Hilbert, la fonction considérée étant à valeurs réelles. Dans [6] une « formule de Ito » est prouvée pour un processus continu à valeurs hilbertiennes. Nous donnons ici une démonstration de cette formule pour un processus X à valeurs dans un espace de Banach E et pour une fonction f également à valeurs dans un espace de Banach G. Si E et G sont des espaces de Hilbert et si X est une martingale de carré intégrable, cette formule est prouvée sous la seule condition que la différentielle seconde f'' de f

soit uniformément continue sur les parties bornées de E. Si E est un espace de Banach quelconque, si G est un dual d'espace de Banach séparable et si le processus X étudié admet une variation quadratique finie en moyenne, on prouve une formule de Ito « faible » (cf. théorème D-3-2°) si la différentielle f'' est faiblement uniformément continue sur les parties bornées de E.

Il est à noter qu'on obtient ainsi une formule de Ito dans un cadre non hilbertien contrairement à ce qu'aurait pu laisser supposer [9].

Même dans le cas où E est un espace de Hilbert et où $G = \mathbb{R}$, la formule de Ito est prouvée sous des hypothèses plus générales que celles de [3] (cf. contre-exemple E-1).

La démonstration proposée est totalement différente de celle utilisée en [2] : elle est, pour une part, assez voisine de celle adoptée en [3] et [4] et généralise celle utilisée en [7].

Au paragraphe A, on donne les données et conventions valables pour toute la suite. Au paragraphe B, on donne une définition de l'intégrale stochastique à la fois très élémentaire et très générale et qui suffit pour prouver la formule de Ito. Au paragraphe C, on établit quelques lemmes préliminaires relatifs à un processus dont la variation quadratique est « localement finie en moyenne ». Au paragraphe D, on donne le théorème fondamental sur la formule de Ito et on considère le cas particulier où l'on a des espaces de Hilbert et une martingale de carré intégrable. Au paragraphe E, on donne quelques contre-exemples en liaison avec ce qui précède.

A. DONNÉES ET CONVENTIONS GÉNÉRALES

A-1. Pour toute cette étude, ON SE DONNE

— *un ensemble des temps* $T = [0, 1]$,

— *un espace probabilisé* $(\Omega, \mathcal{F}, P)$,

— *une famille croissante* $(\mathcal{F}_t)_{t\in T}$ *de sous-tribus de* $\mathcal{F}$ *contenant toutes tous les ensembles de mesure nulle de* $\mathcal{F}$,

— *trois espaces de Banach* E, F *et* G *et une application bilinéaire continue de* $F \times E$ *dans* G *qui à* (y, x) *élément de* $F \times E$ *associe* $y.x$ *élément de* G *(en général, on aura* $F = \mathcal{L}(E, G)$*).*

A-2. PAR CONVENTION

— si V est la partie vide de T, on pose $\inf\{ t : t \in V \} = 1$,

— quand on parlera de processus adapté, prévisible, de temps d'arrêt, etc., ce sera toujours par rapport à la base de processus $(\Omega, \mathcal{F}, P, (\mathcal{F}_t)_{t\in T})$,

— pour tous les espaces de Banach considérés, la norme sera notée $\| \cdot \|$,

— on notera $x^{\otimes 2}$ l'élément $x \otimes x$ de $E \otimes E$,

— $E \otimes E$ sera toujours muni d'une norme telle que $\| x \otimes y \| \leqslant \| x \| . \| y \|$,

— si f est une fonction deux fois différentiable de E dans F, on notera f' la différentielle première et f'' la différentielle seconde de f : cette différentielle seconde sera considérée comme une application linéaire définie sur $E \otimes E$; si u est un élément de E et v un élément de $E \otimes E$, on notera $f''(u)(v)$ la valeur dans F de la différentielle seconde f'' en u appliquée au vecteur v,

— on notera $L_0^E(\Omega, \mathscr{F}, P)$ l'espace des variables aléatoires $\mathscr{F}$-mesurables, à valeurs dans E, muni de la convergence en probabilité.

B. INTÉGRALE STOCHASTIQUE

B-1. Introduction

On va maintenant donner une définition de l'intégrale stochastique à la fois très élémentaire et très générale et qui nous suffira pour prouver la formule de Ito.

B-2. Définition de $\mathscr{A}$

On désignera par $\mathscr{A}$ l'algèbre de parties de $\Omega \times T$ engendrée par les « intervalles stochastiques » $]\sigma, \sigma']$ où σ et σ' sont deux temps d'arrêt tels que $\sigma < \sigma'$.

B-3. Définition de $\int Y dX$ pour Y $\mathscr{A}$-étagé

Soit $X = (X_t)_{t \in T}$ un processus fortement cadlag (c'est-à-dire continu à droite et admettant des limites à gauche). Soit x la fonction simplement additive à valeurs dans $L_0^E(\Omega, \mathscr{F}, P)$ et définie sur $\mathscr{A}$ par $x(]\sigma, \sigma']) = X_{\sigma'} - X_\sigma$ pour tout couple (σ, σ') de temps d'arrêt tels que $\sigma < \sigma'$ (on vérifie facilement que ceci définit bien une telle fonction). Soit Y un processus $\mathscr{A}$-étagé, c'est-à-dire que $Y = \sum_{i \in I} a_i . 1_{A(i)}$ avec, pour tout élément i de I, A(i) élément de $\mathscr{A}$ et a_i élément de F. On peut alors poser

$$\int Y dX = \int Y dx = \sum_{i \in I} a_i . x(A_i)$$

(vérification immédiate).

B-4. DÉFINITION DE $\mathscr{S}_1$, $\mathscr{S}_2$ ET $\mathscr{S}_3$

On dira que X appartient à $\mathscr{S}_1$ (resp. $\mathscr{S}_2$, $\mathscr{S}_3$), si les conditions suivantes sont réalisées :

(*i*) X est à valeurs dans E et fortement cadlag,

(*ii*) pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $a(\varepsilon) \geqslant 0$ tel que, pour tout processus Y $\mathscr{A}$-étagé à valeurs dans F (resp. dans E, dans $\mathscr{L}(E, R)$) uniformément borné par 1,

$$P\left[\left\|\int Y dX\right\| \geqslant a(\varepsilon)\right] \leqslant \varepsilon$$

$$\left(\text{resp. } P\left[\left\|\int [Y \otimes dX + dX \otimes Y]\right\| \geqslant a(\varepsilon)\right] \leqslant \varepsilon,\right.$$

$$\left. P\left[\left|\int Y dX\right| \geqslant a(\varepsilon)\right] \leqslant \varepsilon\right)$$

La définition de $\mathscr{S}_2$ dépend donc de la norme que l'on a choisie sur E⊗E.

Dans ce qui suit, on ne considère que le cas où X appartient à $\mathscr{S}_1$ mais on aurait évidemment des résultats analogues pour X élément de $\mathscr{S}_2$ ou de $\mathscr{S}_3$.

B-5. LEMME

Soit Y *un processus à valeurs dans* F *fortement cadlag (c'est-à-dire continu à gauche et admettant des limites à droite). Alors il existe une suite croissante* $(\sigma(n))_{n>0}$ *de temps d'arrêt telle que :*

(*i*) $\lim_{n\to\infty} P[\sigma(n) < 1] = 0$,

(*ii*) *pour tout* n, $t \leqslant \sigma(n)(\omega)$ *implique* $\| Y_t(\omega) \| \leqslant n$.

Preuve. — Il suffit de considérer la suite de temps d'arrêt définie par :

$$\sigma(n) = \inf. \{ t : \| Y_t \| > n \}.$$

B-6. LEMME

Soit Y *un processus à valeurs dans* F *fortement cadlag. Alors* Y *est limite uniforme (sur* $\Omega \times T$*) d'une suite de processus* $(Y_n)_{n>0}$ *tels que (pour tout n) quel que soit* $\varepsilon > 0$, *il existe un processus* $\mathscr{A}$*-étagé* Y_n^ε *tel que*

$$P\left[\operatorname{Sup}_t . \| Y_n - Y_n^\varepsilon \| \geqslant \varepsilon\right] \leqslant \varepsilon$$

Preuve. — Pour tout n, on pose $\sigma(n, 0) = 0$ et, pour tout k,

$$\sigma(n, k+1)(\omega) = \inf. \left\{ t : t > \sigma(n, k)(\omega), \| X_t(\omega) - X_{\sigma(n,k)}(\omega) \| > \frac{1}{n} \right\}$$

et $H(n, k) = Y_{\sigma(n,k)}$. Ensuite, soit :

$$Y_n = \sum_{k=0}^{\infty} H(n, k) . 1_{]\sigma(n,k), \sigma(n,k+1)]}$$

Enfin, il suffit d'utiliser le fait que, pour tout n, k et $\varepsilon' > 0$, il existe une variable aléatoire $H(n, k, \varepsilon')\mathscr{F}_{\sigma(n,k)}$-étagée telle que

$$P[\,||\, H(n, k, \varepsilon') - H(n, k) \,||\, \geqslant \varepsilon'] \leqslant \varepsilon'.$$

B-7. DÉFINITION DE L'INTÉGRALE STOCHASTIQUE (PROPOSITION)

Soit $\mathscr{I}$ l'ensemble des processus Y à valeurs dans F fortement cadlag. Il existe une application bilinéaire unique, définie sur $\mathscr{I} \times \mathscr{S}_1$, à valeurs dans $L_0^E(\Omega, \mathscr{F}, P)$, qui à (Y, X) associe $\int Y dX$ et qui satisfait aux conditions suivantes :

(*i*) en restriction aux processus $\mathscr{A}$-étagés, cette application coïncide avec celle définie en B-3 ;

(*ii*) si (Y, X) appartient à $(\mathscr{I} \times \mathscr{S}_1)$, il existe un processus cadlag $Z = (Z_t)_{t \in I}$, unique à l'indistinguabilité près, tel que, pour tout t,

$$Z_t = \int_{]0,t]} Y . dX = \int 1_{]0,t]} . Y . dX.$$

(*iii*) soit $K > 0$; soit $(Y^n)_{n>0}$ une suite de processus fortement cadlag qui converge uniformément vers un processus Y et telle que, pour tout t, ω et n, $|| Y_t^n(\omega) || \leqslant K$; soit Z (resp. Z^n) le processus cadlag défini par $Z_t = \int_{]0,t]} Y . dX \left(\text{resp. } Z_t^n = \int_{]0,t]} Y^n . dX \right)$. Alors, pour tout t, $(Z_t^n)_{n>0}$ converge en probabilité vers Z_t. De plus, il existe une application croissante g de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{N}$ (une « sous-suite ») telle que la suite de processus $(Z^{g(n)})_{n>0}$ converge P. p. s. uniformément par trajectoires vers le processus Z.

Preuve. — Compte-tenu de B-5, il suffit d'étudier le cas où Y est uniformément borné. Si Y est $\mathscr{A}$-étagé, l'existence de Z est évidente. Il en est de même si Y est un processus Y_n du type indiqué au lemme B-6. Prouvons d'abord la propriété (*iii*) pour une suite $(Y^n)_{n>0}$ de processus $\mathscr{A}$-étagés (convergeant uniformément vers Y quelconque). Pour tout $n > 0$, soit $d(n) > 0$ tel que, pour tout processus V$\mathscr{A}$-étagé à valeurs dans F et borné par 1, on ait $P\left[\left|\left| \int V dX \right|\right| \geqslant d(n) \right] \leqslant 2^{-n}$ (cf. B-4) ; puis, soit $g(n)$ tel que, pour $k \geqslant g(n)$,

$$\operatorname*{Sup}_{t,\omega} . || Y_t(\omega) - Y_t^k(\omega) || \leqslant \frac{1}{2} . 2^{-n} \frac{1}{d(n)}$$

Pour tout k, soit $\sigma(k)$ le temps d'arrêt défini par :

$$\sigma(k) = \inf \{ t : || Z_t^{g(k)} - Z_t^{g(k+1)} || \geqslant 2^{-k} \}$$

on a

$$Z_{\sigma(k)}^{g(k)} - Z_{\sigma(k)}^{g(k+1)} = \int_{\Omega \times T} [Y^{g(k)} - Y^{g(k+1)}] . 1_{]0,\sigma(k)]} . dX$$

donc $P[|| Z_{\sigma(k)}^{g(k)} - Z_{\sigma(k)}^{g(k+1)} || \geqslant 2^{-k}] \leqslant 2^{-k}$.

Autrement dit,

$$P [\sup_{t \in T} Z_t^{g(k)} - Z_t^{g(k+1)} || \geqslant 2^{-k}] \leqslant 2^{-k}$$

On déduit de ceci et du lemme de Borel-Cantelli que la suite de processus $(Z_t^{g(n)})_{n>0}$ est, sauf sur un ensemble de mesure nulle, uniformément de Cauchy par trajectoires. Soit (Z_t) le processus limite, défini à l'indistinguabilité près. Ce processus est cadlag. De plus, ce processus est tel que, pour tout temps d'arrêt σ :

$$Z_\sigma = \lim_{n \to \infty} \int_{]0,\sigma]} Y^{g(n)} . dX = \int_{]0,\sigma]} Y dX.$$

On déduit de ce qui précède et du lemme B-6 les propriétés (*i*) et (*ii*) dans le cas général. Enfin, la propriété (*iii*) se prouve dans le cas général en reprenant le raisonnement qui précède.

B-8. LEMME

Soit X *un processus appartenant à* $\mathscr{S}_1$. *Soit* Y *un processus à valeurs dans* F, *fortement caglad. Soit* Z *le processus cadlag défini par*

$$Z_t = \int_{]0,t]} Y . dX.$$

Pour tout temps d'arrêt σ *on a :*

$$Z_\sigma - Z_{\sigma-} = Y_\sigma . (X_\sigma - X_{\sigma-})$$

Preuve. — Il suffit de considérer le cas où Y est uniformément borné. La propriété indiquée se vérifie immédiatement pour les processus Y$\mathscr{A}$-étagés. Ensuite, on considère le cas où Y est limite uniforme d'une suite $(Y_n)_{n>0}$ de processus $\mathscr{A}$-étagés ; d'après la condition (*iii*) du paragraphe qui précède, on peut trouver une sous-suite $(Y_{g(n)})_{n>0}$ telle que la sous-suite associée $(Z_{g(n)})_{n>0}$ converge P. p. s. uniformément par trajectoires vers Z ; on en déduit la propriété annoncée par passage à la limite, compte tenu du lemme B-6.

B-9. REMARQUES

a) Dans ce qui précède, on n'a pas supposé que l'application $A \rightsquigarrow \int_A dX$ est σ-additive, ni, *a fortiori*, qu'elle admet un prolongement σ-additif à la tribu des prévisibles ; pour une étude dans ce cas, cf., par exemple, [5] ou [8].

b) Soit X un processus à valeurs dans E fortement cadlag ; alors X appartient à $\mathscr{S}_1$ si X est tel que la « semi-variation » de la « mesure stochastique » (cf. [8]) associée est finie, c'est-à-dire si :

$$\text{Sup. } E\left(\left\| \int Y dX \right\|\right) < +\infty$$

cette borne supérieure étant prise pour tous les processus Y, $\mathscr{A}$-étagés, à valeurs dans F et uniformément bornés par 1.

c) Soit $(\sigma(n))_{n>0}$ une suite croissante de temps d'arrêt telle que $\lim_{n\to\infty} . P[\sigma(n) < 1] = 0$ et X un processus tel que, pour tout n, $(X_{t\wedge\sigma(n)})_{t\in T}$ soit un processus qui appartienne à $\mathscr{S}_1$; alors X appartient à $\mathscr{S}_1$.

C. RÉSULTATS PRÉLIMINAIRES SUR LA VARIATION QUADRATIQUE

C-1. DÉFINITION

Soit X un processus à valeurs dans E. On dira que X admet localement une variation quadratique finie en moyenne s'il existe une suite croissante $(\sigma(n))_{n>0}$ de temps d'arrêt satisfaisant aux conditions suivantes :

(*i*) $\lim_{n\to\infty} . P[\sigma(n) < 1] = 0$,

(*ii*) pour tout $n > 0$, si X^n désigne le processus arrêté à $\sigma(n)$, on a, pour toute famille finie croissante $(\sigma'(k))_{1\leq k\leq j}$ de temps d'arrêt,

$$\sum_{k=1}^{j-1} E(\| X^n_{\sigma'(k+1)} - X^n_{\sigma'(k)} \|^2) \leq n$$

C-2. LEMME

L'ensemble des processus à valeurs dans E *qui admettent localement une variation quadratique finie en moyenne constitue un espace vectoriel.*

Preuve. — Compte tenu de la définition qui précède, il suffit de noter que, pour deux variables aléatoires f et g à valeurs dans E, on a

$$E(\| f + g \|^2) \leq 2[E(\| f \|^2) + E(\| g \|^2)]$$

C-3. LEMME

Soit X *un processus cadlag à valeurs dans* E *admettant localement une variation quadratique finie en moyenne ; pour P-presque toute trajectoire la famille* $\{ \| X_t - X_{t-} \|^2 \}_{t \in T}$ *est sommable donc on peut définir, par trajectoires, un processus* U *continu à droite (à variation bornée par trajectoires) en posant :*

$$U(t) = \sum_{s \leqslant t} (X_s - X_{s-})^{\otimes 2}$$

Par ailleurs, soit X *un processus cadlag à valeurs dans* E *tel que, pour presque toute trajectoire, la famille* $\{ \| X_t - X_{t-} \|^2 \}_{t \in T}$ *est sommable ; soit* f *une fonction définie sur* E, *à valeurs dans* F, *deux fois continûment différentiable et dont la différentielle seconde est bornée sur les parties bornées de* E ; *alors, pour P-presque toute trajectoire* ω, *la famille*

$$\{ \| f(X_t) - f(X_{t-}) - f'(X_{t-})(X_t - X_{t-}) \| \}_{t \in T}$$

est sommable donc on peut définir, par trajectoires, un processus $Q(t)$ *continu à droite à variation forte bornée, par trajectoires, en posant :*

$$Q(t) = \sum_{s \leqslant t} [f(X_s) - f(X_{s-}) - f'(X_{s-})(X_s - X_{s-})]$$

Enfin, les processus U *et* Q *sont adaptés aux tribus* $(\mathscr{F}_t)_{t \in T}$.

Preuve. — Par localisation, on peut se ramener au cas où X est borné par a et où la variation quadratique de X est bornée, en moyenne, par b, ce que nous supposons désormais. Pour tout n, soit

$$H_n = \sum_{k=0}^{2^n - 1} \| X_{(k+1).2^{-n}} - X_{k.2^{-n}} \|^2$$

Par hypothèse, $E(H_n) \leqslant b$.

Soit $H = \lim_{n \to \infty} \text{inf. } H_n$. On a $\sum_{t \in T} \| X_t - X_{t-} \|^2 \leqslant H$ ce qui prouve la première partie du lemme, la continuité à droite de U étant évidente.

De plus, d'après la formule de Taylor, pour tout t et tout ω, on a :

$$f(X_t) - f(X_{t-}) - f'(X_{t-}).(X_t - X_{t-})$$
$$= \left\{ \int_0^1 \frac{1-u}{2} f''[X_{t-} + u(X_t - X_{t-})] du \right\} (X_t - X_{t-})^{\otimes 2}$$

Puisque f'' est bornée sur le domaine $\| x \| \leqslant a$, il existe une constante c telle que $\| x \| \leqslant a$ implique $\| f''(x) \| \leqslant c$; les membres de l'égalité ci-dessus sont donc majorés en norme par $\frac{1}{2} c . \| X_t - X_{t-} \|^2$ d'où la deuxième partie du lemme.

Il reste à prouver que U et Q sont adaptés. Nous ferons la démonstration pour U, celle pour Q étant analogue. Comme précédemment, on se ramène au cas où X est borné et admet une variation quadratique bornée en moyenne. Pour tout $n > 0$, soit $(\sigma(n, k))_{k>0}$ la suite croissante suivante :

$$\sigma(n, 1) = 0$$
$$\sigma(n, k+1) = \inf. \left\{ s : s \leqslant t, s \geqslant \sigma(n, k), \| X_s - X_{\sigma(n,k)} \| > \frac{1}{n} \right\}$$

(si l'ensemble ci-dessus est vide, on pose $\sigma(n, k+1) = t$). Puisque le processus X est cadlag, pour tout n, $\lim_{k \to \infty}$. $P[\sigma(n, k) < 1] = 0$.

Pour tout n, soit Z_n la variable aléatoire définie par

$$Z_n = \sum_{k>0} (X_{\sigma(n,k)} - X_{\sigma(n,k)-})^{\otimes 2}$$

variable aléatoire bien définie d'après ce qui précède.

De plus, ce qui précède montre que la suite $(Z_n)_{n>0}$ converge P. p. s. vers une variable aléatoire Z (telle que $\| Z \| \leqslant H$) ; ceci montre que Z est un élément de $L_0^{E \otimes E}(\Omega, \mathscr{F}_t, P)$. Or $Z = U(t)$ P. p. s. donc U est un processus adapté. Notons aussi que U est défini à l'indistinguabilité près puisque continu à droite.

C-4. Proposition et définition

Soit X un processus à valeurs dans l'espace de Banach E. Soit h une application bilinéaire continue de E dans l'espace de Banach G. On pose $\hat{h}(u) = h(u, u)$.

On suppose que X appartient à $\mathscr{S}_1$ avec $F = \mathscr{L}(E, G)$. On peut alors considérer le processus V^h défini, à l'indistinguabilité près, par :

$$V_t^h = h(X_t, X_t) - h(X_0, X_0) - \int_{]0,t]} [h(X_{u-}, dX_u) + h(dX_u, X_{u-})]$$

l'intégrale $\int_{]0,t]} h(X_{u-}, dX_u)$ étant définie comme l'intégrale stochastique, par rapport au processus X, du processus $h(X_{u-}, .)$, processus continu à gauche, localement borné et à valeurs dans $F = \mathscr{L}(E, G)$. On notera $\langle h(X_t, X_t) \rangle$ ce processus V_t^h. Soit $(X^n)_{n>0}$ une suite de processus qui appro-

che uniformément le processus X comme indiqué au lemme B-6 avec

$$X^n = \sum_{k>0} X_{\sigma(n,k)} \cdot 1_{]\sigma(n,k),\sigma(n,k+1)]}$$

Soit $(V^n)_{n>0}$ la suite de processus définie par

$$V^n = \sum_{j=0}^{k-1} \hat{h}(X_{\sigma(n,j+1)} - X_{\sigma(n,j)})$$

sur l'intervalle $]\sigma(n, k), \sigma(n, k+1)]$. Alors, la suite $(V^n)_{n>0}$ converge P. p. s. uniformément par trajectoires vers le processus V^h.

On suppose, de plus, que X admet une variation quadratique finie en moyenne. Le processus (V^h) est alors à variation forte bornée en moyenne ; si la norme de h est inférieure à 1, l'espérance de cette variation totale est bornée par l'espérance de la variation quadratique de X. De plus, soit U^h le processus défini par :

$$U_t^h = \sum_{s \leqslant t} \hat{h}(X_s - X_{s-}).$$

Le processus $S^h = V^h - U^h$ est alors à trajectoires continues (et admet une variation forte bornée en moyenne). Les processus V^h, U^h et S^h sont cadlag et adaptés. On notera $\langle h(X, X) \rangle^c$ le processus S^h.

Preuve. — La preuve est tout à fait analogue à celle indiquée aux paragraphes *e*), *f*) et *m*) de la preuve du théorème D-1 ci-après.

C-5. PROPOSITION

Soit $(X_t)_{t\in[0,1]}$ un processus à valeurs dans un espace de Banach et dont la variation quadratique est finie en moyenne. Soit $\mathscr{P}$ l'ensemble des partitions finies de $\Omega \times T$ constituées d'intervalles stochastiques $]\sigma, \sigma']$.

Pour tout élément p de $\mathscr{P}$ et tout élément A de $\mathscr{A}$, soit $a_p(A)$ la borne supérieure de l'espérance de la variation quadratique de X quand on se restreint à A et aux partitions plus fines que p. Soit $a(A) = \inf_{p\in\mathscr{P}} a_p(A)$. La fonction $a(.)$ est alors une fonction positive définie et σ-additive sur $\mathscr{A}$. On peut lui associer un processus croissant « naturel » A qu'on appellera processus naturel associé à la variation quadratique de X.

Preuve. — Pour tout élément p de $\mathscr{P}$, la fonction $a_p(.)$ satisfait à la condition suivante :

$$A\in\mathscr{A},\ B\in\mathscr{A},\ A\cap B = \emptyset \quad \text{implique} \quad a_p(A\cup B) \geqslant a_p(A) + a_p(B)$$

et il y a égalité si p est plus fine que la partition $\{ A, B \}$. De plus, si p est plus fine que p', $a_p(.) \leqslant a_{p'}(.)$.

Soit $\alpha = \inf_{p \in \mathscr{P}} a_p(\Omega \times T)$; soit $(p(n))_{n>0}$ une suite d'éléments de $\mathscr{P}$, suite de partitions de plus en plus fines, telle que $\alpha = \lim_{n \to \infty} a_{p(n)}(\Omega \times T)$. Soit, pour tout élément A de $\mathscr{A}$:

$$a(A) = \lim_{n \to \infty} a_{p(n)}(A).$$

On a aussi :

$$a(A) = \inf_{p \in \mathscr{P}} a_p(A).$$

Soient A et B deux éléments de $\mathscr{A}$ avec $A \cap B = \emptyset$ et, pour tout n, la partition $p'(n)$ plus fine que $p(n)$ et que la partition $\{ A, B \}$. On a $a(.) = \lim_{n \to \infty} a_{p'(n)}(.)$ donc $a(A \cup B) = a(A) + a(B)$ (par passage à la limite). Il est clair que a ne charge pas les processus évanescents. Il reste à prouver que a satisfait aux conditions (i) et (ii) du lemme I-D-2, p. 20 de [8] ; il suffit de prouver ces propriétés pour l'une des fonctions $a_{p'}$ par exemple celle qui correspond à la partition triviale $\{ \emptyset, \Omega \times T \}$ et qu'on notera $\bar{a}$.

Prouvons d'abord la condition (i) par l'absurde. On suppose donc qu'il existe $s \in T$ tel que $\lim_{t \downarrow s} \bar{a}(\Omega \times]s, t]) = \varepsilon > 0$. Soit $u > s$ tel que $\bar{a}(\Omega \times]s, u]) \leqslant \frac{4}{3}\varepsilon$; on a aussi $\bar{a}(\Omega \times]s, u]) \geqslant \varepsilon$ ce qui implique qu'il existe une famille finie croissante $(\sigma(i))_{1 \leqslant i \leqslant k}$ de temps d'arrêt compris entre s et u telle que

$$E\left[\sum_{i=1}^{k-1} \| X_{\sigma(i+1)} - X_{\sigma(i)} \|^2\right] \geqslant \frac{3}{4}\varepsilon \text{ ①};$$

il existe alors v avec $s < v < u$ tel que, si X^v désigne le processus arrêté à v, on ait :

$$E\left[\sum_{i=1}^{k=1} \| X^v_{\sigma(i+1)} - X^v_{\sigma(i)} \|^2\right] \leqslant \frac{\varepsilon}{4}$$

ceci et ① impliquent $\bar{a}(]v, u]) \geqslant \varepsilon/2$; or $\bar{a}(]s, v]) \geqslant \varepsilon$ donc $\bar{a}(]s, u]) \geqslant \frac{3}{2}\varepsilon$ d'où la contradiction.

Prouvons maintenant la condition (ii). On raisonne également par l'absurde. On suppose donc qu'il existe une suite $(\sigma(n))_{n>0}$ croissante de temps d'arrêt telle que $\lim_{n \to \infty} . P[\sigma(n) < 1] = 0$ et telle que

$$\lim_{n \to \infty} . [\bar{a}(]\sigma(n), 1])] = \varepsilon > 0.$$

On construit une application croissante f de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{N}$ (une « sous suite ») par récurrence de la façon suivante : $f(1) = 1$, puis, $f(n)$ étant déterminé,

puisque $\bar{a}(]\sigma(f(n)), 1]) \geqslant \varepsilon$ il existe une famille finie croissante $(\sigma'(i))_{1 \leqslant i \leqslant k}$ de temps d'arrêt compris entre $\sigma(f(n))$ et 1 telle que

$$E\left\{\sum_{i=1}^{k-1} \| X_{\sigma'(i+1)} - X_{\sigma'(i)} \|^2\right\} \geqslant \frac{2\varepsilon}{3}$$

puisque $\lim_{n \to \infty} . P[\sigma(n) < 1] = 0$, il existe $f(n+1) > f(n)$ tel que, si $\bar{X}$ désigne le processus X arrêté à $\sigma(f(n+1))$, on ait :

$$E\left\{\sum_{i=1}^{k-1} \| \bar{X}_{\sigma'(i+1)} - \bar{X}_{\sigma'(i)} \|^2\right\} \geqslant \frac{\varepsilon}{3}$$

ce qui implique $\bar{a}(]\sigma(f(n)), \sigma(f(n+1))]) \geqslant \varepsilon/3$. Mais ceci implique $\bar{a}(]0, \sigma(f(n))]) \geqslant n\varepsilon/3$ ce qui contredit le fait que $\bar{a}$ est bornée.

L'existence du processus A est classique (cf. [*1*]).

D. FORMULE DE ITO

D-1. Théorème

1) *On considère les données indiquées en* A *avec* $F = \mathscr{L}(E, G)$. *De plus, soit* X *un processus qui appartient à* $\mathscr{S}_2$ *(cf.* B-4*) et qui admet localement une variation quadratique finie en moyenne (cf.* C-1*). Soit* f *une fonction deux fois différentiable, définie sur* E *et à valeurs dans* G, *dont la différentielle seconde* f'' *est bornée sur les parties bornées de* E.

Soient U, Q, V *et* S *les processus définis par :*

$$U(t) = \sum_{s \leqslant t} (X_s - X_{s-})^{\otimes 2}$$

$$Q(t) = \sum_{s \leqslant t} [f(X_s) - f(X_{s-}) - f'(X_{s-})(X_s - X_{s-})]$$

$$V(t) = X_t^{\otimes 2} - X_0^{\otimes 2} - \int_{]0,t]} (X_{u-} \otimes dX_u + dX_u \otimes X_{u-})$$

$$S(t) = V(t) - U(t)$$

Alors les processus U, Q, V *et* S *sont des processus à variation forte bornée par trajectoires et* S *est à trajectoires continues : dans ces égalités, les sommations sont définies par trajectoires et l'intégrale*

$$\int_{]0,t]} (X_{u-} \otimes dX_u + dX_u \otimes X_{u-})$$

est une intégrale stochastique au sens indiqué en B-7.

Soit A *le processus naturel associé à la variation quadratique de* X *comme indiqué en* C-5. *Soit* B *le processus défini par* $B_t = \sum_{s \leqslant t} \| X_s - X_{s-} \|^2$. *Pour tout couple de temps d'arrêt* (σ, σ') *avec* $\sigma < \sigma'$ *on a*

$$\| U_{\sigma'} - U_\sigma \| \leqslant \| B_{\sigma'} - B_\sigma \| \qquad \text{P-p. s.}$$

et

$$\| S_{\sigma'} - S_\sigma \| \leqslant \| A_{\sigma'} - A_\sigma \| \qquad \text{P-p. s.}$$

2) *Sous les hypothèses du* 1), *si* X *appartient à* $\mathscr{S}_1$ (*cf.* B-4) *et si* f'' *est uniformément continue sur les parties bornées de* E, *on a :*

$$f(X_t) - f(X_0) = Q(t) + \int_{]0,t]} f'(X_{u-}).dX_u - \frac{1}{2}\sum_{s \leqslant t} f''(X_{s-})(X_s - X_{s-})^{\otimes 2} + \frac{1}{2}\int_{]0,t]} f''(X_{u-}).dV_u = Q(t) + \int_{]0,t]} f'(X_{u-}).dX_u + \frac{1}{2}\int_{]0,t]} f''(X_u).dS_u$$

Dans ces formules :

— *les sommations sont définies par trajectoires,*

— *l'intégrale* $\int_{]0,t]} f'(X_{u-}).dX_u$ *est une intégrale stochastique au sens indiqué en* B-7,

— *les intégrales* $\int_{]0,t]} f''(X_{u-}).dV_u$ *et* $\int_{]0,t]} f''(X_{u-}).dS_u$ *peuvent être déterminées par trajectoires,*

— *l'égalité est une égalité de processus définis à l'indistinguabilité près.*

3) *Sous les hypothèses du* 1), *si* X *appartient à* $\mathscr{S}_3$, *et si* f'' *est faiblement uniformément continue sur les parties bornées de* E, *soit* L(*t*) *le processus cadlag défini, à l'indistinguabilité près, par :*

$$L(t) = f(X_t) - f(X_0) - Q(t) - \frac{1}{2}\int_{]0,t]} f''(X_{u-}).dS_u = f(X_t) - f(X_0) - Q(t) - \frac{1}{2}\int_{]0,t]} f''(X_{u-})dV_u + \frac{1}{2}\sum_{s \leqslant t} f''(X_{s-}).(X_s - X_{s-})^{\otimes 2}$$

les intégrales et les sommations considérées pouvant être déterminées par trajectoires.

Alors, pour tout élément x' *du dual* G' *de* G, $\langle L(t), x' \rangle$ *est indistinguable*

du processus $\int_{]0,t]} \langle f'(X_u-), x' \rangle . dX_u$, *ce processus étant lui-même une intégrale stochastique au sens indiqué en* B-7 *avec* $G = \mathbb{R}$ *: dans ce cas, le symbole* $\int_{]0,t]} f'(X_u-).dX_u$ *correspond donc à une intégrale stochastique « faible ».*

Preuve. — Pour alléger la présentation, nous allons prouver simultanément le 1) et le 2) et donc nous placer sous les hypothèses du 2).

a) Les processus U et Q sont bien définis d'après le lemme C-3. Il en est de même de V, et donc de S, puisque X appartient à $\mathscr{S}_2$. De plus, tous ces processus sont continus à droite ; de même, toutes les intégrales considérées définissent des processus continus à droite : il suffit donc de prouver la formule pour $t = 1$.

b) Soit $(\sigma(n))_{n>0}$ la suite croissante de temps d'arrêt définis par $\sigma(n) = \inf. \{ t : \| X_t \| > n \}$; puisque X est cadlag, $\lim_{n\to\infty} P[\sigma(n) < 1] = 0$. Il suffit donc de prouver la formule annoncée pour chaque processus $(X_{t \wedge \sigma(n)})_{t\in T}$. Compte tenu du lemme B-8, il suffit donc de prouver la formule annoncée pour les processus de la forme

$$X_{t \wedge \sigma(n)-} = X_t . 1_{[0,\sigma(n)[} + X_{\sigma(n)-} . 1_{[\sigma(n),1]}$$

c'est-à-dire pour des processus uniformément bornés.

On suppose donc, désormais, que X est uniformément borné par *a*. De même, on suppose que X admet une variation quadratique finie en moyenne.

c) Soit $b = \sup_{\|x\| \leqslant a} \| f''(x) \|$. Puisque X appartient à $\mathscr{S}_1$, pour tout $n>0$, il existe $c(n)$ tel que, pour tout processus Y$\mathscr{A}$-étagé à valeurs dans la boule unité de F, on ait :

$$P\left[\left\| \int_{]0,1]} Y . dX \right\| \geqslant c(n) \right] \leqslant 2^{-n}$$

De même, puisque X appartient à $\mathscr{S}_2$, pour tout $n > 0$, il existe $e(n)$ tel que, pour tout processus Y$\mathscr{A}$-étagé à valeurs dans la boule unité de E, on ait :

$$P\left[\left\| \int_{]0,1]} (Y \otimes dX + dX \otimes Y) \right\| \geqslant e(n) \right] \leqslant 2^{-n}$$

Pour tout $n > 0$, soit :

$$d(n) = \inf. \left\{ \frac{2^{-n}}{b . c(n)}, \frac{1}{2n^3}, \frac{2^{-n}}{e(n)} \right\}$$

d) Pour tout $n > 0$, soit $(\sigma(n, k))_{k>0}$ la suite croissante de temps d'arrêt définie par récurrence par $\sigma(n, 0) = 0$ et

$$\sigma(n, k+1) = \text{inf.}\{ t : t > \sigma(n, k) \quad \text{et} \quad \| X_t - X_{\sigma(n,k)} \| > d(n) \}$$

Pour tout n, $\lim_{k\to\infty} P([\sigma(n, k) < 1]) = 0$ puisque X n'admet pas de discontinuité oscillatoire.

e) Pour tout $n > 0$, soit V^n le processus défini, pour tout couple (t, ω) appartenant à $[\sigma(n, k), \sigma(n, k+1)[$, par :

$$V^n(t) = \sum_{j=0}^{k-1} (X_{\sigma(n,j+1)} - X_{\sigma(n,j)})^{\otimes 2}$$

et par

$$V^n(1) = \sum_{j=0}^{\infty} (X_{\sigma(n,j+1)} - X_{\sigma(n,j)})^{\otimes 2}$$

Nous allons d'abord montrer que la suite de processus $(V^n)_{n>0}$ converge P. p. s. uniformément par trajectoires vers le processus V.

On a :

$$V^n(1) = \sum_{k=0}^{\infty} (X^{\otimes 2}_{\sigma(n,k+1)} - X^{\otimes 2}_{\sigma(n,k)})$$
$$- \sum_{k=0}^{\infty} (X_{\sigma(n,k+1)} - X_{\sigma(n,k)}) \otimes X_{\sigma(n,k)}$$
$$- \sum_{k=0}^{\infty} X_{\sigma(n,k)} \otimes (X_{\sigma(n,k+1)} - X_{\sigma(n,k)})$$

(la première somme étant évidemment égale à $X_1^{\otimes 2} - X_0^{\otimes 2}$).

Soit $Z^n(t)$ le processus prévisible défini, pour tout couple (t, ω) appartenant à $]\sigma(n, k), \sigma(n, k+1)]$, par $Z^n(t) = X_{\sigma(n,k)}$.

Posons :

$$\bar{V}^n(t) = X_t^{\otimes 2} - X_0^{\otimes 2} - \int_{]0,t]} [Z^n(u) \otimes dX_u + dX_u \otimes Z^n(u)]$$

On a $V^n(1) = \bar{V}^n(1)$ et, si $t \in [\sigma(n, k), \sigma(n, k+1)[$,

$$V^n(t) = \bar{V}^n(t) - (X_t - X_{\sigma(n,k)})^{\otimes 2}$$

Par construction, pour tout t et tout ω, $\| Z_t^n(\omega) - X_t(\omega) \| \leqslant d(n)$.

Par construction de $d(n)$, on a donc, pour tout temps d'arrêt σ :

$$P[\| \bar{V}^n_\sigma - V_\sigma \| \geqslant 2^{-n}] \leqslant 2^{-n}$$

ceci étant notamment satisfait pour le temps d'arrêt σ défini par :

$$\sigma = \inf \{ t : || \bar{V}_t^n - V_t || > 2^{-n} \}$$

On en déduit :

$$P \left[(\underset{t \in T}{\text{Sup.}} || \bar{V}_t^n - V_t ||) \geqslant 2^{-n} \right] \leqslant 2^{-n}$$

D'après le lemme de Borel-Cantelli ceci montre la convergence uniforme par trajectoires des processus $\bar{V}^n$ vers le processus V sauf sur un ensemble H de mesure nulle, d'où le même résultat pour les V^n.

f) On se propose, maintenant, de prouver que V est P. p. s. à variation forte bornée par trajectoires. D'après ce qui précède, il existe H(n) élément de $\mathcal{F}$ tel que $P[H(n)] \leqslant 2^{-n+1}$ et tel que, si $\omega \notin H(n)$, pour tout t et tout $k \geqslant n$, $|| V_t^k(\omega) - V_t(\omega) || \leqslant 2^{-n}$. Il suffit de prouver que, en restriction à $\Omega \backslash H(n)$, V est à variation forte bornée en moyenne (ce qui impliquera que V est aussi à variation forte bornée par trajectoires).

Soit $\{ t(j) \}_{1 \leqslant j \leqslant k}$ une famille finie croissante d'éléments de T ; on a, pour $i \geqslant n$:

$$E\left(\sum_{j=1}^{k-1} || V_{t(j+1)} - V_{t(j)} ||. 1_{\Omega \backslash H(n)} \right)$$

$$\leqslant 2k.2^{-i} + E\left(\sum_{j=1}^{k-1} || V^i_{t(j+1)} - V^i_{t(j)} || \right)$$

$\leqslant 2k.2^{-i}$ + espérance de la variation quadratique de X

d'où le résultat escompté.

g) Pour tout n et k, soit :

$$A(n, k) = \left\{ \omega : || X_{\sigma(n,k)} - X_{\sigma(n,k)^-} || > \frac{1}{n} \right\}$$

$$B(n, k) = \Omega \backslash A(n, k)$$

$$Z_{n,k} = X_{\sigma(n,k)}. 1_{B(n,k)} + X_{\sigma(n,k)^-}. 1_{A(n,k)}$$

De plus, pour tout $n > 0$, soit $U^n(t)$ (resp. $W^n(t)$) le processus défini sur $[\sigma(n, k), \sigma(n, k+1)[$, par

$$U^n(t) = \sum_{j=1}^{k} (X_{\sigma(n,j)} - Z_{n,j})^{\otimes 2} = \sum_{j=1}^{k} (X_{\sigma(n,j)} - X_{\sigma(n,j)^-})^{\otimes 2}. 1_{A(n,j)}$$

$$W^n(t) = \sum_{j=1}^{k} [X_{\sigma(n,j)} - X_{\sigma(n,j-1)}]^{\otimes 2}. 1_{A(n,j)}$$

Si $\omega \in A(n, k)$ et si $t = \sigma(n, k)(\omega)$, il existe un entier k' tel que $\omega \in A(n+1, k')$ et $t = \sigma(n+1, k')(\omega)$ donc $U^n(t)$ converge vers $U(t)$ et la variation totale de $[U(t) - U^n(t)]$ décroît vers 0 par trajectoires.

De plus, sur $A(n, j)$,

$$\| X_{\sigma(n,j-1)} - X_{\sigma(n,j)-} \| < \frac{1}{2n^3}$$

et

$$\| X_{\sigma(n,j)} - X_{\sigma(n,j)-} \| > \frac{1}{n}$$

donc

$$\| W^n(t) - U^n(t) \| < \frac{2}{n} \cdot \left\{ \sum_{j=1}^{k} \| X_{\sigma(n,j)} - X_{\sigma(n,j)-} \|^2 \cdot 1_{A(n,j)} \right\}$$

ce qui montre que la suite de processus $(W^n(t))_{n>0}$ converge vers le processus $U(t)$ quand n tend vers l'infini, uniformément par trajectoires.

Soit $S^n(t)$ le processus défini sur $[\sigma(n, k), \sigma(n, k+1)[$ par

$$S^n(t) = \sum_{j=1}^{k} [X_{\sigma(n,j)} - X_{\sigma(n,j-1)}]^{\otimes 2} \cdot 1_{B(n,j)} = V^n(t) - W^n(t)$$

Ce qui précède et le f) montre que, sauf sur H, la suite S^n converge P. p. s. uniformément par trajectoires vers $V(t) - U(t) = S(t)$.

h) Pour tout n, on a :

$$f(X_1) - f(X_0) = \sum_{k>0} [f(X_{\sigma(n,k+1)}) - f(X_{\sigma(n,k)})](1_{A(n,k+1)} + 1_{B(n,k+1)})$$

D'après la formule de Taylor, pour tout n, k et ω, il existe $R_{n,k}(\omega)$, $R_{n,k}(\omega)$ pouvant être majoré comme indiqué au j) ci-après et étant tel que

$$f(X_{\sigma(n,k+1)}) - f(X_{\sigma(n,k)}) = f'(X_{\sigma(n,k)})[X_{\sigma(n,k+1)} - X_{\sigma(n,k)}] + \frac{1}{2} f''(X_{\sigma(n,k)})(X_{\sigma(n,k+1)} - X_{\sigma(n,k)})^{\otimes 2} + R_{n,k}(\omega)$$

(en fait, l'identité qui précède ne sera utilisée que sur $B(n, k+1)$.

On a donc :

$$f(X_1) - f(X_0) = \sum_{k>0} \left\{ \sum_{i=1}^{4} a^i_{n,k} \right\}$$

avec

$$a^1_{n,k} = f'(X_{\sigma(n,k)})(X_{\sigma(n,k+1)} - X_{\sigma(n,k)})$$

$$a^2_{n,k} = \frac{1}{2} f''(X_{\sigma(n,k)}) \cdot (X_{\sigma(n,k+1)} - X_{\sigma(n,k)})^{\otimes 2} \cdot 1_{B(n,k+1)}$$

$$a^3_{n,k} = R_{n,k} \cdot 1_{B(n,k+1)}$$

$$a^4_{n,k} = [-f'(X_{\sigma(n,k)})(X_{\sigma(n,k+1)} - X_{\sigma(n,k)}) + f(X_{\sigma(n,k+1)}) - f(X_{\sigma(n,k)})] \cdot 1_{A(n,k+1)}$$

On se propose, maintenant, de montrer que $\sum_k a^i_{n,k}$ converge P. p. s. pour $1 \leqslant i \leqslant 4$, quand n tend vers l'infini.

i) On a

$$\sum_{k \geqslant 0} a^1_{n,k} = \int_{]0,1]} f'[Z^n(t)]dX_t$$

où Z^n est le processus défini au *e*).

On a, par définition de $d(n)$ (cf. *c*)) :

$$P\left[\left\| \int_{]0,1]} [f'(Z^n_t) - f'(X_{t-})].dX_t \right\| \geqslant 2^{-n}\right] \leqslant 2^{-n}$$

D'après le lemme de Borel-Cantelli, ceci montre la convergence P. p. s. de $\sum_{k \leqslant 0} a^1_{n,k}$ vers $\int_{]0,1]} f'(X_{t-}).dX_t$.

j) Puisque f'' est uniformément continue sur les parties bornées de E, pour tout $\varepsilon > 0$, et pour n assez grand, on a, si $\omega \in B(n, k+1)$:

$$\| a^3_{n,k} \| \leqslant \varepsilon . \| X_{\sigma(n,k+1)} - X_{\sigma(n,k)} \|^2$$

Le fait que X admette une variation quadratique finie en moyenne montre que $\sum_{k \geqslant 0} a^3_{n,k}$ converge dans L_1 vers 0 quand n tend vers l'infini.

k) On a : $a^2_{n,k} = a^5_{n,k} - a^6_{n,k}$ avec

$$a^5_{n,k} = \frac{1}{2} f''(X_{\sigma(n,k)}).(X_{\sigma(n,k+1)} - X_{\sigma(n,k)})^{\otimes 2}$$

$$a^6_{n,k} = \frac{1}{2} f''(X_{\sigma(n,k)}).(X_{\sigma(n,k+1)} - X_{\sigma(n,k)})^{\otimes 2} . 1_{A(n,k+1)}$$

D'une part, $\sum_{k \geqslant 0} a^6_{n,k}$ converge vers $\int_{]0,1]} f''(X_{t-}).dU_t$ d'après le *g*) et le fait que la suite $(K_n)_{n>0}$ de parties de $\Omega \times T$ est croissante et épuise les sauts de X, en posant :

$$K_n = \bigcup_{k>0} \{ (t, \omega) : \omega \in A(n, k) \text{ et } t = \sigma(n, k)(\omega) \} .$$

D'autre part, $\sum_{k \geqslant 0} a^5_{n,k} = \int_{]0,1]} f''(X_{t-}).dV^n_t$

On a donc (cf. le *e*)) :

$$\sum_{k\geqslant 0} a^5_{n,k} - \int_{]0,1]} f''(X_t-).dV_t$$

$$= \int_{]0,1]} f''(X_t-)[(Z^n(t) - X(t^-)) \otimes dX_t + dX_t \otimes (Z^n(t) - X(t^-))]$$

Or $\underset{t,\omega}{\text{Sup}} \,||\, Z^n_t(\omega) - X_t-(\omega) \,||\, \leqslant d(n) \leqslant \dfrac{2^{-n}}{b.c(n)}$ (cf. C)) donc

$$P\left[\left\| \sum_{k\geqslant 0} a^5_{n,k} - \int_{]0,1]} f''(X_t-).dV_t \right\| \geqslant 2^{-n}\right] \leqslant 2^{-n}$$

ceci et le lemme de Borel-Cantelli montre que $\sum_{k\geqslant 0} a^5_{n,k}$ converge P. p. s. vers $\int_{]0,1]} f''(X_t-).dV_t$.

l) En considérant une sous suite, on voit que $\sum_{k>0} a^4_{n,k}$ converge P. p. s. vers Q(1) d'après le lemme C-3, les propriétés de la suite $(K_n)_{n>0}$ (cf. le début de *k*) et la définition de A(*n*, *k*) (cf. le milieu de *g*)).

En considérant à nouveau, une sous-suite, on peut déduire de la convergence dans L_1 de $\sum_{k\geqslant 0} a^3_{n,k}$ une convergence P. p. s. ce qui établit la formule de Ito annoncée.

m) Soit σ un temps d'arrêt, le lemme B-8 et la définition de S(*t*) montrent que $S_\sigma = S_{\sigma-}$. On en déduit que S(*t*) est à trajectoires continues ce qui achève la démonstration des 1) et 2) ; en effet, la mesure définie sur la tribu des prévisibles et associée à la variation totale de S est majorée par la mesure *a* associée à la variation quadratique de X comme indiqué en C-5 ; puisque S est prévisible, on en déduit que, pour tout couple (σ, σ') de temps d'arrêt avec $\sigma < \sigma'$, on a $||\, S_{\sigma'} - S_\sigma \,|| \leqslant ||\, A_{\sigma'} - A_\sigma \,||$ P. p. s.

n) Il reste à prouver le 3). Or L(*t*) est bien défini d'après le 1). De plus, pour tout élément x' du dual G' de G on a $(\langle f, x' \rangle)' = \langle f', x' \rangle$ et $(\langle f, x' \rangle)'' = \langle f'', x' \rangle$: le 3) se déduit alors du 2) en prenant $G = \mathbb{R}$.

D-2. Remarques

1) Si X_1 et X_2 sont deux processus qui satisfont aux hypothèses du théorème qui précède, il en est de même de $X_1 + \lambda X_2$ quel que soit λ réel.

2) Si X est à variation forte bornée en moyenne, X appartient à $\mathscr{S}_1$, $\mathscr{S}_2$ et $\mathscr{S}_3$.

3) Si E est un espace de Hilbert, si on munit $E \otimes E$ de la norme de Hilbert-Schmidt, et si X est une martingale de carré intégrable, X appartient à $\mathscr{S}_2$ et admet une variation quadratique finie en moyenne ; en effet, pour tout processus $Y\mathscr{A}$-étagé à valeurs dans E et borné par 1 on a :

$$E\left[\left\| \int Y \otimes dX \right\|^2\right] \leqslant E[\| X_1 - X_0 \|^2].$$

4) Si X est une martingale de carré intégrable et si G est un espace de Hilbert, X appartient à $\mathscr{S}_1$; en effet, pour tout processus $Y\mathscr{A}$-étagé à valeurs dans $F = \mathscr{L}(E, G)$ et borné par 1 on a :

$$E\left[\left\| \int Y dX \right\|^2\right] \leqslant E[\| X_1 - X_0 \|^2].$$

D-3. THÉORÈME

1) *On considère les données indiquées en* A *avec* $F = \mathscr{L}(E, G)$. *De plus, soit* X *un processus qui appartient à* $\mathscr{S}_1$ (*cf.* B-4) *et qui admet localement une variation quadratique finie en moyenne* (*cf.* C-1).

Soit f une fonction deux fois différentiable, définie sur E, *à valeurs dans* G, *et dont la différentielle seconde f'' est uniformément continue sur les parties bornées de* E.

On a alors :

$$f(X_t) - f(X_0) = \sum_{s \leqslant t} [f(X_s) - f(X_{s-}) - f'(X_{s-})(X_s - X_{s-})] + \int_{]0,t]} f'(X_{u-}).dX_u - \frac{1}{2}\sum_{s \leqslant t} f''(X_{s-})(X_s - X_{s-})^{\otimes 2} + \frac{1}{2}\langle f''(X_{t-})(X_t \otimes X_t) \rangle$$

Dans cette formule :

— *les sommations sont définies par trajectoires ;*

— *la première intégrale est une intégrale stochastique au sens indiqué en* B-7 ;

— *la somme des deux derniers termes définit un processus continu ;*

— *le processus* $W_t = \langle f''(X_{t-})(X_t \otimes X_t) \rangle$ *est un processus cadlag à variation forte bornée par trajectoires qu'on peut construire de la façon suivante :*

Soit $(\sigma(n, k))$ *une famille de temps d'arrêt telle que, pour tout n,*

$$\operatorname*{Sup.}_{t,\omega} \| X^n - X \| \leqslant 2^{-n}$$

si

$$X^n = \sum_{k>0} X_{\sigma(n,k)} \cdot 1_{]\sigma(n,k),\sigma(n,k+1)]}$$

(*cf.* B-6). *Pour tout n, soit* W^n *le processus défini, sur* $]\sigma(n, k), \sigma(n, k+1)]$ *par*

$$W^n = \sum_{j=0}^{k-1} f''(X_{\sigma(n,j)})[(X_{\sigma(n,j+1)} - X_{\sigma(n,j)})^{\otimes 2}]$$

Alors la suite $(W^n)_{n>0}$ *converge* P. p. s. *uniformément par trajectoires vers le processus* W.

2) *On considère toujours les données indiquées en* A. *On suppose, de plus, que* X *appartient à* $\mathcal{S}_3$ (*cf.* B-4) *et admet localement une variation quadratique finie en moyenne* (*cf.* C-1). *On suppose que* G *est un dual d'espace de Banach séparable. Soit f une fonction définie sur* E, *deux fois différentiable, à valeurs dans* G, *dont la différentielle seconde f'' est faiblement uniformément continue sur les parties bornées de* E. *On peut encore donner un sens à* $\langle f''(X_t-)(X_t \otimes X_t) \rangle = W_t$; *le processus* (W_t) *est un processus à valeurs dans* G, *cadlag, dont la variation forte est bornée par trajectoires ; si f'' est uniformément bornée par* K, *si* B *est le processus cadlag défini par* $B_t = \sum_{s \leqslant t} \| X_s - X_{s-} \|^2$ *et si* A *est le processus naturel associé à la variation quadratique de* X (*cf.* C-5), *la variation totale de* W *est majorée, par trajectoires, par celle de* K(A + B).

Le processus W *est le processus cadlag unique à l'indistinguabilité près tel que, pour tout élément x' de* J, *si* G *est le dual* J' *de* J, *on ait*

$$x' \circ W = \langle [x' \circ f''(X_t-)](X_t \otimes X_t) \rangle$$

pour tout x', le processus du membre de droite de cette égalité ayant le sens indiqué au 1) *qui précède (avec* $G = \mathbb{R}$).

Soit alors L(*t*) *le processus cadlag défini par*

$$L(t) = f(X_t) - f(X_0) - \sum_{s \leqslant t} [f(X_s) - f(X_{s-}) - f'(X_{s-})(X_s - X_{s-})] + \frac{1}{2} \sum_{s \leqslant t} f''(X_s)(X_s - X_{s-})^{\otimes 2} - \frac{1}{2} \langle f''(X_t-)(X_t \otimes X_t) \rangle$$

les sommations étant déterminées par trajectoires.

Pour tout élément x' de J, $L(t) \circ x'$ *est indistinguable du processus*

$\int_{]0,t]} [f'(X_{u-}) \circ x'].dX_u$, *ce processus étant lui-même une intégrale stochastique au sens indiqué en* B-7 *avec* $G = \mathbb{R}$: *dans ce cas le symbole* $\int_{]0,t]} f'(X_{u-}).dX_u$ *correspond donc encore à une intégrale stochastique* « *faible* ».

Preuve. — 1) Pour l'essentiel, la preuve est la même que celle du théorème D-1 : la seule différence réside dans l'étude de la convergence de $\sum_{k \geqslant 0} a^5_{n,k}$ c'est-à-dire dans l'étude de la convergence des processus W^n indiqués ci-dessus. On peut supposer que l'espérance de la variation quadratique de X est bornée par K.

Soit $(\bar{X}^n)_{n>0}$ une suite de processus σ-$\mathscr{A}$-étagés telle que, pour tout n,

$$\text{Sup} \, || \bar{X}^n_t - X_t || \leqslant 2^{-n}$$

(on procède comme en B-6 et on utilise le fait que toute variable aléatoire est limite uniforme de variables aléatoires σ-étagées).

Pour tout n, soit $\bar{X}^n = \sum_{i \in I} \bar{X}^n_i$ chaque processus $\bar{X}^n_i$ étant de la forme $\bar{X}^n_i = a^n_i . 1_{A(n,i)}$, les $(A(n, i))_{i \in I}$ étant deux à deux disjoints et appartenant à $\mathscr{A}$ et les a^n_i étant des éléments de E. On pose $\tilde{X}^n_i = X . 1_{A(n,i)}$. Pour tout n, soit $\overline{W}^n$ le processus défini par $\overline{W}^n = \sum_{i \in I} \langle f''(a^n_i)(\tilde{X}^n_i, \tilde{X}^n_i) \rangle$ (cf. C-4).

Alors la suite $(\overline{W}^n)_{n>0}$ converge P. p. s. uniformément par trajectoires vers un processus $\overline{W} = \langle f''(X_{t-})(X_t, X_t) \rangle$: en effet,

$$P \, [\text{Sup.} \, (|| \overline{W}^n - \overline{W}^{n+k} ||) \geqslant (\sqrt{2})^{-n}] \leqslant K(\sqrt{2})^{-n}$$

puisque l'espérance de la variation totale de $\overline{W}^n - \overline{W}^{n+k}$ est inférieure à $2^{-n}.K$ (cf. C-4). Ensuite, n étant fixé, il existe $k \geqslant n$ tel que

$$P \, [\text{Sup.} \, || \overline{W}^k - \overline{\overline{W}}^k || \geqslant 2^{-n}] \leqslant 2^{-n}$$

où $\overline{\overline{W}}^k$ est le processus défini par

$$\overline{\overline{W}}^k = \sum_{i \in I} \left\{ \sum_{j=0}^{h-1} f''(a^n_i) \right\} [(\tilde{X}^n_i(\sigma(k, j+1)) - \tilde{X}^n_i(\sigma(k, j))^{\otimes 2})]$$

sur $]\sigma(k, h), \sigma(k, h+1)]$ (on utilise la construction indiquée en C-4 et le fait que X appartient à $\mathscr{S}_1$).

Enfin, la variation totale de $\overline{\overline{W}}^k - W^k$ est inférieure à $2^{-n}.K$ ce qui donne le résultat escompté (et $\overline{W} = W$).

2) Notons d'abord que les hypothèses sur f'' impliquent que f'' est bornée sur les parties bornées de E. Par ailleurs, ce 2) est évidemment l'analogue du 3) du théorème D-1. Le problème est, qu'ici, il faut d'abord construire le processus W_t.

On peut supposer que l'espérance de la variation quadratique de X est finie et que f'' est uniformément bornée par K.

Ensuite, on considère une suite $(x'_n)_{n>0}$ dense dans la boule unité de J ; pour tout n, on peut définir le processus $(W_t \circ x'_n)$; ceci permet de construire (W_t) par trajectoires sauf sur un ensemble de trajectoires de mesure P-nulle parce que, pour tout n, le processus $(W_t \circ x'_n)$ a une variation totale majorée, par trajectoires, par celle du processus K(A + B) (ceci se prouve comme dans le théorème D-1).

La fin se prouve comme au théorème D-1.

E. CONTRE-EXEMPLES

E-1. Processus déterministe non a variation bornée

Le but du contre-exemple qui suit est de montrer qu'on peut avoir un processus déterministe, à valeurs dans un espace de Hilbert séparable, dont la variation quadratique est finie, continu et de répartition en moyenne d'ordre deux (cf. [8]) mais dont la variation totale n'est pas finie. Ceci montre que, même si E est un espace de Hilbert et si G = R, les hypothèses du théorème D-1 sont plus générales que celles indiquées en [3].

On pose $E = L^2([0, 1], \mathscr{B}_{[0,1]}, m)$ où m est la mesure de Lebesgue. Soit X le processus à valeurs dans E défini par, quels que soient t et ω, $X_t(\omega) = 1_{[0,t]}$, ($1_{[0,t]}$ étant donc considéré comme un élément de E). On vérifie facilement que ce processus X satisfait aux propriétés indiquées (la mesure stochastique associée à X est dominée par $m \otimes P$ si P est la probabilité donnée sur l'espace de base).

E-2. Martingale dont la variation quadratique est infinie

Le but du contre-exemple qui suit est de donner un exemple de martingale $(M_t)_{t\in\bar{\mathbb{N}}}$ à valeurs dans un espace de Banach réflexif E, telle que $E[\| M_\infty - M_0 \|^2] < +\infty$ et dont la variation quadratique n'est pas localement finie en moyenne.

On pose $E = l^4$ = sous-ensemble des suites $(a_n)_{n>0}$ de réels muni de la

norme $\left(\sum_{n\geqslant 0} |a_n|^4\right)^{1/4} < +\infty$. On considère une martingale discrète $(M_n)_{n>0}$ à valeurs dans E et telle que, pour tout $n > 0$

$$(M_{n+1} - M_n) = (1_{A(n)} - 1_{B(n)}).u_n.\left(\frac{1}{n}\right)^{1/3}$$

où u_n est la suite dont tous les termes sont nuls sauf le $n^{\text{ième}}$ qui est égal à 1 et où A(n) et B(n) sont tels que

$$P[A(n)] = P[B(n)] = \frac{1}{2} \text{ et } B(n) = \Omega \backslash A(n).$$

On vérifie facilement que la martingale M satisfait aux propriétés indiquées.

BIBLIOGRAPHIE

[1] C. DOLEANS, Existence du processus croissant naturel associé à un potentiel de classe (D). *Z. Wahrscheinlichkeitstheorie verw.*, t. **9**, 1968, p. 309-314.

[2] C. DOLEANS et P. A. MEYER, Intégrales stochastiques par rapport aux martingales locales. Séminaires de probabilité. IV. *Lecture notes in mathematics*, 124, Springer Verlag.

[3] H. KUNITA, Stochastic integrals based on martingales taking values in Hilbert space. *Nagoya Math. J.*, vol. **38**, 1970, p. 41-52.

[4] H. KUNITA and S. WATANABE, On square integrable martingales. *Nagoya Math. J.*, vol. **30**, 1967, p. 209-245.

[5] M. MÉTIVIER, Stochastic integral and vector valued measures. *Séminaires de Probabilité de Rennes*, 1972.

[6] M. MÉTIVIER, Mesure stochastique locale associée à une martingale locale, à valeurs dans un espace de Hilbert. *C. R. Acad. Sci. Paris*, t. **277**, 1973, série A, p. 809-812.

[7] J. PELLAUMAIL, Formule de Ito dans le cas réel non continu. *Séminaire de Probabilité de Rennes*, 1973.

[8] J. PELLAUMAIL, Sur l'intégrale stochastique et la décomposition de Doob-Meyer. *Astérisque*, n° 9, 1973.

[9] M. YOR, Sur les intégrales stochastiques à valeurs dans un espace de Banach. *C. R. Acad. Sci. Paris*, t. **277**, 1973, série A, p. 467.

(Manuscrit reçu le 20 décembre 1974)