ANNALES DE L'I. H. P., SECTION B

BERNARD ROYNETTE

Théorème central-limite pour le groupe des déplacements de $\mathbb{R}^d$

Annales de l'I. H. P., section B, tome 10, n° 4 (1974), p. 391-398

<http://www.numdam.org/item?id=AIHPB_1974__10_4_391_0>

© Gauthier-Villars, 1974, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Annales de l'I. H. P., section B » (http://www.elsevier.com/locate/anihpb) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (http://www.numdam.org/conditions). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
http://www.numdam.org/

Ann. Inst. Henri Poincaré, Section B :
Vol. X, n° 4, 1974, p. 391-398. *Calcul des Probabilités et Statistique.*

Théorème central-limite pour le groupe des déplacements de $\mathbb{R}^d$

par

Bernard ROYNETTE

SUMMARY. — We prove here a central limit theorem for the group of d dimensional Euclidean motions, which generalizes a theorem by V. N. Tutubalin.

INTRODUCTION ET NOTATIONS

Soit G_d le groupe des déplacements de $\mathbb{R}^d$. G_d est un groupe de Lie connexe égal au produit semi-direct de $SO(d) x_\phi \mathbb{R}^d$, où $SO(d)$ est la composante connexe du groupe orthogonal de $\mathbb{R}^d$, et où l'homomorphisme ϕ est donné par l'action naturelle de $SO(d)$ sur $\mathbb{R}^d$: $\phi(v)(\lambda) = v.\lambda$ ($v \in SO(d)$, $\lambda \in \mathbb{R}^d$). Tout élément de G_d sera noté (v, λ) (ou encore $(v(g), \lambda(g))$) avec $v \in SO(d)$ et $\lambda \in \mathbb{R}^d$. σ désignera la mesure de Haar normalisée de $SO(d)$ et I_d, la matrice identité de dimension d, sera son élément neutre.

Soit $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ un espace de probabilité et $(U_1, Y_1), (U_2, Y_2), \ldots (U_n, Y_n), \ldots$ une suite de variables aléatoires définies sur Ω à valeurs dans G_d, indépendantes et de même loi μ (avec U_i, de loi ν, à valeurs dans $SO(d)$, et Y_i à valeurs dans $\mathbb{R}^d$). Soit la v. a. Z_n à valeurs dans $\mathbb{R}^d$ définie par :

$$Z_n = Y_1 + U_1 Y_2 + U_1 U_2 Y_3 + \ldots + U_1 U_2 \ldots U_{n-1} Y_n.$$

Z_n n'est rien d'autre que la composante sur $\mathbb{R}^d$ de la marche aléatoire de pas (U_i, Y_i) partant de $(I_d, 0)$ à l'instant 0. Nous ferons les deux hypothèses suivantes :

1) la mesure ν est apériodique, c'est-à-dire que le plus petit sous-groupe fermé contenant le support de ν est $SO(d)$ tout entier.

2) La mesure μ admet un moment d'ordre 2, soit :

$$\int_{G_d} |\lambda(g)|^2 d\mu(g) < +\infty$$

Notre but, ici, est de prouver le théorème suivant :

THÉORÈME. — Pour $d \geqslant 3$, et sous les hypothèses précédentes, la variable aléatoire $X_n = \frac{Z_n}{\sqrt{n}}$ converge en loi, quand $n \to \infty$, vers $\mathcal{N}(0, \Theta I_d)$, la loi normale centrée de covariance ΘI_d (où $\Theta \geqslant 0$).

Ce théorème a déjà été prouvé par V. N. Tutubalin dans le cas où $d = 3$ (voir [4]). Notre démonstration, différente de celle de Tutubalin, reprend des méthodes déjà utilisées dans [2]. Nous avons pourtant choisi de reproduire ici les démonstrations de [2], afin que ce papier soit plus lisible. Enfin, dans [5], L. G. Gorostiza obtient le même résultat que le nôtre mais par une méthode, nous semble-t-il, plus compliquée.

DÉMONSTRATION DU THÉORÈME

LEMME 1. — Soit ν une mesure de probabilité apériodique sur le groupe SO(d), pour $d \geqslant 3$. Alors ν^{*n} converge vers la mesure de Haar σ de SO(d) quand n tend vers l'infini.

Démonstration. — D'après H. S. Collins [1], il suffit de prouver que le support de ν n'est inclus dans aucune partie de la forme $g.H$, où $g \in SO(d)$ et où H est un sous-groupe fermé distingué propre de SO(d). Soit so(d) l'algèbre de Lie du groupe SO(d), et so($d, \mathbb{C}$) sa complexifiée. Nous savons (voir par exemple [3], pages II, 6 et 7) que so($d, \mathbb{C}$) est une algèbre de Lie simple pour $d \geqslant 3$, sauf pour $d = 4$. En conséquence, pour tout $d \geqslant 3, d \neq 4$, l'algèbre de Lie so(d) est simple. Nous allons distinguer deux cas :

1) $d \neq 4$. Supposons que (supp ν) $\subset g.H$, où H est un sous-groupe distingué fermé propre de SO(d). Soit H_0 la composante connexe de H. Puisque H est distingué, la sous-algèbre de Lie de so(d) correspondant à H_0 est un idéal, et puisque H est propre et so(d) simple, cet idéal est nul. H est donc discret, et central. On a donc : (supp ν) $\subset g.Z$, où Z est le centre de SO(d). Dans ces conditions, puisque ν est apériodique, $g.Z$ engendre topologiquement SO(d), ce qui est absurde, puisque SO(d) serait alors abélien.

2) $d = 4$. Soit $S_3 \times S_3 \xrightarrow{\pi} SO(4)$ le revêtement universel de π SO(4) (S_3 est le groupe des quaternions de norme 1). Le noyau de π est formé de deux éléments. Il est clair qu'il existe une mesure de probabilité unique $\tilde{\nu}$ sur

$S_3 \times S_3$ telle que $\pi(\tilde{\nu}) = \nu$ et telle que $\tilde{\nu}(\tilde{0}) = \frac{1}{2}\nu(0)$ si $\tilde{0}$ est un ouvert de $S_3 \times S_3$ en homéomorphisme par π avec 0. Si on suppose ν apériodique et $(\text{supp } \nu) \subset g.H$, avec H distingué, fermé, propre, on voit sans peine que $(\text{supp } \tilde{\nu}) \subset \tilde{g}.\tilde{H}$ avec $\tilde{H}$ distingué, fermé, propre, et $\pi(\tilde{g}) = g$. De plus $\tilde{\nu}$ est apériodique. Il reste donc à prouver que cette assertion est absurde. La composante connexe $\tilde{H}_0$ de $\tilde{H}$ a une algèbre de Lie qui est un idéal. Or l'algèbre de Lie de $S_3 \times S_3$ est $so(3) \oplus so(3)$. Cet idéal est donc $(so(3), 0)$, $(0, so(3))$ ou $(0, 0)$. Le groupe $\tilde{H}_0$ est donc $S_3 \times e$, $e \times S_3$ ou $e \times e$. Examinons déjà le premier cas. Dans ces conditions, $\tilde{H}$ est de la forme $S_3 \times \Gamma$, où Γ est un sous-groupe distingué discret, et donc central de S_3. On en déduit que $\text{supp } \tilde{\nu} \subset S_3 \times g_1.Z$, où Z est le centre de S_3, et où $g_1 \in S_3$. Puisque $\tilde{\nu}$ est apériodique, $g_1.Z$ engendre topologiquement S_3, ce qui est absurde (S_3 serait abélien). Les autres cas se traitent de la même façon.

Remarque 1. — Soit $\lambda \in \mathbb{R}^d$, et Y'_i la v. a. à valeurs dans $\mathbb{R}^d$ définie par $Y'_i = \lambda + Y_i - U_i\lambda$. Définissons Z'_n par :

$$Z'_n = Y'_i + U_1.Y'_2 + U_1U_2Y'_3 + \ldots + U_1U_2 \ldots U_{n-1}Y'_n.$$

Il est clair que l'on a

$$Z'_n = Z_n + \lambda - U_1U_2 \ldots U_n\lambda.$$

Soit :

$$X'_n = \frac{Z'_n}{\sqrt{n}} = \frac{Z_n}{\sqrt{n}} + \frac{\lambda - U_1 \ldots U_n\lambda}{\sqrt{n}}.$$

La v. a. $\lambda - U_1 \ldots U_n\lambda$ étant uniformément bornée, il est évident que $X_n = \frac{Z_n}{\sqrt{n}}$ converge en loi vers $\mathcal{N}(0, \Theta I_d)$ si et seulement si X'_n converge en loi vers la même limite.

Remarque 2. — Il est possible de choisir λ tel que $E(Y'_i) = 0$. En effet, puisque la relation $E(Y'_i) = 0$ s'écrit encore: $(I_d - E(U_i))\lambda = -E(Y_i)$, l'assertion de cette remarque sera prouvée si on montre que $\det(I_d - E(U_i)) \neq 0$. Or, si cette quantité était nulle, 1 serait valeur propre de $E(U_i)$, et il existerait un $\gamma \in \mathbb{R}^d$, de norme 1, tel que $E(U_i).\gamma = E(U_i.\gamma) = \gamma$. Mais $U_i.\gamma$ appartient à la sphère unité de $\mathbb{R}^d$, qui est strictement convexe, et donc $U_i.\gamma = \gamma$ presque sûrement. Cela implique que le support de ν est inclus dans le sous-groupe Γ de $SO(d)$ défini par :

$$\Gamma = \{ v \in SO(d) \,;\, v.\gamma = \gamma \}.$$

Or Γ est isomorphe à $SO(d-1)$, et cela est absurde, puisque ν est apériodique.

En vertu de ces deux remarques, nous supposerons dans tout ce qui suit que Y_i est centrée.

LEMME 2. — La matrice de covariance de la v. a. centrée X_n tend, quand n tend vers l'infini vers ΘI_d ($\Theta \geqslant 0$).

Démonstration. — Soit $\mathcal{F}_n$ la σ-algèbre engendrée par (U_1, Y_1), (U_2, Y_2), ... (U_n, Y_n). Nous avons, pour tout n,

$$E(U_1 . U_2, \ldots U_n Y_{n+1}) = E(U_1 \ldots U_n E^{\mathcal{F}_n} Y_{n+1}) = 0$$

puisque Y_{n+1} est centrée et indépendante de $\mathcal{F}_n$, ce qui prouve que X_n est centrée.

— Soit $\bar{K}_n$ la matrice de covariance de la v. a. $U_1 \ldots U_n . Y_{n+1}$, et K_Y celle de la v. a. Y_i. Un calcul simple prouve alors que :

$$\bar{K}_n = \int_{SO(d)} g K_Y g^t d\sigma_n(g), \quad \text{où } \sigma_n \text{ est la loi de } U_1 \ldots U_n,$$

i. e. : $\sigma_n = \nu^{*n}$. Le lemme 1 prouve alors que

$$\bar{K}_n \underset{n \to \infty}{\longrightarrow} K = \int_{SO(d)} g K_Y g^t d\sigma(g).$$

Comme il est clair que, pour tout $v \in SO(d)$, $vKv^{-1} = K$, la matrice K est scalaire et donc de la forme ΘI_d.

Θ est supérieur ou égal à 0, puisque K est limite de matrices de covariance.

. Pour tout $p > 0$, et $1 \leqslant i, j \leqslant d$, on a :

$$E\{(U_1 U_2 . U_n Y_{n+1})_i . (U_1 \ldots U_{n+p} Y_{n+p+1})_j\}$$
$$= E\{(U_1 \ldots U_n Y_{n+1})_i . (U_1 \ldots U_{n+p} E^{\mathcal{F}_{n+p}} Y_{n+p+1})_j\} = 0.$$

De cela, on déduit, que, si K_n est la matrice de covariance de X_n que :

$$K_n = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} \bar{K}_n \underset{n \to \infty}{\longrightarrow} \Theta I_d$$

Remarque 3. — Il est clair, vu la forme de K, que Θ est strictement positif si et seulement si $K_Y \neq 0$, c'est-à-dire si la loi de Y n'est pas ponctuelle. En particulier, si μ est apériodique, $\Theta > 0$.

Fixons quelques notations. Si A est une matrice $d \times d$, nous noterons A* sa transposée et $\| A \| = d . \sup_{1 \leqslant i, j \leqslant d} | A_{ij} |$. Si t est un élément de $\mathbb{R}^d$, $| t |$ désignera sa norme euclidienne ; si t et s sont deux éléments de $\mathbb{R}^d$, $\langle t, s \rangle$ sera leur produit scalaire usuel. Si $k \in \mathbb{N}$, nous noterons ϕ_k la fonction caractéristique de X_k, soit : $\phi_k(t) = E(\exp i \langle t, X_k \rangle) = E\left(\exp i \left\langle t, \frac{Z_k}{\sqrt{k}} \right\rangle\right)$.

Notre but est donc maintenant de prouver que :

$$\lim_{n\to\infty} \phi_n(t) = \exp -\frac{1}{2}(\Theta \mid t \mid^2)$$

Nous allons maintenant prouver le théorème annoncé en plusieurs étapes:

1) D'après le lemme précédent, on a $\| K_k - \Theta I_d \| \leqslant \varepsilon_k$, où $\varepsilon_k \underset{k\to\infty}{\longrightarrow} 0$. A partir de maintenant, nous fixons k.

2) *Prouvons que, pour* $\mid t \mid$ *assez petit,*

$$\sup_{v\in SO(d)} \mid \phi_k(t) - \phi_k(vt) \mid \leqslant C_1 \varepsilon_k \mid t \mid^2$$

La v. a. X_k étant centrée et de matrice de covariance K_k, on a :

$$\phi_k(t) = 1 - \frac{1}{2} t^* K_k t + o(\mid t \mid^2) \qquad \text{(A)}$$

De même

$$\phi_k(vt) = 1 - \frac{1}{2} t^* v^* K_k\, vt + o(\mid t \mid^2).$$

D'où :

$$\begin{aligned} \mid \phi_k(t) - \phi_k(vt) \mid &= \left| \frac{1}{2} t^* v^* (K_k - \Theta I_d)\, vt - \frac{1}{2} t^* (K_k - \Theta I_d) t \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{2} \Theta t^* v^* I_d\, vt - \frac{1}{2} \Theta t^* I_d t + o(\mid t \mid^2) \right| \\ &\leqslant C_1' \varepsilon_k \mid t \mid^2 + o(\mid t \mid^2) \qquad \text{puisque } \| K_k - I_d \| \leqslant \varepsilon_k \\ &\leqslant 2C_1' \varepsilon_k \mid t \mid^2, \qquad \text{pour } \mid t \mid \text{ assez petit.} \end{aligned}$$

(Remarquons que la constante C_1, ainsi que les constantes C_2 et C_3 qui vont suivre, ne dépendent pas de k).

3) *Prouvons que, pour* $\mid t \mid$ *assez petit, et pour tout* n :

$$\left| E\left(\exp i \left\langle t, \frac{Z_{nk}}{\sqrt{k}} \right\rangle \right) - \{ \phi_k(t) \}^n \right| \leqslant C_1 n \varepsilon_k \mid t \mid^2$$

Tout d'abord, on a :

$$\begin{aligned} &E\left(\exp i \left\langle t, \frac{1}{\sqrt{k}} Z_{(n+1)k} \right\rangle \right) \\ &= E\left(\exp i \left\langle t, \frac{1}{\sqrt{k}} Z_{nk} \right\rangle . \exp i \left\langle t, U_1 U_2 \ldots U_{nk} \cdot \frac{1}{\sqrt{k}} (Y_{nk+1} + U_{nk+1} Y_{nk+2} \right. \right. \\ &\qquad \left. \left. + \ldots + U_{nk+1} \ldots U_{(n+1)k-1} \cdot Y_{(n+1)k}) \right\rangle \right) \\ &= E\left(\exp i \left\langle t, \frac{1}{\sqrt{k}} Z_{nk} \right\rangle . E^{\mathcal{F}_{nk}} (\exp i \left\langle t, U_1 U_2 \ldots U_{nk} \cdot \frac{1}{\sqrt{k}} (Y_{nk+1} + U_{nk+1} Y_{nk+2} \right. \right. \\ &\qquad \left. \left. + \ldots + U_{nk+1} \ldots U_{(n+1)k-1} Y_{(n+1)k}) \right\rangle \right). \end{aligned}$$

La v. a. $\frac{1}{\sqrt{k}}(Y_{nk+1}+U_{nk+1}Y_{nk+2}+\ldots+U_{nk+1}U_{nk+2}\ldots U_{(n+1)k-1}Y_{(n+1)k})$ étant indépendante de $\mathcal{F}_{nk}$ et de même loi que X_k, on a :

$$E\left(\exp i\left\langle t, \frac{1}{\sqrt{k}}Z_{(n+1)k}\right\rangle\right) = E\left(\exp i\left\langle t, \frac{1}{\sqrt{k}}Z_{nk}\right\rangle . \phi_k(U_1U_2\ldots U_{nk}^{*}.t)\right)$$

D'où :

$$\left|E\left(\exp i\left\langle t, \frac{1}{\sqrt{k}}Z_{(n+1)k}\right\rangle\right) - E\left(\exp i\left\langle t, \frac{1}{\sqrt{k}}Z_{nk}\right\rangle \phi_k(t)\right|\right.$$
$$\leqslant E\{|\phi_k(U_1U_2\ldots U_{nk}^{*}.t) - \phi_k(t)|\} \leqslant C_1\varepsilon_k|t|^2,$$

d'après le point 2. La majoration du point 3 s'en déduit alors de manière immédiate par récurrence sur n.

4) *Prouvons que* $\overline{\lim_{n\to\infty}}\,|\phi_{nk}(t) - e^{-\frac{1}{2}\Theta|t|^2}| \leqslant C_2\varepsilon_k|t|^2$, *pour* t *dans un compact.* En raison de (A), on a :

$$\lim_{n\to\infty}\left\{\phi_k\left(\frac{t}{\sqrt{n}}\right)\right\}^n = e^{-\frac{1}{2}t^{*}K_kt}$$

D'après le point 3, on a donc, pour t dans un compact :

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}\left|E\exp i\left\langle \frac{t}{\sqrt{n}}, \frac{1}{\sqrt{k}}Z_{nk}\right\rangle - \left\{\phi_k\left(\frac{t}{\sqrt{n}}\right)\right\}^n\right| \leqslant C_1n\varepsilon_k\frac{|t|^2}{n} \leqslant C_1\varepsilon_k|t|^2$$

D'où :

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}\left|\phi_{nk}(t) - e^{-\frac{1}{2}t^{*}K_kt}\right| = \overline{\lim_{n\to\infty}}\left|E\left\{\exp i\left\langle \frac{t}{\sqrt{n}}, \frac{1}{\sqrt{k}}Z_{nk}\right\rangle\right\} - e^{-\frac{1}{2}t^{*}K_kt}\right|$$
$$\leqslant C_1\varepsilon_k|t|^2$$

Puisque $||K_k - \Theta I_d|| \leqslant \varepsilon_k$, il est alors clair que :

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}\,|\phi_{nk}(t) - e^{-\frac{1}{2}\Theta|t|^2}| \leqslant C_2\varepsilon_k|t|^2 \qquad \text{pour } t \text{ dans un compact.}$$

5) *Prouvons que, pour* t *dans un compact,*

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}\sup_{0\leqslant p<k}|\phi_{nk+p}(t) - \phi_{nk}(t)| \leqslant C_3\varepsilon_k|t|^2$$

Soit p un entier plus petit que k. On a :

$$\phi_{nk+p}(t) - \phi_{nk}(t) = E\left\{\exp i\left\langle \frac{t}{\sqrt{n+\frac{p}{k}}}, \frac{1}{\sqrt{k}}Z_{nk+p}\right\rangle\right\}$$

$$- \mathrm{E}\left\{ \exp i\left\langle \frac{t}{\sqrt{n}}, \frac{1}{\sqrt{k}} \mathrm{Z}_{nk} \right\rangle \right\}$$

$$= \mathrm{E}\left\{ \exp i\left\langle \frac{t}{\sqrt{n+\frac{p}{k}}}, \frac{1}{\sqrt{k}} . \mathrm{Z}_{nk} \right\rangle \psi_p\left(\mathrm{U}_1 \ldots \mathrm{U}_{nk}^* . \frac{t}{\sqrt{n+\frac{p}{k}}} \right) \right\}$$

$$- \mathrm{E}\left\{ \exp i\left\langle \frac{t}{\sqrt{n}}, \frac{1}{\sqrt{k}} \mathrm{Z}_{nk} \right\rangle \right\}$$

où ψ_p est la fonction caractéristique de la v. a.

$$\frac{1}{\sqrt{k}}(\mathrm{Y}_1 + \mathrm{U}_1 \mathrm{Y}_2 + \ldots + \mathrm{U}_1 \ldots \mathrm{U}_{p-1} \mathrm{Y}_p),$$

d'après un calcul analogue à celui du point 3. D'où :

$$|\phi_{nk+p}(t) - \phi_{nk}(t)| \leqslant \mathrm{E}\left| \psi_p\left(\mathrm{U}_1 \ldots \mathrm{U}_{nk}^* . \frac{t}{\sqrt{n+\frac{p}{k}}} \right) - 1 \right|$$

$$+ \left| \mathrm{E}\left\{ \exp i\left\langle \frac{t}{\sqrt{n+\frac{p}{k}}}, \frac{1}{\sqrt{k}} \mathrm{Z}_{nk} \right\rangle \right\} - \mathrm{E}\left\{ \exp i\left\langle \frac{t}{\sqrt{n}}, \frac{1}{\sqrt{k}} \mathrm{Z}_{nk} \right\rangle \right\} \right|$$

Il est clair que :

$$\sup_{1 \leqslant p < k} \mathrm{E}\left| \psi_p\left(\mathrm{U}_1 \ldots \mathrm{U}_{nk}^* . \frac{t}{\sqrt{n+\frac{p}{k}}} \right) - 1 \right| \underset{n \to \infty}{\longrightarrow} 0 \quad \text{(pour } t \text{ dans un compact)}$$

D'autre part :

$$\left| \mathrm{E}\left\{ \exp i\left\langle \frac{t}{\sqrt{n+\frac{p}{k}}}, \frac{1}{\sqrt{k}} \mathrm{Z}_{nk} \right\rangle \right\} - \mathrm{E} \exp\left\{ i\left\langle \frac{t}{\sqrt{n}}, \frac{1}{\sqrt{n}} \mathrm{Z}_{nk} \right\rangle \right| \right.$$

$$\leqslant \left| \left\{ \phi_k\left(\frac{t}{\sqrt{n+\frac{p}{k}}} \right) \right\}^n - \left\{ \phi_k\left(\frac{t}{\sqrt{n}} \right) \right\}^n \right| + 2\mathrm{C}_1 \varepsilon_k |t|^2$$

d'après le point 3.

$$\text{Or, } \lim_{n \to \infty} \left\{ \phi_k\left(\frac{t}{\sqrt{n+\frac{p}{k}}} \right) \right\}^n = \lim_{n \to \infty} \left\{ \phi_k\left(\frac{t}{\sqrt{n}} \right) \right\}^n = e^{-\frac{1}{2} t^* \mathrm{K}_k t}$$

D'où :

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} \sup_{1\leqslant p\leqslant k} |\phi_{nk+p}(t) - \phi_{nk}(t)| \leqslant 2C_1\varepsilon_k |t|^2 \quad \text{pour } t \text{ dans un compact.}$$

6) *Des points* 4 *et* 5, *on déduit alors* :

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} |\phi_n(t) - e^{-\frac{1}{2}\Theta|t|^2}| \leqslant (2C_1 + C_2)\varepsilon_k |t|^2$$

Le théorème s'ensuit alors, en faisant tendre k vers l'infini. Q. E. D.

BIBLIOGRAPHIE

[1] H. S. COLLINS, Convergence of convolutions iterates of measures. *Duke Math. Journal*, 1962, p. 259-264.

[2] B. ROYNETTE, Marches aléatoires sur le groupe des déplacements de R^d, *à paraître*.

[3] J. P. SERRE, *Algèbres de Lie semi-simples complexes*. W. A. Benjamin, New York, Amsterdam, 1966.

[4] V. N. TUTUBALIN, The central limit theorem for random motions of a euclidian space. *Selected Transl. in Math. Statist. and Probability*, Vol. **12**, 1973, p. 47 à 57.

[5] L. G. GOROSTIZA, The central limit theorem for randoms motions of d dimensional Euclidean space. *The Annals of Probability*, Vol. **1**, 1973, n° 4, p. 603-612.

(Manuscrit reçu le 6 décembre 1974)