ANNALES DE L'I. H. P., SECTION B

P. Y. GLORENNEC
J. PELLAUMAIL

Théorème de Riesz pour des processus réels

Annales de l'I. H. P., section B, tome 10, n° 3 (1974), p. 355-367
<http://www.numdam.org/item?id=AIHPB_1974__10_3_355_0>

© Gauthier-Villars, 1974, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Annales de l'I. H. P., section B » (http://www.elsevier.com/locate/anihpb) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (http://www.numdam.org/conditions). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM
Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
http://www.numdam.org/

Ann. Inst. Henri Poincaré,
Vol. X, n° 3, 1974, p. 355-367.

Section B :
Calcul des Probabilités et Statistique.

Théorème de Riesz pour des processus réels

par

P. Y. GLORENNEC et J. PELLAUMAIL
I. N. S. A., Rennes.
Laboratoire de probabilités : E. R. A. 250

RÉSUMÉ. — Le but essentiel de cette étude est de prouver l'analogue du théorème de Riesz pour une mesure stochastique (cf. [8]) ; plus précisément on montre qu'on peut identifier l'espace des mesures stochastiques en moyenne d'ordre p à un espace « faiblement » compact d'applications linéaires continues.

INTRODUCTION

Dans [8], on associe, à certains processus, une mesure stochastique, mesure définie sur la tribu des prévisibles et à valeurs dans L_p. Ceci conduit à se demander si on peut prouver, pour une telle mesure stochastique, des propriétés généralisant les propriétés classiques des mesures définies sur la tribu des boréliens de $\mathbb{R}$.

Le but essentiel de l'étude qui suit est de généraliser les théorèmes de Riesz et de Paul Levy aux mesures stochastiques : comme dans le cas réel usuel, la démonstration du théorème de Levy ainsi généralisé (proposition A-6), repose sur une propriété de compacité « faible ».

Plus précisément, on montre qu'on peut identifier l'espace des mesures stochastiques en moyenne d'ordre p et un sous-espace fermé de l'espace des applications linéaires continues de $\mathscr{H}$ dans $L_p(\Omega, \mathscr{F}, P)$ où $\mathscr{H}$ désigne l'espace des processus à trajectoires continues muni de la norme de la convergence uniforme (théorème A-2).

Au paragraphe A, on prouve ces résultats quand Ω est un espace quelconque.

Au paragraphe B, on étudie le cas où Ω est un espace topologique et où les tribus $\mathcal{F}_t$ des événements « antérieurs à t » sont liées à la topologie donnée sur Ω.

On peut, dans ce cas, obtenir quelques résultats complémentaires et choisir, pour $\mathcal{H}$, l'espace des processus continus par rapport à l'ensemble des deux variables t et ω, c'est-à-dire un espace plus petit que dans le cas général considéré au paragraphe A.

A. CAS OÙ Ω EST QUELCONQUE

A.1. Données et conventions générales pour le paragraphe A.

Pour tout ce paragraphe A, on se donne :

— *un ensemble des temps* $T = [0, 1]$

— *un espace probabilisé* $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ *complet*

— *une famille croissante* $(\mathcal{F}_t)_{t\in T}$ *de sous-tribus de* $\mathcal{F}$ *contenant toutes tous les ensembles de mesure nulle de* $\mathcal{F}$. *On suppose que cette famille est continue à droite, c'est-à-dire que, pour tout élément* t *de* T, $\mathcal{F}_t = \mathcal{F}_{t^+}$.

Par convention quand on parlera de processus adapté, prévisible, de tribu des prévisibles, etc..., ce sera toujours relativement à la base de processus $(\Omega, \mathcal{F}, P)(\mathcal{F}_t)_{t\in T})$.

On désignera par $\mathcal{X}$ *l'ensemble des processus* X *déterministes (c'est-à-dire que* $X_t(\omega) = X_t(\omega')$ *quels que soient* t, ω, *et* ω'*) à trajectoires continues et tels que* $X_0 = 0$.

On désignera par $\mathcal{H}$ *l'ensemble des processus réels bornés adaptés à trajectoires continues, et nuls pour* $t = 0$: *cet espace sera toujours muni de la topologie de la convergence uniforme.*

Pour tout élément t *de* T, *on désignera par* $\mathcal{H}_t$ *le sous-espace de* $\mathcal{H}$ *constitué des processus* h *tels que* $h = h.1_{\Omega\times[0,t]}$.

On notera L_p l'espace $L_p(\Omega, \mathcal{F}, P)$ et L'_p le dual de L_p c'est-à-dire $L'_p = L_\infty$ si $p = 1$ et $L'_p = L_q$ si $p > 1$ et $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Sauf précision contraire, L_p et L'_p seront munis de leurs topologies usuelles d'espaces de Banach. On notera L_p^σ l'espace L_p muni de sa topologie faible $\sigma(L_p, L'_p)$, et on posera $\langle f, g \rangle = E[f.g]$.

Rappelons que la tribu $\mathcal{F}'$ de parties de $(\Omega \times]0, 1])$ engendrée par les éléments de $\mathcal{H}$ est la tribu des prévisibles (cf., par exemple [4]).

A.2. **Théorème.**

On considère les données et conventions indiquées précédemment. Soit p un réel avec $p > 1$. *Soit m une mesure stochastique réelle en moyenne d'ordre p. Soit* $(h, g) \rightsquigarrow \hat{m}(h, g)$ *l'application qui à tout élément* (h, g) *de* $(\mathscr{H} \times L'_p)$ *associe le réel* $\hat{m}(h, g) = E\left[g \cdot \int_{]0,\,1]} h.dm\right] = \left\langle \int_{]0,\,1]} h.dm, g \right\rangle$

Cette application $\hat{m}$ *satisfait aux conditions suivantes :*

(i) *elle est bilinéaire continue (comme indiqué précédemment,* $\mathscr{H}$ *étant muni de la topologie de la convergence uniforme et* L'_p *de sa topologie usuelle d'espace de Banach).*

(ii) *Pour tout élément t de* T, *et pour tout couple* (h, g) *appartenant à* $(\mathscr{H}_t \times L'_p)$, $\hat{m}(h, g) = \hat{m}(h, E(g \mid \mathscr{F}_t))$.

(iii) *Pour tout élément* H *de* $\mathscr{F}$, *si h, élément de* $\mathscr{H}$, *est tel que*

$$h = h.1_{(\Omega\setminus H)\times([0,\,1])}, \quad \text{on a } \hat{m}(h, 1_H) = 0$$

(où 1_H *est considéré comme un élément de* L'_p*).*

Réciproquement, soit $\hat{m}$ *une fonction réelle définie sur* $(\mathscr{H} \times L'_p)$ *qui satisfait aux conditions* (i), (ii) *et* (iii) *qui précèdent. Alors* $\hat{m}$ *induit une mesure stochastique m en moyenne d'ordre p unique telle que, pour tout élément* (h, g) *de* $(\mathscr{H} \times L'_p)$, *on ait :*

$$\hat{m}(h, g) = E\left[g \cdot \int_{]0,\,1]} h.dm\right]$$

On peut donc identifier l'ensemble des mesures stochastiques en moyenne d'ordre p à un sous-espace $\mathscr{M}$ *de* $\mathscr{L}(\mathscr{H}, L'_p ; R)$. *De plus, ce sous-espace* $\mathscr{M}$ *est fermé pour la topologie de la convergence simple donc toute partie bornée de* $\mathscr{M}$ *est relativement compacte pour cette même topologie.*

Preuve :

1) Si *m* est une mesure stochastique, on vérifie facilement que l'application $\hat{m}$ satisfait aux conditions indiquées. Le problème est donc de prouver la réciproque. Avant cela, et pour éclairer la situation, nous allons associer à $\hat{m}$ une autre application $\bar{m}$. On suppose donc, désormais, que $\hat{m}$ est une application réelle définie sur $(\mathscr{H} \times L'_p)$ qui satisfait aux conditions (*i*), (*ii*) et (*iii*).

Pour tout élément *h* fixé de $\mathscr{H}$, l'application $g \rightsquigarrow \hat{m}(h, g)$ définit une forme linéaire continue sur L'_p c'est-à-dire un élément de L_p (puisque L_p est réflexif) que l'on notera $\bar{m}(h)$: on a donc, par définition, $\hat{m}(h, g) = \langle \bar{m}(h), g \rangle$.

L'application $h \rightsquigarrow \bar{m}(h)$ est alors une application définie sur $\mathscr{H}$, à valeurs

dans L_p et qui satisfait aux conditions (*i'*), (*ii'*) et (*iii'*) suivantes (qui correspondent respectivement aux conditions (*i*), (*ii*) et (*iii*)) :

(*i'*) $\bar{m}$ est linéaire continue, $\mathscr{H}$ étant muni de la norme de la convergence uniforme et L_p étant muni de sa topologie ou, ce qui revient ici au même, de sa topologie d'espace de Banach (cf. par exemple [3], chap. IV, paragraphe 5, proposition 7), p. 114.

(*ii'*) Pour tout élément t de T, $\bar{m}(h)$ appartient à $L_p(\Omega, \mathscr{F}_t, P)$ si h appartient à $\mathscr{H}_t$.

(*iii'*) Si H appartient à $\mathscr{F}$ et si h est un élément de $\mathscr{H}$ tel que $h \cdot 1_{H \times [0,1]} = h$, alors $\bar{m}(h) \cdot 1_H = \bar{m}(h)$.

Notons que, réciproquement, si on se donne une application $\bar{m}$ définie sur $\mathscr{H}$, à valeurs dans L_p et qui satisfait aux conditions (*i'*), (*ii'*) et (*iii'*) qui précèdent, alors la fonction réelle $\hat{m}$, définie sur $(\mathscr{H} \times L'_p)$ par $\hat{m}(h, g) = \langle \bar{m}(h), g \rangle$, satisfait aux conditions (*i*), (*ii*) et (*iii*).

(Tout ce qui précède se vérifie de façon immédiate).

Pour la suite de la démonstration, on va utiliser la fonction $\bar{m}$.

2) Nous allons maintenant prouver la propriété suivante :

(*iv'*) si $(h_n)_{n>0}$ est une suite d'éléments de $\mathscr{H}^+$ telle que $h_n \downarrow 0$ on a

$$\lim_{n \to \infty} || \bar{m}(h_n) || = 0$$

(où $|| \bar{m}(h_n) ||$ désigne évidemment la norme de $\bar{m}(h_n)$ dans L_p).

Pour cela, nous allons raisonner par l'absurde en supposant qu'il existe $\varepsilon > 0$ et une suite $(h_n)_{n>0}$ d'éléments de $\mathscr{H}$ telle que $h_n \downarrow 0$ et telle que, pour tout n, $|| \bar{m}(h_n) || \geqslant 4\varepsilon$. Soit a la norme de $\bar{m}$ c'est-à-dire que $a = \operatorname{Sup}_{||h|| \leqslant 1} . || \bar{m}(h) ||$. On pose $b = \operatorname{Sup}_{t, \omega} | h_1(t, \omega) |$.

Pour tout $n > 0$, soit $\sigma(n)$ le temps d'arrêt défini par :

$$\sigma(n) = \inf. \{ t : | h_n(t, \omega) | \geqslant \varepsilon / a \}$$

Soit $A(n) = [\sigma(n) < 1]$.

La suite $(\sigma(n))_{n>0}$ est une suite croissante telle que $A(n) \downarrow \phi$ d'après le théorème de Dini.

Pour tout $n > 0$, soit $u(n)$ le processus h_n arrêté à $\sigma(n)$, c'est-à-dire que :

$$u(n)(t, \omega) = \begin{cases} h_n(t, \omega) & \text{si} \quad t \leqslant \sigma(n)(\omega) \\ h_n(\sigma(n)(\omega), \omega) & \text{si} \quad t \geqslant \sigma(n)(\omega) \end{cases}$$

et soit $v(n) = h_n - u(n)$. On a $| v(n) | \leqslant 2b$.

Les processus $u(n)$ et $v(n)$ appartiennent à $\mathscr{H}$.

De plus $|| u(n) || \leqslant \varepsilon / a$ donc :

$$\begin{aligned} || \bar{m}[v(n)] || &\geqslant || \bar{m}(h_n) || - || \bar{m}[u(n)] || \\ &\geqslant 4\varepsilon - \varepsilon = 3\varepsilon \end{aligned}$$

Enfin, $v(n) = v(n).1_{A(n)\times T}$ donc

(condition (*iii'*)) $\bar{m}[v(n)] = 1_{A(n)}.\bar{m}[v(n)]$

On construit alors l'application croissante f de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{N}$ définie par récurrence de la façon suivante : $f(1) = 1$, puis $f(n)$ étant déterminée, soit $f(n+1)$ un entier supérieur à $f(n)$ tel que

$$\| \bar{m}[v(f(n))].1_{A[f(n+1)]} \| \leqslant \varepsilon$$

Soit $B(n) = A[f(n)] \setminus A[f(n+1)]$. On a

$$\| \bar{m}[v(f(n))].1_{B(n)} \| \geqslant 2\varepsilon$$

Pour alléger les notations, on pose $\bar{v}(n) = v[f(n)]$.

Pour tout $n > 0$, soit ϕ_n le processus défini par

$$\phi_n = \inf_{k>n} [1 - 2^k \mid \bar{v}(k) \mid]$$

et

$$\phi_n^+ = \mathrm{Sup}\,\{0, \phi_n\}.$$

Le processus ϕ_n^+ appartient à $\mathscr{H}$; en effet, si ω appartient à Ω, il existe $j > n$ tel que $\omega \notin A[f(j)]$ donc $\phi_n(\omega)$ est la borne inférieure d'une famille finie de fonctions continues, à savoir

$$\phi_n(\omega) = \inf_{j \geq k > n} [1 - 2^k \mid \bar{v}(k) \mid]$$

On pose alors, $w_n = \bar{v}(n).\phi_n^+$. On a

$$\phi_n^+.1_{B(n)\times T} = 1_{B(n)\times T} \quad \text{donc} \quad w_n.1_{B(n)\times T} = \bar{v}(n).1_{B(n)\times T}$$

donc

$$\bar{m}(w_n).1_{B(n)} = \bar{m}(v(n)).1_{B(n)}$$

Or $|w_n| \leqslant 2b$ donc $\sum_{n>0} |w_n| \leqslant 1 + 4b$, en effet, si (t, ω) appartient à l'intervalle stochastique $]\sigma(f[n]), \sigma(f[n+1])]$, $w_k(t, \omega) = 0$ pour $k > n$, $|w_n(t, \omega)| \leqslant 2b$ et, ou bien, pour tout $k < n$, $|w_k(t, \omega)| \leqslant 2^{-k}$ ce qui implique $\sum_{k<n} |w_k(t, \omega)| \leqslant 1$, ou bien il existe un $k < n$ tel que $|w_k(t, \omega)| > 2^{-k}$, ce qui implique $w_j(t, \omega) = 0$ pour $j < k$ et $|w_j(t, \omega)| \leqslant 2^{-j}$ pour $j > k$, soit $\sum_{k<n} |w_k(t, \omega)| \leqslant 1 + 2b$.

La famille $(w_n)_{n>0}$ satisfait donc aux deux conditions suivantes :

$$\sum |w_n| \leqslant 1 + 4b \qquad \text{et, pour tout } n,\ \| \bar{m}(w_n).1_{B(n)} \| \geqslant 2\varepsilon$$

On construit alors l'application croissante g de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{N}$ définie par récurrence de la façon suivante ; $g(1) = 1$ puis, $g(n)$ étant déterminé, soit $g(n+1)$ un entier supérieur à $g(n)$ tel que

$$\left\| \sum_{k \leqslant n} | \bar{m}(w_k) | . 1_{A[f(g(n+1))]} \right\| \leqslant \varepsilon$$

On pose $\bar{w}_n = \sum_{k \leqslant n} w_{g(k)}$.

Pour tout n, $\bar{w}_n$ appartient à $\mathscr{H}$, $| \bar{w}_n(t, \omega) | \leqslant 1 + 4b$ et

$$\begin{aligned} || \bar{m}(\bar{w}_n) || &\geqslant \sum_{j=1}^{\infty} \left\| \sum_{k \leqslant n} \bar{m}(w_{g(k)}) . 1_{B[g(j)]} \right\| \\ &\geqslant \sum_{j=1}^{n} \left(|| \bar{m}(w_{g(j)}) . 1_{B[g(j)]} || - \left\| \sum_{k<j} \bar{m}(w_{g(k)}) . 1_{B[g(j)]} \right\| \right) \\ &\geqslant n[2\varepsilon - \varepsilon] = n\varepsilon \end{aligned}$$

mais ceci contredit le fait que m est continue.

3) Puisque L_p est un espace réflexif, la condition (iv') suffit pour pouvoir appliquer la méthode du prolongement de Daniell (cf. [6] ou [9]) ; autrement dit, l'application $\bar{m}$ prolonge à une classe $\mathscr{D}$ de fonctions stables par convergence dominée et ce prolongement satisfait au théorème de convergence dominée : on notera encore $\bar{m}$ ce prolongement.

Ce prolongement $\bar{m}$ induit une fonction à valeurs dans L_p définie et fortement σ-additive sur $\mathscr{F}'$, fonction que l'on notera m. Il reste à prouver que m est bien une mesure stochastique en moyenne d'ordre p (cf. [8]-1-B-1). Pour cela, il faut prouver les conditions (i) et (ii) de [8]-1-A-6.

Soit u un élément de $]0, 1]$. Soit $(h_n)_{n>0}$ la suite de fonctions définie pour $1/n < u$, par :

$$h_n(t) = \begin{cases} n.t & \text{si} \quad t \leq 1/n \\ 1 & \text{si} \quad 1/n \leq t \leq u \\ 1 + n(u - t) & \text{si} \quad u \leq t \leq \left(u + \dfrac{1}{n}\right) \\ 0 & \text{si} \quad t \geqslant u + 1/n \end{cases}$$

On pose $g_n(t, \omega) = h_n(t) . 1_{(\Omega \times]0, 1])}$. D'après la condition (ii'), pour tout $n > \dfrac{1}{u}$, $\bar{m}(g_n)$ appartient à $L_p(\Omega, \mathscr{F}_{u+1/n}, P)$; on en déduit, par convergence dominée, que $\bar{m}(1_{\Omega \times]0, u]})$ appartient à $L_p\left(\Omega, \mathscr{F}_{u+\frac{1}{n'}}, P\right)$ pour tout n

et donc à $L_p(\Omega, \mathcal{F}_u, P)$ puisque la famille $(\mathcal{F}_t)_{t\in T}$ a été supposée continue à droite : ceci prouve la condition 1-A-6-(*ii*) de [*8*].

Par ailleurs, soit u un élément de $[0, 1[$ et H un élément de $\mathcal{F}_u$. Soit $(h'_n)_{n>0}$ la suite de fonctions définie par :

$$h'_n(t) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad t \leqslant u \\ n(t-u) & \text{si} \quad u \leqslant t \leqslant (u + 1/n) \\ 1 & \text{si} \quad t \geqslant u + 1/n \end{cases}$$

Soit $(g'_n)_{n>0}$ la suite de processus définie par

$$g'_n(t, \omega) = h'_n(t) \cdot 1_{H \times]u, 1]}$$

D'après la condition (*iii'*), $\bar{m}(g'_n) = 1_H . \bar{m}(g'_n)$; on en déduit par convergence dominée, que $m(H \times]u, 1]) = 1_H . m(H \times]u, 1])$ ce qui est la condition 1-A-6-(*i*) de [*8*]. La fonction m est donc bien une mesure stochastique.

4) On a donc prouvé que l'ensemble des mesures stochastiques en moyenne d'ordre p peut être identifié à un sous-espace $\mathcal{M}^1$ de $\mathcal{L}(\mathcal{H}, L_p)$. On vérifie immédiatement, sur les conditions (*ii'*) et (*iii'*), que ce sous-espace est fermé pour la topologie de la convergence simple, $\mathcal{H}$ étant toujours muni de la norme uniforme et L_p de sa topologie faible.

On sait que toute partie bornée de $\mathcal{L}(\mathcal{H}, L_p^\sigma)$ est relativement compacte pour la topologie de la convergence simple (cf., par exemple, [*3*], corollaire 3 du théorème 1), p. 65.

Il en est donc de même de toute partie bornée de $\mathcal{M}^1$ puisque $\mathcal{M}^1$ est une partie fermée. La fin du théorème annoncée s'en déduit en utilisant l'isomorphisme de $\mathcal{M}^1$ dans $\mathcal{M}$ qui à $\bar{m}$ associe $\hat{m}$.

A.3. **Remarques.**

a) Si $p = 1$, on peut de même montrer que l'espace des mesures stochastiques en moyenne peut être identifié à un sous-espace $\mathcal{M}$ de l'espace des applications m continues de $\mathcal{H}$ dans $L_1(\Omega, \mathcal{F}, P)$ qui transforment les parties bornées de $\mathcal{H}$ en parties bornées et équi-intégrables de $L_1(\Omega, \mathcal{F}, P)$; un tel élément m appartient à $\mathcal{M}$ si et seulement si les conditions (*ii*) et (*iii*) du théorème précédent sont satisfaites ; compte tenu du théorème 2-9 de [*2*], la preuve de ceci est rigoureusement identique à celle du théorème précédent.

b) Par définition, le théorème précédent montre qu'on peut identifier l'espace des mesures stochastiques d'ordre p à un sous-espace fermé de fonctions aléatoires linéaires continues d'ordre p (cf., par exemple [*1*], exposé 12).

c) D'après le théorème précédent, on a identifié l'espace des mesures

stochastiques en moyenne d'ordre p comme un sous-espace $\mathscr{M}$ de $\mathscr{L}(\mathscr{H}, L_p, \mathbb{R})$; il revient au même de dire que cet espace peut être identifié à un sous-espace de $(\mathscr{H} \otimes_\pi L_p)'$ (dual topologique de $\mathscr{H} \otimes L_p$ muni de sa norme projective).

d) Il est bien évident qu'en identifiant les mesures stochastiques en moyenne d'ordre p, on identifie une classe importante de processus, à savoir les processus de répartition en moyenne d'ordre p (cf. [8]).

A.4. **Notations : $\mathscr{S}_p$ et $\mathscr{R}_p$.**

Soit $p \geqslant 1$.

Soit X un processus réel tel que, pour tout élément t de T, X_t appartient à L_p. Soit x la fonction définie sur l'algèbre engendrée par les intervalles de $]0, 1]$ par $x(]s, t]) = X_t - X_s$.

On dira que X *appartient à* $\mathscr{S}_p$ *si* x *admet un prolongement à la tribu des boréliens de* T, *prolongement* σ*-additif pour la topologie de* L_p. *On dira que* X *appartient à* $\mathscr{R}_p$ *si* X *est un processus de répartition en moyenne d'ordre* p (*cf.* [8]).

On a évidemment $\mathscr{S}_p \subset \mathscr{R}_p$ et $p \leqslant p'$ implique $\mathscr{S}_{p'} \subset \mathscr{S}_p$ et $\mathscr{R}_{p'} \subset \mathscr{R}_p$. En général, $\mathscr{S}_p$ est différent de $\mathscr{R}_p$ (cf. [8]), III-F, p. 84.

A.5. **Notation $\phi_X(.)$: fonction caractéristique associée à un processus.**

Soit X *un processus appartenant à* $\mathscr{S}_1$ (*cf. précédemment*). *On notera* $\phi_X(u)$ *le « processus » (non adapté) admettant* $\mathbb{R}$ *comme ensemble des temps, basé sur* $(\Omega, \mathscr{F}, P)$ *et défini par* $\phi_X(u) = \int_T e^{iut} dX_t$

A.6. **Proposition.**

Soient $p > 1$ *et* $a > 0$. *Soit* $(X^n)_{n>0}$ *une suite de processus appartenant à* $\mathscr{S}_p$ (*resp.* $\mathscr{R}_p$) (*cf.* A.4), *telle que, quels que soient* $n > 0$ *et* $h \in \mathscr{H}$ (*resp.* $h \in \mathscr{K}$) (*cf.* A.1), $\left\| \int h . dX^n \right\|_p \leqslant a$ *si* $\operatorname{Sup}_{t,\omega} | h(t, \omega) | \leqslant 1$. *Soit* X *un processus appartenant à* $\mathscr{S}_1$.

Alors, la suite $(X^n)_{n>0}$ *converge vers le processus* X *au sens* $\int h dX^n$ *converge faiblement dans* L_p *vers* $\int h dX$ *pour tout élément* h *de* $\mathscr{H}$ (*resp. de* $\mathscr{K}$) *si et*

seulement si, pour tout élément u de $\mathbb{R}$, $\phi_{X^n}(u)$ *converge faiblement dans* L_p *vers* $\phi_X(u)$. *Dans ce cas* X *appartient à* $\mathscr{S}_p$ *(resp.* $\mathscr{R}_p$*).*

Preuve :

1) La convergence indiquée des processus (X^n) vers le processus X implique évidemment la convergence des « fonctions caractéristiques » : le problème est de prouver la réciproque.

2) D'après les hypothèses, les processus X^n appartiennent à une partie « faiblement bornée » et donc « faiblement relativement compacte » comme indiqué au théorème A.2. On peut donc extraire une sous-suite $X^{n(k)}$ qui converge « faiblement » vers Y : d'après le 1), $\phi_{X^{n(k)}}$ converge vers ϕ_X ; mais ceci implique X = Y (on prouve facilement que, comme dans le cas réel, ϕ_X caractérise la « mesure » associée au processus X, qu'il s'agisse de la mesure stochastique définie sur la tribu des prévisibles ou de la mesure définie sur les boréliens de T comme indiqué en A.4). On en déduit que X appartient à $\mathscr{S}_p$ (resp. $\mathscr{R}_p$). De plus, toute sous-suite extraite de la suite $(X^n)_{n>0}$ admet une sous sous-suite qui converge vers X au sens indiqué : on en déduit la même convergence pour la suite initiale $(X^n)_{n>0}$.

A.7. **Remarque.**

Soient $p > 1$ et $a > 0$.

Soit X un processus qui appartient à $\mathscr{S}_1$. Soit $(X^n)_{n>0}$ une suite de processus appartenant à $\mathscr{S}_p$ (resp. $\mathscr{R}_p$) telle que, quels que soient $n > 0$ et $h \in \mathscr{H}$ (resp. $h \in \mathscr{K}$), $\left\| \int h.dX^n \right\| \leqslant a$. On suppose que, pour tout h appartenant à $\mathscr{K}$, $\int h dX^n$ converge faiblement dans L_1 vers $\int h dX$. La proposition qui précède montre alors que X appartient à $\mathscr{S}_p$ (resp. $\mathscr{R}_p$) et que, pour tout élément h de $\mathscr{K}$ (resp. de $\mathscr{H}$), $\int h dX^n$ converge faiblement dans L_p vers $\int h.dX$.

B. CAS OÙ Ω EST UN ESPACE TOPOLOGIQUE

B.1. **Introduction.**

On va supposer, dans ce paragraphe B, que Ω est un espace topologique, et que les tribus $(\mathscr{F}_t)$ sont associées à certaines classes de fonctions continues sur Ω.

Pour faciliter la lecture, ce paragraphe est, dans une certaine mesure, rédigé indépendamment du paragraphe précédent : ceci conduit à quelques répétitions de détail.

B.2. **Données et notations pour le paragraphe** B.

On pose $T = [0, 1]$. On désignera par p un réel strictement supérieur à 1. On se donne :

— un espace topologique Ω ; on pose $\Omega' = \Omega \times]0, 1]$ muni de la topologie produit de la topologie donnée sur Ω et de la topologie usuelle sur $]0, 1]$,

— une famille croissante $(\mathscr{G}_t)_{t\in T}$ de famille de fonctions réelles définies et continues sur Ω.

Pour tout élément t de T, on désignera par $\mathscr{F}_t$ la tribu de parties de Ω engendrée par les éléments de $\mathscr{G}_t$.

Pour alléger l'écriture, on posera $\mathscr{G} = \mathscr{G}_1$ et $\mathscr{F} = \mathscr{F}_1$. On désigne par P une probabilité sur $\mathscr{F}$.

On désignera par $\mathscr{H}$ l'ensemble des fonctions f réelles définies et continues sur Ω', nulles pour $t = 0$ et telles que le processus $(X_t(\omega))_{t\in T}$ défini par $X_t(\omega) = f(\omega, t)$ soit adapté par rapport à la famille $(\mathscr{F}_t)_{t\in T}$.

Quand on considérera une topologie sur $\mathscr{G}_{t'}$ (resp. $\mathscr{H}$), il s'agira toujours de la topologie de la convergence uniforme : l'espace de Banach complété de $\mathscr{G}_t$ pour cette topologie sera noté $\bar{\mathscr{G}}_t$.

Quand on parlera de mesures stochastiques (cf. [8]), ce sera toujours relativement à la « base de processus » $(\Omega, \mathscr{F}, P(\mathscr{F}_{t^+})_{t\in T})$ (insistons sur le fait qu'on prend les tribus $\mathscr{F}_{t^+}$ et non pas les tribus $\mathscr{F}_t$).

Pour tout élément t de T, *on désignera par $\mathscr{H}_t$ l'ensemble des éléments h de $\mathscr{H}$ tels que $h(\omega, s) = 0$ si $s > t$.*

On notera L_p l'espace $L_p(\Omega, \mathscr{F}, P)$ muni de sa topologie usuelle d'espace de Banach et L_p^σ l'espace $L_p(\Omega, \mathscr{F}, P)$ muni de la topologie $\sigma(L_p, L_p')$ où L_p' est le dual de L_p.

B.3. **Proposition.**

La tribu $\mathscr{F}'$ de parties de $(\Omega \times T)$ engendrée par les éléments de $\mathscr{H}$ est la tribu des prévisibles relativement à la famille $(\mathscr{F}_t)_{t\in T}$ (ou, ce qui revient au même, relativement à la famille $(\mathscr{F}_{t^+})_{t\in T}$).

Preuve. — Le fait que les éléments de $\mathscr{H}$ sont mesurables par rapport à la tribu des prévisibles est connu. Il s'agit de prouver la réciproque.

Soient u et v deux éléments de T avec $0 < u < v \leqslant 1$.

Soit $(h_n)_{n>0}$ la suite de fonctions définie sur T par

$$h_n(t) = \begin{cases} 0 \text{ si } t < u - 1/n \text{ ou si } t > v + 1/n \\ 1 \text{ si } u \leqslant t \leqslant v \\ n.\left(t - u + \dfrac{1}{n}\right) \text{ si } u - \dfrac{1}{n} < t < u \\ n.\left(-t + v + \dfrac{1}{n}\right) \text{ si } v < t < v + \dfrac{1}{n} \end{cases}$$

Soit w un élément de T avec $w < u$. Soit g un élément de $\mathscr{G}_w$ et soit $(g_n)_{n>0}$ la suite de fonctions définies sur $(\Omega \times T)$ par $g_n(\omega, t) = g(\omega).h_n(t)$. Pour $\dfrac{1}{n} < u - w$, g_n appartient à $\mathscr{H}$.

Le processus $X_t(\omega)$ défini par $X_t(\omega) = g(\omega).1_{[u,v]} = \lim_{n\to\infty} g_n(\omega, t)$ est donc $\mathscr{F}'$-mesurable. Il en résulte, par définition de $\mathscr{F}_w$, que $H \times [u, v]$ appartient à $\mathscr{F}'$ si H appartient à $\mathscr{F}_w$. Mais ceci implique que $\mathscr{F}'$ contient la tribu des prévisibles puisque celle-ci est engendrée par les « rectangles » $H \times [u, v]$ avec $H \in \mathscr{F}_w$ et $w < u < v$.

B.4. **Théorème.**

Le théorème A.2. *reste exact avec les notations et hypothèses indiquées en* B.2.

Preuve. — On considère l'application $\bar{m}$ comme en A.2 et on prouve de même qu'on peut appliquer la méthode du prolongement de Daniell, et donc prolonger $\bar{m}$ à une classe $\mathscr{D}$ de fonctions stables par convergence dominée.

D'après la proposition qui précède, $\mathscr{D}$ contient les fonctions 1_A pour $A \in \mathscr{F}'$; le prolongement $\bar{m}$ induit donc une fonction à valeurs dans $L_p(\Omega, \mathscr{F}, P)$ définie et fortement σ-additive sur $\mathscr{F}'$, fonction que l'on notera m. Il reste à prouver que m est bien une mesure stochastique.

Soit (w, u, v) trois éléments de T avec $w < u < v$; soit $H \in \mathscr{F}_w$. Soit $(h_n)_{n>0}$ la suite de fonctions définie comme dans la preuve de la proposition précédente. Par convergence dominée, on a :

$$\bar{m}(H \times [u, v]) = \lim_{n\to\infty} \bar{m}(1_{H\times T}.h_n)$$

mais pour tout n, $\bar{m}(1_{H\times T}.h_n)$ appartient à $L_p(\Omega, \mathscr{F}_{v+1/n}, P)$ (d'après (*ii*) et par convergence dominée). On en déduit facilement que $\bar{m}(H \times [u, v])$ appartient à $L_p(\Omega, \mathscr{F}_{v^+}, P)$ (c'est ici qu'apparaît l'utilité de considérer les tribus $\mathscr{F}_{t^+}$ et non les tribus $\mathscr{F}_t$). Enfin, si K appartient à $\mathscr{F}_{u^-}$, par conver-

gence dominée, $\bar{m}(K \times]u, v]) = \lim_{n \to \infty} . \bar{m}\left(K \times \left[u + \frac{1}{n}, v\right]\right)$ donc $\bar{m}(K \times]u, v])$ appartient à $L_p(\Omega, \mathscr{F}_{v^+}, P)$ ce qui est la condition 1.A.6.(*ii*) de [8].

Par ailleurs, pour toute fonction réelle g définie sur Ω, soit $S(g) = \{\omega : g(\omega) \neq 0\}$. Soient w, u et v trois éléments de T tels que $w < u < v$. Soit $\mathscr{C}$ la classe des fonctions g appartenant à $L_\infty(\Omega, \mathscr{F}_w, P)$ telles que $\bar{m}(g . 1_{]u, v]}) = 1_{S(g)} . \bar{m}(g . 1_{]u, v]})$.

En utilisant la condition (*iii*) et les processus $h_n(t).g(\omega)$, on prouve, par convergence dominée, que $\mathscr{C}$ contient les fonctions g pour $g \in \mathscr{G}_w$.

On vérifie facilement que $\mathscr{C}$ est une classe monotone (croissante et décroissante) (par convergence dominée et parce que m est continue). On en déduit que $\mathscr{C}$ contient les fonctions 1_H pour H élément de $\mathscr{F}_w$ et donc pour H élément de $\mathscr{F}_{u^-}$. Ceci prouve la condition 1.A.7.(*i'*) de [8] et donc la condition 1.A.6.(*i*) de [8]. La fonction m est donc bien une mesure stochastique.

On achève la démonstration comme en A.2.

B.5. **Remarque.**

La proposition A.6 et la remarque A.7 du paragraphe précédent, restent évidemment exactes sous les hypothèses adoptées dans le présent paragraphe.

B.6. **Remarque : cas où Ω est compact.**

Supposons Ω compact.

Soit m une mesure réelle définie sur la tribu des prévisibles (pour l'intérêt d'une telle mesure, cf. [5] dans le cas positif ou [8] dans le cas général). Pour tout élément h de $\mathscr{H}$, soit $m(h) = \int h . dm$; l'application $h \rightsquigarrow m(h)$ ainsi définie est linéaire et continue ($\mathscr{H}$ étant toujours muni de la topologie de la convergence uniforme). Réciproquement, soit $\hat{m}$ une forme linéaire définie et continue sur $\mathscr{H}$; alors il existe une mesure réelle unique définie sur la tribu des prévisibles, et telle que, pour tout élément h de $\mathscr{H}$, $\hat{m}(h) = \int h . dm$ (on prouve cette réciproque à l'aide du prolongement de Daniell).

Notons que m peut charger des processus évanescents même si $\hat{m}(h) = \int h . dm$ est nul pour tous les éléments évanescents h de K.

B.7. **Contre-exemple.**

Le but du contre-exemple qui suit est de montrer que la remarque qui précède n'est plus exacte si Ω *n'est pas compact. Plus précisément, on peut alors trouver un élément du dual de* $\mathscr{H}$ *qui n'induit pas une mesure sur la tribu des prévisibles.*

On prend $\Omega = \mathbb{N}$ muni de la topologie discrète. Soit $\mathscr{U}$ un ultra-filtre sur $\mathbb{N}$. A tout élément h de $\mathscr{H}$, on associe $m(h) = \lim_{\mathscr{U}} h_1(n)$ où $h_1(n)$ désigne la valeur du processus h à l'instant $t = 1$ et au point $\omega = n$. m est évidemment un élément du dual $\mathscr{H}'$ de $\mathscr{H}$ et pourtant m ne satisfait pas à l'analogue de la condition (iv') utilisée dans la preuve du théorème A.2. En effet, soit (h_n) la suite de processus définis par, quel que soit t, $h_n(t, \omega) = 1$ si $\omega \geqslant n$ et $h_n(t, \omega) = 0$ si $\omega < n$. On a $h_n \downarrow 0$ et $\lim_{n \to \infty} . m(h_n) = 1$.

BIBLIOGRAPHIE

[1] BADRIKIAN, Séminaire sur les fonctions aléatoires linéaires et les mesures cylindriques, VII, 1970, Springer-Verlag, *Lecture Notes*, n° 139.

[2] R. G. BARTLE, N. DUNFORD and J. SCHWARTZ, Weak compactness and vector measures. *Canadian J. Math.*, t. **7**, 1955, p. 289-305.

[3] N. BOURBAKI, *Espaces vectoriels topologiques*, chapitres 3 et 4, Hermann, Paris, 1967.

[4] DELLACHERIE, *Capacités et processus stochastiques*. Springer-Verlag, 1972.

[5] C. DOLEANS, Existence du processus croissant naturel associé à un potentiel de classe (D). *Z. Wahrscheinlichkeitstheorie verw.*, t. **9**, 1968, p. 309-314.

[6] I. KLUVANEK, Completion of vector measures spaces. *Rev. Roumaine, Math. Pures Appl.*, t. **12**, 1967, n° 10, p. 1483-1488.

[7] M. MÉTIVIER, Stochastic integral and vector valued measures. *Proceedings of the european meeting of statistical*, Budapest, Sept. 1972.

[8] J. PELLAUMAIL, *Sur l'intégrale stochastique et la décomposition de Doob-Meyer*. Astérique n° 9. Société Mathématique de France, 11, rue Pierre et Marie-Curie, 1973.

[9] J. PELLAUMAIL, Intégrale de Daniell à valeurs dans un groupe. *Revue Roumaine, Math. Pures Appl.*, t. **16**, 1971, n° 8, p. 1227-1236, Bucarest.

[10] E. THOMAS, L'intégration par rapport à une mesure de Radon vectorielle. *Ann. Inst. Fourier, Grenoble*, t. **20**, fasc. 2, 1970.

(Manuscrit reçu le 9 octobre 1974)