ANNALES DE L'I. H. P., SECTION B

A. BRUNEL
N. DANG-NGOC
J.-P. THOUVENOT

Un problème d'existence de mesure invariante

Annales de l'I. H. P., section B, tome 10, n° 2 (1974), p. 211-227
<http://www.numdam.org/item?id=AIHPB_1974__10_2_211_0>

© Gauthier-Villars, 1974, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Annales de l'I. H. P., section B » (http://www.elsevier.com/locate/anihpb) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (http://www.numdam.org/conditions). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM
Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
http://www.numdam.org/

Ann. Inst. Henri Poincaré, Section B :
Vol. X, n° 2, 1974, p. 211-227. *Calcul des Probabilités et Statistique.*

Un problème d'existence de mesure invariante

par

A. BRUNEL, N. DANG-NGOC et J.-P. THOUVENOT (*)

Université Paris VI. Laboratoire de Probabilités, Tour 56. 9, quai Saint-Bernard, Paris 5e (France)

SUMMARY. — We say that the action of a group G on a measure space $(X, \mathscr{A}, m)$ where m is σ finite is relatively invariant if $g \cdot \mu = \chi(g)\mu$ where χ is a real character of G.

We are concerned here with the following question: Is it true that given any relatively invariant action of G on $(X, \mathscr{A}, m)$ there exists a σ-finite measure μ equivalent to m and invariant by the action of G?

We prove here that if $G = \mathbb{Z}$ or $G = \mathbb{R}$ the answer to the question is yes.

Extending an example of Hajian Ito and Kakutani which proves that the answer to the question is no if $G = \mathbb{Z}^2$, we give examples which prove that the answer is still no for $G = H \times \mathbb{Z}$ on $H \times \mathbb{R}$ with a non trivial real character on H.

Moreover, other results of independent interest on induced transformations associated with a *group of transformations* (instead of with one transformation) are obtained generalizing that of Hajian-Ito-Kakutani.

1. On donne un espace mesuré, σ-fini, $(E, \mathscr{E}, \mu)$ et un groupe $G = \mathbb{Z}^m \times \mathbb{R}^n$, opérant sur E, tel que

$$G \times E \ni (g, x) \to gx \in E$$

soit une application mesurable lorsque $G \times E$ est muni de la tribu produit $\mathscr{B}_G \otimes \mathscr{E}$, $\mathscr{B}_G$ désignant la tribu Borélienne de G.

(*) Équipe de Recherche n° 1 « Processus stochastiques et applications » dépendant de la section n° 1 « Mathématique, Informatique » associée au C. N. R. S.

On suppose aussi donné un caractère positif χ de G : $\chi : G \to \mathbb{R}_+^*$, vérifiant la condition :

(1) $$\forall g \in G \qquad g(\mu) = \chi(g) \cdot \mu,$$

χ n'étant pas trivial.

A propos de cette situation, J. Dixmier a posé la question suivante : les conditions précédentes entraînent-elles l'existence d'une mesure σ-finie, équivalente à μ sur l'espace $(E, \mathscr{E})$ et qui soit invariante par G?

Nous commençons par montrer que si $m + n = 1$, la réponse est oui. Puis nous donnerons dans le cas général une condition nécessaire et suffisante d'existence d'une telle mesure invariante. Une autre partie de ce travail est consacrée à la construction des contre-exemples, en particulier dans le cas $n + m \geqq 2$. Cependant la réponse est encore affirmative si l'on ajoute des hypothèses supplémentaires sur $(E, \mathscr{E})$ et sur l'action de G. Ce dernier résultat était déjà connu [5] et [10] et a été généralisé par Dang-Ngoc au cas où μ est seulement quasi-invariante, G étant abélien quelconque ou groupe de Lie nilpotent connexe [3].

2. SOLUTION DU PROBLÈME DANS LE CAS $G = \mathbb{R}$

Il sera commode de noter $\phi_t(x)$, le transformé de $x \in E$ par $t \in \mathbb{R}$. Le caractère χ est de la forme : $\chi(t) = c^t$ où $c > 1$.

Soit g une application $\mathscr{E}$-mesurable de E dans l'intervalle]0,1]. On peut trouver un tel élément g tel que $\int g d\mu = 1$.

Posons :

$$F = \int_{-\infty}^{+\infty} c^{-\frac{t}{2}} (g \circ \phi_t) dt.$$

F est > 0 et $\mathscr{E}$-mesurable. Montrons qu'elle est finie μ-pp. Pour cela calculons $\int F g d\mu$. On a :

$$\int F g d\mu = \int_{-\infty}^{+\infty} c^{-\frac{t}{2}} dt \int (g \circ \phi_t) g d\mu.$$

Mais

$$\int (g \circ \phi_t) g d\mu \leqq \left(\int g d\mu \right) \wedge \int (g \circ \phi_t) d\mu = 1 \wedge c^t = c^{t \wedge 0}.$$

Donc

$$\int F g d\mu \leqq \int_{-\infty}^{+\infty} c^{t \wedge 0 - \frac{t}{2}} dt = \int_{-\infty}^{0} c^{\frac{t}{2}} dt + \int_{0}^{+\infty} c^{-\frac{t}{2}} dt < +\infty.$$

On a ensuite, pour tout $s \in \mathbb{R}$

$$F \circ \phi_s = \int_{-\infty}^{+\infty} c^{-\frac{t}{2}} (g \circ \phi_t \circ \phi_s) dt = c^{\frac{s}{2}} \int_{-\infty}^{+\infty} c^{-\frac{u}{2}} (g \circ \phi_u) du = c^{\frac{s}{2}} F$$

et par conséquent, en posant $f = (F)^2$

$$\forall s \in \mathbb{R} \qquad f \circ \phi_s = c^s \cdot f. \tag{2}$$

La mesure $\nu = f \cdot \mu$ a bien les propriétés voulues. ■

Il est clair que le cas où $G = Z$ se traite comme le précédent avec des modifications évidentes.

3. PASSONS MAINTENANT AU CAS GÉNÉRAL : $G = Z^m \times \mathbb{R}^n$

Commençons par une remarque qui nous conduira à une condition nécessaire. La formule (2) montre que l'ensemble $A = \{ 1 \leqq f < c^a \}$, où a est un nombre positif donné, est $\mathscr{E}$-mesurable et est un ensemble errant relativement à la transformation $T = \phi_a$. Cela signifiant que les ensembles $\{ T^n A ; n \in Z \}$ sont disjoints deux à deux. De plus si l'on pose

$$B = \{ c^{\frac{a}{3}} \leqq f < c^{\frac{2}{3}a} \}$$

et

$$H = \left\{ \phi_t \mid -\frac{a}{3} \leqq t < \frac{a}{3} \right\},$$

on a $H \cdot B \subset A$ en désignant par $H \cdot B$ l'ensemble $\{ hb \mid h \in H, b \in B \}$ en reprenant la notation $(g, x) \to gx$ introduite au début de l'article. En outre $\chi(H)$ est un voisinage de 1 sur $\mathbb{R}_4^*$.

Cela nous conduit à poser les définitions suivantes :

DÉFINITION 1. — Un ensemble $A \in \mathscr{E}$ sera dit large pour χ s'il existe une partie H de G et un $B \in \mathscr{E}$, $\mu(B) > 0$, tels que

(1) H contienne l'image réciproque par χ d'un voisinage de 1 dans $\mathbb{R}_4^*$.
(2) $H \cdot B \subset A$.

DÉFINITION 2. — Un élément $g \in G$ sera dit dissipatif pour χ si tout ensemble de $\mathscr{E}$, non μ-négligeable et invariant par G, contient une partie large et errante pour g.

Ceci étant posé, on a les équivalences suivantes :

THÉORÈME. — *Les énoncés suivants sont équivalents*

(i) $g \in G$ $\chi(g) \neq 1 \Rightarrow g$ *est dissipatif pour* χ.

(ii) *Il existe un* $g \in G$ *qui soit dissipatif pour* χ.

(iii) *Il existe une mesure* σ*-finie* ν, *invariante et équivalente à* μ.

Démonstration. — (*i*) $\Rightarrow$ (*ii*) est évident puisque χ n'est pas trivial.

(*ii*) $\Rightarrow$ (*iii*). Soit g_0 dissipatif pour χ et A un ensemble large et errant pour g_0. On a donc

$$\sum_{n \in Z} 1_A \circ g_0^n \leqq 1. \tag{3}$$

La définition 1 montre l'existence de $B \in \mathscr{E}$, $\mu(B) > 0$ et d'un α, $0 < \alpha < 1$, tels que

$$\forall \gamma \in G \quad 1 \leqq \chi(\gamma) < c^\alpha \Rightarrow 1_B \circ \gamma \leqq 1_A,$$

en posant $c = \gamma(g_0)$ et l'on peut supposer $\chi(g_0(> 1$.

Montrons ensuite que la fonction :

$$\sum_{n \in Z} \left\{ \sup_{\substack{\gamma \in G' \\ c^n \leqq \chi(\gamma) < c^{n+1}}} (1 \circ \gamma), \right. \tag{4}$$

où $G' = Z^m \times Q^n$, est bornée.

En effet si $p - 1$ est la partie entière de $\frac{1}{\alpha}$, on a

$$\left\{ \sup_{\substack{\gamma \in G' \\ 1 \leqq \chi(\gamma) < c}} (1_B \circ \gamma) \leqq 1_A + 1_A \circ g_1 + \ldots + 1_A \circ g_1^p, \right. \tag{5}$$

g_1 étant choisi dans G′ de sorte que $\chi(g_1)$ soit très voisin de c^α. Les relations (3) et (5) montrent que la fonction définie par (4) est majorée par $p+1$.

De là on en déduit que la fonction

$$h = \int_{-\infty}^{+\infty} \left\{ \sup_{\substack{\gamma \in G' \\ c^t \leqq \chi(\gamma) < c^{t+1}}} (1_B \circ \gamma) dt \right.$$

est $\mathscr{E}$-mesurable et que $0 < h \leqq p + 1$ sur l'ensemble G′-invariant $\bar{B}$ engendré par B.

Posons alors

$$F = \int_{-\infty}^{+\infty} \left\{ \sup_{\substack{\gamma \in G' \\ c^t \leqq \chi(\gamma) < c^{t+1}}} (\chi(\gamma)^{-1} \times (1_B \circ \gamma)) dt \right.$$

Les conditions satisfaites par h montrent que

1) F est $\mathscr{E}$-mesurable

2) $0 < F < +\infty$ sur $\bar{B}$

3) $\forall g \in G'$ $F \circ g' = (\chi(g))F$

1) est évident ; 2) résulte du fait que la fonction, à valeur 0 ou 1

$$R \ni t \to \sup_{\{\gamma \in G' \atop c^t \leqq \chi(g) < c^{t+1}} 1_B(\gamma x),$$

x étant donné, est nulle hors d'un compact dépendant de x.

3) Soit $g \in G'$. Ecrivons $\chi(g)$ sous la forme c^a, $a \in \mathbb{R}$. On a

$$\begin{aligned} F \circ g &= \int_{-\infty}^{+\infty} \sup_{\{\gamma \in G' \atop c^t \leqq \chi(\gamma) < c^{t+1}} (\chi(\gamma)^{-1} \cdot (1_B \circ (\gamma g)))dt \\ &= \chi(g) \int_{-\infty}^{+\infty} \sup_{\{\gamma \in G' \atop c^{t+a} \leqq \chi(\gamma g) < c^{t+a+1}} (\chi(\gamma g)^{-1}(1_B \circ (\gamma g)))dt \\ &= \chi(g)F. \end{aligned}$$

$F \cdot \mu$ est donc une mesure G'-invariante et équivalente à μ sur $\bar{B}$. Puisque G' est dense dans G un argument classique de continuité montre que $F \cdot \mu$ est G-invariante et équivalente à μ sur l'ensemble $\bar{B}$ G-invariant engendré par B. Si le complémentaire de $\bar{B}$ n'est pas négligeable, la définition 2) montre que l'on peut déterminer une mesure G-invariante étrangère à $F\mu$ et portée par $\bar{B}^c$. Un argument d'extrémalité au sens de la théorie de la mesure montre alors qu'il existe une mesure σ-finie, équivalente à μ et G-invariante.

(*iii*) $\Rightarrow$ (*i*). Supposons l'existence d'une telle mesure invariante. Il y a donc une fonction $\mathscr{B}$-mesurable F, $0 < F < +\infty$ telle que

$$\forall g \in G \qquad F \circ g = \chi(g)F.$$

Soit $g_0 \in G$ avec $\chi(g_0) = c > 1$ (sinon on prendrait g_0^{-1}). Soit

$$B = \{ c^{+\frac{1}{3}}a \leqq F < c^{\frac{2}{3}}a \}$$

pour un $a \in \mathbb{R}$ choisi de telle sorte que $\mu(B) > 0$. Soit

$$H = \{ c^{\frac{1}{3}} \leqq \chi < c^{\frac{1}{3}} \} \subset G$$

de telle sorte que $\chi(H)$ soit un voisinage de 1. Alors

$$H \cdot B \subset \{ a \leqq F < ca \} = A,$$

et A est large et dissipatif pour g_0. ■

4. SYSTÈMES DYNAMIQUES ASSOCIÉS AUX CARACTÈRES RÉELS D'UN GROUPE DÉNOMBRABLE

I. Notations.

Dans un article récent (cf. [7]), A. Hajian, Y. Ito, et S. Kakutani ont démontré le résultat suivant : à tout caractère réel γ du groupe $G = Z$ (i. e. γ est un morphisme de G dans le groupe multiplicatif R_+) on peut associer un espace de Lebesgue $(M, \mathscr{B}, m)$ avec m-finie infinie, diffuse, une représentation π de $G \times Z$ dans le groupe Aut $(M, \mathscr{B}, m)$ des automorphismes de $(M, \mathscr{B}, m)$ tels que :

(*i*) L'action de $\pi(\{0\} \times Z)$ est ergodique et préserve la mesure m.
(*ii*) Pour tout $g \in G$, on a $\pi((g, 0))m = \gamma(g)m$.

Le but de ce travail est d'étendre ce résultat à un groupe G dénombrable quelconque, la démonstration s'appuie sur la méthode de Hajian, Ito et Kakutani et sur les résultats de Krieger (cf. [8]).

Nous remarquons que si γ est non trivial (i. e. $\gamma \neq 1$) le système dynamique ergodique $(M, \mathscr{B}, m; \pi(G \times Z))$ est de type III i. e. n'admettant aucune mesure invariante σ-finie équivalente à m (cf. [4]; [7]).

Notations. — Soient $T, T' \in$ Aut $(M, \mathscr{B}, m)$, on définit la mesure Tm par

$$Tm(B) = m(T^{-1}B), \qquad \forall B \in \mathscr{B}.$$

On vérifie alors

$$(0) \qquad \frac{dTT'm}{dm}(x) = \frac{dTm}{dm}(x)\ \frac{dT'm}{dm}(T^{-1}x) \qquad \mu\text{-p. p.}$$

II. Construction d'automorphismes associée à un système discret.

Nous allons généraliser une construction de Hajian, Ito et Kakutani qui nous sera utile dans la suite : soit $(M, \mathscr{B}, m; 0)$ un système dynamique *séparable discret* (cf. [4] déf. III.2) soit Y un G-atome donc le G-support soit égal à M (cf. [4] Th. III.1), alors pour m-presque tout $x \in M$, $\mathrm{Orb}_G\, x$ rencontre Y exactement en un point (cf. [4] Prop. VII-2) en enlevant ensemble négligeable nous supposons que c'est le cas pour tout $x \in M$.

Soit $T \in$ Aut $(M, \mathscr{B}, m)$ tel que

$$(1) \qquad T[G]T^{-1} = [G]$$

ce qui équivaut à dire (cf. [8], [4]) que pour m-presque tout $x \in M$ on ait

$$T(\mathrm{Orb}_G\, x) = \mathrm{Orb}_G\, Tx. \tag{2}$$

L'ensemble des $T \in \mathrm{Aut}(M, \mathscr{B}, m)$ possédant les propriétés équivalentes (1) et (2) est *le groupe* $\mathscr{N}([G])$ *des normalisateurs* de [G] dans Aut $(M, \mathscr{B}, m)$, il est clair que $\mathscr{N}([G])$ contient [G] et tout automorphisme commutant avec les éléments de G.

Sur le G-atome Y on considère l'espace mesurable induit canonique $(Y, \mathscr{B}_Y, m_Y)$.

DÉFINITION 1. — Soit $T \in \mathscr{N}([G])$, on définit un automorphisme $\tilde{T}$ de $(Y, \mathscr{B}_Y, m_Y)$ par :

$$\tilde{T}y = (\mathrm{Orb}_G\, Ty) \cap Y, \qquad \forall y \in Y.$$

L'automorphisme $\tilde{T}$ est appelé *l'automorphisme* G-*induit de* T *sur* Y ; il est clair que si T, $T' \in \mathscr{N}([G])$, alors

$$\tilde{T}\tilde{T}' = \tilde{T}\tilde{T}'.$$

L'application $\sim : T \to \tilde{T}$ est donc un morphisme du groupe $\mathscr{N}([G])$ dans le groupe $(\mathrm{Aut}\, Y, \mathscr{B}_Y, m_Y)$, le noyau Ker $(\sim)$ est l'ensemble des $T \in \mathscr{N}([G])$ tel que $Tx \in \mathrm{Orb}_G\, x$ pour m-presque tout x de M i. e.

$$\mathrm{Ker}\,(\sim) = [G]. \tag{3}$$

Soit $M = \sum_{n=1}^{n=\infty} M_n$ la partition canonique de l'espace M telle que le système induit $(M, \mathscr{B}, m\,; G)_{M_n}$ soit de type I_n (cf. [4] Prop. VII-1), chaque M_n est G-invariant et pour m-presque tout $x \in M_n$ card $(\mathrm{Orb}_G\, x) = n$ (cf. [4] Th. 1). Soit $Y_n = M_n \cap Y$.

Il est clair que si $T \in \mathscr{N}([G])$ alors $TM_n = M_n$, et $\tilde{T}Y_n = Y_n$, $\forall n = 1, 2, \ldots, \infty$.

Considérons le groupe produit $\prod_{n=1}^{n=\infty} \mathrm{Aut}\,(Y_n, \mathscr{B}_{Y_n}, m_{Y_n})$ qu'on identifie à un sous-groupe de $\mathrm{Aut}\,(Y, \mathscr{B}_Y, m_Y)$; d'après ce qui précède, si $T \in \mathscr{N}(G)$ alors

$$\tilde{T} \in \prod_{n=1}^{\infty} \mathrm{Aut}\,(Y_n, \mathscr{B}_{Y_n}, m_{Y_n})$$

et réciproquement soit

$$U \in \prod_{n=1}^{\infty} \mathrm{Aut}\,(Y_n, \mathscr{B}_{Y_n}, m_{Y_n}),$$

en utilisant le théorème de la structure d'un système de type I_n (cf. [4], Th. VII-1), on peut trouver un automorphisme $T \in \mathcal{N}([G])$ tel que $\tilde{T} = U$.

En résumé, nous avons démontré :

THÉORÈME 1. — L'application $\sim$ qui à un automorphisme $T \in \mathcal{N}([G])$ associe l'automorphisme G-induit $\tilde{T}$ sur Y est un morphisme de groupe et l'on a

$$\mathrm{Ker}\,(\sim) = [G]$$

$$\mathrm{Im}\,(\sim) = \prod_{n=1}^{\infty} \mathrm{Aut}\,(Y_n, \mathscr{B}_{Y_n}, m_{Y_n})$$

avec $Y_n = M_n \cap Y$ où M_n désigne la partie de type I_n de M. En particulier, le morphisme $\sim$ est surjectif si et seulement si le système $(M, \mathscr{B}, m; G)$ est homogène i. e. de type I_n avec un $n \in \{0, 1, \ldots, \infty\}$.

Nous allons généraliser un résultat de Hajian, Ito et Kakutani (cf. [7], Th. 1). Si H et G sont deux sous-groupes de Aut $(M, \mathscr{B}, m)$ on notera $H \vee G$ le sous-groupe engendré algébriquement par H et G.

THÉORÈME 2. — Soit H un sous-groupe de $\mathcal{N}([G])$, $\tilde{H} = \{\tilde{T}/T \in H\}$. Le système $(Y, \mathscr{B}_Y, m_Y; [\hat{H}])$ est le système induit $(M, \mathscr{B}, m; G \vee H)_Y$ du système $(M, \mathscr{B}, m, G \vee H)$ sur Y (cf. [4]-IV) ; il en résulte que le système $(Y, \mathscr{B}_Y, m_Y; \tilde{H})$ est semi-fini (resp. purement infini, discret, continu) si et seulement si le système $(M, \mathscr{B}, m; H \vee G)$ est semi-fini (resp. purement infini, discret, continu) (cf. [4], Th. IV-4), la σ-algèbre des ensembles mesurables sur Y invariants par $\tilde{H}$ est exactement la trace de la σ-algèbre des éléments $\mathscr{B}$ invariants par $G \vee H$.

Démonstration. — Nous démontrons seulement que

$$(Y, \mathscr{B}_Y, m_Y; [\tilde{H}]) = (M, \mathscr{B}, m, [G \vee H])_Y ;$$

or par construction de $\tilde{H}$ on a

$\mathrm{Orb}_{\tilde{H}}\, y = Y \cap \mathrm{Orb}_{H \vee G}\, y$ pour m-presque tout $y \in Y$.

Il en résulte que

$$[\tilde{H}] = [H \vee G]_Y \qquad \text{(cf. [4]-IV).}$$

Donc $(Y, \mathscr{B}_Y, m_Y; \tilde{H})$ est bien le système induit sur Y du système $(M, \mathscr{B}, m; G \vee H)$; le reste du théorème résulte des propriétés générales des systèmes induits (cf. [4]) q. e. d. ■

III. Construction d'exemples.

Nous allons maintenant construire les systèmes annoncés dans l'introduction, nous utiliserons les notations de [7] et [8].

1) Soit Δ un sous-groupe dénombrable de R_+, d'après un résultat de Krieger (cf. [8], Corol. 4-2) il existe un espace de Lebesgue

$$(Y, \mathscr{B}_Y, m_Y),\ m_Y(Y) < \infty,$$

et un $\tilde{T} \in \mathrm{Aut}\,(Y, \mathscr{B}_Y, m_Y)$ tels que

a) $\tilde{T}$ contient m_Y (cf. [8], p. 84) i. e.

— $\{ S \in [\tilde{T}]/Sm_Y = m_Y \}$ opère ergodiquement.

— Pour tout $S \in [\tilde{T}]$ il existe une suite $\delta_n(S) \in R_+$ et une partition Y^n de Y telles que :

$$\frac{dSm_Y}{dm_Y} = \sum_{n \in N} \delta_n(S)\chi_{Y^n}. \tag{4}$$

b) Le groupe Δ est égal au sous-groupe $\Delta(\tilde{T}, m_Y)$ engendré par les $\delta_n(S)$, $S \in [\tilde{T}]$, dans R_+.

c) On a

$$\frac{d\tilde{T}m_Y}{dm_Y} = \sum_{\delta \in \Delta} \delta\chi_{M_\delta} \tag{5}$$

avec les Y_δ formant une partition de Y et $m_Y(Y_\delta) > 0$, $\forall \delta \in \Delta$.

Toujours d'après Krieger (cf. [8], Lemma 5.1), soit

$$n(y) = \inf \left\{ n \in N \frac{d\tilde{T}^n m_Y}{dm_Y}(T^n y) = 1 \right\} \tag{6}$$

Alors pour m_Y-presque tout $y \in Y$ on a

$$n(y) < \infty.$$

On peut alors définir l'automorphisme $V \in [\tilde{T}]$:

$$Vy = T^{n(y)}y \quad \text{pour presque tout } y \in Y. \tag{7}$$

On a le résultat suivant

$$[V] = \{ S \in [\tilde{T}]/Sm_Y = m_Y \} \tag{8}$$

Comme le groupe $\{ S \in [\tilde{T}]/Sm_Y = m_Y \}$ opère ergodiquement, il en est de même pour V.

2) On munit Δ de sa σ-algèbre discrète $\mathscr{B}_\Delta$ et de la mesure σ-finie infinie m_Δ définie par

$$m_\Delta(\{ \delta \}) = \delta \qquad \text{pour tout } \delta \in \Delta$$

Soit $(M, \mathscr{B}, m) = (Y, \mathscr{B}_Y, m_Y) \times (\Delta, \mathscr{B}_\Delta, m_\Delta)$.

Chaque élément δ de Δ opère dans Δ par :

$$\delta' \to \delta^{-1}\delta', \qquad \forall \delta' \in \Delta.$$

Il en résulte une action canonique $\pi(\delta)$ de δ dans $(M, \mathscr{B}, m)$

$$(y, \delta') \to (y, \delta^{-1}\delta'), \qquad \forall (y, \delta') \in Y \times \Delta. \tag{9}$$

Il est clair que π est une *représentation fidèle* de Δ dans Aut $(M, \mathscr{B}, m)$ et on a :

$$\pi(\delta)m = \delta m, \qquad \forall \delta \in \Delta. \tag{10}$$

3) On définit la transformation T sur $(M, \mathscr{B}, m)$ par :

$$T(y, \delta) = \left(\tilde{T}y, \left(\frac{d\tilde{T}m_Y}{dm_Y}(\tilde{T}y)\right)^{-1} \cdot \delta\right), \qquad \forall (y, \delta) \in Y \times \Delta. \tag{11}$$

d'après (5) l'application T est bien définie, mesurable non singulière et il en est de même pour T^{-1} défini par :

$$T^{-1}(y, \delta) = \left(\tilde{T}^{-1}y\left(\frac{d\tilde{T}^{-1}m_Y}{dm_Y}(\tilde{T}^{-1}y)\right)\cdot\delta\right), \qquad \forall (y, \delta) \in Y \times \Delta ; \tag{12}$$

Il est clair que $T\pi(\delta) = \pi(\delta)T$, $\forall \delta \in \Delta$.

Montrons que $Tm = m$: comme M est union disjointe des $Y \times \{\delta\}$, $\delta \in \Delta$, il suffit de montrer que si $E \in \mathscr{B}_Y$, $\delta \in \Delta$, alors $m(T(E \times \{\delta\})) = m(E \times \{\delta\})$, soit

$$E_{\delta'} = \left\{ y \in E \Big/ \frac{d\tilde{T}m_Y}{dm_Y}(\tilde{T}y) = \delta' \right\} \qquad \delta' \in \Delta.$$

D'après (5) on a

$$E = \sum_{\delta' \in \Delta} E_{\delta'}$$

Or pour tout $y \in E_{\delta'}$

$$\frac{d\tilde{T}m_Y}{dm_Y}(\tilde{T}y) = \delta'$$

$$\tilde{T}(E_{\delta'} \times \{\delta\}) = \tilde{T}E_{g'} \times \{\delta'^{-1} \cdot \delta\}$$

Donc

$$\begin{aligned} m(T(E_{\delta'} \times \{\delta\})) &= m_Y(\tilde{T}E_{\delta'})m_\Delta(\delta'^{-1}\delta) \\ &= \delta' m_Y(E_{\delta'}) \times \delta'^{-1} m_\Delta(\delta) \\ &= m_Y(E_{\delta'} \times \{\delta\}) \end{aligned}$$

Donc

$$\begin{aligned} m(T(E \times \{\delta\})) &= \sum_{\delta' \in \Delta} m(T(E_{\delta'} \times \{\delta\})) \\ &= \sum_{\delta' \in \Delta} m(E_{\delta'} \times \{\delta\}) \\ &= m(E \times \{\delta\}), \end{aligned}$$

d'où

$$T^{-1}m = m \qquad \text{ou} \qquad Tm = m.$$

4) La propriété 1)-*c*), 3) et l'ergodicité de $\tilde{T}$ montrent que pour tout $x \in M$ et tout $\delta \in \Delta$, il existe un $n \geqslant 0$ tel que $T^n x \in Y \times \{\delta\}$.

5) *La transformation induite de* T *sur* $Y \times \{1\}$: pour simplifier les notations, on identifie Y à $Y \times \{1\}$; soit $y \in Y \times \{1\}$, d'après la formule (11) définissant T, dire que $T^p y \in Y \times \{1\}$ revient à dire que

$$\frac{d\tilde{T}^p m_Y}{dm_Y}(\tilde{T}^p y) = 1 :$$

en effet, on a :

$$T(y, \delta) = \left(\tilde{T}y, \left(\frac{\tilde{T}m_Y}{dm_Y}(\tilde{T}y)\right)^{-1}\delta\right)$$

$$T^2(y, \delta) = \left(\tilde{T}^2 y, \left(\frac{d\tilde{T}m_Y}{dm_Y}(\tilde{T}^2 y)\cdot\frac{d\tilde{T}m_Y}{dm_Y}(\tilde{T}y)\right)^{-1}\delta\right)$$

or d'après la formule (0).

$$\frac{d\tilde{T}m_Y}{dm_Y}(\tilde{T}^2 y) = \frac{d\tilde{T}m_Y}{dm_Y}(\tilde{T}^2 y)\frac{d\tilde{T}m_Y}{dm_Y}(\tilde{T}y)$$

On obtient donc

$$T^2(y, \delta) = \left(\tilde{T}^2 y, \left(\frac{d\tilde{T}^2 m_Y}{dm_Y}(\tilde{T}^2 y)\right)^{-1}\delta\right)$$

en utilisant la formule (0) pour $T' = T^{p-1}$, on obtient par récurrence :

$$T^p(y, \delta) = \left(\tilde{T}^p y, \left(\frac{d\tilde{T}^p m_Y}{dm_Y}(\tilde{T}^p y)\right)^{-1}\delta\right) \tag{13}$$

d'où le résultat annoncé.

Donc d'après les formules (6), (7) et (8), V *est la transformation induite de* T *sur* Y : $V = T_Y$ et V opère ergodiquement. La transformation induite $T_{Y\times\{\delta\}}$ de T sur $Y \times \{\delta\}$ est donnée par $\pi(\delta)V\pi(\delta)^{-1}$, $T_{Y\times\{\delta\}}$ *opère donc ergodiquement sur* $Y \times \{\delta\}$, pour tout $\delta \in \Delta$.

6) Il résulte de 4) et de 5) que T est ergodique. Nous avons démontré le résultat suivant :

LEMME 1. — A tout sous-groupe dénombrable Δ de R_+ on peut associer un espace de Lebesgue $(M, \mathcal{B}, m)$, m σ-finie infinie diffuse et une représentation fidèle π de $\Delta \times Z$ dans Aut $(M, \mathcal{B}, m)$ tels que :

(*i*) L'action de $\pi(\{1\} \times Z)$ est ergodique et préserve la mesure m.

(*ii*) Pour tout $\delta \in \Delta$, on a $\pi(\delta, 0)m = \delta m$.

THÉORÈME 3. — Soit G un groupe dénombrable ; à tout caractère réel γ de G, on peut associer un espace de Lebesgue $(M, \mathcal{B}, m)$ avec m σ-finie

infinie diffuse et une représentation π de $G \times Z$ dans Aut $(M, \mathscr{B}, m)$ possédant les propriétés suivantes :

(*i*) L'action de $\pi(\{ e_G \} \times Z)$ est ergodique et préserve la mesure m, e_G étant l'élément neutre de G.

(*ii*) Pour tout $g \in G$, on a $\pi(g, 0)m = \gamma(g)m$.

Il en résulte que si γ n'est pas trivial, le groupe $\pi(G \times Z)$ n'admet pas de mesure σ-finie invariante équivalente à m.

Démonstration. — Soit $\Delta = \gamma(G)$; considérons l'espace $(M, \mathscr{B}, m)$ et la représentation $\tilde{\pi}$ de $\Delta \times Z$ donnés par le lemme 1, on prend alors $\pi = \tilde{\pi} \circ \gamma$ q. e. d. ■

IV. Généralisation de la construction.

Dans la construction précédente, l'automorphisme T commute avec les $\pi(g)$, $g \in G$, et T conserve la mesure m, nous allons construire des exemples où T commute avec les $\pi(g)$, $g \in G$ et T n'admet aucune mesure invariante équivalente à m.

1) Soient Δ_n, $n = 0, 1, 2 \ldots$ une suite de sous-groupes dénombrables de R_+ $\Delta_n \neq \{ 1 \}$ $\forall n \in N$, Δ le groupe (dénombrable) engendré par les Δ_n, $n \in N$. On dit que la suite $\{ \Delta_n \}_{n \in N}$ est *indépendante* si la relation

$$\prod_{n \in N} \delta_n = 1, \quad \delta_n \in \Delta_n, \quad \delta_n = 1$$

sauf pour un nombre fini de n implique $\delta_n = 1$, $\forall n \in N$.

Pour tout sous ensemble J de N, on considère le groupe Δ_J engendré par les Δ_n, $n \in J$. Il est clair que si les J_k, $k \in N$, forment une partition de N alors la suite $\{ \Delta_{Jk} \}_{k \in N}$ est indépendante. On identifie $\Delta_{\{n\}}$ à Δ_n.

Considérons la construction de Krieger associée à Δ dans III-1), nous utilisons encore les notations de III-1). Soit $J \subset N$, tout $\delta \in A$ admet une décomposition canonique *unique* :

$$\delta = \delta_{(J)}\delta_{(N-J)}\delta_{(J)} \in \Delta_J, \qquad \delta_{(N/J)} \in \Delta_{N \setminus J}$$

On note $\delta_{(J)}$ *la composante de* δ dans Δ_J.

Comme dans III-1)-*c*) on définit

$$n_\phi(y) = 1, \qquad \forall y \in Y. \tag{14}$$

$$n_J(y) = \inf \left\{ n \in N_+ \Big/ \frac{d\tilde{T}^n m_Y}{dm_Y}(\tilde{T}^n y)_{(J)} = 1 \right\}, \qquad \forall y \in Y \quad \text{si} \quad J \neq 0 \tag{14'}$$

$$n(y) = n_N(y) = \inf \left\{ n \in N_+ \Big/ \frac{d\tilde{T}^n m_Y}{dm_Y}(\tilde{T}^n y) = 1 \right\}, \quad y \in Y. \tag{15}$$

Il est clair que si $J \subset K \subset -N$ alors

$$n_J(y) \leq n_k(y) \leq n(y) \qquad \forall y \in Y \tag{16}$$

comme $n(y) < \infty$ pour m_Y-presque partout $y \in Y$, on a :

$$n_J(y) < \infty \; m_Y \quad \text{p. p.} \tag{17}$$

On peut alors définir

$$\tilde{T}_J y = \tilde{T}^{nJ(y)} y \qquad \text{pour presque tout } y \in Y. \tag{18}$$

$$Vy = \tilde{T}_N y = \tilde{T}^{n(y)} y \qquad \text{pour presque tout } y \in Y. \tag{19}$$

Il est clair que si $J \subset K \subset N$ alors

$$[T_\phi] \supset [\tilde{T}_J] \supset [\tilde{T}_K] \supset [\tilde{V}] \tag{20}$$

$$[V] = \{ S \in [\tilde{T}_J] / Sm_Y = m_Y \}. \tag{21}$$

2) Nous nous intéressons particulièrement à Δ_0 : on définit comme dans III-2) l'espace $(M, \mathscr{B}, m) = (Y, \mathscr{B}_Y, m_Y) \times (\Delta_0, \mathscr{B}_{\Delta_0}, m_{\Delta_0})$ où $\mathscr{B}_{\Delta_0}$ est la tribu des parties de Δ_0 et m_{Δ_0} la mesure discrète définie par

$$m_{\Delta_0}(\{ \delta_0 \}) = \delta_0 \qquad \forall \delta_0 \in \Delta_0. \tag{22}$$

On définit de même la représentation π de Δ_0 dans Aut $(M, \mathscr{B}, m)$ vérifiant

$$\pi(\delta_0) m = \delta_0 m \qquad \forall \delta_0 \in \Delta_0. \tag{23}$$

3) Pour tout $J \subset N$ on définit $T_J \in$ Aut $(M, \mathscr{B}, m)$ par

$$T_J(y, \delta_0) = \left(\tilde{T}_J y, \frac{d\tilde{T}_J m_Y}{dm_Y} (\tilde{T}_J y)^{-1}_{(\{0\})} \cdot \delta_0 \right) \qquad \forall (y, \delta_0) \in Y \times \Delta_0 \tag{24}$$

D'après (17) T_J est bien définie, mesurable non singulière et il en est de même pour T_J^{-1} définie par

$$T_J^{-1}(y, \delta_0) = \left(\tilde{T}_J^{-1} y, \left(\frac{d\tilde{T}_J^{-1} m_Y}{dm_Y} (\tilde{T}_J^{-1} y) \right)_{(\{0\})} \cdot \delta \right) \qquad \forall (y, \delta_0) \in Y \times \Delta_0. \tag{25}$$

Il est clair que

$$T_J \pi(\delta_0) = \pi(\delta_0) T_J \qquad \forall J \in N, \forall \delta_0 \in \Delta_0 \tag{26}$$

$$[T_\phi] \supset [T_J] \supset [\tilde{T}_K] \qquad \forall J \subset K \subset N. \tag{27}$$

4) Nous nous intéressons aux sous-ensembles $J \subset N_+ = N \setminus \{ 0 \}$; un raisonnement analogue à III-3), 4), 5), 6) montre que $T_{N \setminus \{0\}}$ est *ergodique* et laisse la *mesure m invariante.*

5) D'après (27), 4) et la définition des T_J, si $J \subset N - \{ 0 \}$ alors T_J contient la mesure m au sens de Krieger et

$$\Delta(T_J, m) = \Delta_{N_+ \setminus J} \tag{28}$$

$$[T_{N_+}] = \{ S \in [T_J] / Sm = m \} \tag{29}$$

6) Soit maintenant γ un caractère réel non trivial d'un groupe dénombrable G soit $\Delta_0 = \gamma(G)$ on trouve par récurrence une suite indépendante $\{\Delta_n\}_{n\in N}$ de sous-groupes dénombrables non triviaux de R_+ (par exemple on choisit Δ_1 dans R_+ $\{\delta^q\}\ \delta\in\Delta, q\in R$), on note encore π la représentation $\pi\circ\gamma$ de G. Soit $\mathscr{P}(N_+)$ l'ensemble des parties de N_+. On peut énoncer :

THÉORÈME 4. — Soit G un groupe dénombrable ; à tout caractère réel non trivial γ de G, on peut associer un espace de Lebesgue $(M, \mathscr{B}, m)$ avec m σ-finie infinie diffuse, une famille $\{T_J\}_{J\in\mathscr{P}(N_+)}$ d'automorphismes de $(M, \mathscr{B}, m)$, une famille $\{\Delta_J\}_{J\in\mathscr{P}(N_+)}$ de sous-groupes dénombrables de R_+ tels que :

(*i*) $\pi(g)m = \gamma(g)m \qquad \forall g\in g.$

(*ii*) $\pi(g)T_J = T_J\pi(g) \qquad \forall g\in G,\ J\in\mathscr{P}(N_+)$

(*iii*) $[T_\phi]\supset[T_J]\supset[T_K]\supset[T_{N_+}]$ si $J\subset K\subset N_+$

(*iv*) T_{N_+} est ergodique et laisse m invariante.

(*v*) $[T_{N_+}] = \{S\in[T_J]/Sm = m\}, \qquad \forall J\in\mathscr{P}(N_+)$

(*vi*) Si $J\neq N_+$, alors T_J contient m et $\Delta(T_J, m) = \Delta_{N_+\setminus J}$

(*vii*) $\Delta_J\neq\Delta_{J'}$ si $J, J'\in\mathscr{P}(N_+)$ et $J\neq J'$.

(*viii*) Si $J_i, i\in I$ est une partition de N_+, alors la famille $\Delta_{J_i}, i\in I$ est une famille indépendante de sous-groupes de R_+.

5. CONSTRUCTION DE FLOTS SPÉCIAUX

On se donne un système dynamique $(M, \mathscr{B}, m; Z^n)$ où m est une mesure σ-finie relativement invariante qui n'admet pas de mesure invariante équivalente (ce qui peut être fait d'après le théorème 3). Soient $S_1, \ldots, S_n$ les générateurs de l'action de Z^n. On a alors par définition que

$$S_i m = a_i m \qquad a_i > 0 \qquad 1\leq i\leq n.$$

Soit $K = [0, 1_n]^n$. On munit K de sa tribu borélienne B_K et de la mesure

$$d\lambda(s_i, \ldots, s_n) = \prod_1^n a_i^{s_i} d\mu(s_1, \ldots, s_n)$$

où $d\mu(s_1 \ldots s_n)$ désigne la mesure de Lebesgue sur le cube K.

On considère le flot $(\Omega, \mathscr{A}, v ; \mathrm{R}^n)$ défini comme suit :

$$\Omega = \mathrm{M} \times \mathrm{K},$$
$$\mathscr{A} = \mathscr{B} \otimes \mathscr{B}_{\mathrm{K}},$$
$$dv = dm \otimes d\lambda$$

et où l'action de R^n est donnée par l'application

$$\mathrm{R}^n \times \Omega \to \Omega$$
$$((s_1, \ldots, s_n), (x, u_1, \ldots, u_n)$$
$$\to \left(\prod_1^n \mathrm{S}_1^{[s_i+u_i]} x,\ u_1 + s_1 - [u_1 + s_1], \ldots, u_n + s_n - [u_n + s_n]\right)$$

L'action est mesurable et on a le

LEMME 1. — La mesure v est relativement invariante i. e.

$$(s_1, \ldots, s_n)v = \chi(s_1 \ldots s_n)v \qquad \text{où} \qquad \chi(s_1, \ldots, s_n) = \prod_1^n a_i^{s_i}$$

Démonstration.

$$(s_1, \ldots, s_n)dv(x, u_1 \ldots u_n) = \prod_{i=1}^n a_i^{[u_i+s_i]} a_i^{s_i - [u_i+s_i]} dv(x, u_1, \ldots, u_n)$$
$$= \prod_1^n a_i^{s_i} dv(x, u_1, \ldots, u_n)$$

LEMME 2. — Si le système $(\Omega, \mathscr{A}, v ; \mathrm{R}^n)$ admet une mesure σ-finie v' équivalente à v et invariante par l'action de R^n ; alors il existe une mesure m' sur M, équivalente à m et invariante par l'action de Z^n sur M.

Démonstration. — Soit

$$f = \frac{dv'}{dv} \quad (\text{i. e. } dv'(x, u_1, \ldots, u_n) = f(x, u_1 \ldots u_n) dm(x) d\lambda(u_1 \ldots u_n)$$

l'identité $(s_1, \ldots, s_n)dv' = dv'$ entraîne alors que pour tout $(s_1, \ldots, s_n) \in \mathrm{R}^n$ il existe $\Omega_{s_1 \ldots s_n} \subset \Omega$ tel que $v'(\Omega - \Omega_{s_1 \ldots s_n}) = 0$ et tel que l'égalité

$$(2) \quad f\left(\prod_1^n \mathrm{S}_i^{[s_i+u_i]} x,\ u_1 + s_1 - [u_1 + s_1], \ldots, u_n + s_n - [u_n + s_n]\right) \chi(s_1, \ldots, s_n)$$
$$= f(x, u_1, \ldots, u_n)$$

soit satisfaite pour tout $(x, u_1 \ldots u_n) \in \Omega_{s_1 \ldots s_n}$.

Soit $g(x, u_1 \ldots u_n) = \chi(u_1 \ldots u_n) f(x, u_1 \ldots u_n)$, alors (2) devient

(3) $\chi([s_1 + u_1], \ldots, [s_n + u_n])(s_1 \ldots s_n) g(x, u_1 \ldots u_n) = g(x, u_1, \ldots, u_n)$.

En appliquant le théorème de Fubini à $(\Omega \times \mathbf{R}^n, \nu' \otimes ds_1 \ldots ds_n)$ on a qu'il existe un ensemble $\Omega' \subset \Omega$ tel que $\nu'(\Omega - \Omega') = 0$ et tel que pour tout $(x, u_1, \ldots, u_n) \in \Omega'$ il existe un ensemble $T_{x,u_1 \ldots u_n} \in \mathbf{R}^n$ de complémentaire négligeable (pour la mesure de Lebesgue) tel que (3) soit vrai pour tout $(x, u) \in \Omega'$ et pour tout $(s_1, \ldots, s_n) \in T_{x,u_1,\ldots,u_n}$.

Le théorème de Fubini appliqué à Ω' montre l'existence d'un ensemble $M' \subset M$ tel que $m(M - M') = 0$ et tel que pour tout $x \in M'$, on ait

$$\nu((\{ x \} \times K) \cap \Omega') = 1.$$

Soit $(x, u_1, \ldots, u_n) \in \Omega'$ où $x \in M'$, alors

$$g(x, u_1 + s_1 ; u_2 + s_2, \ldots, u_n + s_n) = g(x, u_1 \ldots u_n)$$

si

$$0 \leq u_i + s_i < 1, \ 1 \leq i \leq n \qquad \text{et} \qquad (s_1, \ldots, s_n) \in T_{x,u_1 \ldots u_n}.$$

Donc pour tout $x \in M'$, $g(x, u_1 \ldots u_n)$ est constante pour presque tout $(u_1 \ldots u_n) \in K$. g est donc égale presque sûrement égale à une fonction g' qui ne dépend que de la variable x. L'égalité (3) appliquée à g' entraîne que la mesure $dm' = g'dm$ est invariante par l'action de $\mathbf{Z}^n$.

THÉORÈME 5. — Soit G un groupe localement compact séparable admettant R ou Z comme facteur direct. Soit χ un caractère réel sur G trivial sur ce facteur. Alors il existe un système dynamique $(M, \mathscr{B}, m ; G)$ tel que

$$gm = \chi(g)m, \qquad \forall g \in G,$$

qui n'admet pas de mesure invariante équivalente à m.

Démonstration. — Soit $G = H \times R$ (resp. $H \times Z$). Comme G est *séparable* $\chi(G)$ est soit $\mathbf{R}_*^+$ tout entier, soit un sous-groupe *dénombrable* de $\mathbf{R}_*^+$.

Alors on peut appliquer les résultats du théorème 3 et du lemme 2 (éventuellement en construisant le flot spécial sur certaines directions seulement).

Remarque. — Dans tous les exemples construits jusqu'à présent, le caractère associé à la mesure relativement invariante était non injectif. En fait on a le

LEMME 3. — Il existe un système dynamique $(M, \mathscr{B}, m ; Z^3)$ avec m relativement invariante : $gm \in \chi(g)m$, $\forall g \in G$ n'admettant aucune mesure équivalente invariante avec un caractère χ injectif.

Démonstration. — Prenons un exemple du théorème 0 dans le cas de Z^2 en changeant éventuellement les générateurs on peut supposer que

$$\chi(1, 0) = \gamma \neq 1 \qquad \text{et} \qquad \chi(0, 1) = \gamma' \neq 1.$$

En utilisant la construction du lemme 2 appliquée au second facteur, on obtient une action de $Z \times R$ sur $(\Omega, \mathcal{A}, \nu)$ avec une mesure ν relativement invariante, et sans mesure équivalente invariante et avec un caractère χ vérifiant

$$\chi(1, 0) = \gamma$$
$$\chi(0, t) = \gamma''$$

On prend t_1 et t_2 rationnellement indépendants dans R tels que les trois nombres γ, $\chi(0, t_1)$ et $\chi(0, t_2)$ soient rationnellement indépendants (pour la multiplication) dans R_*^+.

Le groupe engendré par $(1, 0)$, $(1, t_1)$ et $(1, t_2)$ est dense dans $Z \times R$ et est isomorphe à Z^3 et la restriction de χ à ce groupe est injectif. Le système ainsi obtenu possède les propriétés requises.

BIBLIOGRAPHIE

[1] L. K. ARNOLD, On σ-finite invariant measures. *Z. Wahrscheinlichkeitstheorie und Verw. Gebiete*, t. **9**, 1968, p. 85-97.

[2] A. BRUNEL, Sur les mesures invariantes. *Z. Wahrscheinlichkeitstheorie Verw. Gebiete*, t. **5**, 1966, p. 330-333.

[3] DANG-NGOC-NGHIEM, Décomposition et classification des systèmes dynamiques. *Bull. Soc. Math. France.*

[4] DANG-NGOC-NGHIEM, On the classification of dynamical Systems. *Annales Inst. H. Poincaré*, t. **9**, 1973, p. 409-437.

[5] J. DIXMIER, Sur la représentation régulière d'un groupe localement compact connexe. *Ann. Scient. Ec. Norm. Sup.*, 4e série, t. **2**, 1969, p. 423-436.

[6] A. HAJIAN et S. KAKUTANI, An example of an ergodic measure preserving transformation defined on a infinite measure space. Contribution to ergodic theory and probability. Springer *Lecture Notes in Math.*, t. **160**, 1970, p. 45-52.

[7] A. HAJIAN, Y. ITO et S. KAKUTANI, Invariant measures and Orbits of Dissipative Transformations. *Advances in Math.*, t. **9**, 1972, p. 52-65.

[8] W. KRIEGER, On non-singular transformations of a measure space I. *S. Wahrscheinlichkeitstheorie und Verw. Gebiete*, t. **11**, 1968, p. 83-97.

[9] D. S. ORSNTEIN, On invariant measures. *Bull. Amer. Math. Soc.*, t. **66**, 1960, p. 297-300.

[10] L. PUKANSZKY, Action of algebraic groups of automorphisms on the dual of a class of type I groups. *Ann. Sci. École Normale Supérieure*, t. **5**, 1972, p. 379-396.

(Manuscrit reçu le 21 mars 1974)