ANNALES DE L'I. H. P., SECTION B

H. HEINICH

Intégration dans certains espaces de Riesz à distance concave

Annales de l'I. H. P., section B, tome 10, n° 2 (1974), p. 185-200

<http://www.numdam.org/item?id=AIHPB_1974__10_2_185_0>

© Gauthier-Villars, 1974, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Annales de l'I. H. P., section B » (http://www.elsevier.com/locate/anihpb) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (http://www.numdam.org/conditions). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
http://www.numdam.org/

Ann. Inst. Henri Poincaré, Section B :
Vol. X, n° 2, 1974, p. 185-200. *Calcul des Probabilités et Statistique.*

Intégration dans certains espaces de Riesz à distance concave

par

H. HEINICH

Université, Paris-6e, Laboratoire de Calcul des Probabilités,
Tour 56, 9, quai Saint-Bernard, 75230 Paris, Cedex 05

0. INTRODUCTION

Pour une suite $\{\phi_n\}_{n\in\mathbf{N}}$ d'applications mesurables, positives, étagées d'un espace de probabilité $(\Omega, \mathscr{A}, \mathrm{P})$ dans E, espace de Riesz, on peut définir, pour chaque n, $\int \phi_n d\mathrm{P}$ comme élément de E ; mais il est faux, en général, que $\int \phi_n d\mathrm{P}$ converge vers 0, dans E, même si la suite $\{\phi_n\}$ converge uniformément. Néanmoins, voir exemples à la fin, il se peut que cette propriété ait lieu si les ϕ_n sont uniformément majorées par un $e \in \mathrm{E}$: d'où l'idée d'introduire une « tronquature » dans E. Par ailleurs même si E est non localement convexe, la trace de sa topologie sur certains ensembles latticiellement bornés peut être équivalente à celle d'un espace localement convexe : d'où la possibilité d'extension de théorèmes usuels.

I. ESPACE DES FONCTIONS INTÉGRABLES

Soit E un espace de Riesz, nous écrirons $e \vee e' = \sup(e, e')$; $e \wedge e' = \inf(e, e')$; $e^+ = e \vee 0$; $e^- = e^+ - e$ et $|e| = e^+ + e^-$. Pour $e_0 \in \mathrm{E}^+$ on posera $e \underset{\wedge}{|} e_0 = (e^+ \wedge e_0) - (e^- \wedge e_0)$ — tronquature de e à e_0 —.

Nous supposerons que E est complet pour la topologie induite par une distance concave, compatible avec sa structure d'espace de Riesz : si

$$(e_i)_{i=1,\ldots,n} \subset E^+ \text{ et } (\alpha_i)_{i=1,\ldots,n} \subset R^+ \text{ avec } \sum_{i=1}^{n} \alpha_i = 1 \text{ alors}$$

$$\sum_{i=1}^{n} \alpha_i d(e_i, 0) \leq d\left(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i e_i, 0\right)$$

de plus $d(e, 0) = d(|e|, 0)$ et on notera parfois $d(e)$ pour $d(e, 0)$.

Nous supposons qu'il existe une suite $\{e_n^*\}$ *croissante d'éléments de* E^+ *telle que, pour tout* $e \in E$, $e \wedge e_n^* \to e$.

$(\Omega, \mathscr{A}, P)$ étant un espace de probabilité complet on désignera par : $\mathscr{E}(E)$ l'espace vectoriel des fonctions étagées $\mathscr{A}$-mesurables de Ω dans E ; $\mathscr{V}(E)$ l'espace vectoriel des variables aléatoires (v. a.) à valeurs dans E. C'est-à-dire les limites P-p. p. de suites de fonctions étagées (on peut aussi considérer des limites P-presque uniforme — Egoroff —).

Remarquons : si $\phi = \Sigma e_i |_{A_i} \in \mathscr{E}(E)$ alors

$$\phi \wedge e_n^* = \sum_i e_i \wedge e_n^* |_{A_i} \in \mathscr{E}(E)$$

et de même si $f \in \mathscr{V}(E)$ alors $f \wedge e_n^* \in \mathscr{V}(E)$.

Pour $\phi = \sum_1^p e_i |_{A_i} \in \mathscr{E}(E)$ posons :

$$\int_A \phi dP = \sum_1^p e_i P(A_i A)$$

$$N(\phi) = d\left(\int |\phi| dP, 0\right) \quad \text{et} \quad N_n(\phi) = N(\phi \wedge e_n^*).$$

Les relations $|e + e'| \leq |e| + |e'|$ et, si e et e' positifs, $d(e) \leq d(e + e')$; $(e + e') \wedge e_n^* \leq e \wedge e_n^* + e' \wedge e_n^+$ montrent que N et N_n sont sous-additives.

PROPOSITION 1. — *Si la suite* $\{\phi_n\}_{n \in N} \subset \mathscr{E}(E)$ *est telle que*

$$\sum_n N(\phi_n) < +\infty \quad \textit{alors} \quad \sum_n d(\phi_n) < +\infty \quad \text{P-p. p.}$$

En effet cela résulte de l'inégalité $\int d(\phi)dP \leq N(\phi)$ application directe de la concavité de $d(.,0)$.

Nous supposerons que la condition suivante est réalisée :

$$(*)\quad \begin{cases} . \text{ si } \{\phi_p\}_{p\in N} \text{ est une suite d'éléments de } \mathscr{E}(E) \text{ telle que, pour un certain } n, \text{ on ait : } |\phi_p(\omega)| \leq e_n^* \text{ tout } p \text{ et tout } \omega \in \Omega, \\ . \text{ et } \phi_p \to 0 \text{ P-p. p. Alors } N(\phi_p) \to 0. \end{cases}$$

Remarques :

. A la place de $N_n(\phi)$ nous pouvons considérer $N_n^*(\phi) = N(|\phi| \wedge e_n^*)$ expression analogue pour la suite.

. La propriété (*) est équivalente à :

$$(**)\quad \begin{cases} N \text{ est continue de } \mathscr{E}_n \text{ dans } R \text{ quand sur l'espace} \\ \mathscr{E}_n = \{\phi : \phi \in \mathscr{E}(E) \quad \text{et} \quad |\phi(\omega)| \leq e_n^*\} \\ \text{on considère la topologie de la convergence uniforme.} \end{cases}$$

En effet, montrons que (**) $\Rightarrow$ (*) : soit $\{\phi_p\}_{p\in N} \subset \mathscr{E}_n$ telle que $\phi_p \to 0$ P-p. p. pour p tendant vers l'infini ; alors $\forall \varepsilon \exists A$ avec $P(A^c) \leq \varepsilon$ et sur A la convergence a lieu uniformément (Egoroff) donc $N(\phi_p|_A)$ tend vers 0.

Or $N(\phi_p|_{A^c}) \leq N(e_n^*|_{A^c}) = d(e_n^* P(A^c)) \leq \varepsilon' . d(e_n^*)$ ce qui montre la relation (*).

PROPOSITION 2. — *Si* $\{\phi_p\}_{p\in N}$ *est une suite* $\subset \mathscr{E}_n$ *telle que* $\phi_p \to f$ P-p. p. *quand p tend vers l'infini ; alors on peut définir*

$$\int_A f dP = \lim_p \int_A \phi_p dP \qquad \text{et} \qquad N(f) = \lim_p N(\phi_p)$$

Démonstration : $\phi_p - \phi_q \to 0$ P-p. p. et $|\phi_p - \phi_q| \leq 2e_n^*$ donc $\forall \varepsilon$, $\exists A$ avec $P(A^c) \leq \varepsilon$ et, sur A, $\{\phi_p - \phi_q\}$ converge uniformément vers 0, donc $N((\phi_p - \phi_q)|_A) \leq \varepsilon'$ si p et $q \geq P(\varepsilon', A)$ et $N((\phi_p - \phi_q)|_{A^c}) \leq N(2e_n^*|_{A^c}) \leq \varepsilon'$ si $\varepsilon \leq \varepsilon(\varepsilon')$.

La suite $N(\phi_p)$ est donc convergente. Il est aisé de voir que sa limite $N(f)$ est en fait indépendante de la suite $\{\phi_p\}$. Cette propriété s'étend de la manière suivante :

si $\phi_p \curlywedge e_n^* \to f \curlywedge e_n^*$ p. p. alors on peut définir

$$\int_A f \curlywedge e_n^* dP,$$

$N_n(f)$ et de plus $N_n(f - \phi_p) \to 0$ quand $p \to \infty$.

PROPOSITION 3. — *Si* $\sum_p N(\phi_p) < +\infty$ *alors*

$$N_n\left(\sum_p \phi_p\right) \leq \sum_p N_n(\phi_p) \leq \sum_p N(\phi_p)$$

L'existence de $\Sigma\phi_p$ est justifiée par la proposition 1 et l'inégalité résulte de la proposition 2.

DÉFINITIONS :

. Une suite $\{\phi_p\} \subset \mathscr{E}(E)$ sera dite associée à $f \in \mathscr{V}(E)$ si

$$\lim_p (\sup_n N_n(f - \phi_p)) = 0 .$$

. On désignera par L(E) l'espace des classes — modulo la relation d'égalité P-p. p. — de v. a. admettant une suite associée. Enonçons quelques propriétés.

. $\mathscr{E}(E) \subset L(E)$ il suffit de prendre $\{\phi_p \equiv \phi\}$.

. Si $\{\phi_p\}$ est associée à 0 alors $N(\phi_p) \to 0$. Cela résulte de $N_n(\phi) \to N(\phi)$ quand $n \to \infty$.

. Si $\{\phi_p\}$ est associée à f alors $N(\phi_p - \phi_q) \to 0$. En effet $N_n(\phi_p - \phi_q) \leq N_n(\phi_p - f) + N_n(f - \phi_q) \leq \varepsilon$ si $p, q \geq P_\varepsilon$ $\forall n$.

Nous pouvons alors définir $\int_A f dP = \lim_p \int_A \phi_p dP$, $N(f) = \lim_p N(\phi_p)$ si $\{\psi_p\}$ est une autre suite associée à f alors $\{\phi_p - \psi_p\}$ est associée à 0 : ce qui montre que $\int_A f dP$ et $N(f)$ sont bien définies. Par ailleurs la suite $\{\phi_p - \phi_q\}_p$ est associée à $f - \phi_q$ donc $\lim_p N(\phi_p - \phi_q) = N(f - \phi_q)$ et en récapitulant :

Pour toute fonction $f \in L(E)$ les expressions suivantes ont un sens $\int_A f dP$, $N(f) = d\left(\int |f| dP, 0\right)$ et il existe une suite $\{\phi_p\} \subset \mathscr{E}(E)$ — suite associée — telle que $N(f - \phi_p) \to 0$.

PROPOSITION 4. — *Si* $\{\phi_p\}$ *est associée à* f *il existe une sous-suite extraite* $\{\phi_{p_i}\}$ *telle que* $\phi_{p_i} \to f$ P-p. p.

Démonstration. — On peut extraire une sous-suite ϕ_{p_i} telle que

$$\sum_i N(\phi_{p_{i+1}} - \phi_{p_i}) < +\infty$$

et la suite ϕ_{p_i} converge p. p. vers une fonction g et lui est associée car

$$N_n(\phi_{p_i} - g) \leq \sum_{j \geq i} N(\phi_{p_{j+1}} - \phi_{p_j})$$

— proposition 3 — et ainsi $f = g$ p. p. — application de la proposition 1 —.

PROPOSITION 5. — *Si* $\sum_n N(f_n) < +\infty$ *alors* $\Sigma d(f_n) < +\infty$ P-p. p.

Démonstration. — Soient $\varepsilon = \sum_n \varepsilon_n$ et $\{ \phi_n^p \}_p$ associée à f_n ; on peut supposer $\phi_n^p \to f_n$ p. p. — proposition 4 — donc la convergence existe P-presque uniformément : $\exists A_n$ avec $P(A_n^c) \leq \varepsilon_n$ et $\sup_{\omega \in A_n} d(\phi_n^p(\omega), f_n(\omega)) \leq \varepsilon_n$ si $p \geq p_{\varepsilon_n}$. On peut supposer en outre p_{ε_n} suffisamment grand pour que $N(f_n - \phi_n^{p_{\varepsilon_n}}) \leq \varepsilon_n$. Soit $A = \bigcap_n A_n$, $P(A^c) \leq \varepsilon$ et comme $\sum_n N(\phi_n^{p_{\varepsilon_n}}) < +\infty$ (proposition 1) $\sum_n d(\phi_n^{p_{\varepsilon_n}}) < +\infty$ p. p., on a pour presque tout $\omega \in A$, $\sum_n d(f_n(\omega)) < +\infty$. On a montré que pour tout $\varepsilon > 0$ $\exists A$ avec $P(A^c) \leq \varepsilon$ et sur A, $\sum_n d(f_n) < +\infty$ c'est bien la proposition. Citons en application :

Si f_n tend vers f dans L(E) c'est-à-dire que $N(f - f_n)$ tend vers 0 alors il existe une sous-suite telle que $f_{n_i} \to f$ P-p. p.

PROPOSITION 6. — *Pour tout* $e \in E$ *l'application* $f \to f.e$ *est linéaire continue de* $L^1(R)$ *dans* L(E).

En effet si $f \in \mathscr{E}(R)$ alors $f.e \in \mathscr{E}(E)$ et $N(f.e) = d(e \| f \|_{L^1})$ et si $\{ f_n \}$ est une suite $\subset \mathscr{E}(R)$ convergent vers f. P-p. p. et dans L^1 la limite $f.e$ est une v. a. admettant $\{ f_n.e \}_n$ comme suite associée, la continuité est immédiate.

THÉORÈME 1. — *Si* $\mathscr{B}$ *est une algèbre engendrant* $\mathscr{A}$ *alors* $\mathscr{E}_{\mathscr{B}}(E)$ — *étagées* $\mathscr{B}$*-mesurables* — *est dense dans l'espace de Riesz métrisable complet* L(E).

Démonstration. — De $a^+ - b^+ = \frac{1}{2}(|a| - |b| + a - b)$ on déduit l'iné-

galité $|a^+ - b^+| \leq |a - b|$ qui montre que si $\{\phi_p\}$ est associée à f alors $\{\phi_p^+\}$ est associée à f^+ donc si $f \in L(E)$ alors f^+, f^- et $|f| \in L(E)$ qui est donc un espace de Riesz. Pour montrer que $\mathscr{E}_{\mathscr{B}}(E)$ est dense dans $\mathscr{E}(E)$ — qui est lui-même dense dans l'espace L(E) complet (propositions précédentes) — il suffit de remarquer qu'il existe une suite $\{f_n\}$ de fonctions $\mathscr{B}$-mesurables telles que $f_n \to 1_A$ dans L^1 et P-p. p. donc $f_n.e \to e|_A$ dans L(E).

PROPOSITION 7. — *La suite* $\{f \wedge e_n^*\}_n$ *converge vers* f *dans* L(E) *pour toute fonction* $f \in L(E)$.

Démonstration. — Etablissons auparavant l'inégalité

$$|a \wedge e - b \wedge e| \leq 2|a - b|$$

en utilisant $x \wedge y = y - (y - x)^+$ on obtient

$$\begin{aligned} |a \wedge e - b \wedge e| &= |(e - a^-)^+ - (e - a^+)^+ + (e - b^+)^+ - (e - b^-)^+| \\ &\leq |(e - a)^+ - (e - b^-)^+| + |(e - b^+)^+ - (e - a^+)^+| \end{aligned}$$

avec l'inégalité $|x^+ - y^+| \leq |x - y|$ il vient

$$|a \wedge e - b \wedge e| \leq |b^- - a^-| + |b^+ - a^+| \leq 2|a - b|.$$

On remarque ensuite que l'ensemble $\bigcup_n \mathscr{E}_n$ est dense dans $\mathscr{E}(E)$ donc dans L(E). Ainsi pour toute fonction $f \in L(E)$ et tout $\varepsilon > 0$ il existe n_0 et $\phi \in \mathscr{E}(E)$ avec $|\phi| \leq e_{n_0}^*$ et $N(f - \phi) \leq \varepsilon$. Avec l'inégalité précédente on voit que : $|f \wedge e_n^* - \phi \wedge e_n^*| \leq 2|f - \phi|$ donc

$$N(f - f \wedge e_n^*) \leq 3N(3|f - \phi|) + N(\phi - \phi \wedge e_n^*) \leq \varepsilon',$$

le dernier terme étant nul pour $n \geq n_0$.

THÉORÈME 2. — *Convergence dominée :*

Si la suite $\{f_n\} \subset L(E)$ *est telle que* $f_n \to 0$ P-p. p. *et qu'il existe* $f \in L(E)$ *avec* $|f_n| \leq f$; *alors* $N(f_n) \to 0$.

Démonstration :

. Nous allons montrer d'abord que si $f \in L(E)$ et $|f| \leq e$ il existe $\{\Phi_n\}_n \subset \mathscr{E}(E)$ avec $|\Phi_n| \leq e$ et $\Phi_n \to f$ dans L(E).

En effet soit $\{\phi_n\}_n$ associée à f, posons $\Phi_n = \phi_n \wedge e$. Alors

$$|\Phi_n - \Phi_n| = |\phi_n \wedge e - \phi_m \wedge e| \leq 2|\phi_n - \phi_n|$$

montre que la suite $\{ \Phi_n \}$ est de Cauchy dans L(E) et comme elle converge p. p. vers f sa limite dans L(E) est bien f.

. Montrons maintenant que si $\{ f_n \}_n \subset L(E)$ est telle que $f_n \to 0$ p. p. et $| f_n | \leq e^*_{n_0}$ — tout n — alors $N(f_n) \to 0$. Soit $\{ \phi^p_n \}_p$ une suite associée à f_n telle que $| \phi^p_n | \leq e^*_{n_0}$ et convergent p. p. vers f_n. La convergence p. p. étant équivalente à la convergence P-presque uniforme on peut écrire : $\forall \varepsilon$ il existe A_0 avec $P(A_0^c) \leq \frac{\varepsilon}{2}$ et sur A_0 la suite $\{ f_n \}$ converge uniformément vers 0 : $\sup_{A_0} d(f_n) \to 0$.

Il existe aussi une suite $\{ A_n \}$ avec $P(A_n^c) \leq \frac{\varepsilon}{2^{n+1}}$ et sur A_n, $\{ \phi^p_n \}_p$ converge uniformément vers f_n. On détermine ainsi une suite $p_{(n)}$ telle que :

$$N(f_n - \phi^{p_{(n)}}_n) \leq \varepsilon \qquad \text{et} \qquad \sup_{A_n} d(f_n - \phi^{p_{(n)}}_n) \leq \frac{\varepsilon}{2^n}.$$

Soit $A = A_0 \cap \left(\bigcap_n A_n \right)$ Alors $P(A^c) \leq \varepsilon$ et $\phi^{p_{(n)}}_n$ converge uniformément vers 0 sur A ; donc la suite $\{ \phi^{p_{(n)}}_n \}$ converge P-p. p. vers 0 et comme $| \phi^{p_{(n)}}_n | \leq e^*_{n_0}$ on a $N(\phi^{p_{(n)}}_n) \to 0$ ce qui montre que $N(f_n) \to 0$.

Achevons la démonstration :

si $0 \leq a \leq b$ alors $| a - a \wedge e | = (a - e)^+ \leq | b - b \wedge e |$

d'où

$$\begin{aligned} N(f_n) &\leq N(| f_n | - | f_n | \curlywedge e) + N(| f_n | \curlywedge e) \\ &\leq N(f - f \curlywedge e) + N(| f_n | \wedge e) \end{aligned}$$

or d'après la proposition 7 on peut choisir $e = e^*_{n_0}$ tel que

$$N(f - f \curlywedge e^*_{n_0}) \leq \varepsilon \qquad \text{et} \qquad N(f_n) \leq \varepsilon + N(| f_n | \wedge e^*_{n_0})$$

donc $\lim_n \sup N(f_n) \leq \varepsilon$.

DÉFINITION. — Une suite $\{ f_p \}_p \subset L(E)$ est dite équi-intégrable si :

$$\lim_n \left[\sup_p N(f_p |_{(|f_p| \leq e^*_n)^c}) \right] = 0. \tag{1}$$

PROPOSITION 8. — *Les relations suivantes sont équivalentes*

. *La suite* $\{ f_p \}$ *vérifie* (1) — *est équi-intégrable* —.

. *La suite* $\{ f_p \}$ *vérifie* (2) : $\lim_n \left[\sup_p N(f_p - f_p \curlywedge e^*_n) \right] = 0$.

. *La suite* $\{ f_p \}$ *vérifie* (3) : $\lim_{n,n} \left[\sup_p N(f_p \curlywedge e^*_n - f_p \curlywedge e^*_m) \right] = 0$.

Démonstration. — L'inégalité

$$N(f_p \wedge e_n^* - f_p \wedge e_m^*) \leq N(f_p - f_p \wedge e_n^*) + N(f_p - f_p \wedge e_m^*)$$

montre que (2) $\Rightarrow$ (3).

Etablissons la réciproque : la proposition 7 permet de trouver une suite $\{ n_p \}$ de termes aussi grands que l'on veut telle que, pour tout p, $N(f_p - f_p \wedge e_{n_p}^*) \leq \varepsilon$.

On utilise alors l'inégalité :

$$N(f_p - f_p \wedge e_n^*) \leq N(f_p - f_p \wedge e_{n_p}^*) + N(f_p \wedge e_{n_p}^* - f_p \wedge e_n^*)$$

pour montrer que (3) $\Rightarrow$ (2).

Montrons que (1) $\Rightarrow$ (2).

La relation $f \wedge e = f|_{(|f| \leq e)} + f \wedge e|_{(|f| \leq e)^c}$ implique

$$\begin{aligned} |f_p - f_p \wedge e_n^*| &\leq |f_p - f_p|_{(|f_p| \leq e_n^*)}| + 2|f_p|\,|_{(|f_p| \leq e_n^*)^c} \\ &\leq 3|f_p|\,|_{(|f_p| \leq e_n^*)^c} \end{aligned}$$

et

$$N(f_p - f_p \wedge e_n^*) \leq N(3 f_p|_{(|f_p| \leq e_n^*)^c}).$$

Montrons enfin que (2) $\Rightarrow$ (1).

Pour toute fonction $f \in L(E)$ le théorème 2 implique que la suite $\{ f|_{(|f| \leq e_n^*)} \}_n$ converge vers f dans L(E) et on détermine ainsi une suite $\{ n_p \}$ telle que — ε fixé > 0 —

$$\sup_p N(f_p - f_p|_{(|f_p| \leq e_{n_p}^*)}) \leq \varepsilon$$

comme

$$N(f_p|_{(|f_p| \leq e_n^*)^c}) \leq N(f_p - f_p|_{(|f_p| \leq e_{n_p}^*)}) + N(f_p|_{(|f_p| \leq e_{n_p}^*)} - f_p|_{(|f_p| \leq e_n^*)})$$

on obtient bien (1) si la relation (2) est satisfaite et la suite $\{ n_p \}$ formée de termes suffisamment grands.

Remarque. — Il est aisé de vérifier, comme dans le cas réel, la propriété suivante :

si $\{ f_p \}$ est une suite équi-intégrable alors

$$\sup_p N(f_p) < +\infty \qquad \text{et} \qquad \lim_{P(A) \to 0} [\sup_p N(f_p|_A)] = 0.$$

PROPOSITION 9. — *Pour toute fonction* $f \in L(E)$, *l'application* $A \to \int_A f dP$ *est une mesure à valeurs dans* E.

En effet cette propriété étant évidente pour $\phi \in \mathscr{E}(E)$ il suffit d'approcher f par une suite associée $\{ \phi_n \}_n \subset \mathscr{E}(E)$.

II. MARTINGALES A VALEURS DANS E

A. Espérance conditionnelle

Soit $\mathscr{B}$ une sous-tribu de $\mathscr{A}$. Posons $E^{\mathscr{B}}(e\,|_A) = e.E^{\mathscr{B}}(1_A)$, ce qui permet de définir $E^{\mathscr{B}}(\phi)$ par linéarité pour $\phi \in \mathscr{E}(E)$; $E^{\mathscr{B}}(\phi) \in L(E)$ d'après la proposition 6 et on a :

$$\int_B E^{\mathscr{B}}(\phi)dP = \int_B \phi dP \qquad \text{si} \qquad B \in \mathscr{B}$$

$$N(E^{\mathscr{B}}(\phi)) \leq N(\phi).$$

Ce qui montre que si $\{\phi_n\}$ est une suite de Cauchy dans L(E) il en est de même pour $\{E^{\mathscr{B}}(\phi_n)\}$.

Par prolongement $E^{\mathscr{B}}$ devient un opérateur linéaire, continu, positif de L(E) dans L(E) — de $L_{\mathscr{A}}(E)$ sur $L_{\mathscr{B}}(E)$ — vérifiant $N(E^{\mathscr{B}}(f)) \leq N(f)$ avec égalité si $f \geqslant 0$ et $E^{\mathscr{B}}(d(f)) \leq d(E^{\mathscr{B}}\,|\,f\,|)$ p. p. cette dernière inégalité résulte de la concavité de $d(.)$.

THÉORÈME 3. — *Martingales simples.*

Soit $\{\mathscr{B}_n\}$ *une suite croissante de sous-tribus telle que*

$$\mathscr{A} = \sigma\left(\mathscr{B} = \bigcup_n \mathscr{B}_n\right).$$

Alors quelle que soit $f \in L(E)$ *la suite* $\{E^{\mathscr{B}_n}(f)\}_n$ *tend vers* f *dans* L(E) *et* P-p. p.

Démonstration :

a) Montrons la convergence dans L(E).

On utilise le fait que $\mathscr{E}_{\mathscr{B}}(E)$ est dense dans L(E) — théorème 1 — et l'inégalité :

$$N(E^{\mathscr{B}_n}(f) - f) \leq N(E^{\mathscr{B}_n}(f - \phi)) + N(f - \phi) + N(E^{\mathscr{B}_n}(\phi) - \phi)$$

or si $\phi \in \mathscr{E}_{\mathscr{B}}(E)$ $E^{\mathscr{B}_n}(\phi) = \phi$ pour n grand et on peut choisir ϕ de manière que $N(\phi - f)$ soit aussi petit que l'on veut.

b) Montrons la convergence P-p. p.

Il existe une suite $\{\phi_p\}_p$ de fonctions telle que :

$$\phi_p \to f \quad \text{P-p. p.} \qquad \text{et} \qquad \phi_p \quad \mathscr{B}_p\text{-mesurable pour tout } p.$$

Posons $X_p = d(|f - \phi_p|)$ et $X_p^n = d(E^{\mathscr{B}_n}(|f - \phi_p|))$. On a : $X_p^n \geqslant E^{\mathscr{B}_n}(X_p)$

— concavité de la distance d — et donc $E^{\mathscr{B}_n}(X_p^{n+1}) \leq X_p^n$, ce qui s'exprime en disant que $\{ X_p^n \}_n$ est une surmartingale positive donc converge P-p. p. vers X_p^∞. Or d'après *a*)

$$E^{\mathscr{B}_n}(|f - \phi_p|) \to |f - \phi_p| \qquad \text{dans L(E) pour} \qquad n \to \infty$$

il existe alors, proposition 5, une sous-suite extraite telle que :

$$E^{\mathscr{B}_{n_i}}(|f - \phi_p|) \to |f - \phi_p| \qquad \text{P-p. p. ;}$$

ainsi $X_p^{n_i} \to X_p$ P-p. p. et par conséquent $X_p^\infty = X_p$ P-p. p.

De la relation $d(E^{\mathscr{B}_n}(f) - \phi_p) \leq X_p^n$ si $n \geq p$ qui suit de $|E^{\mathscr{B}}(.)| \leq E^{\mathscr{B}}(|.|)$ on déduit :

$$d(E^{\mathscr{B}_n}(f), f) \leq X_p^n + d(\phi_p, f) \qquad \text{si} \qquad n \geq p$$

et

$$\limsup_n d(E^{\mathscr{B}_n}(f), f) \leq 2d(\phi_p, f)$$

comme $d(\phi_p, f) \to 0$ P-p. p. on obtient le résultat.

COROLLAIRE. — *Pour* $f \in L(E)$ *on a l'équivalence*

$$\int_A f dP \geqslant 0 \qquad \textit{tout} \qquad A \in \mathscr{A} \Leftrightarrow f \geq 0 \quad \text{P-p. p.}$$

En effet cette propriété est vraie pour toute fonction de $\mathscr{E}(E)$ ou pour toute tribu finie. Si $f \in L(E)$ soit $\mathscr{A}_f$ la moins fine des tribus rendant f mesurable alors $\mathscr{A}_f = \sigma\left(\bigcup_n \mathscr{B}_n\right)$ où $\{ \mathscr{B}_n \}_n$ est une suite croissante de tribus finies, donc $E^{\mathscr{B}_n}(f) \geq 0$ pour tout n et il en est donc de même pour f.

En application directe du théorème 3 on obtient la loi forte des grands nombres :

THÉORÈME 4. — *Soit* $\{ X_n \}_n$ *une suite* $\subset L(E)$ *de* v. a. *indépendantes et équi-distribuées alors* $\frac{1}{N} \sum_{n=1}^{N} X_n \to \int X dP$ p. p. *et dans* L(E).

B. **Martingales.**

DÉFINITIONS. — Une suite $\{ X_p \}_p \subset \mathscr{V}(E)$ est dite adaptée à une suite croissante de tribus $\{ \mathscr{B}_p \}_p$ si pour tout p, X_p est $\mathscr{B}_p$-mesurable.

Une suite adaptée $\{ X_p \{ \subset L(E)$ est une martingale — respectivement sur ou sous-martingale — si pour tout p, $E^{\mathscr{B}_p}(X_{p+1}) = X_p$ P-p. p. — respectivement $\leq$ ou $\geq$ p. p. —.

PROPOSITION 10. — *Si* $\{ X_p \}$ *est une martingale équi-intégrable alors la suite de mesures* $\{ \mu_p \}_p$, *où* $\mu_p(A) = \int_A X_p dP$, *converge vers une mesure* μ *à valeurs dans* E *et de plus pour tout* $\varepsilon > 0$ *il existe* η *tel que :*

$$P(A) \leq \eta \Rightarrow \sup_p d(\mu_p(A)) \leq \varepsilon .$$

Il s'agit d'une application du théorème de Vitali-Hahn-Saks sur la convergence des mesures à valeurs dans un groupe topologique. En effet l'ensemble des A tel que $\mu_p(A)$ converge lorsque $p \to \infty$ contient évidemment $\bigcup_p \mathscr{B}_p$ et grâce à l'équi-intégrabilité — remarque suivant la proposition 8 — on est assuré de la convergence sur la tribu engendrée.

Pour établir la convergence d'une martingale la difficulté, comme dans le cas vectoriel, consiste à identifier une v. a. X telle que $E^{\mathscr{B}_p}(X) = X_p$ p. p. Nous sommes conduit à une hypothèse supplémentaire sur l'espace de Riesz E. Si on désigne par $B_n = \{ e : e \in E \text{ et } |e| \leq e_n^* \}$ et F le sous-espace vectoriel engendré par $\bigcup_n B_n$: hypothèse de « compacité faible ».

« *Nous supposerons qu'il existe une topologie normée sur* F, *compatible avec la structure d'ordre et telle que, pour chaque n, sa trace sur* B_n *soit équivalente à celle induite par la topologie de* E, *et qu'enfin,* B_n *soit faiblement compact* ».

Sous cette hypothèse on obtient le résultat principal :

THÉORÈME 5. — Pour qu'une martingale $\{ X_p \}$ converge P-p. p. et dans L(E) vers une v. a. X, il faut et il suffit qu'elle soit équi-intégrable et alors, $X_p = E^{\mathscr{B}_p}(X)$ P-p. p.

La démonstration de ce théorème repose sur trois lemmes.

LEMME 1. — Toute sur-martingale positive et équi-intégrable est convergente dans L(E).

Démonstration. — Soit $\{ X_p \}$ une telle sur-martingale. La suite $\{ Y_p = X_p \wedge e_n^* \}$ est une sur-martingale à valeurs dans F. Soit μ_p la mesure vectorielle associée à Y_p ; on a $|\mu_p(A)| \leq e_n^* P(A)$. La suite $\{ \mu_p(A) \}$ converge faiblement dans l'espace F : en effet si $u \in (F')^+$ — forme linéaire positive — $\{ \langle u, Y_p \rangle \}_p$ est une sur-martingale réelle équi-intégrable donc $\{ \mu_p(A) \}_p$ ne possède qu'un point adhérent soit $\mu(A)$. μ est une mesure à valeurs dans $B_n \subset \hat{F}$ — complété de F — en effet $\langle u, \mu \rangle$ est une mesure réelle et le théorème de Pettis assure l'équivalence entre mesure faible et

forte. En outre, on a encore la relation $|\mu(A)| \leqslant e_n^* P(A)$ donc μ se prolonge en une application linéaire continue faiblement compacte de $L_P^1(R)$ dans $\hat{F}$ et d'après le théorème de Dundford-Pettis-Phillips, il existe une fonction Y intégrable à valeurs dans $\hat{F}$ telle que $\mu(A) = \int_A Y dP$.

Montrons que $Y \subset B_n$ P-p. p. : cela résulte de l'égalité :

$$\left| \int_A Y dP \right| \leqslant \int_A e_n^* dP$$

qui entraîne $|Y| \leqslant e_n^*$ P-p. p. — démonstration analogue à celle du corollaire du théorème 3 —.

Montrons que $\mu_p(A)$ tend vers $\mu(A)$ fortement dans F ou dans E.

Pour tout $B \in \bigcup_p \mathscr{B}_p$ la suite $\{\mu_p(B)\}_p$ est monotone à partir d'un certain rang donc converge fortement vers $\mu(B)$ — propriété d'Orlicz — de plus comme : $|\mu_p(A \triangle B)| \leqslant e_n^* P(A \triangle B)$ on en déduit que $\mu_p(A)$ converge fortement vers $\mu(A)$ pour tout $A \in \mathscr{A} = \sigma\left(\bigcup_p \mathscr{B}_p\right)$.

Montrons que Y_p tend vers Y dans L(E). On établit que $E^{\mathscr{B}_p}(Y) \leqslant Y_p$ et que $N(Y_p - E^{\mathscr{B}_p}(Y))$ tend vers 0 car $\int Y_p - E^{\mathscr{B}_p}(Y)$ tend vers 0. L'inégalité :

$$N(Y - Y_p) \leqslant N(Y - E^{\mathscr{B}_p}(Y)) + N(Y_p - E^{\mathscr{B}_p}(Y))$$

montre que Y_p tend vers Y dans L(E).

On a établi le scholie :

Quel que soit e_n^* il existe $Y_{e_n^*} \in L(E)$ telle que la suite

$$\{X_p \wedge e_n^*\}_p \qquad \text{converge vers } Y_{e_n^*} \text{ dans } L(E).$$

Il est clair que $Y_{e_{n+1}^*} \wedge e_n^* = Y_{e_n^*}$ P-p. p.

Montrons que la suite $\{Y_{e_n^*}\}$ converge dans L(E).

Considérons l'inégalité :

$$N(Y_{e_n^*} - Y_{e_m^*}) \leqslant N(Y_{e_n^*} - X_p \wedge e_n^*) + N(X_p \wedge e_n^* - X_p \wedge e_m^*) + N(X_p \wedge e_m^* - Y_{e_m^*})$$

— le premier terme du second membre est $\leqslant \varepsilon$ si $p \geqslant P(\varepsilon, n)$ — scholie —,

— le second terme est $\leqslant \varepsilon$ si $n, m \geqslant N(\varepsilon)$ pour tout p — condition (3) de l'équi-intégrabilité —,

— le troisième terme est $\leqslant \varepsilon$ si $p \geqslant P(\varepsilon, m)$ — scholie —.

Donc $\{ Y_{e_n^*} \}$ est bien une suite de Cauchy dans L(E). Soit X sa limite, l'inégalité :

$$N(X - X_p) \leqslant N(X - Y_{e_n^*}) + N(Y_{e_n^*} - X_p \wedge e_n^*) + N(X_p \wedge e_n^* - X_p)$$

montre que X_p tend vers X dans L(E).

LEMME 2. — Soit $\{ f_p \}$ une suite monotone croissante de fonctions positives intégrables telle qu'il existe $g \in L(E)$ avec $f_p \leqslant g$. Alors il existe $f \in L(E)$: f_p tend vers f dans L(E) et P-p. p.

Démonstration. — Il est clair que pour tout n la suite $\{ f_p \wedge e_n^* \}_p$ est P-p. p. convergente vers une fonction f_n et que cette convergence à lieu aussi dans L(E) : pour tout $n \{ f_p \wedge e_n^* \}_p$ est de Cauchy. Par ailleurs la condition $f_p \leqslant g$ montre que $\{ f_p \}$ est équi-intégrable ; enfin l'inégalité :

$$N(f_p - f_k) \leqslant N(f_p - f_p \wedge e_n^*) + N(f_p \wedge e_n^* - f_k \wedge e_n^*) + N(f_k \wedge e_n^* - f_k)$$

montre que la suite $\{ f_p \}$ est de Cauchy. Il est clair en outre que la convergence est aussi P-p. p.

LEMME 3. — Toute sous-martingale positive équi-intégrable est convergente dans L(E).

Soit $\{ X_m \}$ une telle sous-martingale. Posons

$$Z_{m,k}^n = E^n(X_m) \wedge e_k^*$$

où $E^n = E^{\mathscr{B}_n}$. Nous avons $Z_{m,k}^n \leqslant e_k^*$ et $Z_{m+1,k}^n \geqslant Z_{m,k}^n$ si $m \geqslant n$ donc — compacité faible — $Z_{m,k}^n$ converge, pour $m \infty$, vers une v. a. $Z^n{}_{,k}$ dans L(E) et P-p. p. La suite $\{ Z^n{}_{,k} \}_k$ est croissante et dans l'égalité :

$$\int Z^n{}_{,k} - Z^n{}_{,j} dP = \lim_m \int [E^n(X_m) \wedge e_k^* - E^n(X_m) \wedge e_j^*] dP$$

on reconnaît au second membre la formulation (3) de l'équi-intégrabilité — proposition 8 — d'où $\{ Z^n{}_{,k} \}_k$ est une suite de Cauchy et converge, pour $k \infty$, vers une v. a. Z^n, on a de plus une convergence P-p. p. Par ailleurs $Z_{m,k}^n \leqslant Z^n$ pour tout k et $m \geqslant n$ et $Z_{m,k}^n$ croît, pour $k \infty$, vers $Z_m^n = E^n(X_m)$. La suite de fonctions $\{ Z_m^n \}_m$ vérifie les conditions du lemme 2 donc converge P-p. p. et dans L(E) ; il est alors aisée de voir que la limite n'est autre que Z^n : on a

$$\lim_m [\lim_k (Z_{m,k}^n)] = \lim_k [\lim_m (Z_{m,k}^n)]$$

En utilisant alors le théorème de convergence dominée on obtient pour $A \in \mathscr{B}_{n-1}$:

$$\int_A Z^n dP = \int_A Z^{n-1} dP$$

Z^n est une martingale positive vérifiant $Z^n \geqslant X_n$. Si $Y_n = Z^n - X_n$ alors $\{ Y_n \}$ et $\{ Z^n \}$ vérifient les conditions du lemme 1 et par conséquent convergent dans L(E). Il en est de même pour $\{ X_n \}$.

Achevons la démonstration du théorème :

Soit $\{ X_n \}$ une martingale équi-intégrable, alors $\{ X_n^+ \}$ et $\{ X_n^- \}$ sont deux sous-martingales positives équi-intégrables donc — lemme 3 — X_n converge dans L(E) vers une v. a. X. Il est clair que $E^{\mathscr{B}_n}(X) = X_n$ P-p. p. Le théorème 3 assure la convergence P-p. p.

Réciproquement montrons que si la martingale $\{ X_p \}$ converge P-p. p. et dans L(E), vers X, elle est équi-intégrable.

Pour cela remarquons tout d'abord que, vu l'hypothèse,

$$A \in \mathscr{B}_p \Rightarrow \int_A X dP = \lim_n \int_A X_n dP = \int_A X_p dP$$

donc que $X_p = E^{\mathscr{B}_p}(X)$. Si maintenant une fonction $\phi \in \mathscr{E}(E)$ est telle que $|\phi| \leq e_n^*$ alors la martingale $\{ E^{\mathscr{B}_p}(\phi) \}_p$ est évidemment équi-intégrable.

On a vu dans la démonstration de la proposition 7, que pour tout $X \in L(E)$ et tout $\varepsilon > 0$, $\exists \phi \in \mathscr{E}(E)$ telle que $|\phi| \leq e_{n_0}^*$ et $N(X - \phi) \leq \varepsilon$, et $|X_p \wedge e_n^* - \phi \wedge e_n^*| \leq 2|X_p - \phi|$, on a

$$N(X_p \wedge e_m^* - X_p \wedge e_n^*) \leq 2N(2|X_p - \phi|) + N(\phi \wedge e_n^* - \phi \wedge e_m^*)$$

c'est bien l'équi-intégrabilité sous sa condition équivalente (3).

Remarques :

1) Si E vérifie l'hypothèse de « compacité faible » alors la condition d'intégrabilité (**) est satisfaite. En effet si une suite $\{ \phi_p \}$ de fonctions étagées à valeurs dans $B_n \subset \hat{F}$ — $\hat{F}$ Banach — converge uniformément vers 0 alors $\| \phi_p \|_{L_p^1(\hat{F})} \to 0$.

La relation $\| \phi_p(\omega) \|_F \leq \| e_n^* \|_F$ permet d'affirmer que

$$\int \| \phi_p(\omega) \| dP(\omega) \to 0$$

— théorème de convergence dominée — donc $\int |\phi_p| dP$ tend vers 0 dans B_n donc dans E.

2) Nous pouvons définir aisément la notion de martingale $\{ X_t \}_{t \in T}$ où T est un ensemble filtrant à droite. En suivant la remarque de (2), p. 119, le théorème 5 reste vrai ; à l'exception de la convergence p. p.

3) Une mesure vectorielle positive, μ, à valeurs dans E est dite absolument continue par rapport à P si :

$$\mu = \bigvee_n (\mu \wedge e_n^* P) \quad \text{cette relation implique} \quad P(A) = 0 \Rightarrow \mu(A) = 0.$$

Nous obtenons le résultat suivant (*).

COROLLAIRE. — *Théorème de Radon-Nikodym.*

Soit μ une mesure vectorielle positive à valeurs dans E, *absolument continue par rapport à* P. *Il existe une v. a. intégrable* $X : \Omega \to E$, *unique* p. p., *telle que :*

$$\mu(A) = \int_A X dP \qquad \textit{tout} \qquad A \in \mathscr{A}.$$

III. EXEMPLES

α — Soit $l^p(N)$ l'espace des suites $x = (x_k)_{k \in N}$ de puissance $p^{\text{ième}}$ sommable avec la distance $d(x, 0) = \sum_k |x_k|^p$ qui est concave si $p \in]0, 1]$.

Posons $e_n^* = \{ n . 1_{[0,n]}(k) \}_k$.

Montrons que $d(x, x \wedge e_n^*) \to 0$, $x \in l^p(N)$

$$d(x, x \wedge e_n^*) = \sum_k |x_k - x_k \wedge n|_{[0,n]}(k)|^p .$$

Soit k_n le plus grand k tel que la relation « $|x_m| \leq n . 1_{[0,n]}(m)$ » soit vraie pour tout $m \leq k$, alors $d(x, x \wedge e_n^*) = \sum_{k \geq k_n} |.|^p$.

La suite $\{ k_n \}$ est monotone croissante ; si il existait n_0 tel que $k_n = k_{n_0}$ $n \geqslant n_0$ — suite stationnaire — on aurait $k_{n_0} + 1 > k_n$ pour $n \geqslant n_0$ donc $|x_{k_{n_0}+1}| \geq n$ dès que $n \geq (k_{n_0} + 1) \vee n_0$ ce qui est impossible et $k_n \to +\infty$ donc $d(x, x \wedge e_n) \to 0$ quand $n \to \infty$.

L'espace vectoriel F engendré par les B_n est formé des suites dont tous les termes sont nuls à partir d'un certain rang, on peut donc considérer F comme un sous-espace vectoriel dense dans $l^1(N)$ — Banach —. Chaque B_n est alors faiblement compact.

(*) Mesures à valeurs dans un Banach complètement réticulé. H. Heinich, *Annales de l'Institut Henri Poincaré.*

L'injection de l^p dans l^1 étant continue il ne reste qu'à démontrer que si une suite $\{ x^n \}_n \subset B_{n_0}$ converge dans l^1 elle converge dans l^p ce qui est immédiat par le théorème de convergence dominée.

$(\Omega, \mathscr{A}, P)$ étant un espace de probabilité, posons $e_n^* = n$ — v. a. r. constante.

β — L'espace de Riesz $L_P^p(\Omega, \mathscr{A}, P)$ des classes de fonctions mesurables de puissance $p^{\text{ième}}$ intégrables, munies de la distance $d(f, 0) = \int |f|^p dP$ concave si $0 < p \leq 1$ vérifie aussi les conditions précédentes.

En effet $|f - f \wedge n|^p \leq (2|f|)^p$ et il suffit d'appliquer le théorème de convergence dominée pour voir que $d(f, f \wedge n) \to 0$.

L'espace F est l'espace des classes de fonctions mesurables bornées et peut être considéré comme un sous-espace de L_P^1, l'inégalité

$$\int |f|^p dP \leq \left(\int |f| dP \right)^p$$

valable si $p \in]0, 1]$ montre que l'injection de L^1 dans L^p est continue. Il est clair que sa restriction à B_n est bicontinue et qu'en outre B_n est faiblement compact dans L_P^1.

γ — L'espace de Riesz L_P^0 des classes d'équivalence de fonctions mesurables avec la distance concave

$$d(f) = E(|f| \wedge 1) = \int |f| \wedge 1 dP$$

vérifie aussi les conditions : il suffit de remarquer que sur tout ensemble uniformément borné par une fonction intégrable — en particulier les constantes — la topologie de la convergence en probabilité et celle de L_P^1 sont identiques.

BIBLIOGRAPHIE

[1] BOURBAKI, *Intégration*, livre 6, chapitre 2 : espaces de Riesz, Hermann, 1952.

[2] MEYER, *Probabilités et potentiel*, Publication de l'Institut de Mathématique de l'Université de Strasbourg, Hermann, 1966.

[3] J. NEVEU, *Martingales à temps discret*, Masson, 1972.

(Manuscrit reçu le 3 mai 1974).